Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», 2025, т. 14, № 6, с. 516–524

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

https://doi.org/10.26583/vestnik.2025.6.6 *Оригинальная статья* / *Original paper*

УДК 517.95

Обратная задача определения коэффициента поглощения в вырождающемся параболическом уравнении дивергентного вида с одной пространственной переменной

© **2025 г. В. Л. Камынин, О. В. Нагорнов**

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

Изучается нелинейная обратная задача определения неизвестного, зависящего от t, коэффициента поглощения в одномерном по пространственным переменным параболическом уравнении со слабо вырождающейся главной частью, которая задана в дивергентной форме. Дополнительное условие наблюдения задается в интегральной форме. Физически это означает, например, измерение температуры датчиком конечного размера, установленным во внутренней точке области. Решение понимается в обобщенном смысле, в частности, неизвестный коэффициент поглощения ищется в пространстве $L_2(0, T)$. Коэффициенты уравнения могут зависеть как от временной, так и от пространственной переменных. Вырождение уравнения также допускается как по временной, так и по пространственной переменным. Множество точек вырождения может быть и бесконечным, но должно иметь меру нуль. Доказаны теоремы существования и единственности решения. Существование решения доказано в малом по времени, теорема единственности носит глобальный характер. Для доказательства существования решения обратной задачи последняя сводится к изучению разрешимости некоторого операторного уравнения, и показывается, что при наложенных в работе условиях оператор является сжимающим.

Ключевые слова: коэффициентные обратные задачи, вырождающиеся параболические уравнения, интегральное наблюдение.

Введение

В прямоугольнике $Q \equiv [0, T] \times [0, l]$ рассматривается обратная задача определения пары функций $\{u(t, x), \gamma(t)\}$, удовлетворяющих уравнению

$$u_t - (a(t,x)u_x)_x + b(t,x)u_x + c(t,x)u + \gamma(t)u = f(t,x), \quad (t,x) \in Q, \tag{1}$$

начальному условию

$$u(0, x) = u_0(x), \; x \in [0, l], \tag{2}$$

граничным условиям

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad t \in [0,T] \tag{3}$$

и дополнительному условию

$$\int_0^l u(t,x)\omega(x)dx = \varphi(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

✉ В.Л. Камынин: vlkamynin2008@yandex.ru
О.В. Нагорнов: nagornov@yandex.ru

Поступила в редакцию: 26.09.2025
После доработки: 29.10.2025
Принята к публикации: 05.11.2025

EDN NKNKSM

В задаче (1) – (4) функции $a(t, x)$, $b(t, x)$, $c(t, x)$, $f(t, x)$, $u_0(x)$, $\omega(x)$, $\varphi(t)$ предполагаются известными. Уравнение (1) допускает вырождение главной части, а именно, предполагается, что

$$a(t,x) \geq \Lambda_0(x) \geq 0, \ \frac{1}{\Lambda_0(x)} \in L_q(0,l), \ q > 1. \tag{5}$$

Для случая равномерно параболических уравнений аналогичная обратная задача ранее исследовалась в работах [1] – [6] и др. Случай вырождающихся параболических уравнений с условием типа (5) рассматривался в [7] – [9] для уравнений с недивергентной главной частью. При этом рассматривались решения с $u(t,x) \in W_s^{1,2}(Q)$ $(s > 1)$, удовлетворяющие уравнению п.в. в Q.

В дальнейшем будем использовать обозначения:

$$Q_\tau = [0,\tau] \times [0,l], \ 0 < \tau \leq T, \ Q_T \equiv Q, \ B_R = \left\{ y(t) \in L_2(0,T) : \|y\|_{L_2(0,T)} \leq R \right\},$$
$$\|z\|_{L_2(0,l)} \equiv \|z\|_2, \ z(x) \in L_2(0,l).$$

Всюду в работе будем предполагать, что рассматриваемые в ней функции, как минимум, измеримы, все равенства и неравенства выполняются почти всюду, производные понимаются в обобщенном смысле по Соболеву. Используемые в работе пространства Лебега и Соболева с соответствующими нормами будем понимать в общепринятом смысле (см, например, [10]).

Относительно входных данных задачи (1) – (4) будем предполагать выполненными следующие условия:

существует функция $\Lambda(x)$ такая, что $0 \leq \Lambda_0(x) \leq a_0$, $x \in [0,l]$, $\dfrac{1}{\Lambda_0(x)} \in L_q(0,l)$,

$$\| 1/\Lambda_0 \|_{L_q(0,l)} \leq a_1, \ q > 1, \text{ и при этом } \Lambda_0(x) \leq a(t,x) \leq a_2 \Lambda_0(x), \ (t,x) \in Q; \tag{A}$$

$$\frac{b^2(t,x)}{\Lambda_0(x)} \in L_\infty(Q), \ \frac{b^2(t,x)}{\Lambda_0(x)} \leq K_{b,a}, \ (t,x) \in Q; \tag{B}$$

$$c(t,x) \in L_\infty(Q), \ |c(t,x)| \leq K_c, \ (t,x) \in Q; \tag{C}$$

$$f(t,x) \in L_2(Q), \ \| f \|_{L_2(Q)} \leq K_f; \tag{D}$$

$$u_0(x) \in L_2(0,l), \ \| u_0 \|_2 \leq M_0; \tag{E}$$

$$\omega(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,l), \ \| \omega \|_2 \leq K_\omega, \ \| \omega \ \|_2 \leq K_\omega^*; \tag{F}$$

$$\varphi(t) \in W_2^1(0,T), \ |\varphi(t)| \geq \varphi_0 > 0, \ \| \varphi' \|_{L_2(0,T)} \leq K_\varphi^*, \ \varphi(0) = \int_0^l u_0(x)\omega(x)dx. \tag{G}$$

В условиях (A) – (G) a_0, a_1, a_2, φ_0, K_ω, $K_\omega^* = \text{const} > 0$, $K_{b,a}$, K_c, K_f, M_0, $K_\varphi^* = \text{const} \geq 0$.

Определение 1. Обобщенным решением обратной задачи (1) – (4) будем называть пару функций $\{u(t, x), \gamma(t)\}$ таких, что $u(t,x) \in C(0,T; \ L_2(0,l)) \bigcap \overset{0}{W}{}_s^1(Q)$, $s > 1$, $\sqrt{\Lambda_0(x)}u_x \in L_2(Q)$, $\gamma(t) \in L_2(0, T)$, для любой пробной функции $\Phi(t,x)\in C(0,T;L_2(0,l))\bigcap \overset{0}{W}{}_s^1(Q)$, $\Phi_t\in L_2(Q)$, $\sqrt{\Lambda_0(x)}\Phi_x\in L_2(Q)$ и для любого $\tau\in(0,\ T]$ выполняется интегральное тождество

$$\int_0^l u(\tau,x)\Phi(\tau,x)dx-\int_0^l u_0(x)\Phi(0,x)dx-\int_{Q_\tau}u(t,x)\Phi_t(t,x)dxdt+$$
$$+\int_{Q_\tau}a(t,x)u_x(t,x)\Phi_x(t,x)dxdt+\int_{Q_\tau}\left[b(t,x)u_x(t,x)+c(t,x)u(t,x)+\gamma(t)u(t,x)\right]\Phi(t,x)dxdt= \tag{6}$$
$$=\int_{Q_\tau}f(t,x)\Phi(t,x)dxdt,$$

а также выполняется условие (4) для всех $t\in[0,\ T]$.

Замечание 1. Рассмотрим прямую задачу (1)–(3), считая, что коэффициент $\gamma(t)\in L_2(0,\ T)$ известен. Тогда в силу результатов [11] обобщенное решение $u(t,\ x)$ этой задачи (понимаемое в смысле определения 1) существует и единственно, причем

$$u(t,x)\in \overset{0}{W}{}_{q^*}^1(Q),\quad q^*=\frac{2q}{q+1}. \tag{7}$$

Однозначная разрешимость обратной задачи

Установим условия, при которых обратная задача (1)–(4) однозначно разрешима.

Введем обозначение $F(t)=\int_0^l f(t,x)\omega(x)dx.$ Тогда в силу условий (D) и (F) $F(t)\in L_2(0,\ T)$.

Выведем операторное уравнение для нахождения неизвестного коэффициента $\gamma(t)$. Для этого в интегральном тождестве (6) положим $\Phi(t,\ x)=\chi(t)\omega(x)$, где $\chi(t)\in \overset{0}{W}{}_2^1(0,T)$. Тогда имеем

$$-\int_0^T\left(\int_0^l u(t,x)\omega(x)dx\right)\chi_t dt+\int_0^T\left(\int_0^l a(t,x)u_x\omega_x(x)dx\right)\chi(t)dt+\int_0^T\left[\int_0^l (b(t,x)u_x+c(t,x)u)\omega(x)dx\right]\chi(t)dt+$$
$$+\int_0^T\gamma(t)\left(\int_0^l u(t,x)\omega(x)dx\right)\chi(t)dt=\int_0^T F(t)\chi(t)dt,$$

откуда с учетом условия (4) и в силу произвольности $\chi(t)\in \overset{0}{W}{}_2^1(0,T)$ имеем:

$$\varphi'(t)+\gamma(t)\varphi(t)+\int_0^l a(t,x)u_x\omega_x(x)dx+\int_0^l (b(t,x)u_x+c(t,x)u)\omega(x)dx=F(t). \tag{8}$$

Из уравнения (8) с учетом условия (G) получаем равенство

$$\gamma(t)=\frac{1}{\varphi(t)}\left[-\varphi'(t)+F(t)-\int_0^l a(t,x)u_x\omega_x(x)dx-\int_0^l\big(b(t,x)u_x+c(t,x)u\big)\omega(x)dx\right]. \tag{9}$$

Введем оператор $\mathcal{A}(\gamma): L_2(0,T) \to L_2(0,T)$ по формуле

$$\mathcal{A}(\gamma)(t) = \frac{1}{\varphi(t)}\left[-\varphi'(t) + F(t) - \int_0^l a(t,x)u_x\omega_x(x)dx - \int_0^l \big(b(t,x)u_x + c(t,x)u\big)\omega(x)dx\right]. \quad (10)$$

Тогда соотношение (9) перепишется в виде

$$\gamma = \mathcal{A}(\gamma). \quad (11)$$

Лемма 1. Пусть выполнены условия (A) – (G). Тогда операторное уравнение (11) эквивалентно обратной задаче (1) – (4) в следующем смысле. Если пара $\{u(t, x), \gamma(t)\}$ является решением обратной задачи, то функция $\gamma(t)$ – решение уравнения (11). Обратно, если $\hat{\gamma}(t) \in L_2(0,T)$ является решением уравнения (11), а $\hat{u}(t,x)$ – решение прямой задачи (1) – (3) с выбранной функцией $\hat{\gamma}(t)$ в правой части уравнения (1), то пара $\{\hat{u}(t,x), \hat{\gamma}(t)\}$ является обобщенным решением обратной задачи (1) – (4) с $s = q^*$, где q^* определена в (7).

Доказательство. Первое утверждение леммы доказано выше при выводе соотношения (11).

Докажем второе утверждение. Пусть $\hat{\gamma}(t) \in L_2(0,T)$ является решением уравнения (11), а $\hat{u}(t,x)$ – обобщенное решение прямой задачи (1) – (3) с данным коэффициентом $\hat{\gamma}(t)$ в уравнении (1). В силу замечания 1 такое решение $\hat{u}(t,x)$ существует и единственно, причем $\hat{u}(t,x) \in \overset{0}{W}{}^1_{q^*}(Q)$.

Положим $\hat{\varphi}(t) = \int_0^l \hat{u}(t,x)\omega(x)dx.$

Повторяя рассуждения, проведенные при выводе соотношения (8), приходим к равенству

$$\hat{\varphi}'(t) + \hat{\gamma}(t)\hat{\varphi}(t) + \int_0^l a(t,x)\hat{u}_x\omega_x(x)dx + \int_0^l \big(b(t,x)\hat{u}_x + c(t,x)\hat{u}\big)\omega(x)dx = F(t). \quad (12)$$

Из условий (A) – (D), (F), (G) получаем, что $\hat{\varphi}(t) \in W_2^1(0,T)$.

С другой стороны, поскольку $\hat{\gamma}(t)$ – решение уравнения (11), то из определения оператора $\mathcal{A}(\gamma)$ в (10) имеем

$$\varphi'(t) + \hat{\gamma}(t)\varphi(t) + \int_0^l a(t,x)\hat{u}_x\omega_x(x)dx + \int_0^l \big(b(t,x)\hat{u}_x + c(t,x)\hat{u}\big)\omega(x)dx = F(t). \quad (13)$$

Положим $\psi(t) = \varphi(t) - \hat{\varphi}(t) \in W_2^1(0,T)$. Вычитая (12) из (13) и учитывая условие согласования в (G), получаем, что $\psi(t)$ является на $[0, T]$ обобщенным решением задачи

$$\psi' + \hat{\gamma}(t)\psi = 0, \ \ \psi(0) = 0.$$

В силу известной леммы Гроноулла (см., например, [10, с. 112]) имеем отсюда, что $\psi(t) \equiv 0$ на $[0, T]$, т.е. $\hat{\varphi}(t) = \varphi(t)$ на $[0, T]$ а следовательно, пара $\{\hat{u}(t,x), \hat{\gamma}(t)\}$ есть обобщенное решение обратной задачи (1) – (4). Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть выполнены условия (A) – (G). Пусть $\tau_0 \in (0, T]$ удовлетворяет неравенствам

$$\left(K_c + \frac{1}{2}K_{b,a}\right)\tau_0 \le \frac{1}{16}, \tag{14}$$

$$\frac{1}{\varphi_0}\left\{K_\varphi^* + K_\omega K_f + \left[a_2 a_0^{1/2} K_\omega^* + K_\omega K_{b,a}^{1/2} + 2K_c K_\omega \tau_0^{1/2}\right]\times\left[M_0^2 + 2K_f^2\tau_0\right]^{1/2}\right\} \le \frac{1}{16\tau_0^{1/2}}. \tag{15}$$

Положим

$$R_0 = \frac{1}{16\tau_0^{1/2}}. \tag{16}$$

Тогда оператор $\mathcal{A}$, определенный формулой (10), является сжимающим оператором, переводящим шар B_{R_0} в пространстве $L_2(0, T)$ в себя.

Доказательство. В силу определения оператора $\mathcal{A}$ и условий (A) – (G) для любого $\tau \in (0, T]$ справедливо неравенство

$$\begin{gathered}\|\mathcal{A}(\gamma)\|_{L_2(0,\tau)} \le \frac{1}{\varphi_0}\left\{\|\varphi'\|_{L_2(0,\tau)} + \|F\|_{L_2(0,\tau)} + \left[\int_0^T\left(\int_0^l \frac{a(t,x)}{\Lambda_0(x)}\sqrt{\Lambda_0(x)}u_x\sqrt{\Lambda_0(x)}\omega_x dx\right)^2 dt\right]^{1/2} + \right. \\ \left. + \left[\int_0^T\left(\int_0^l \frac{b(t,x)}{\sqrt{\Lambda_0(x)}}\sqrt{\Lambda_0(x)}u_x\omega dx\right)^2 dt\right]^{1/2} + \left[\int_0^T\left(\int_0^l c(t,x)u\omega dx\right)^2 dt\right]^{1/2}\right\} \le \\ \le \frac{1}{\varphi_0}\left\{K_\varphi^* + K_\omega K_f + \left[a_2 a_0^{1/2} K_\omega^* + K_\omega K_{b,a}^{1/2}\right]\times\left[\int_{Q_\tau}\Lambda_0(x)|u_x|^2 dxdt\right]^{1/2} + K_c K_\omega \tau^{1/2}\sup_{0\le t\le\tau}\|u(t,\cdot)\|_2\right\}.\end{gathered} \tag{17}$$

Пусть τ_0 удовлетворяет неравенству (14), а R_0 соотношению (16). Тогда для этого R_0 выполняется неравенство (13) (при $R_0 = K_\gamma$) из работы [11], а следовательно, в силу неравенства (12) из работы [11]

$$\sup_{0\le t\le\tau_0}\|u(t,\cdot)\|_2^2 \le 4M_0^2 + 8K_f^2\tau_0, \tag{18}$$

$$\left\|\sqrt{\Lambda_0}u_x\right\|^2_{L_2\left(Q_{\tau_0}\right)} \le M_0^2 + 2K_f^2\tau_0. \tag{19}$$

Подставляя (18) и (19) в (17), получаем

$$\begin{gathered}\|\mathcal{A}(\gamma)\|_{L_2(0,\tau_0)} \le \frac{1}{\varphi_0}\left\{K_\varphi^* + K_\omega K_f + \left(a_2 a_0^{1/2}K_\omega^* + K_\omega K_{b,a}^{1/2}\right)\times\left(M_0^2 + 2K_f^2\tau_0\right)^{1/2} + K_c K_\omega \tau_0^{1/2}\left(4M_0^2 + 8K_f^2\tau_0\right)^{1/2}\right\} = \\ = \frac{1}{\varphi_0}\left\{K_\varphi^* + K_\omega K_f + \left(a_2 a_0^{1/2}K_\omega^* + K_\omega K_{b,a}^{1/2} + 2K_c K_\omega\tau_0^{1/2}\right)\times\left(M_0^2 + 2K_f^2\tau_0\right)^{1/2}\right\},\end{gathered}$$

откуда в силу неравенства (15) для любого $\gamma \in B_{R_0}$

$$\|\mathcal{A}(\gamma)\|_{L_2(0,\tau_0)} \le R_0.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{A}$ переводит шар B_{R_0} в себя. Докажем, что этот оператор является сжимающим в шаре B_{R_0}.

Пусть $u^{(1)}(t, x)$ и $u^{(2)}(t, x)$ – соответствующие решения прямой задачи (1)–(3). Положим $v(t, x) = u^{(1)}(t, x) - u^{(2)}(t, x)$, $\theta(t) = \gamma^{(1)}(t) - \gamma^{(2)}(t)$. Тогда пара $\{v(t, x),\theta(t)\}$ удовлетворяет соотношению

$$v_t - \left(a_{ij}(t,x)v_x\right)_x + b(t,x)v_x + c(t,x)v + \gamma^{(1)}(t)v = -\theta(t)u^{(2)}(t,x), \quad (t,x)\in Q, \tag{20}$$

и краевым условиям

$$v(0,x) = 0, \quad x\in[0,l]; \quad v(t,0) = v(t,l) = 0, \quad t\in[0,T], \tag{21}$$

в смысле определения 1.

Тогда в силу определения оператора $\mathcal{A}$ в (10) и условий (A) – (G) имеем, что для любого $\tau \in (0, T]$

$$\begin{gathered}\left\|\mathcal{A}\left(\gamma^{(1)}\right)-\mathcal{A}\left(\gamma^{(2)}\right)\right\|_{L_2(0,\tau)} \le \frac{1}{\varphi_0}\left\{\left[\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^l \frac{a(t,x)}{\Lambda_0(x)}\sqrt{\Lambda_0(x)}v_x\sqrt{\Lambda_0(x)}\omega_x dx\right)^2 dt\right]^{1/2} + \right.\\ \left. +\left[\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^l \frac{b(t,x)}{\sqrt{\Lambda_0(x)}}\sqrt{\Lambda_0(x)}v_x\omega dx\right)^2 dt\right]^{1/2} + \left[\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^l c(t,x)v\omega dx\right)^2 dt\right]^{1/2}\right\} \le \\ \le \frac{1}{\varphi_0}\left\{\left[a_2 a_0^{1/2}K_\omega^* + K_\omega K_{b,a}^{1/2}\right]\cdot\left\|\sqrt{\Lambda_0}v_x\right\|_{L_2(Q_\tau)} + K_c K_\omega \tau^{1/2}\sup_{0\le t\le\tau}\|v(t,\cdot)\|_2\right\}.\end{gathered} \tag{22}$$

Пусть $\tau = \tau_0$ удовлетворяет условиям (14) и (15). Поскольку функция $v(t, x)$ удовлетворяет соотношениям (20) и (21), то в силу оценки (12) из работы [11], примененной к функции $v(t, x)$, имеем

$$\sup_{0\le t\le\tau_0}\|v(t,\cdot)\|_2^2 \le 8\tau_0\sup_{0\le t\le\tau_0}\left\|u^{(2)}(t,\cdot)\right\|_2^2\cdot\|\theta\|_{L_2(0,\tau_0)}^2 \le 8\tau_0\left(4M_0^2 + 8K_f^2\tau_0\right)\|\theta\|_{L_2(0,\tau_0)}^2 \tag{23}$$

и

$$\left\|\sqrt{\Lambda_0}u_x\right\|_{L_2\left(Q_{\tau_0}\right)}^2 \le 2\tau_0\sup_{0\le t\le\tau_0}\left\|u^{(2)}(t,\cdot)\right\|_2^2\cdot\|\theta\|_{L_2(0,\tau_0)}^2 \le 2\tau_0\left(4M_0^2 + 8K_f^2\tau_0\right)\|\theta\|_{L_2(0,\tau_0)}^2. \tag{24}$$

В оценках (23) и (24) использованы оценки (18) и (19).

Подставляя (23) и (24) в (22), получаем

$$\left\|\mathcal{A}\left(\gamma^{(1)}\right)-\mathcal{A}\left(\gamma^{(2)}\right)\right\|_{L_2(0,\tau_0)} \le \frac{2\sqrt{2}}{\varphi_0}\tau_0^{1/2}\left[a_2 a_0^{1/2}K_\omega^* + K_\omega K_{b,a}^{1/2} + 2K_c K_\omega\tau_0^{1/2}\right]\cdot\left(M_0^2 + 2K_f^2\tau_0\right)^{1/2}\|\theta\|_{L_2(0,\tau_0)},$$

откуда из условия (15) следует, что

$$\left\|\mathcal{A}\left(\gamma^{(1)}\right)-\mathcal{A}\left(\gamma^{(2)}\right)\right\|_{L_2(0,\tau_0)} \le \frac{\sqrt{2}}{8}\left\|\gamma^{(1)}-\gamma^{(2)}\right\|_{L_2(0,\tau_0)},$$

что и означает сжимаемость оператора $\mathcal{A}$ в шаре B_{R_0}. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (A)–(G). Пусть $\tau_0 \in (0, T]$ удовлетворяет неравенствам (14) и (15), а R_0 определено равенством (16). Тогда обратная задача (1)–(4) имеет обобщенное решение $\{u(t, x), \gamma(t)\}$ в прямоугольнике Q_{τ_0} в смысле определения 1 с $s = q^*$, где q^* определено в (8), причем для него справедлива оценка

$$\|\gamma\|_{L_2(0,\tau_0)} \le R_0. \tag{25}$$

Более того, обобщенное решение обратной задачи (1)–(4), для которого выполнена оценка (26), является единственным.

Доказательство. В силу леммы 2 оператор $\mathcal{A}$ является сжимающим, переводящим шар B_{R_0} в себя. Поэтому уравнение (11) однозначно разрешимо в B_{R_0} и его решение $\gamma(t)$ удовлетворяет оценке (25). В силу леммы 1 тогда существует единственное обобщенное решение $\{u(t, x), \gamma(t)\}$ обратной задачи (1)–(4) в прямоугольнике Q_{τ_0} с $s = q^*$. Теорема 1 доказана.

Замечание 2. В теореме 1 установлена единственность обобщенного решения обратной задачи (1)–(4), для которого $\gamma(t)$ удовлетворяет оценке (25). На самом деле единственность решения обратной задачи (1)–(4) справедлива без этого условия и во всем прямоугольнике Q.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (A)–(G). Тогда обобщенное решение обратной задачи (1)–(4) является единственным во всем прямоугольнике Q.

Доказательство. Пусть обратная задача (1)–(4) имеет в Q два обобщенных решения $\{u^{(1)}(t, x), \gamma^{(1)}(t)\}$ и $\{u^{(2)}(t, x), \gamma^{(2)}(t)\}$. Положим $v(t, x) = u^{(1)}(t, x) - u^{(2)}(t, x)$, $\theta(t) = \gamma^{(1)}(t) - \gamma^{(2)}(t)$. Тогда пара $\{v(t, x), \theta(t)\}$ является обобщенным решением обратной задачи для уравнения (20) с краевыми условиями(21) и с дополнительным условием

$$\int_0^l v(t,x)\omega(x)dx = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{26}$$

Данная обратная задача является обратной задачей по определению неизвестной функции $p(t) \equiv \theta(t) \in L_2(0, T)$, рассмотренной в [11]. Для этой обратной задачи выполнены все условия теоремы 3 из [11]. Согласно данной теореме задача (20),(21),(26) имеет единственное нулевое решение в Q.

Таким образом, $u^{(1)}(t, x) = u^{(2)}(t, x)$, $\gamma^{(1)}(t) = \gamma^{(2)}(t)$ и теорема 2 доказана.

Заключение

В работе доказаны теоремы существования и единственности обобщенного решения обратной задачи определения неизвестного коэффициента поглощения в вырождающемся параболическом уравнении с дивергентной главной частью. Ранее близкие результаты при аналогичном типе вырождения были получены для обратной задачи определения неизвестной правой части в вырождающемся дивергентном параболическом уравнении.

Финансирование

Работа выполнена при поддержке Программы Приоритет-2030 НИЯУ МИФИ.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Вклад авторов

В.Л. Камынин – постановка задачи, доказательство утверждений, обсуждение результатов.
О.В. Нагорнов – доказательство утверждений, обсуждение результатов.

Список литературы

1. *Прилепко А.И., Орловский Д.Г.* Об определении параметра эволюционного уравнения и обратных задачах математической физики I // Дифференциальные уравнения, 1985. Т. 21. № 1. С. 119–129.

2. *Прилепко А.И., Орловский Д.Г.* Об определении параметра эволюционного уравнения и обратных задачах математической физики II // Дифференциальные уравнения, 1985. Т. 21. № 4. С. 694–700.

3. *Cannon J.R., Lin Y.* Determination of a parameter $p(t)$ in some quasilinear parabolic differential equations // Inverse Problems, 1988. V. 4. № 1. P. 35–45.

4. *Cannon J.R., Lin Y.* Determination of a parameter $p(t)$ in Holder classes for some semilinear parabolic differential equations // Inverse Problems, 1988. V. 4. № 3. P. 596–606.

5. *Prilepko A.I., Orlovsky D G., Vasin I.A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, 2000. 709 p.

6. *Бухарова Т.И., Камынин В.Л.* Обратная задача определения коэффициента поглощения в многомерном уравнении теплопроводности с неограниченными младшими коэффициентами // Журнал вычислит. матем. и матем. Физики, 2015. Т. 55. № 7. С. 75–87.

7. *Kamynin V.L.* Inverse problem of determining the absorption coefficient in a degenerate parabolic equation in the class of L_2 functions // Journal of math. Sciences, 2020. V. 250. № 2. C. 322–336.

8. *Камынин В. Л.* Обратная задача определения коэффициента поглощения в вырождающемся параболическом уравнении в классе L_∞// Журнал вычислит. матем. и матем. физики, 2021. Т. 61. № 3. С. 413–427.

9. *Kamynin V. L.* Inverse problems of finding the lower term in a multidimensional degenerate parabolic equation // Journal of math. Sciences, 2023. V. 274. № 4. C. 493–510.

10. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967, 736 с.

11. *Камынин В.Л., Нагорнов О.В.* Обратная задача определения функции источника в вырождающемся параболическом уравнении с дивергентной главной частью на плоскости // Вестник НИЯУ МИФИ, 2025. Т. 14. № 5. С. 414–423.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2025, vol. 14, no. 6, pp. 516–524

Inverse problem of determining the absorption coefficient in a degenerate parabolic equation of divergent type with one spatial variable

V. L. Kamynin✉, O. V. Nagornov✉

National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, 115409, Russia
✉ vlkamynin2008@yandex.ru
✉ nagornov@yandex.ru

Received September 26, 2025; revised October 29, 2025; accepted November 05, 2025

We study the nonlinear inverse problem of determining the unknown time-dependent absorption coefficient in a one-dimensional parabolic equation with a weakly degenerate principal part defined in divergence form. The additional observation condition is specified in integral form. Physically, this means, for example, measuring temperature with a finite-size sensor installed at an interior point of the domain. The solution is understood in a generalized sense; in particular, the unknown absorption coefficient is sought in the space $L_2(0, T)$. The equation's coefficients can depend on both the time and space variables. Degeneracy of the equation is also allowed with respect to both time and space variables. The set of points of degeneracy may be infinite, but must have measure zero. The existence and uniqueness theorems for the solution are proved. The existence of the solution is proven for small T, while the uniqueness theorem is global in nature. Proving the existence of a solution to the inverse problem the latter is reduced to studying the solvability of a certain operator equation, and it is shown that under the conditions imposed in the paper, the operator is contractive.

Keywords: coefficient inverse problems, degenerate parabolic equations, integral observation.

References

1. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G.* Ob opredelenii parametra evolyucionnogo uravneniya i obtatnyh zadachah matematicheskoi fiziki I. [On determination of a parameter in the evolution equation and inverse problems of mathematical physics I]. Differencial'nye uravneniya, 1985. Vol. 21. No. 1. Pp. 119–129 (in Russian).

2. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G.* Ob opredelenii parametra evolyucionnogo uravneniya i obtatnyh zadachah matematicheskoi fiziki II. [On determination of a parameter in the evolution equation and inverse problems of mathematical physics II]. Differencial'nye uravneniya, 1985. Vol. 21. No. 4. pp. 694–700 (in Russian).

3. *Cannon J.R., Lin Y.* Determination of a parameter $p(t)$ in some quasilinear parabolic differential equations. Inverse Problems, 1988. Vol. 4. No 1. Pp. 35–45.

4. *Cannon J.R., Lin Y.* Determination of a parameter $p(t)$ in Holder classes for some semilinear parabolic differential equations. Inverse Problems, 1988. Vol. 4. No 3. Pp. 596–606.

5. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A*. Methods for solving inverse problems in mathe-matical physics. New York, Marcel Dekker, 2000. 709 p.

6. *Bukharova T.I., Kamynin V.L.* Obratnaya zadacha opredeleniya koefficienta poglosheniya v mnogomernom uravnenii teploprovodnosti s neogranichennymi mladshimi coefficientami. [In-verse problem of determining the absorption coefficient in the multidimensional heat equation with unlimited minor coefficients]. Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki, 2015. Vol. 55. No. 7. Pp. 75–87 (in Russian).

7. *Kamynin V.L*. Inverse problem of determining the absorption coefficient in a degenerate parabolic equation in the class of L_2 functions. Journal of math. sciences, 2020. Vol. 250. No 2. Pp. 322–336.

8. *Kamynin V.L.* Obratnaya zadacha opredeleniya koefficienta poglosheniya v vyrozhdayu-shemsya parabolicheskom uravnenii v klasse L_∞. [Inverse problem of determining the absorption coefficient in a degenerate parabolic equation in the class L_∞] Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki, 2021. Vol. 61. No. 3 Pp. 413–427 (in Russian).

9. *Kamynin V.L*. Inverse problems of finding the lower term in a multidimensional degene-rate parabolic equation. Journal of math. Sciences, 2023. Vol. 274. No. 4. Pp. 493–510.

10. *Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N.* Lineinye i kvazilineinye uravne-niya parabolicheskogo tipa. [Linear and quasilinear parabolic equations of parabolic type]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 736 p. (in Russian).

11. *Kamynin V.L., Nagornov O.V.* Obratnaya zadacha opredeleniya funkcii istochnika v vyrozhdayushemsya parabolicheskom uravnenii s divergentnoi glavnoi chast'yu na ploskosti. [Inverse problem of determining the source term in a degenerate parabolic equation with a divergent principal part on a plane]. Vestnik NIYaU MIFI, 2025. Vol. 14. No. 5. Pp. 414–423 (in Russian).