ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2019, том 8, № 5, с. 437–444

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 519.65

ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ ВЕЩЕСТВЕННОГО ИНДЕКСА И РЯДЫ КРЕЙНА[1]

© 2019 г. В. Б. Шерстюков[1,*], Е. В. Сумин[1,]**

[1] *Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия*

**e-mail: shervb73@gmail.com*

***e-mail: sumevbir@gmail.com*

Поступила в редакцию 20.06.2019 г.
После доработки 20.06.2019 г.
Принята к публикации 25.06.2019 г.

Предыдущие исследования авторов были посвящены функциям Бесселя I рода $J_\nu(z)$ и модифицированным функциям Бесселя I рода (функциям Инфельда) $I_\nu(z)$ при $\nu > -1$. В настоящей работе рассматриваются функции Бесселя I рода произвольного вещественного индекса ν. Все нули любой такой функции являются простыми, причем лишь конечное число нулей (регулируемое теоремой Гурвица) может располагаться вне вещественной прямой. Привлекается построенная по $J_\nu(z)$ и имеющая те же нетривиальные нули вспомогательная четная целая функция экспоненциального типа $L(z; \nu)$ с параметром $\nu \in \mathbb{R}$. Это позволяет подключить к исследованию хорошо развитый аппарат целых функций. Подробно изучается вопрос о разложении обратной величины $1/L(z; \nu)$ в ряд простых дробей специальной структуры (ряд типа Крейна). Указанное общее разложение используется при получении формул для точного вычисления бесконечных сумм, содержащих отрицательные степени нулей функции Бесселя $J_\nu(z)$. Особое внимание уделяется целым и полуцелым значениям индекса ν. Приведены примеры конкретных разложений величины $1/J_\nu(z)$ и соответствующих суммационных формул при различных значениях $\nu \in \mathbb{R}$.

Ключевые слова: разложение на простые дроби, ряд Крейна, функция Бесселя вещественного индекса, нули бесселевых функций, суммационные соотношения

DOI: 10.1134/S2304487X19040102

ВВЕДЕНИЕ

Некоторое время назад было обнаружено [1], [2], что классические ряды Крейна (см. [3], [4, гл. V, § 6]) могут эффективно применяться при исследовании специальных функций Бесселя. Так, в работе авторов [1] для функции Бесселя I рода $J_\nu(z)$ с вещественным индексом $\nu > -1$ решена задача о представлении величины $1/J_\nu(z)$ в виде ряда простых дробей (ряда Крейна фиксированного порядка) и найдены формулы для вычисления особых структурированных сумм, составленных по нулям функции $J_\nu(z)$. В последующей статье [2] утверждения [1] перенесены на модифицированные функции Бесселя $I_\nu(z)$ (функции Инфельда). Центральную роль в математических обоснованиях играет критерий разложимости в ряд Крейна, установленный в [5] (см. также [6]) для обратной величины целой функции экспоненциального типа с нулями в полосе.

Целью настоящей работы является распространение результатов статьи [1] на функции Бесселя $J_\nu(z)$ произвольного вещественного индекса ν. По всей видимости, разработанный авторами технический аппарат позволит охватить общий случай функций Бесселя с комплексным индексом ν. Однако такое обобщение требует дополнительного учета обстоятельств, вызванных “комплексификацией” ситуации. В этой связи укажем, что в огромном количестве классических и современных работ по бесселевым функциям, как правило, ограничиваются значениями $\nu \in \mathbb{R}$. Нам не удалось найти в литературе строгого и обстоятельного изложения теории функций $J_\nu(z)$ с произвольным $\nu \in \mathbb{C}$. Например, в фундаментальной серии недавних обзоров [7–10], посвященных нулям бесселевых функций, случай комплексного индекса фактически не освещен; лишь самую общую информацию о функциях $J_\nu(z)$ при $\nu \in \mathbb{C}$ содержит современный справочник [11, гл. 10]. В то же время, функции Бесселя I рода с комплексным (в частности, чисто мнимым) индексом ν активно используются в физике плазмы и корпускулярной оптике (см., например,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00236.

[12, 13] и ссылки в них), и поэтому развитие соответствующего математического аппарата представляется перспективным.

Определенная сложность предпринятого нами обобщения состоит в том, что при отказе от ограничения $\nu > -1$ нули функции $J_\nu(z)$, как известно, "выходят" с вещественной оси в комплексную плоскость. Здесь мы подробно разберем ситуацию $\nu \le -1$. Тем самым, в рамках интересующей нас проблематики [1] случай $\nu \in \mathbb{R}$ будет полностью рассмотрен.

Для предметного обсуждения задачи и доказательства основного результата работы (теорема 3 из разд. 2) понадобятся некоторые сведения из теории бесселевых функций [7, 11, 14–16] и одно общее утверждение статьи [5]. Приведем их в следующем разделе.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассматриваем функцию Бесселя I рода

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

где Γ обозначает гамма-функцию, $\nu \in \mathbb{C}$. Множитель $(z/2)^\nu$ в (1) делает $J_\nu(z)$, вообще говоря, бесконечнозначной, однако при любом заданном $\nu \in \mathbb{C}$ функция

$$L(z;\nu) \equiv \left(\frac{2}{z}\right)^{\nu} J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

является по переменной z четной целой функцией экспоненциального типа.

Обсудим нюансы перехода от (1) к (2). Исключая из рассмотрения точку $z = 0$, видим, что с такой оговоркой множества нулей функций (1) и (2) совпадают. Вопрос о возможных кратностях нулей снимается сразу, поскольку при любом $\nu \in \mathbb{C}$ все нетривиальные (т.е. отличные от $z = 0$) нули функции Бесселя $J_\nu(z)$ являются простыми. Для значений $\nu \in \mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$ имеем $L(0;\nu) = 1/\Gamma(\nu+1) \ne 0$. В исключительных случаях $\nu = -n$, где $n \in \mathbb{N}$, точка $z = 0$ является кратным нулем функции $L(z;\nu)$. Действительно, согласно (2) получим

$$L(z;-n) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} = (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} L(z;n),$$

и при этом $L(0;n) = 1/n! \ne 0$, поскольку

$$L(z;n) \equiv \left(\frac{2}{z}\right)^{n} J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Поэтому при $\nu = -n$, где $n \in \mathbb{N}$, удобно работать с функциями $J_n(z)$, $L(z;n)$, учитывая соотношения

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{4}$$

$$L(z;-n) = (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} L(z;n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Всюду в дальнейшем считаем, что $\nu \in \mathbb{R}$, и вместо функции Бесселя (1) рассматриваем целую функцию (2), в частности (при $\nu \in \mathbb{Z}$) – функцию (3). Четная целая функция экспоненциального типа $L(z;\nu)$ с параметром $\nu \in \mathbb{R}$ имеет бесконечное (счетное) множество нулей, и все они, за исключением $z = 0$ при $\nu \in -\mathbb{N}$, являются простыми. Возможны следующие случаи.

I. Пусть $\nu > -1$. Тогда все нули функции (2) расположены на вещественной прямой, образуя множество $\{\pm\gamma_{\nu,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, где

$$0 < \gamma_{\nu,1} < \gamma_{\nu,2} < \ldots < \gamma_{\nu,k} < \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} \gamma_{\nu,k} = +\infty, \tag{6}$$

с асимптотикой

$$\gamma_{\nu,k} = \pi k - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi\nu}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \to \infty. \tag{7}$$

II. Пусть $\nu \in -\mathbb{N}$. Тогда в силу связи (5) множество нулей функции $L(z;\nu) = L(z;-n)$, где $n \in \mathbb{N}$, записывается в виде $\{0\} \cup \{\pm\gamma_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ с нулем $z = 0$ кратности $2n$ и простыми нулями $\pm\gamma_{n,k}$. Здесь $\{\pm\gamma_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ образует последовательность всех нулей функции $L(z;n)$ из пункта I, подчиненных соотношениям (6), (7). Поэтому

$$0 < \gamma_{n,1} < \gamma_{n,2} < \ldots < \gamma_{n,k} < \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} \gamma_{n,k} = +\infty,$$

с асимптотикой

$$\gamma_{n,k} = \pi k - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \to \infty.$$

III. Пусть $\nu < -1$, $\nu \notin -\mathbb{N}$. Обозначим через $s = [-\nu]$ целую часть числа $-\nu \in (1,+\infty)\setminus\mathbb{N}$. Тогда согласно классической теореме Гурвица нули функции (2) структурируются в виде

$$\{\pm\gamma_{\nu,k}\}_{k=1}^{s} \cup \{\pm\gamma_{\nu,k}\}_{k=s+1}^{\infty},$$

где первые $2s$ нулей $\pm\gamma_{\nu,k}$ при $k = 1, \ldots, s$ являются комплексными (невещественными), причем для нечетных s два из этих нулей лежат на мнимой оси. Далее,

$$0 < \gamma_{\nu,s+1} < \gamma_{\nu,s+2} < \ldots < \gamma_{\nu,k} < \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} \gamma_{\nu,k} = +\infty, \tag{8}$$

с той же асимптотикой вида (7), записанной для нецелого параметра $\nu < -1$. Все нули $\pm\gamma_{\nu,k}$, $k \in \mathbb{N}$, по-прежнему простые.

При любом $\nu \in \mathbb{R}$ действует асимптотическая формула (см. [16, гл. 15])

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\nu}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right), \quad x \to +\infty, \tag{9}$$

и рекуррентная связь

$$J'_\nu(z) = -J_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z} J_\nu(z). \tag{10}$$

Воспользуемся ими для выяснения асимптотического поведения производной $L'(z;\nu)$ в точках $\gamma_{\nu,k}$ при $k \to \infty$ (здесь и далее штрих означает производную по z). Случай I разобран в статье [1], а случай II тривиально сводится к нему. Сосредоточимся на случае III.

Пусть $\nu < -1$, $\nu \notin -\mathbb{N}$. Как сказано выше, все достаточно большие по модулю нули функции $J_\nu(z)$ являются вещественными. Привлекая (9), (10) по схеме работы [1], получим для указанных ν соотношение

$$|J'_\nu(\gamma_{\nu,k})| \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma_{\nu,k}}}, \quad k \to \infty.$$

Но тогда с учетом (2) для тех же ν имеем

$$|L'(\gamma_{\nu,k};\nu)| = \left(\frac{2}{\gamma_{\nu,k}}\right)^\nu |J'_\nu(\gamma_{\nu,k})| \sim \frac{A_\nu}{\gamma_{\nu,k}^{\nu+1/2}}, \quad k \to \infty, \tag{11}$$

где $A_\nu = 2^{\nu+1/2}/\sqrt{\pi} > 0$. В дальнейшем потребуется знать наименьшее значение $p \in \mathbb{Z}_+$, при котором сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\gamma_{\nu,k}|^{2p+1} |L'(\gamma_{\nu,k};\nu)|}, \tag{12}$$

или (см. случай III) – ряд

$$\sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{\nu,k}^{2p+1} |L'(\gamma_{\nu,k};\nu)|}.$$

Ввиду (11) вопрос сводится к анализу условия

$$\sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{\nu,k}^{2p+1/2-\nu}} < +\infty,$$

эквивалентного, как показывает (7), условию $2p + 1/2 - \nu > 1$. Поскольку $\nu < -1$, то последнее заведомо выполнено при любом $p \in \mathbb{Z}_+$. Следовательно, ряд (12) сходится уже при $p = 0$, т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\gamma_{\nu,k}||L'(\gamma_{\nu,k};\nu)|} < +\infty, \quad \nu < -1, \quad \nu \notin -\mathbb{N}. \tag{13}$$

Сформулируем, наконец, общий результат о разложении на простые дроби, извлеченный из [5] (см. также [6]).

Теорема 1. *Пусть $L(z)$ – четная целая функция экспоненциального типа с множеством $\Lambda(L) = \{\pm z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ простых нулей, расположенных в некоторой полосе комплексной плоскости. Пусть при каком-либо $p \in \mathbb{Z}_+$ выполнено условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{2p+1} |L'(z_k)|} < +\infty. \tag{14}$$

Тогда функция $F(z) \equiv 1/L(z)$ допускает разложение в ряд Крейна

$$F(z) \equiv \frac{1}{L(z)} = P(z) + 2z^{2p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_k^{2p-1} L'(z_k)} \frac{1}{z^2 - z_k^2}, \tag{15}$$

сходящийся абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C} \setminus \Lambda(L)$. Здесь многочлен $P(z)$ определяется по правилу:

$$P(z) \equiv 0, \quad \textit{если} \quad p = 0;$$

$$P(z) = \sum_{m=0}^{p-1} \frac{1}{(2m)!} F^{(2m)}(0) z^{2m}, \quad \textit{если} \quad p \in \mathbb{N}.$$

Кроме того, справедливы суммационные соотношения

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_k^{2m+1} L'(z_k)} = -\frac{1}{2(2m)!} F^{(2m)}(0), \quad m \ge p. \tag{16}$$

После проделанной подготовительной работы приступим к доказательству основных результатов.

2. РАЗЛОЖЕНИЕ ОБРАТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ В РЯД КРЕЙНА

Функциям Бесселя $J_\nu(z)$ с $\nu > -1$ посвящена статья авторов [1]. В ней на основе теоремы 1 доказано следующее утверждение (по сравнению с оригинальной версией формулировка слегка модифицирована).

Теорема 2. *Пусть $J_\nu(z)$ – функция Бесселя I рода с индексом $\nu > -1$, и $\gamma_{\nu,k}$ – ее положительные нули, образующие последовательность* (6). *Определим величины*

$$a_{\nu,2m} = \left(\frac{z^\nu}{J_\nu(z)}\right)^{(2m)}(0), \quad m \in \mathbb{Z}_+. \tag{17}$$

Зададим число p формулой

$$p = \left[\frac{2\nu+1}{4}\right] + 1. \tag{18}$$

Пусть многочлен $P(z;\nu)$ определяется по правилу:

$$\begin{gathered} P(z;\nu) \equiv 0, \quad \text{если} \quad -1 < \nu < -\frac{1}{2}; \\ P(z;\nu) = \sum_{m=0}^{p-1} \frac{1}{(2m)!} a_{\nu,2m} z^{2m}, \quad \nu \geq -\frac{1}{2}. \end{gathered} \tag{19}$$

Тогда справедливо разложение в ряд

$$\begin{gathered} \frac{1}{J_\nu(z)} = z^{-\nu} P(z;\nu) - \\ - 2z^{2p-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{\nu,k}^{2p-\nu-1} J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,k})} \frac{1}{z^2 - \gamma_{\nu,k}^2}, \end{gathered} \tag{20}$$

сходящийся абсолютно и равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}$, не содержащем точек $z = 0$ и $z = \pm\gamma_{\nu,k}$. При этом для любого $\nu > -1$ выполняются суммационные соотношения

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{\nu,k}^{2m-\nu+1} J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,k})} = \frac{1}{2(2m)!} a_{\nu,2m}, \quad m \geq p. \tag{21}$$

Случай $\nu \in \mathbb{Z}_+$ в теореме 2 полезно выделить. При $\nu = 0$ в соответствии с формулами (17)–(20) получим представление

$$\frac{1}{J_0(z)} = 1 - 2z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{0,k} J_1(\gamma_{0,k})} \frac{1}{z^2 - \gamma_{0,k}^2},$$

найденное другим методом в работе [17]. Соотношение (21) дает

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{0,k}^{2m+1} J_1(\gamma_{0,k})} = \frac{1}{2(2m)!} \left(\frac{1}{J_0(z)}\right)^{(2m)} (0), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Несколько конкретных значений для подобных сумм выписано в [1, 17]. При $\nu \in \mathbb{N}$ возможны два варианта.

Если $\nu = 2r$, где $r \in \mathbb{N}$, то по формуле (18) имеем

$$p = \left[r + \frac{1}{4}\right] + 1 = r + 1, \quad 2p - \nu = 2,$$

и разложение (20) принимает вид

$$\frac{1}{J_{2r}(z)} = z^{-2r} P(z;2r) - 2z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{2r,k} J_{2r+1}(\gamma_{2r,k})} \frac{1}{z^2 - \gamma_{2r,k}^2}, \quad r \in \mathbb{N},$$

с многочленом

$$P(z;2r) = \sum_{m=0}^{r} \frac{1}{(2m)!} a_{2r,2m} z^{2m},$$

$$a_{2r,2m} = \left(\frac{z^{2r}}{J_{2r}(z)}\right)^{(2m)} (0), \quad r \in \mathbb{N}.$$

Если же $\nu = 2r - 1$, где $r \in \mathbb{N}$, то по формуле (18) имеем

$$p = \left[r - \frac{1}{4}\right] + 1 = r, \quad 2p - \nu = 1,$$

и разложение (20) принимает вид

$$\begin{gathered} \frac{1}{J_{2r-1}(z)} = z^{-2r+1} P(z;2r-1) - \\ - 2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{J_{2r}(\gamma_{2r-1,k})} \frac{1}{z^2 - \gamma_{2r-1,k}^2}, \quad r \in \mathbb{N}, \end{gathered}$$

с многочленом

$$P(z;2r-1) = \sum_{m=0}^{r-1} \frac{1}{(2m)!} a_{2r-1,2m} z^{2m},$$

$$a_{2r-1,2m} = \left(\frac{z^{2r-1}}{J_{2r-1}(z)}\right)^{(2m)} (0), \quad r \in \mathbb{N}.$$

В частности, справедливы представления

$$\frac{1}{J_1(z)} = \frac{2}{z} - 2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{J_2(\gamma_{1,k})} \frac{1}{z^2 - \gamma_{1,k}^2},$$

$$\frac{1}{J_2(z)} = \frac{8}{z^2} + \frac{2}{3} - 2z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{2,k} J_3(\gamma_{2,k})} \frac{1}{z^2 - \gamma_{2,k}^2},$$

$$\frac{1}{J_3(z)} = \frac{48}{z^3} + \frac{3}{z} - 2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{J_4(\gamma_{3,k})} \frac{1}{z^2 - \gamma_{3,k}^2}.$$

Пользуясь случаем, укажем, что разложения для обратных величин $1/J_2(z)$ и $1/J_3(z)$ даны в [1, с. 580] с досадной однотипной опечаткой во втором слагаемом: $1/3$ вместо правильного $2/3$ (для $1/J_2(z)$) и $3/(2z)$ вместо правильного $3/z$ (для $1/J_3(z)$).

Другое интересное множество значений $\nu > -1$ образуют полуцелые индексы: $\nu = 2r - 3/2$ и $\nu = 2r - 1/2$, где $r \in \mathbb{N}$.

Если $\nu = 2r - 3/2$, где $r \in \mathbb{N}$, то по формуле (18) имеем

$$p = \left[r - \frac{1}{2}\right] + 1 = r, \quad 2p - \nu = \frac{3}{2},$$

и разложение (20) принимает вид

$$\frac{1}{J_\nu(z)} = z^{-\nu} P(z;\nu) - 2z^{3/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{\nu,k}^{1/2} J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,k})} \frac{1}{z^2 - \gamma_{\nu,k}^2}, \tag{22}$$

где $\nu = 2r - 3/2$, $r \in \mathbb{N}$, с многочленом

$$P(z;\nu) = \sum_{m=0}^{r-1} \frac{1}{(2m)!} a_{\nu,2m} z^{2m}, \quad a_{\nu,2m} = \left(\frac{z^\nu}{J_\nu(z)}\right)^{(2m)} (0),$$

$$\nu = 2r - \frac{3}{2}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Для рассматриваемых значений ν функция Бесселя $J_\nu(z)$ выражается через элементарные функции по формуле (см., например, [15, гл. VII, § 3])

$$J_{2r-3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(Q_r(z)\sin z + R_r(z)\cos z\right), \quad r \in \mathbb{N},$$

где

$$Q_r(z) = (-1)^{r-1}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(-1)^k(2r+2k-2)!}{(2k)!(2r-2k-2)!}\frac{1}{(2z)^{2k}}, \quad r \in \mathbb{N},$$

$$R_r(z) = (-1)^{r-1}\sum_{k=0}^{r-2}\frac{(-1)^k(2r+2k-1)!}{(2k+1)!(2r-2k-3)!}\frac{1}{(2z)^{2k+1}}, \quad r \ge 2; \quad R_1(z) \equiv 0.$$

Так, например, разложение (22) для функции

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$$

после элементарных преобразований приводится к известному разложению косеканса

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + 2z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z^2-(\pi k)^2}.$$

Если же $\nu = 2r - 1/2$, где $r \in \mathbb{N}$, то по формуле (18) имеем

$$p = r+1, \quad 2p - \nu = \frac{5}{2},$$

и разложение (20) принимает вид

$$\frac{1}{J_\nu(z)} = z^{-\nu}P(z;\nu) - 2z^{5/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_{\nu,k}^{3/2}J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,k})}\frac{1}{z^2-\gamma_{\nu,k}^2}, \quad (23)$$

где $\nu = 2r - 1/2$, $r \in \mathbb{N}$, с многочленом

$$P(z;\nu) = \sum_{m=0}^{r}\frac{1}{(2m)!}a_{\nu,2m}z^{2m}, \quad a_{\nu,2m} = \left(\frac{z^\nu}{J_\nu(z)}\right)^{(2m)}(0), \quad \nu = 2r - \frac{1}{2}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Для рассматриваемых сейчас значений ν функция Бесселя $J_\nu(z)$ также выражается через элементарные функции по формуле

$$J_{2r-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(S_r(z)\cos z + T_r(z)\sin z\right), \quad r \in \mathbb{N},$$

где

$$S_r(z) = (-1)^r\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(-1)^k(2r+2k-1)!}{(2k)!(2r-2k-1)!}\frac{1}{(2z)^{2k}}, \quad r \in \mathbb{N},$$

$$T_r(z) = (-1)^{r-1}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(-1)^k(2r+2k)!}{(2k+1)!(2r-2k-2)!}\frac{1}{(2z)^{2k+1}}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Так, например, разложение (23) для функции

$$J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z} - \cos z\right)$$

после элементарных преобразований приводится к разложению

$$\frac{1}{\sin z - z\cos z} = \frac{3}{z^3} + \frac{3}{10z} + 2z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_{3/2,k}\sin\gamma_{3/2,k}}\frac{1}{z^2-\gamma_{3/2,k}^2}.$$

Здесь $\gamma_{3/2,\,k}$, $k \in \mathbb{N}$, являются положительными корнями часто встречающегося трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}\tau = \tau$. При этом $\pi k < \gamma_{3/2,k} < \pi k + \pi/2$, $k \in \mathbb{N}$, с асимптотикой $\gamma_{3/2,k} = \pi k + \dfrac{\pi}{2} + O\left(\dfrac{1}{k}\right)$, $k \to \infty$.

Соотношение (21) дает возможность находить точные значения сумм абсолютно сходящихся рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_{3/2,k}^{2m-1}\sin\gamma_{3/2,k}} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sqrt{1+\gamma_{3/2,k}^2}}{\gamma_{3/2,k}^{2m}}, \quad m \ge 2,$$

составленных по таким корням. На этом мы завершим обсуждение результатов для функций Бесселя $J_\nu(z)$ с индексом $\nu > -1$.

Рассмотрим теперь функцию (1) с индексом $\nu \le -1$. Начнем с простого случая $\nu = -n$, где $n \in \mathbb{N}$. На такие функции тривиальный перенос результатов, полученных для функций Бесселя натурального индекса, осуществляется через связь (4). Поэтому остановимся на содержательном случае $\nu < -1$, $\nu \notin -\mathbb{N}$. В разд. 1 мы показали, что функция $L(z;\nu)$, заданная формулой (2), удовлетворяет всем требованиям теоремы 1, причем ввиду (13) условие (14) выполнено со значением $p = 0$. Таким образом, для функции $1/L(z;\nu)$ имеет место представление (15), где $p = 0$ и многочлен $P(z) \equiv 0$. Точнее,

$$\frac{1}{L(z;\nu)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\gamma_{\nu,k}}{L'(\gamma_{\nu,k};\nu)}\frac{1}{z^2-\gamma_{\nu,k}^2}.$$

Кроме того, для $F(z) = 1/L(z;\nu)$ выполнены суммационные соотношения (16), т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_{\nu,k}^{2m+1}L'(\gamma_{\nu,k};\nu)} = -\frac{1}{2(2m)!}\left(\frac{1}{L(z;\nu)}\right)^{(2m)}(0), \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Поскольку еще

$$L'(\gamma_{\nu,k};\nu) = \left(\frac{2}{\gamma_{\nu,k}}\right)^\nu J'_\nu(\gamma_{\nu,k}), \quad k \in \mathbb{N}$$

(см. (2), (11)), то справедлив следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $J_\nu(z)$ – *функция Бесселя I рода с индексом* $\nu < -1$, $\nu \notin -\mathbb{N}$, *и множеством нулей* $\{\pm\gamma_{\nu,k}\}_{k=1}^{s} \bigcup \{\pm\gamma_{\nu,k}\}_{k=s+1}^{\infty}$, *где* $s = [-\nu] \in \mathbb{N}$, *причем* $\gamma_{\nu,k} \in \mathbb{C}$ *при* $k = 1, \ldots, s$ *и* $\gamma_{\nu,k}$ *при* $k = s+1, s+2, \ldots$ *упорядочены согласно* (8). *Тогда справедливо представление*

$$\frac{1}{J_\nu(z)} = 2z^{-\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_{\nu,k}^{-\nu-1}J'_\nu(\gamma_{\nu,k})}\frac{1}{z^2-\gamma_{\nu,k}^2}$$

с абсолютной и равномерной сходимостью на компактах из множества $\mathbb{C}\setminus\{\pm\gamma_{\nu,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. *При этом*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_{\nu,k}^{2m-\nu+1}J'_\nu(\gamma_{\nu,k})} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_{\nu,k}^{2m-\nu+1}J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,k})} =$$

$$= -\frac{1}{2(2m)!}\left(\frac{z^\nu}{J_\nu(z)}\right)^{(2m)}(0), \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Хорошей “тестовой” функцией, подпадающей под действие теоремы 3, является

$$J_{-3/2}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\sin z + \frac{\cos z}{z}\right)$$

с двумя чисто мнимыми нулями $\pm\gamma_{-3/2,1}$ и вещественными нулями $\pm\gamma_{-3/2,k}$, $k = 2, 3, \ldots$, из формулы (8) при $\nu = -3/2$, $s = 1$. Числа $\gamma_{-3/2,k}$, $k \geq 2$, являются положительными корнями уравнения $\mathrm{ctg}\tau = -\tau$ и подчинены асимптотике (7) при $\nu = -3/2$, т.е.

$$\gamma_{-3/2,k} = \pi(k-1) + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \to \infty.$$

По теореме 3 для $z \in \mathbb{C}\setminus\{\pm\gamma_{-3/2,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ справедливо представление

$$\frac{1}{J_{-3/2}(z)} = 2z^{3/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_{-3/2,k}^{1/2}J'_{-3/2}(\gamma_{-3/2,k})}\frac{1}{z^2-\gamma_{-3/2,k}^2}. \quad (24)$$

Учтем явный вид функций $J_{-3/2}(z)$, $J_{-1/2}(z) = \sqrt{2/(\pi z)}\cos z$ и формулу

$$J'_{-3/2}(\gamma_{-3/2,k}) = -J_{-1/2}(\gamma_{-3/2,k}) =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi\gamma_{-3/2,k}}}\cos\gamma_{-3/2,k} = (-1)^k\sqrt{\frac{2\gamma_{-3/2,k}}{\pi(1+\gamma_{-3/2,k}^2)}},$$

действующую при k ³ 2. Обозначив

$$\gamma_{-3/2,1} = ia, \quad a > 0,$$

запишем

$$J'_{-3/2}(\gamma_{-3/2,1}) = -J_{-1/2}(ia) = \frac{i-1}{\sqrt{\pi a}}\mathrm{ch}\, a.$$

Здесь число $a = 1.199678\ldots$ является положительным корнем уравнения $\mathrm{cth}\tau = \tau$.

В результате формула (24) после некоторых упрощений примет вид

$$\frac{1}{z\sin z + \cos z} = \frac{2}{\mathrm{ch}\, a}\frac{1}{z^2+a^2} +$$

$$+ 2\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sqrt{1+\gamma_{-3/2,k}^2}}{\gamma_{-3/2,k}}\frac{1}{z^2-\gamma_{-3/2,k}^2}.$$

Ясно, что полученное разложение есть также реализация формулы (15) из общей теоремы 1 для целой функции $L(z) = z\sin z + \cos z$. По теореме 3, примененной к функции $J_{-3/2}(z)$, или по теореме 1, примененной к функции $L(z) = z\sin z + \cos z$ (см. там формулу (16)), получим еще, что

$$\frac{1}{a^2\,\mathrm{ch}\, a} + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{\sqrt{1+\gamma_{-3/2,k}^2}}{\gamma_{-3/2,k}^{2m+3}} =$$

$$= \frac{1}{2(2m)!}\left(\frac{1}{z\sin z + \cos z}\right)^{(2m)}(0), \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

В частности,

$$\frac{1}{a^2\,\mathrm{ch}\, a} + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{\sqrt{1+\gamma_{-3/2,k}^2}}{\gamma_{-3/2,k}^3} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, суммационная формула из теоремы 3 служит своеобразным “архивом” подобных соотношений.

В заключение подчеркнем, что теоремы 2 и 3 теоретически “закрывают” вопрос о разложении величины $1/J_\nu(z)$ с индексом $\nu \in \mathbb{R}$ в ряд Крейна.

Выражаем благодарность Д.Г. Цветкович за численную проверку расчетов, проведенных в данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сумин Е.В., Шерстюков В.Б.* Применение рядов Крейна к вычислению сумм, содержащих нули функций Бесселя // *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.* 2015. Т. 55. № 4. С. 575–581.
2. *Шерстюков В.Б., Сумин Е.В.* Разложение на простые дроби обратной величины модифицированной функции Бесселя и получение общих суммационных соотношений, содержащих ее нули // *Вестник НИЯУ МИФИ.* 2017. Т. 6. № 5. С. 449–452.
3. *Крейн М.Г.* К теории целых функций экспоненциального типа // *Изв. АН СССР. Серия матем.* 1947. Т. 11. № 4. С. 309–326.
4. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
5. *Шерстюков В.Б.* Разложение обратной величины целой функции с нулями в полосе в ряд Крейна // *Матем. сб.* 2011. Т. 202. № 12. С. 137–156.
6. *Шерстюков В.Б.* Асимптотические свойства целых функций с заданным законом распределения корней // *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее*

прил. Темат. обз. Т. 161. М.: ВИНИТИ РАН, 2019. С. 104–129.

7. *Керимов М.К.* Исследования о нулях специальных функций Бесселя и методах их вычисления // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2014. Т. 54. № 9. С. 1387–1441.
8. *Керимов М.К.* Исследования о нулях специальных функций Бесселя и методах их вычисления. II. Свойства монотонности, выпуклости, вогнутости и др. // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2016. Т. 56. № 7. С. 1200–1235.
9. *Керимов М.К.* Исследования о нулях специальных функций Бесселя и методах их вычисления. III. Некоторые новые работы о нулях, посвященные свойствам монотонности, выпуклости и др. // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2016. Т. 56. № 12. С. 1986–2030.
10. *Керимов М.К.* Исследования о нулях специальных функций Бесселя и методах их вычисления. IV. Неравенства, оценки, разложения и др. для нулей функций Бесселя // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2018. Т. 58. № 1. С. 3–41.
11. *Olver F.W.J., Lozier D.W., Boisvert R.F., Clark C.W.* Handbook of mathematical functions. Cambridge, New York: NIST and Cambridge University Press, 2010.
12. *Hall L.S.* Bessel function $J_\nu(z)$ of complex order and its zeros // *Math. Proc. of Cambridge Phil. Soc.* 1967. Vol. 63. № 1. P. 141–146.
13. *Matyshev A.A., Fohtung E.* On the computation and applications of Bessel functions with pure imaginary indices // arXiv: 0910.0365v1 [math-ph] 2 Oct 2009.
14. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Т. 1, 2. М.: ИЛ, 1949.
15. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
16. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
17. *Forsyth A.R.* The expression of Bessel functions of positive order as products, and of their inverse powers as sums of rational fractions // *Messenger of Math.* 1920–1921. Vol. L. P. 129–149.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2019, vol. 8, no. 4, pp. 437–444

Bessel Functions of a Real Order and Krein's Series

V. B. Sherstyukov[a,#] and E. V. Sumin[a,##]

[a] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

[#]*e-mail: shervb73@gmail.com*

[##]*e-mail: sumevbir@gmail.com*

Received June 20, 2019; revised June 20, 2019; accepted June 25, 2019

Abstract—Our previous studies were devoted to Bessel functions of the first kind $J_\nu(z)$ and modified Bessel functions of the first kind $I_\nu(z)$ (Infeld functions) with the parameter $\nu > -1$. In this work, Bessel functions of the first kind of an arbitrary real order ν are considered. All the zeros of any such function are simple, and only a finite number of zeros (regulated by the Hurwitz theorem) can be located outside the real line. An auxiliary even entire function of the exponential type $L(z, \nu)$ constructed with respect to $J_\nu(z)$ and having the same nontrivial zeros is involved, allowing the application of the well-developed entire function method. The problem of expanding the function $1/L(z, \nu)$ into a series of simple fractions with a special structure (Krein's type series) has been studied. This general representation is used to derive formulas for calculating special series containing negative powers of zeros of the Bessel function $J_\nu(z)$. Particular attention is focused on integer and semi-integer orders ν. Examples of specific expansions of $1/J_\nu(z)$ and the corresponding summation formulas for various parameters ν are given.

Keywords: simple fraction decomposition, Krein's series, Bessel function of a real order, zeros of Bessel functions, summation relations

DOI: 10.1134/S2304487X19040102

REFERENCES

1. Sherstyukov V.B., Sumin E.V. Application of Krein's series to calculation of sums containing zeros of the Bessel functions // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2015. V. 55. № 4. P. 572–579.
2. Sherstyukov V.B., Sumin E.V. Expansion of the inverse modified Bessel function in simple fractions and calculation of special infinite sums containing its zeros // Vestnik Nat. Issl. Yad. Univ. "MIFI". 2017. V. 6. № 5. P. 449–452.

3. Krein M.G. A contribution to the theory of entire function of exponential type // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 1947. V. 11. № 4. P. 309–326.
4. Levin B.Ya. Distribution of zeros of entire functions. Gostexizdat, Moscow, 1956; Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964.
5. Sherstyukov V.B. Expanding the reciprocal of an entire function with zeros in a strip in a Krein series // Sbornik: Mathematics. 2011. V. 202. № 12. P. 1853–1871.
6. Sherstyukov V.B. Asymptotic properties of entire functions with given laws of distribution of zeros // Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz. V. 161. VINITI, Moscow, 2019. P. 104–129.
7. Kerimov M.K. Studies on the zeros of Bessel functions and methods for their computation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014. V. 54. № 9. P. 1337–1388.
8. Kerimov M.K. Studies on the zeros of Bessel functions and methods for their computation: 2. Monotonicity, convexity, concavity, and other properties // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2016. V. 56. № 7. P. 1175–1208.
9. Kerimov M.K. Studies on the zeros of Bessel functions and methods for their computation: 3. Some new works on monotonicity, convexity, concavity, and other properties // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2016. V. 56. № 12. P. 1949–1991.
10. Kerimov M.K. Studies on the zeros of Bessel functions and methods for their computation: IV. Inequalities, estimates, expansions, etc., for zeros of Bessel functions // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2018. V. 58. № 1. P. 1–37.
11. Olver F.W.J., Lozier D.W., Boisvert R.F., Clark C.W. Handbook of mathematical functions. Cambridge, New York: NIST and Cambridge University Press, 2010.
12. Hall L.S. Bessel function $J_\nu(z)$ of complex order and its zeros // Math. Proc. of Cambridge Phil. Soc. 1967. V. 63. № 1. P. 141–146.
13. Matyshev A.A., Fohtung E. On the computation and applications of Bessel functions with pure imaginary indices // arXiv: 0910.0365v1 [math-ph] 2 Oct 2009.
14. Watson G.N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions (2nd.ed.). Cambridge University Press, Cambridge, 1944; Inostrannaya Literatura, Moscow, 1949.
15. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Methods of the theory of functions in a complex variable. Nauka, Moscow, 1987.
16. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. The equation of mathematical physics. Nauka, Moscow, 1972.
17. Forsyth A.R. The expression of Bessel functions of positive order as products, and of their inverse powers as sums of rational fractions // Messenger of Math. 1920–1921. Vol. L. P. 129–149.