ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2019, том 8, № 5, с. 445–452

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНОГО РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ МОЖЕТ ДАТЬ БОЛЬШЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ, ЧЕМ МЕТОДЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СВЯЗИ

© 2019 г. А. Д. Полянин[1,2,3,*]

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия*

[2] *Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия*

[3] *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия*

**e-mail: polyanin@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 04.03.2019 г.
После доработки 04.03.2019 г.
Принята к публикации 09.04.2019 г.

Показано, что в некоторых случаях прямой метод функционального разделения переменных позволяет построить больше точных решений нелинейных уравнений математической физики, чем метод дифференциальных связей (с одной связью) и метод поиска неклассических симметрий (основанный на условии инвариантной поверхности). Указанный факт иллюстрируется на нелинейных реакционно-диффузионных уравнениях, на уравнениях конвективной диффузии с переменными коэффициентами, на нелинейных уравнениях типа Клейна–Гордона и уравнениях гидродинамического пограничного слоя. Приведены некоторые новые точные решения.

Ключевые слова: прямой метод функционального разделения переменных, метод дифференциальных связей, метод поиска неклассических симметрий, прямой метод Кларксона–Крускала, точные решения

DOI: 10.1134/S2304487X19050067

1. ВВЕДЕНИЕ. МЕТОДЫ, КОТОРЫЕ ОБСУЖДАЮТСЯ

1.1. Прямой метод построения точных решений с функциональным разделением переменных в неявном виде

Будем рассматривать нелинейные уравнения с частными производными вида

$$F(x, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \ldots) = 0. \tag{1}$$

Считаем, что левая часть уравнения (1) содержит одну или несколько произвольных функций, зависящих от u.

Для анализа уравнения (1) можно использовать прямой метод функционального разделения переменных, основанный на поиске точных решений в неявном виде [1, 2]:

$$\int h(u)du = \xi(x)\omega(t) + \eta(x), \tag{2}$$

где функции $h(u)$, $\xi(x)$, $\eta(x)$, $\omega(t)$ определяются далее в процессе исследования.

Процедура построения таких решений заключается в следующем. Сначала с помощью (2) находятся частные производные u_x, u_t, u_{xx}, ..., которые выражаются через функции h, ξ, η, ω и их производные. Затем эти частные производные подставляются в уравнение (1), после чего исключается переменная t с помощью (2). В результате (при подходящем выборе функции ω) приходим к билинейному функционально-дифференциальному уравнению вида

$$\sum_{j=1}^{N} \Phi_j[x]\Psi_j[u] = 0. \tag{3}$$

Здесь $\Phi_j[x] \equiv \Phi_j(x, \xi, \eta, \xi'_x, \eta'_x, \ldots)$ и $\Psi_j[u] \equiv \Psi_j(u, h, h'_u, \ldots)$ – дифференциальные формы (в некоторых случаях функциональные коэффициенты), которые зависят соответственно только от x и u. Имеет место следующее утверждение.

Утверждение (впервые сформулировано Д. Биркгофом [3]). Функционально-дифференциальные уравнения вида (3) могут иметь решения, только если формы $\Psi_j[u]$ ($j = 1, \ldots, N$) связаны линейными соотношениями (см., например, [2, 4, 5]):

$$\sum_{j=1}^{m_i} k_{ij}\Psi_j[u] = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

где k_{ij} — некоторые константы, $1 \le m_i \le N-1$, $1 \le n \le N-1$. Необходимо также рассмотреть вырожденные случаи, когда, помимо линейных соотношений (4), отдельные дифференциальные формы $\Psi_j[u]$ равны нулю.

Аналогичное утверждение справедливо также для форм $\Phi_j[x]$.

Сформулированные выше утверждения позволяют находить точные решения функционально-дифференциальных уравнений вида (3) и соответствующих нелинейных уравнений математической физики (1). Отметим, что различные линейные соотношения вида (4) в случае общего положения соответствуют различным решениям исходного уравнения (1).

1.2. Метод дифференциальных связей

Покажем, что прямой метод построения точных решений с функциональным разделением переменных в неявном виде, основанный на формуле (2), тесно связан с методом дифференциальных связей (который основан на анализе совместности переопределенных систем уравнений с частными производными [6]).

Действительно, продифференцируем формулу (2) по t. В результате получим

$$u_t = \xi(x)\,\bar{\omega}(t)\,\varphi(u), \tag{5}$$

где $\bar{\omega}(t) = \omega'_t(t)$ и $\varphi(u) = 1/h(u)$. Соотношение (5) можно рассматривать как дифференциальную связь первого порядка, которую можно использовать для нахождения точных решений уравнения (1) путем анализа на совместность переопределенной пары уравнений (1) и (5) для одной искомой функции u. Дифференциальная связь (5) эквивалентна соотношению (2); на начальной стадии все функции, входящие в правые части (2) и (5), считаются произвольными, а конкретный вид этих функций определяется в процессе дальнейшего исследования.

Для построения точных решений уравнения (1) могут использоваться также дифференциальные связи второго и более высоких порядков; в общем случае любое уравнение с частными производными (или, в вырожденном случае, обыкновенное дифференциальное уравнение), которое зависит от таких же переменных, что и исходное уравнение, может рассматриваться как дифференциальная связь. Описание метода дифференциальных связей, связь этого метода с другими методами, а также ряд конкретных примеров его применения можно найти в [5–13]. Отметим, что для построения точных решений могут использоваться несколько дифференциальных связей (см., например, [5, 11]).

Построение точных решений методом дифференциальных связей основано на анализе совместности нескольких дифференциальных уравнений и состоит из нескольких этапов, кратко описанных ниже.

1°. Два уравнения с частными производными (исходное уравнение с частными производными и дифференциальная связь) дифференцируются достаточное количество раз по x и t. Затем старшие производные исключаются из исходного уравнения, дифференциальной связи и полученных дифференциальных следствий этих уравнений. В результате получается уравнение, в котором остаются лишь степени младшей производной, например, u_x.

2°. Приравнивая в полученном уравнении коэффициенты при всех степенях производной u_x нулю, получаем условия совместности, связывающие функциональные коэффициенты исходного уравнения с частными производными и дифференциальной связи.

3°. Условия совместности представляют собой нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функциональных коэффициентов. На этом этапе необходимо найти решение (решения) этой системы в замкнутом виде.

4°. Полученные функциональные коэффициенты подставляются в дифференциальную связь, которую затем надо проинтегрировать, чтобы найти допустимый вид искомой функции u (на этом этапе получаются промежуточные решения, которые содержат неопределенные функции).

5°. С учетом результатов, полученных в п. 4°, из исходного уравнения с частными производными определяется функция u.

Отметим, что на последних трех этапах метода дифференциальных связей необходимо решать различные дифференциальные уравнения (или системы таких уравнений). Если на каком-то из этих этапов не удается получить решение, то и не удается получить точное решение исходного уравнения.

В [2] отмечается, что с методом дифференциальных связей работать существенно труднее, чем с прямым методом функционального разделения переменных.

1.3. Метод поиска неклассических симметрий

Дифференциальная связь первого порядка (5) является частным случаем условия инвариантной поверхности (invariant surface condition) [14], которое характеризует метод поиска неклассических симметрий (nonclassical method of symmetry reduction). В общем случае условие инвариантной поверхности представляет собой квазилинейное уравнение с частными производными первого порядка общего вида. Поэтому метод поиска неклассических симметрий можно рассматривать как важный специальный случай метода дифференциальных связей [5]; ряд конкретных примеров его применения для построения точных решений можно найти в [4, 5, 14–20].

Отметим, что решения вида (13) обычно не могут быть получены с помощью классического группового анализа дифференциальных уравнений, основанного на группах Ли [21–23].

1.4. Вопрос: какой из указанных методов является более эффективным?

Хотя дифференциальная связь (5) эквивалентна функциональному соотношению (2), но последующая процедура поиска точных решений прямым методом построения решений с функциональным разделением переменных в неявном виде (см. разд. 1.1) и методом дифференциальных связей (см. разд. 1.2) существенно различаются. Поэтому возникает естественный и очень важный вопрос: какой из этих методов является более эффективным?

Далее будет показано, что прямой метод функционального разделения переменных, основанный на представлении решения в неявном виде (1), может давать больше точных решений, чем метод дифференциальных связей (и соответственно метод поиска неклассических симметрий) с эквивалентной дифференциальной связью (5).

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

2.1. Использование метода дифференциальных связей

Рассмотрим нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с переменными коэффициентами вида

$$c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u). \tag{6}$$

Для построения точных решений этого уравнения используем более общую, чем (5), дифференциальную связь (условие инвариантной поверхности):

$$u_t = \theta(x,t)\varphi(u). \tag{7}$$

Разрешим уравнение (6) относительно старшей производной u_{xx}, а затем исключим u_t с помощью (7). В результате получим

$$u_{xx} = -\frac{f'_u}{f}u_x^2 - \frac{a'_x}{a}u_x - \frac{b}{a}\frac{g}{f} + \frac{c\theta}{a}\frac{\varphi}{f}. \tag{8}$$

Дифференцируя (7) дважды по x и учитывая соотношение (8), имеем

$$\begin{gathered} u_t = \theta\varphi, \quad u_{tx} = \theta\varphi'_u u_x + \theta_x\varphi, \\ u_{txx} = \theta\varphi'_u u_{xx} + \theta\varphi''_{uu}u_x^2 + 2\theta_x\varphi'_u u_x + \theta_{xx}\varphi = \\ = \theta\left(\varphi''_u - \frac{f'_u}{f}\varphi'_u\right)u_x^2 + A_1(x,t,u)u_x + A_0(x,t,u). \end{gathered} \tag{9}$$

Здесь A_1 и A_0 не зависят от u_x и выражаются через функции, входящие в уравнения (6) и (7).

Дифференцируя (8) по t и используя первые два соотношения (9), находим другим способом смешанную производную

$$\begin{gathered} u_{xxt} = -\theta\left[\varphi\left(\frac{f'_u}{f}\right)'_u + 2\frac{f'_u}{f}\varphi'_u\right]u_x^2 + \\ + B_1(x,t,u)u_x + B_0(x,t,u). \end{gathered} \tag{10}$$

Приравнивая смешанные производные третьего порядка (9) и (10), получаем следующее выражение, квадратичное по u_x:

$$\begin{gathered} F_2u_x^2 + F_1u_x + F_0 = 0, \\ F_2 = \theta\left[\varphi''_u + \varphi'_u\frac{f'_u}{f} + \varphi\left(\frac{f'_u}{f}\right)'_u\right]. \end{gathered} \tag{11}$$

Здесь функциональные коэффициенты F_0 и F_1 зависят от a, b, c, f, g, θ, φ и их производных и не зависят от u_x. Приравнивая функциональные коэффициенты F_n нулю (процедура расщепления по производной u_x), можно получить определяющую систему уравнений. Далее нам понадобится только первое уравнение этой системы (соответствующее $F_2 = 0$), которое после деления на θ принимает вид:

$$\varphi''_u + \varphi'_u\frac{f'_u}{f} + \varphi\left(\frac{f'_u}{f}\right)'_u = 0. \tag{12}$$

Считая f произвольной функцией, а φ искомой величиной, находим общее решение уравнения (12):

$$\varphi = \frac{1}{f}\left(C_1\int f\,du + C_2\right), \tag{13}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Таким образом метод дифференциальных связей приводит к точным решениям, для которых функции f и φ (входящие в исходное уравнение и используемую дифференциальную связь) связаны соотношением (13).

Для дифференциальной связи (5), которая эквивалентна представлению решения в неявном виде (2), формула (13) преобразуется к виду

$$h = f\left(C_1\int f\,du + C_2\right)^{-1}. \tag{14}$$

2.2. Использование прямого метода функционального разделения переменных

В [2] с помощью метода, описанного в разд. 1.1, было получено много точных решений нелинейного уравнения вида (6). В частности, было показано, что уравнение

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \frac{a'_x(x)}{\sqrt{a(x)}}u, \tag{15}$$

которое зависит от двух произвольных функций $a(x) > 0$ и $f(u)$, допускает точное решение в неявном виде

$$\int \frac{f(u)}{u}du = 4t - 2\int \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C, \tag{16}$$

где C – произвольная постоянная.

Решение (16) является частным случаем решения вида (2) при $h = f/u$. Это решение отличается от (14) и поэтому не может быть получено методом дифференциальных связей не только с использованием соотношения (5), но и дифференциальной связи более общего вида (7).

Решение вида (16), порождается двумя дифференциальными связями: одна из них (5), а другая (дополнительная) связь имеет вид $u_x = p(x)\psi(u)$ (точнее $\sqrt{a}fu_x = -2u$). Важно отметить, что вторая связь определяется функциональными коэффициентами исходного уравнения (6) и не может быть получена из общих априорных соображений.

Помимо решения (16) в [2] были получены также несколько других точных решений вида (2), которые не удовлетворяют соотношению (14) и здесь не приводятся (эти решения также не могут быть построены методом дифференциальных связей, основанных на одной связи).

Можно показать, что решение (16) не может быть получено методом дифференциальных связей с помощью одной связи вида $u_t = \varphi(x,t,u)$ (эта связь является более общей, чем (5) и (7)).

3. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

3.1. Использование метода дифференциальных связей

Рассмотрим нелинейные уравнения конвективной диффузии

$$c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u)u_x. \tag{17}$$

Анализ совместности двух дифференциальных уравнений – исходного уравнения (17) и дифференциальной связи (7) – проводится также, как и в разд. 2.1. В результате получается квадратичное по u_x соотношение, в котором функциональный коэффициент при u_x^2 совпадает с F_2 в (11).

Поэтому метод дифференциальных связей, основанный на одной связи (7), для уравнений конвективной диффузии вида (17) также приводит к соотношениям (13) и (14).

3.2. Использование прямого метода функционального разделения переменных

Можно показать, что нелинейное уравнение конвективной диффузии

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x - \frac{1}{2}a'_x(x)f(u)u_x, \tag{18}$$

где $a(x)$ и $f(u)$ – произвольные функции, имеет точные решения

$$\int \frac{f(u)}{u}du = kt \pm \sqrt{k}\int \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C; \tag{19}$$

C и k – произвольные постоянные.

Решения (19) являются специальными случаями решения вида (2) при $h = f/u$. Эти решения не удовлетворяют соотношению (14) и поэтому не могут быть получены методом дифференциальных связей, основанным на одной связи (5) (эти решения можно получить, если использовать две дифференциальные связи).

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА КЛЕЙНА–ГОРДОНА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

4.1. Использование метода дифференциальных связей

Рассмотрим теперь нелинейные уравнения типа Клейна–Гордона с переменными коэффициентами

$$c(x)u_{tt} = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u). \tag{20}$$

Для построения точных решений этого уравнения также используем более общую, чем (5), дифференциальную связь (7). Дифференцируя (7) по t, имеем

$$u_t = \theta\varphi \quad \Rightarrow \quad u_{tt} = \theta\varphi'_u u_t + \theta_t\varphi = \theta^2\varphi\varphi'_u + \theta_t\varphi. \tag{21}$$

Разрешим далее уравнение (20) относительно u_{xx}, а затем исключим u_{tt} с помощью (21). В результате получим

$$u_{xx} = -\frac{f'_u}{f}u_x^2 - \frac{a'_x}{a}u_x - \frac{b}{a}\frac{g}{f} + \frac{c}{af}(\theta^2\varphi\varphi'_u + \theta_t\varphi). \tag{22}$$

Дифференцируя (7) дважды по x и учитывая соотношение (22), находим u_{txx}. Дифференцируя (22) по t и используя первые два соотношения (9), находим смешанную производную u_{xxt}. Приравнивая смешанные производные третьего порядка

$u_{txx} = u_{xxt}$, получим выражение, квадратичное по u_x, в котором функциональный коэффициент при u_x^2 совпадает с F_2 в (11). Рассуждая далее, как в разд. 2.1, приходим к зависимости (14) между функциями f и h, которые входят в уравнение (20) и дифференциальную связь (7).

4.2. Использование прямого метода функционального разделения переменных

Рассмотрим нелинейное уравнение типа Клейна–Гордона специального вида

$$u_{tt} = [a(x)f(u)u_x]_x + \frac{x^2}{a(x)}g(u), \tag{23}$$

где $a(x)$ – произвольная функция, а функции $f(u)$ и $g(u)$ следующим образом выражаются через произвольную функцию $h = h(u)$:

$$f(u) = \frac{h'_u}{h^2}, \quad g(u) = -\frac{1}{h}\left(\frac{h'_u}{h^3}\right)'_u. \tag{24}$$

Используя метод, описанный в разд. 1.1, можно построить точное решение уравнения (23)–(24) в неявном виде:

$$\int h(u)du = t - \int \frac{xdx}{a(x)} + C. \tag{25}$$

Из первого соотношения (24) следует, что для этого решения не выполняется соотношение (14). Поэтому решение (25) не может быть получено методом дифференциальных связей с использованием одной дифференциальной связи (5).

5. УРАВНЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

5.1. Решения с функциональным разделением переменных в явном виде

Система уравнений ламинарного осесимметричного пограничного слоя [24] путем введения функции тока w (и подходящей новой независимой переменной z) сводится к одному нелинейному уравнению с частными производными третьего порядка с переменными коэффициентами [25]:

$$w_{tz} + w_z w_{xz} - w_x w_{zz} = \nu r^2(x) w_{zzz} + F(t,x), \tag{26}$$

где ν – кинематическая вязкость жидкости, функция $r = r(x)$ описывает форму обтекаемого тела (эта функция здесь считается произвольной), а функция $F(t,x)$ задает градиент давления.

Точные решения с функциональным разделением переменных уравнения (26) ищутся в явном виде [25]

$$w = fu(\xi) + gz + h, \quad \xi = \varphi z + \psi, \tag{27}$$

где $f = f(t,x)$, $g = g(t,x)$, $h = h(t,x)$, $\varphi = \varphi(t,x)$, $\psi = \psi(t,x)$, $u = u(\xi)$ – функции, которые надо найти. Подставляя (27) в уравнение (26) и заменяя z на $(\xi - \psi)/\varphi$, приходим к функционально-дифференциальному уравнению

$$\sum_{n=1}^{6} \Phi_n[t,x]\Psi_n[\xi] = \Psi_7[\xi]. \tag{28}$$

Здесь $\Phi_n[t,x]$ – дифференциальные формы, зависящие от функциональных коэффициентов (и их производных), входящих в (27) и (26) (все Φ_n не зависят от u), а $\Psi_n = \Psi_n[\xi]$ определяются так [25]:

$$\begin{gathered}\Psi_1 = 1, \quad \Psi_2 = u'_\xi, \quad \Psi_3 = (u'_\xi)^2, \quad \Psi_4 = u''_{\xi\xi}, \\ \Psi_5 = \xi u''_{\xi\xi}, \quad \Psi_6 = u u''_{\xi\xi}, \quad \Psi_7 = u'''_{\xi\xi\xi}.\end{gathered} \tag{29}$$

Переменные в уравнении (28) можно разделить, если предположить, что все $\Phi_n[t,x]$ в левой части (28) равны константам. В этом случае получим переопределенную систему уравнений с частными производными

$$\Phi_n[t,x] = a_n, \quad n = 1,\ldots,6 \quad (a_n = \text{const}), \tag{30}$$

и нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $u = u(\xi)$:

$$\sum_{n=1}^{6} a_n \Psi_n = \Psi_7. \tag{31}$$

Если для некоторых a_n удается найти частные решения нелинейной системы (28), тогда соответствующие решения уравнения (31) порождают точные решения исходного уравнения пограничного слоя (26).

5.2. Использование нескольких дифференциальных связей

Можно показать, что наиболее интересные решения вида (27), содержащие несколько произвольных функций, получаются при наличии двух или трех дифференциальных связей, которые являются линейными комбинациями функций Ψ_n, определенных в (29).

В табл. 1 приведены функции $u = u(\xi)$, которые порождают две или три дифференциальные связи между дифференциальными формами (29). Дифференциальные связи №№ 1–10 были описаны в [25]. Дифференциальные связи №№ 11–14 являются новыми, они порождают новые точные решения вида (27) уравнения (26).

Важно отметить, что дифференциальные связи в табл. 1 нельзя угадать априорно на начальной стадии исследования. Они выводятся в процессе анализа, основанном на представлении решения в виде (27) и уравнении (31).

Таблица 1. Порождающие функции u и соответствующие линейные связи между Ψ_n.

№	Порождающие функции u	Линейные связи между Ψ_n
1	$u = \xi^2$	$\Psi_4 = 2\Psi_1,\ \Psi_5 = \Psi_2,\ \Psi_6 = \frac{1}{2}\Psi_3$
2	$u = \xi^3$	$\Psi_5 = 2\Psi_2,\ \Psi_6 = \frac{2}{3}\Psi_3,\ \Psi_7 = 6\Psi_1$
3	$u = \xi^4$	$\Psi_5 = 3\Psi_2,\ \Psi_6 = \frac{3}{4}\Psi_3$
4	$u = \xi^{-1}$	$\Psi_5 = -2\Psi_2,\ \Psi_6 = 2\Psi_3,\ \Psi_7 = -6\Psi_3$
5	$u = \xi^n$	$\Psi_5 = (n-1)\Psi_2,\ \Psi_6 = \frac{n-1}{n}\Psi_3$ $(n \neq -1, 0, 1, 2, 3)$
6	$u = \exp\xi$	$\Psi_2 = \Psi_4 = \Psi_7,\ \Psi_6 = \Psi_3$
7	$u = \cosh\xi$	$\Psi_6 = \Psi_1 + \Psi_3,\ \Psi_7 = \Psi_2$
8	$u = \sinh\xi$	$\Psi_6 = \Psi_3 - \Psi_1,\ \Psi_7 = \Psi_2$
9	$u = \cos\xi$	$\Psi_6 = \Psi_3 - \Psi_1,\ \Psi_7 = -\Psi_2$
10	$u = \sin\xi$	$\Psi_6 = \Psi_3 - \Psi_1,\ \Psi_7 = -\Psi_2$
11	$u = \tanh\xi$	$\Psi_6 = -2\Psi_2 + 2\Psi_3,\ \Psi_7 = -2\Psi_2 - 3\Psi_6$
12	$u = \coth\xi$	$\Psi_6 = -2\Psi_2 + 2\Psi_3,\ \Psi_7 = -2\Psi_2 - 3\Psi_6$
13	$u = \tan\xi$	$\Psi_6 = -2\Psi_2 + 2\Psi_3,\ \Psi_7 = 2\Psi_2 + 3\Psi_6$
14	$u = \cot\xi$	$\Psi_6 = 2\Psi_2 + 2\Psi_3,\ \Psi_7 = 2\Psi_2 - 3\Psi_6$

Аналогичные точные решения, основанные на использовании нескольких дифференциальных связей, для других нелинейных уравнений гидродинамики были получены в [26, 27].

6. ЗАМЕЧАНИЯ О ПРЯМОМ МЕТОДЕ КЛАРКСОНА–КРУСКАЛА

Прямой метод Кларксона–Крускала [28] (см. также [5, 9, 19, 20, 29]) основан на поиске точных решений в виде $u = U(x,t,w(z))$, где $z = z(x,t)$. Функции $U(x,t,w)$ и $z(x,t)$ выбираются таким образом, что $w = w(z)$ должна удовлетворять одному обыкновенному дифференциальному уравнению для $w = w(z)$. Накладываемое условие, что функция w должна удовлетворять одному обыкновенному дифференциальному уравнению, является жестким и сильно ограничивает возможности данного метода, не позволяя его использовать для построения точных решений, обсуждаемых в данной статье.

Эффективность прямого метода Кларксона–Крускала может быть значительно увеличена, если допустить, что функция w может удовлетворять переопределенной системе нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений (или, другими словами, иметь несколько дифференциальных связей). Хорошей иллюстрацией сказанному являются результаты, приведенные в разд. 5.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310385-6) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10025).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Полянин А.Д.* Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с переменными коэффициентами: Метод поиска точных решений в неявной форме // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2019. Т. 8. № 4. С. 321–334.
2. *Polyanin A.D.* Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients // Int. J. Non-Linear Mech. 2019. V. 111. P. 95–105.
3. *Биркгоф Г.* Гидродинамика. М.: Иностранная литература, 1963.
4. *Pucci E., Saccomandi G.* Evolution equations, invariant surface conditions and functional separation of variables // Physica D. 2000. V. 139. P. 28–47.
5. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.
6. *Яненко Н.Н.* Теория совместности и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных. Труды IV Всесоюзного математического съезда. Ленинград: Наука. 1964. Т. 2. С. 247–252.
7. *Meleshko S.V.* Differential constraints and one-parameter Lie–Bäcklund groups // Sov. Math. Dokl. 1983. V. 28. P. 37–41.
8. *Galaktionov V.A.* Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions // Nonlinear Anal. Theor. Meth. Appl. 1994. V. 23. P. 1595–621.
9. *Olver P.J.* Direct reduction and differential constraints // Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. 1994. V. 444. P. 509–523.
10. *Kaptsov O.V.* Determining equations and differential constraints // Nonlinear Math. Phys. 1995. V. 2. № 3–4. P. 283–291.
11. *Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.
12. *Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov A.A.* Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics. Dordrecht: Kluwer, 1998.
13. *Kaptsov O.V., Verevkin I.V.* Differential constraints and exact solutions of nonlinear diffusion equations // J. Phys. A: Math. Gen. 2003. V. 36. P. 1401–1414.
14. *Bluman G.W., Cole J.D.* The general similarity solution of the heat equation // J. Math. Mech. 1969. V. 18. P. 1025–1042.

15. *Levi D., Winternitz P.* Nonclassical symmetry reduction: Example of the Boussinesq equation // J. Phys. A. 1989. V. 22. P. 2915–2924.
16. *Nucci M.C., Clarkson P.A.* The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions. An example of the Fitzhugh–Nagumo equation // Phys. Lett. A. 1992. V. 164. P. 49–56.
17. *Clarkson P.A.* Nonclassical symmetry reductions for the Boussinesq equation // Chaos, Solitons & Fractals. 1995. V. 5. P. 2261–2301.
18. *Olver P.J., Vorob'ev E.M.* Nonclassical and conditional symmetries. In: CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 3 (ed. *N.H. Ibragimov*). Boca Raton: CRC Press, 1996, P. 291–328.
19. *Clarkson P.A., Ludlow D.K., Priestley T.J.* The classical, direct and nonclassical methods for symmetry reductions of nonlinear partial differential equations // Methods Appl. Anal. 1997. V. 4. № 2. P. 173–195.
20. *Saccomandi G.* A personal overview on the reduction methods for partial differential equations // Note di Matematica. 2004/2005. V. 23. № 2. P. 217–248.
21. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
22. *Ibragimov N.H.* (ed.), CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Symmetries, Exact solutions and Conservation Laws, vol. 1. Boca Raton: CRC Press, 1994.
23. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Изд. Дом "Интеллект", 2010.
24. *Schlichting H.* Boundary Layer Theory. New York: McGraw-Hill, 1981.
25. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Unsteady axisymmetric boundary-layer equations: Transformations, properties, exact solutions, order reduction and solution method // Int. J. Non-Linear Mech. 2015. V. 74. P. 40–50.
26. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Direct functional separation of variables and new exact solutions to axisymmetric unsteady boundary-layer equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2016. V. 31. P. 11–20.
27. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* One-dimensional reductions and functional separable solutions to unsteady plane and axisymmetric boundary-layer equations for non-Newtonian fluids // Int. J. Non-Linear Mech. 2016. V. 85. P. 70–80.
28. *Clarkson P.A., Kruskal M.D.* New similarity reductions of the Boussinesq equation // J. Math. Phys. 1989. V. 30. P. 2201–2213.
29. *Ludlow D.K., Clarkson P.A., Bassom A.P.* New similarity solutions of the unsteady incompressible boundary-layer equations // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 2000. V. 53. P. 175–206.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2019, vol. 8, no. 5, pp. 445–452

Method of Functional Separation of Variables Can Give More Exact Solutions than Methods Based on a Single Differential Constraint

A. D. Polyanin[a,b,c,#]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia*
[b] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*
[c] *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005 Russia*
[#] *e-mail: polyanin@ipmnet.ru*

Received March 3, 2019; revised March 3, 2019; accepted Apris 9, 2019

Abstract—It is shown that the direct method of functional separation of variables can sometimes provide a larger number of exact solutions of nonlinear partial differential equations than the method of differential constraints (with a single constraint) and the nonclassical method of symmetry reduction (based on the invariant surface condition). This fact is illustrated on nonlinear reaction–diffusion and convection–diffusion equations with variable coefficients, nonlinear Klein–Gordon type equations, and hydrodynamic boundary layer equations. Some new exact solutions are given.

Keywords: direct method of functional separation of variables, method of differential constraints, nonclassical method of symmetry reduction, direct method of Clarkson and Kruskal, exact solutions

DOI: 10.1134/S2304487X19050067

REFERENCES

1. Polyanin A.D., Nelineynyye reaktsionno-diffuzionnyye uravneniya s peremennymi koeffitsiyentami: Metod poiska tochnykh resheniy v neyavnoy forme [Nonlinear reaction-diffusion equations with variable coefficients:

Method for finding exact solutions in implicit form] *Vestnik NIYaU MIFI*, 2019, vol. 8, no. 4, pp. 321–334.

2. Polyanin A.D., Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2019, vol. 111, pp. 95–105.
3. Birkhoff G., *Hydrodynamics*, Princeton: Princeton University Press, 1960.
4. Pucci E., Saccomandi G., Evolution equations, invariant surface conditions and functional separation of variables, *Physica D.*, 2000, vol. 139, pp. 28–47.
5. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed.*, Boca Raton: CRC Press, 2012.
6. Yanenko N.N., *Teoriya sovmestnosti i metody integrirovaniya sistem nelineynykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [The compatibility theory and methods of integration of systems of nonlinear partial differential equations], *Proc. All-Union Math. Congress*, Leningrad: Nauka, 1964, vol. 2, pp. 247–252 (in Russian).
7. Meleshko S.V., Differential constraints and one-parameter Lie–Bäcklund groups, *Sov. Math. Dokl.,* 1983, vol. 28, pp. 37–41.
8. Galaktionov V.A., Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions, *Nonlinear Anal. Theor. Meth. Appl.,* 1994, vol. 23, pp. 1595–621.
9. Olver P.J., Direct reduction and differential constraints, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 1994, vol. 444, pp. 509–523.
10. Kaptsov O.V., Determining equations and differential constraints, *Nonlinear Math. Phys.,* 1995, vol. 2, no. 3-4, pp. 283–291.
11. Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N., *Method of Differential Constraints and its Applications in Gas Dynamics*, Novosibirsk: Nauka, 1984 (in Russian).
12. Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov A.A., *Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics*, Dordrecht: Kluwer, 1998.
13. Kaptsov O.V., Verevkin I.V., Differential constraints and exact solutions of nonlinear diffusion equations, *J. Phys. A: Math. Gen.,* 2003, vol. 36, pp. 1401–1414.
14. Bluman G.W., Cole J.D., The general similarity solution of the heat equation, J. Math. Mech. 1969. vol. 18. pp. 1025–1042.
15. Levi D., Winternitz V., Nonclassical symmetry reduction: Example of the Boussinesq equation, *J. Phys. A*, 1989, vol. 22, pp. 2915–2924.
16. Nucci M.C., Clarkson P.A., The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions. An example of the Fitzhugh–Nagumo equation, *Phys. Lett. A*, 1992, vol. 164, pp. 49–56.
17. Clarkson P.A., Nonclassical symmetry reductions for the Boussinesq equation, *Chaos, Solitons and Fractals*, 1995, vol. 5, pp. 2261–2301.
18. Olver P.J., Vorob'ev E.M., Nonclassical and conditional symmetries. In: *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 3* (ed. N. H. Ibragimov), Boca Raton: CRC Press, 1996, pp. 291–328.
19. Clarkson P.A., Ludlow D.K., Priestley T.J., The classical, direct and nonclassical methods for symmetry reductions of nonlinear partial differential equations, *Methods Appl. Anal.,* 1997, vol. 4, no. 2, pp. 173–195.
20. Saccomandi G., A personal overview on the reduction methods for partial differential equations, *Note di Matematica*, 2004/2005, vol. 23, no. 2, pp. 217–248.
21. Ovsiannikov L.V., *Group Analysis of Differential Equations*, Boston: Academic Press, 1982.
22. Ibragimov N.H. (ed.), *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Symmetries, Exact solutions and Conservation Laws, vol. 1*, Boca Raton: CRC Press, 1994.
23. Kudryashov N.A., *Metody nelineynoy matematicheskoy fiziki* [Methods of Nonlinear Mathematical Physics], Dolgoprudnyi: Izd. Dom Intellekt, 2010 (in Russian).
24. Schlichting H., *Boundary Layer Theory*, New York: McGraw-Hill, 1981.
25. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Unsteady axisymmetric boundary-layer equations: Transformations, properties, exact solutions, order reduction and solution method, *Int. J. Non-Linear Mech.,* 2015, vol. 74, pp. 40–50.
26. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Direct functional separation of variables and new exact solutions to axisymmetric unsteady boundary-layer equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.,* 2016, vol. 31, pp. 11–20.
27. Polyanin A.D., Zhurov A.I., One-dimensional reductions and functional separable solutions to unsteady plane and axisymmetric boundary-layer equations for non-Newtonian fluids, *Int. J. Non-Linear Mech.,* 2016, vol. 85, pp. 70–80.
28. Clarkson P.A., Kruskal M.D., New similarity reductions of the Boussinesq equation, *J. Math. Phys.,* 1989, vol. 30, pp. 2201–2213.
29. Ludlow D.K., Clarkson P.A., Bassom A.P., New similarity solutions of the unsteady incompressible boundary-layer equations, *Quart. J. Mech. and Appl. Math.,* 2000, vol. 53, pp. 175–206.