

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.929+519.633

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2019 г. В. Г. Сорокин*

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

*e-mail: vsesor@gmail.com

Поступила в редакцию 28.08.2019 г.

После доработки 28.08.2019 г.

Принята к публикации 03.09.2019 г.

Рассматриваются два класса нелинейных телеграфных уравнений с запаздыванием:

$$\begin{aligned}u_{tt} + H(u)u_t &= (G(u)u_x)_x + F(u, w), \\ u_{tt} &= (G(u)u_x)_x + P(u)u_x + F(u, w),\end{aligned}$$

где $u = u(x, t)$, $w = u(x, t - \tau)$, τ – постоянное время запаздывания. Уравнения содержат нелинейный коэффициент переноса $G(u)$ степенного или экспоненциального вида, а также коэффициенты $H(u)$ и $P(u)$, которые либо являются постоянными, либо являются нелинейными и имеют вид, аналогичный виду $G(u)$. Кинетические функции F всех рассматриваемых уравнений состоят из одной или нескольких произвольных функций одного аргумента. С помощью модифицированного метода функциональных связей для рассматриваемых уравнений получены новые точные решения с обобщенным и функциональным разделением переменных, а также решения типа бегущей волны $u = U(z)$, $z = kx + \lambda t$. Все решения выражаются в элементарных функциях, содержат свободные параметры и могут быть использованы для формулировки тестовых задач, которые можно применять для оценки точности численных методов интегрирования нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием. Проведен обзор публикаций, содержащих точные решения уравнений с запаздыванием и описывающих методы построения точных решений.

Ключевые слова: телеграфные уравнения с запаздыванием, нелинейные дифференциально-разностные уравнения, точные решения, решения с разделяющимися переменными, решения типа бегущей волны

DOI: 10.1134/S2304487X19050079

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения с запаздыванием в частных производных используются в динамике популяций, биологии, биохимии, биомедицине, экологии, механике, физике, химии, теории управления и других областях (см., например, [1–14] и ссылки в них), а также встречаются в математической теории искусственных нейронных сетей, результаты которой применяются для обработки сигналов и изображений и в задачах о распознавании образов [15–17]. Такими уравнениями описываются явления и процессы, в которых скорости изменения искомого величин зависят не только от состояния системы в данный момент времени, но и от предыдущей эволюции процесса, в частности, от состояния системы в некоторый момент времени в прошлом.

Дифференциальные уравнения с запаздыванием обладают рядом качественных особенно-

стей (см. обзор [18]), существенным образом осложняющих получение адекватных численных решений и тестирование численных методов. Дело в том, что теоретические оценки точности численных решений нелинейных уравнений в частных производных даже при отсутствии запаздывания содержат константы, которые обычно не могут быть вычислены априорно (особенно это касается типичных для уравнений с запаздыванием негладких решений). Практическая сходимость численных методов, основанная на измельчении расчетной сетки, также не может в полной мере гарантировать надежность используемых схем и точность расчетов (особенно вблизи значений параметров задачи, соответствующих неустойчивым решениям).

Во многих случаях наиболее эффективным способом оценки области применимости и точности численных методов является прямое срав-

нение численных и точных решений тестовых задач. Термин “точное решение” нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием мы применяем в случаях, когда решение выражается:

(i) в элементарных функциях или через определенные/неопределенные интегралы;

(ii) через решения обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием или без него (или систем таких уравнений);

(iii) через решения линейных уравнений в частных производных (или систем таких уравнений).

Допустимы комбинации решений (i)–(iii). Данное определение обобщает термин “точное решение”, используемый в [19] для нелинейных уравнений в частных производных без запаздывания.

Вторая часть статьи посвящена обзору публикаций, содержащих точные решения уравнений в частных производных с запаздыванием или описывающих методы их построения. В третьей части статьи приводятся решения типа бегущей волны, а в четвертой – решения с обобщенным и функциональным разделением переменных, полученные с помощью модифицированного метода функциональных связей, для двух классов нелинейных телеграфных уравнений с запаздыванием:

$$u_{tt} + H(u)u_t = (G(u)u_x)_x + F(u, w), \quad (1)$$

$$u_{tt} = (G(u)u_x)_x + P(u)u_x + F(u, w), \quad (2)$$

где $u = u(x, t)$, $w = u(x, t - \tau)$, τ – постоянное время запаздывания. Все полученные решения выражаются в элементарных функциях и содержат свободные параметры. Полученные точные решения могут быть использованы для формулировки тестовых задач, которые можно применять для оценки точности численных методов интегрирования уравнений в частных производных с запаздыванием.

2. ПУБЛИКАЦИИ ПО ТОЧНЫМ РЕШЕНИЯМ

Многие публикации содержат выраженные в элементарных функциях точные решения с обобщенным или функциональным разделением переменных различных классов нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием. Решения строятся методом функциональных связей [2, 20] или его модификациями [21–23]. Метод функциональных связей заключается в поиске решений с обобщенным

$$u = \sum_{n=1}^N \varphi_n(x) \psi_n(t)$$

или функциональным

$$u = U(z), \quad z = \sum_{n=1}^N \varphi_n(x) \psi_n(t),$$

разделением переменных, которые должны удовлетворять одной из двух функциональных связей:

$$z(u, w) = p(x), \quad w = u(x, t - \tau);$$

$$z(u, w) = q(x), \quad w = u(x, t - \tau).$$

Таким образом находится допустимый вид точного решения, а окончательный вид определяется после подстановки полученного в исходное уравнение.

В [2, 10, 20, 24–26] построены точные решения с обобщенным и функциональным разделением переменных нелинейных уравнений реакционно-диффузионного типа

$$u_t = au_{xx} + F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (3)$$

в которых кинетическая функция F зависит от одной или нескольких произвольных функций одного/двух аргументов, либо от свободных параметров; приводятся также решения более сложных уравнений с запаздыванием более высокого порядка:

$$L[u] = M[u] + F(u, w), \quad L[u] = \sum_{i=1}^n b_i(t) \frac{\partial^i u}{\partial t^i},$$

$$M[u] = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} k_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{m=1}^m c_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i};$$

$$u = u(x, t), \quad w = u(x, t - \tau), \quad x = (x_1, \dots, x_m).$$

Решения типа бегущей волны для уравнений вида (3) приводятся в [27, 28].

Работа [29] содержит точные решения с обобщенным разделением переменных (обобщенная бегущая волна) вида $u = u(z)$, $z = t + \theta(x)$ нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием и переменными коэффициентами

$$c(x)u_t = [a(x)u_x]_x + b(x)F(u, w),$$

$$w = u(x, t - \tau);$$

описан метод построения таких решений, основанный на группировке коэффициентов уравнения с целью сведения его к обыкновенному дифференциальному уравнению с запаздыванием второго порядка. Точные решения подобных уравнений рассматриваются также в [30, 31].

Точные решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с несколькими запаздываниями рассматриваются в [10], а с переменным во времени запаздыванием – в [10, 20]. В [22, 23, 32, 33] приводятся точные решения уравнений с нелинейным коэффициентом переноса

$$u_t = [G(u)u_x]_x + F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau).$$

Работа [34] содержит точные решения нелинейных уравнений с запаздыванием типа Клейна–Гордона

$$u_{tt} = au_{xx} + F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (4)$$

Работы [35–37] содержат точные решения гиперболических уравнений с запаздыванием вида (1) при $H(u) \equiv \text{const}$ (с нелинейным коэффициентом переноса $G(u)$ и с $G(u) \equiv \text{const}$).

В [38–40] содержится большое число точных решений нелинейных систем реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием. Метод “генерирующих уравнений” построения таких решений предложен в [40].

В [25, 41] содержатся точные решения дифференциально-разностных уравнений теплопроводности и диффузии вида

$$v_t = \text{div}[f(u)\nabla u] + g(v), \quad v = u(\mathbf{x}, t + \tau),$$

а в [42] – дифференциально-разностных моделей типа Навье–Стокса для описания движения вязкой несжимаемой жидкости вида

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – вектор скорости жидкости, $\mathbf{v} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t + \tau)$, τ – время релаксации, p – отношение давления к плотности жидкости, ν – кинематическая вязкость, ∇ – оператор градиента, Δ – оператор Лапласа.

Ряд работ посвящен поиску точных решений уравнений в частных производных с запаздыванием методами группового анализа. В [43] исследовались нелинейные реакционно-диффузионные уравнения вида (3); было получено четыре уравнения, которые допускают инвариантные решения (для двух из них были найдены только вырожденные решения, линейные по x). В [44] удалось установить восемь нелинейных и два линейных уравнения типа Клейна–Гордона (4), допускающих инвариантные решения. Одно линейное и семь нелинейных уравнений типа Клейна–Гордона с переменным запаздыванием удалось отыскать в [45].

3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ТИПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

3.1. Предварительные замечания

В данном разделе приводятся выраженные в элементарных функциях точные решения типа бегущей волны $u = U(z)$, $z = kx + \lambda t$ телеграфных уравнений вида (1) с нелинейным коэффициентом переноса $G(u)$ степенного или экспоненциального вида. При этом коэффициент $H(u)$ либо является постоянным, $H(u) \equiv \sigma > 0$, либо является нелинейным и имеет вид, аналогичный виду коэффициента $G(u)$. Из полученных в этом разделе решений можно легко получить решения соответствующих уравнений вида (2), если произвести небольшие изменения в некоторых формулах. Покажем это.

Подставляя $u = U(z)$ в уравнения (1) и (2), получаем обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\lambda^2 U'' + \lambda H(U)U' = k^2(G(U)U')' + F(U, W), \quad (5)$$

$$\lambda^2 U'' = k^2(G(U)U')' + kP(U)U' + F(U, W), \quad (6)$$

где $W = U(z - \lambda\tau)$, штрих обозначает производную по z . Если положить $H(U) \equiv P(U)$, то оба уравнения (5) и (6) можно записать в виде одного уравнения:

$$\lambda^2 U'' + \epsilon H(U)U' = k^2(G(U)U')' + F(U, W),$$

в котором $\epsilon = \lambda$ для уравнения (5) и $\epsilon = -k$ для уравнения (6). Таким образом, вид решений типа бегущей волны будет одинаковым для уравнений (1) и (2) с точностью до значения коэффициента ϵ . Описанные далее в этом разделе решения получены для уравнения (1), но записаны с использованием коэффициента ϵ , что позволяет легко получить решения и для уравнения (2).

Во всех уравнениях функции f , g и h являются произвольными; параметры a , σ , τ – любые положительные числа; остальные параметры, если не указано иное, могут принимать любые значения.

3.2. Решения типа бегущей волны, выраженные в элементарных функциях

Уравнение 1. Уравнение

$$u_{tt} + \sigma u_t = a(u^n u_x)_x + u^{1-2n} f(u^n - w^n) \quad (7)$$

допускает решение типа бегущей волны степенного вида

$$u = (n\beta z + C_1)^{1/n}, \quad z = kx + \lambda t, \quad \beta = \frac{\epsilon\sigma}{ak^2}. \quad (8)$$

Параметр λ – корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$(n-1)\beta^2 \lambda^2 + f(n\beta \lambda \tau) = 0.$$

Выбирая $\epsilon = \lambda$ в выражении для β из (8), получаем решение уравнения (7), которое является частным случаем уравнения (1). Выбирая $\epsilon = -k$, получаем решение уравнения

$$u_{tt} = a(u^n u_x)_x + \sigma u_x + u^{1-2n} f(u^n - w^n),$$

которое является частным случаем уравнения (2).

Для краткости далее приводятся только уравнения из класса (1), а соответствующие уравнения из класса (2) опускаются.

Уравнение 2. Уравнение

$$u_{tt} + \sigma u_t = a(u^n u_x)_x + u^{n+1} f(w/u) + w^{n+1} g(w/u)$$

допускает решение типа бегущей волны экспоненциального вида

$$u = C_1 \exp(\beta z), \quad z = kx + \lambda t, \quad \beta = -\frac{\epsilon\sigma}{\lambda^2}.$$

Параметр k (или λ) определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$ak^2(n+1)\beta^2 + f(e^{-\beta\lambda\tau}) + e^{-(n+1)\beta\lambda\tau}g(e^{-\beta\lambda\tau}) = 0.$$

Уравнение 3. Уравнение

$$u_{tt} + u^n u_t = a(u^n u_x)_x + u^{n+1}f(w/u) + w^{n+1}g(w/u) + uh(w/u),$$

допускает решение типа бегущей волны экспоненциального вида

$$u = C_1 \exp(\beta z), \quad z = kx + \lambda t.$$

Параметры k и λ определяются из алгебраических (трансцендентных) уравнений:

$$ak^2(n+1)\beta^2 - \epsilon\beta + f(e^{-\beta\lambda\tau}) + e^{-(n+1)\beta\lambda\tau}g(e^{-\beta\lambda\tau}) = 0, \\ \lambda^2\beta^2 - h(e^{-\beta\lambda\tau}) = 0.$$

Уравнение 4. Уравнение

$$u_{tt} + u^m u_t = a(u^n u_x)_x + u^{2m-2n+1}f(u^{n-m} - w^{n-m}) + u^{2m-n+1}g(u^{n-m} - w^{n-m})$$

допускает решение типа бегущей волны степенного вида

$$u = ((n-m)\beta z + C_1)^{1/(n-m)}, \quad z = kx + \lambda t.$$

Параметры k и λ определяются из алгебраических (трансцендентных) уравнений:

$$ak^2\beta^2(m+1) - \epsilon\beta + g((n-m)\beta\lambda\tau) = 0, \\ (n-m-1)\beta^2\lambda^2 + f((n-m)\beta\lambda\tau) = 0.$$

Уравнение 5. Уравнение

$$u_{tt} + \sigma u_t = a(uu_x)_x - \epsilon\sigma\lambda^2 e^{-\beta u} + u e^{-2\beta u} f(e^{\beta u} - e^{\beta w}), \\ \beta = -ak^2/\lambda^2,$$

допускает решение типа бегущей волны логарифмического вида

$$u = \frac{1}{\beta} \ln(-\beta\lambda^2 z + C_1), \quad z = kx + \lambda t. \quad (9)$$

Параметр k (или λ) — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$a^2 k^4 \lambda^2 + f(ak^2 \lambda \tau) = 0.$$

Уравнение 6. Уравнение

$$u_{tt} + u e^{-\beta u} u_t = a(uu_x)_x + u e^{-2\beta u} f(e^{\beta u} - e^{\beta w}), \\ \beta = -ak^2/\lambda^2,$$

допускает решение типа бегущей волны (9), для которого параметр k (или λ) определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$(a^2 k^4 + \epsilon)\lambda^2 + f(ak^2 \lambda \tau) = 0.$$

Уравнение 7. Уравнение

$$u_{tt} + \sigma u_t = a(e^{\beta u} u_x)_x + bu + e^{\beta u} u^2 f(w/u) + e^{\beta u} wg(w/u)$$

допускает решение типа бегущей волны экспоненциального вида

$$u = C_1 \exp(\gamma z), \quad z = kx + \lambda t. \quad (10)$$

Параметры k , λ , γ определяются из системы трех алгебраических (трансцендентных) уравнений:

$$b - \gamma^2 \lambda^2 - \epsilon \gamma \sigma = 0, \\ ak^2 \gamma^2 \beta + f(e^{-\gamma \lambda \tau}) = 0, \\ ak^2 \gamma^2 e^{\gamma \lambda \tau} + g(e^{-\gamma \lambda \tau}) = 0.$$

Уравнение 8. Уравнение

$$u_{tt} + e^{\beta u} u_t = a(e^{\beta u} u_x)_x + bu + e^{\beta u} u^2 f(w/u) + e^{\beta u} wg(w/u)$$

допускает решение типа бегущей волны (10), параметры k , λ и γ которого находятся из системы трех алгебраических (трансцендентных) уравнений:

$$b - \gamma^2 \lambda^2 = 0, \\ ak^2 \gamma^2 \beta + f(e^{-\gamma \lambda \tau}) = 0, \\ (ak^2 \gamma^2 - \epsilon \gamma) e^{\gamma \lambda \tau} + g(e^{-\gamma \lambda \tau}) = 0.$$

Уравнение 9. Уравнение

$$u_{tt} + \sigma e^{n\beta u} u_t = a(e^{\beta u} u_x)_x + e^{(n-1)\beta u} f(e^{\beta u} - e^{\beta w}) + e^{-2\beta u} g(e^{\beta u} - e^{\beta w})$$

допускает решение типа бегущей волны логарифмического вида

$$u = \frac{1}{\beta} \ln(\gamma z + C_1), \quad z = kx + \lambda t.$$

Параметры λ и γ находятся из системы алгебраических (трансцендентных) уравнений:

$$\gamma^2 \lambda^2 + \beta g(\gamma \lambda \tau) = 0, \\ \gamma \epsilon \sigma - \beta f(\gamma \lambda \tau) = 0.$$

Уравнение 10. Уравнение

$$u_{tt} + \ln u u_t = [(a \ln u + b)u_x]_x + uf(w/u) + wg(w/u),$$

допускает решение типа бегущей волны экспоненциального вида

$$u = \exp(\gamma z), \quad z = kx + \lambda t, \quad \gamma = \frac{\epsilon}{ak^2}.$$

Параметр k (или λ) — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$(a+b)k^2 - \lambda^2 + \frac{a^2 k^4}{\epsilon^2} [f(e^{-\gamma \lambda \tau}) + e^{-\gamma \lambda \tau} g(e^{-\gamma \lambda \tau})] = 0.$$

4. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

4.1. Решения нелинейных телеграфных уравнений вида (1)

Далее приводятся точные решения телеграфных уравнений вида (1) с нелинейным коэффициентом переноса $G(u)$ степенного или экспоненциального вида; коэффициент $H(u)$ либо является постоянным, $H(u) \equiv \sigma > 0$, либо является нелинейным и имеет вид, аналогичный виду коэффициента $G(u)$.

Во всех уравнениях функции f , g и h являются произвольными; параметры a , σ , τ – любые положительные числа; остальные параметры, если не указано иное, могут принимать любые значения.

Уравнение 11. Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} + \sigma u_t = a(u^n u_x)_x + u f(w/u) + w g(w/u) + u^{n+1} h(w/u). \quad (11)$$

Уравнение (11) допускает решение с разделяющимися переменными

$$u = e^{\beta t} \varphi(x),$$

где параметр β определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\beta^2 + \sigma \beta = f(e^{-\beta \tau}) + e^{-\beta \tau} g(e^{-\beta \tau}), \quad (12)$$

функция $\varphi(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$a(\varphi^n \varphi')' + \varphi^{n+1} h(e^{-\beta \tau}) = 0. \quad (13)$$

Здесь и далее штрих обозначает полную производную функции по соответствующей переменной.

При $n \neq -1$ замена $\theta = \varphi^{n+1}$ позволяет свести уравнение (13) к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами. При $n = -1$ применяем замену $\theta = \ln \varphi$.

При $h(w/u) \equiv b = \text{const}$ уравнение (11) допускает решение с разделяющимися переменными

$$u = \varphi(x) \psi(t). \quad (14)$$

Здесь функция $\varphi(x)$ определяется по формулам:

$$\varphi(x) = \begin{cases} (C_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} x))^{\frac{1}{n+1}} & \text{при } \lambda > 0; \\ (C_1 \exp(-\sqrt{-\lambda} x) + C_2 \exp(\sqrt{-\lambda} x))^{\frac{1}{n+1}} & \text{при } \lambda < 0; \\ C_1 \exp\left(-\frac{b}{2a} x^2 + C_2 x\right) & \text{при } n = -1, \end{cases}$$

где $\lambda = b(n+1)/a$, а функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\psi''(t) + \sigma \psi'(t) = \psi(t) f(\psi(t-\tau)/\psi(t)) + \psi(t-\tau) g(\psi(t-\tau)/\psi(t)). \quad (15)$$

Уравнение (15) допускает частное решение $\psi(t) = A e^{\beta t}$, где A – произвольная постоянная, параметр β определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения (12).

При $h(w/u) \equiv 0$ уравнение (11) допускает решение с разделяющимися переменными вида (14), в котором функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ определяются, соответственно, из обыкновенного дифференциального уравнения и обыкновенного дифференциального уравнения с запаздыванием:

$$a(\varphi^n \varphi')' = s \varphi, \quad (16)$$

$$\psi''(t) + \sigma \psi'(t) = s \psi^{n+1}(t) + \psi(t) f(z) + \psi(t-\tau) g(z), \quad z = \psi(t-\tau)/\psi(t). \quad (17)$$

При $s = 0$ уравнение (17) переходит в уравнение (15), а уравнение (16) имеет решение

$$\varphi(x) = \begin{cases} (C_1 x + C_2)^{1/(n+1)} & \text{при } n \neq -1, \\ C_1 \exp(C_2 x) & \text{при } n = -1. \end{cases}$$

При $n \neq -2, n \neq 0$ уравнение (16) имеет частное решение

$$\varphi(x) = A x^{2/n}, \quad A = \left[\frac{s n^2}{2a(n+2)} \right]^{1/n}.$$

Уравнение 12. Уравнение

$$u_{tt} + \sigma u_t = a(u^{-1/2} u_x)_x + u^{1/2} f(z) + w^{1/2} g(z) + h(z), \\ z = u^{1/2} - w^{1/2},$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = [t \varphi(x) + \psi(x)]^2,$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$2a\varphi'' + \varphi[f(\tau\varphi) + g(\tau\varphi)] - 2\sigma\varphi^2 = 0, \\ 2a\psi'' + \psi[f(\tau\varphi) + g(\tau\varphi)] - 2\sigma\varphi\psi = \\ = 2\varphi^2 + \tau\varphi g(\tau\varphi) - h(\tau\varphi).$$

Частное решение этой системы имеет вид

$$\varphi = A, \quad \psi = \frac{2A^2 + \tau A g(\tau A) - h(\tau A)}{4a} x^2 + C_1 x + C_2,$$

где константа A определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$f(\tau A) + g(\tau A) - 2\sigma A = 0.$$

Уравнение 13. Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} + \sigma u_t = a(e^{\beta u} u_x)_x + b e^{\beta u} + f(u - w). \quad (18)$$

При $b = 0$ уравнение (18) допускает решение в виде суммы функций разных аргументов

$$u = \frac{1}{\beta} \ln(C_1 x^2 + C_2 x + C_3) + \psi(t),$$

где функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\psi''(t) + \sigma \psi'(t) = \frac{2aC_1}{\beta} e^{\beta \psi(t)} + f(\psi(t) - \psi(t - \tau)).$$

При $b\beta > 0$ уравнение (18) допускает другое решение в виде суммы функций разных аргументов

$$u = \frac{1}{\beta} \ln[C_1 + C_2 \cos(\lambda x) + C_3 \sin(\lambda x)] + \psi(t),$$

$$\lambda = \sqrt{b\beta/a},$$

где функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\psi''(t) + \sigma \psi'(t) = bC_1 e^{\beta \psi(t)} + f(\psi(t) - \psi(t - \tau)). \quad (19)$$

При $b\beta < 0$ уравнение (18) также допускает решение в виде суммы функций разных аргументов

$$u = \frac{1}{\beta} \ln[C_1 + C_2 \exp(-\lambda x) + C_3 \exp(\lambda x)] + \psi(t),$$

$$\lambda = \sqrt{-b\beta/a},$$

где функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием (19).

Уравнение 14. Уравнение

$$u_{tt} + \sigma u_t = [(a \ln u + b)u_x]_x - cu \ln u + uf(w/u),$$

$$c > 0,$$

допускает решение с разделяющимися переменными

$$u = \exp(\lambda x)\psi(t), \quad \lambda = \pm\sqrt{c/a},$$

где функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\psi''(t) + \sigma \psi'(t) = (a + b)\lambda^2 \psi(t) + \psi(t)f(\psi(t - \tau)/\psi(t)). \quad (20)$$

Уравнение (20) допускает частное решение $\psi(t) = Ae^{\beta t}$, где A — произвольная постоянная, а β определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\beta^2 + \sigma\beta - (a + b)\lambda^2 - f(e^{-\beta\tau}) = 0.$$

Уравнение 15. Уравнение

$$u_{tt} + \sigma u_t = a[g'(u)u_x]_x + b + \left[-A^2 \frac{g''(u)}{(g'(u))^3} + \sigma A \frac{1}{g'(u)} \right] f(g(u) - g(w))$$

допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде

$$g(u) = At - \frac{b}{2a} x^2 + C_1 x + C_2,$$

где константа A определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $f(A\tau) = 1$.

Уравнение 16. Уравнение

$$u_{tt} + u^n u_t = a(u^n u_x)_x + bu^{n+1} + uf(w/u) + wg(w/u)$$

допускает решение с разделяющимися переменными

$$u = e^{(b+\lambda)t} \varphi(x).$$

Здесь функция $\varphi(x)$ определяется по формулам:

$$\varphi(x) = \begin{cases} C_1 (\cosh(\sqrt{\lambda(n+1)/a} x + C_2))^{1/(n+1)} & \text{при } \lambda(n+1) > 0; \\ C_1 (\cos(\sqrt{-\lambda(n+1)/a} x + C_2))^{1/(n+1)} & \text{при } \lambda(n+1) < 0; \\ C_1 \exp\left(\frac{\lambda x^2}{2a} + C_2 x\right), & \text{при } n = -1, \end{cases} \quad (21)$$

где параметр λ определяется из трансцендентного (алгебраического) уравнения

$$(b + \lambda)^2 - f(e^{-(b+\lambda)\tau}) - e^{-(b+\lambda)\tau} g(e^{-(b+\lambda)\tau}) = 0.$$

Уравнение 17. Уравнение

$$u_{tt} + u^n u_t = a(u^n u_x)_x + bu + u^{n+1} f(w/u) + w^{n+1} g(w/u),$$

$$b > 0,$$

допускает решение с разделяющимися переменными

$$u = e^{\pm\sqrt{b}t} \varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ определяется по формулам (21), в которых параметр λ имеет вид:

$$\lambda = \pm\sqrt{b} - f(e^{\mp\sqrt{b}\tau}) - e^{\mp(n+1)\sqrt{b}\tau} g(e^{\mp\sqrt{b}\tau}).$$

Здесь и далее в аналогичных ситуациях берутся одновременно либо только верхние, либо только нижние знаки.

Уравнение 18. Уравнение

$$u_{tt} + u^{-1/2} u_t = a(u^{-1/2} u_x)_x + u^{1/2} f(z) + w^{1/2} g(z) + h(z),$$

$$z = u^{1/2} - w^{1/2},$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = [t\varphi(x) + \psi(x)]^2,$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$2a\varphi'' + \varphi[f(\tau\varphi) + g(\tau\varphi)] = 0,$$

$$2a\psi'' + \psi[f(\tau\varphi) + g(\tau\varphi)] =$$

$$= 2\varphi^2 + 2\varphi + \tau\varphi g(\tau\varphi) - h(\tau\varphi).$$

Частное решение этой системы имеет вид

$$\varphi = A,$$

$$\psi = \frac{1}{4a}[2A^2 + 2A + \tau Ag(\tau A) - h(\tau A)]x^2 + C_1 x + C_2,$$

где константа A определяется из трансцендентного (алгебраического) уравнения

$$f(\tau A) + g(\tau A) = 0.$$

Уравнение 19. Уравнение

$$u_{tt} + u^{-2/3} u_t = a(u^{-2/3} u_x)_x + u^{1/3} f(z) + w^{1/3} g(z) + h(z),$$

$$z = u^{1/3} - w^{1/3},$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = [t\varphi(x) + \psi(x)]^3,$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$3a\varphi'' - 6\varphi^3 + \varphi[f(\tau\varphi) + g(\tau\varphi)] = 0,$$

$$3a\psi'' + \psi[f(\tau\varphi) + g(\tau\varphi)] - 6\varphi^2\psi =$$

$$= 3\varphi + \tau\varphi g(\tau\varphi) - h(\tau\varphi).$$

Частное решение этой системы имеет вид

$$\varphi = A,$$

$$\psi = \frac{1}{6a}[3A + \tau Ag(\tau A) - h(\tau A)]x^2 + C_1 x + C_2,$$

где константа A определяется из трансцендентного (алгебраического) уравнения

$$f(\tau A) + g(\tau A) = 6A^2.$$

Уравнение 20. Уравнение

$$u_{tt} + e^{\beta u} u_t = a(e^{\beta u} u_x)_x - be^{-2\beta u} + e^{-\beta u} f(e^{\beta u} - e^{\beta w}),$$

$$b\beta > 0,$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{\sqrt{b\beta}}{2a} x^2 + C_1 x + \sqrt{b\beta} t + C_2 \right),$$

где параметр b определяется из условия

$$f(\sqrt{b\beta} \tau) = 0.$$

Уравнение 21. Уравнение

$$u_{tt} + e^{-\beta u} u_t = a(e^{\beta u} u_x)_x + b + e^{-2\beta u} f(e^{\beta u} - e^{\beta w})$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = \frac{1}{\beta} \ln \left(-\frac{b\beta}{2a} x^2 + C_1 x + \lambda t + C_2 \right),$$

где параметр λ определяется из трансцендентного (алгебраического) уравнения

$$\beta f(\lambda \tau) + \lambda^2 - \lambda = 0.$$

4.2. Решения нелинейных телеграфных уравнений вида (2)

Далее приводятся точные решения телеграфных уравнений вида (2) с нелинейным коэффициентом переноса $G(u)$ степенного или экспоненциального вида; коэффициент $P(u)$ либо является постоянным, $P(u) \equiv \sigma > 0$, либо является нелинейным и имеет вид, аналогичный виду коэффициента $G(u)$.

Во всех уравнениях функции f , g и h являются произвольными; параметры a , σ , τ – любые положительные числа; остальные параметры, если не указано иное, могут принимать любые значения.

Уравнение 22. Уравнение

$$u_{tt} = a(u^n u_x)_x + \sigma u_x - bu^{n+1} + uf(w/u) + wg(w/u),$$

$$b(n+1) > 0,$$

допускает решение с разделяющимися переменными

$$u = e^{\lambda x} \psi(t), \quad \lambda = \pm \sqrt{\frac{b}{a(n+1)}},$$

где функция $\psi(t)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения с запаздыванием

$$\psi''(t) - \psi(t)f(\psi(t-\tau)/\psi(t)) -$$

$$- \psi(t-\tau)g(\psi(t-\tau)/\psi(t)) - \sigma\lambda\psi(t) = 0.$$

Уравнение 23. Уравнение

$$u_{tt} = a(u^n u_x)_x + u^n u_x + bu^{n+1} + uf(w/u) + wg(w/u)$$

допускает решение с разделяющимися переменными

$$u = \varphi(x)\psi(t).$$

Здесь функция $\varphi(x)$ определяется по формулам:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \theta(x)[C_1 \exp(-\sqrt{\lambda}x) + C_2 \exp(\sqrt{\lambda}x)]^{\frac{1}{n+1}} & \text{при } \lambda > 0, \quad n \neq -1; \\ \theta(x)[C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)]^{\frac{1}{n+1}} & \text{при } \lambda < 0, \quad n \neq -1; \\ \theta(x)(C_1 x + C_2)^{\frac{1}{n+1}} & \text{при } \lambda = 0, \quad n \neq -1, \\ C_1 \exp(-bx) + C_2 \exp(-x/a) & \text{при } n = -1, \end{cases} \quad (22)$$

где $\lambda = \frac{1-4ab(n+1)}{4a^2}$, $\theta(x) = \exp\left(-\frac{x}{2a(n+1)}\right)$, а функция $\psi(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению с запаздыванием

$$\psi''(t) - \psi(t)f(\psi(t-\tau)/\psi(t)) - \psi(t-\tau)g(\psi(t-\tau)/\psi(t)) = 0. \quad (23)$$

Уравнение (23) допускает частное решение $\psi(t) = Ae^{\beta t}$, где A — произвольная постоянная, а параметр β определяется из трансцендентного (алгебраического) уравнения

$$\beta^2 - f(e^{-\beta\tau}) - e^{-\beta\tau}g(e^{-\beta\tau}) = 0.$$

Уравнение 24. Уравнение

$$u_{tt} = a(u^n u_x)_x + u^n u_x + bu + u^{n+1}f(w/u) + w^{n+1}g(w/u), \quad b > 0 \quad (24)$$

при любом n допускает решение с разделяющимися переменными

$$u = e^{\pm\sqrt{b}\tau}\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ определяется по формулам (22), а параметр b определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$b - f(e^{\mp\sqrt{b}\tau}) - e^{\mp(n+1)\sqrt{b}\tau}g(e^{\mp\sqrt{b}\tau}) = 0.$$

Уравнение (24) при $n \neq -1$ допускает другое решение с разделяющимися переменными:

$$u = C_1 \exp(\pm\sqrt{b}t)[\exp(-x/a) + C_2]^{\frac{1}{n+1}},$$

а при $n = -1$ имеет также решение

$$u = C_1 \exp(\pm\sqrt{b}t + C_2 \exp(-x/a)).$$

В обоих случаях параметр b определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$f(e^{\mp\sqrt{b}\tau}) + e^{\mp(n+1)\sqrt{b}\tau}g(e^{\mp\sqrt{b}\tau}) = 0.$$

Уравнение 25. Уравнение

$$u_{tt} = a(u^{-1/2}u_x)_x + u^{-1/2}u_x + u^{1/2}f(z) + w^{1/2}g(z) + h(z), \\ z = u^{1/2} - w^{1/2},$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = [t\varphi(x) + \psi(x)]^2,$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$2a\varphi'' + 2\varphi' + \varphi[f(\tau\varphi) + g(\tau\varphi)] = 0, \\ 2a\psi'' + 2\psi' + \psi[f(\tau\varphi) + g(\tau\varphi)] = \\ = 2\varphi^2 + \tau\varphi g(\tau\varphi) - h(\tau\varphi).$$

Частное решение этой системы имеет вид

$$\varphi = A,$$

$$\psi = \frac{x}{2}[2A^2 + \tau Ag(\tau A) - h(\tau A)] + C_1 \exp(-x/a) + C_2,$$

где константа A определяется из трансцендентного (алгебраического) уравнения

$$f(\tau A) + g(\tau A) = 0.$$

Уравнение 26. Уравнение

$$u_{tt} = a(u^{-2/3}u_x)_x + u^{-2/3}u_x + u^{1/3}f(z) + w^{1/3}g(z) + h(z), \\ z = u^{1/3} - w^{1/3},$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = [t\varphi(x) + \psi(x)]^3,$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$3a\varphi'' + 3\varphi' - 6\varphi^3 + \varphi[f(\tau\varphi) + g(\tau\varphi)] = 0, \\ 3a\psi'' + 3\psi' + \psi[f(\tau\varphi) + g(\tau\varphi)] - 6\varphi^2\psi = \\ = \tau\varphi g(\tau\varphi) - h(\tau\varphi).$$

Частное решение этой системы имеет вид

$$\varphi = A,$$

$$\psi = \frac{x}{3}[\tau Ag(\tau A) - h(\tau A)] + C_1 \exp(-x/a) + C_2,$$

где константа A определяется из трансцендентного (алгебраического) уравнения

$$f(\tau A) + g(\tau A) = 6A^2.$$

Уравнение 27. Уравнение

$$u_{tt} = a(e^{\beta u} u_x)_x + e^{\beta u} u_x - be^{-2\beta u} + e^{-\beta u} f(e^{\beta u} - e^{\beta w}),$$

$$b\beta > 0,$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = \frac{1}{\beta} \ln(C_1 e^{-x/a} \pm \sqrt{b\beta} t + C_2),$$

где параметр b определяется из условия

$$f(\pm\sqrt{b\beta}t) = 0.$$

Уравнение 28. Уравнение

$$u_{tt} = a(e^{\beta u} u_x)_x + e^{\beta u} u_x - be^{-2\beta u} + f(e^{\beta u} - e^{\beta w}),$$

$$b\beta > 0,$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = \frac{1}{\beta} \ln(C_1 e^{-x/a} - \beta x f(\pm\sqrt{b\beta}t) \pm \sqrt{b\beta} t + C_2).$$

5. КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Рассмотрены телеграфные уравнения с запаздыванием, содержащие степенные или экспоненциальные нелинейности, а также произвольные функции одного аргумента. Построены точные решения типа бегущей волны, а также решения с обобщенным и функциональным разделением переменных. Все полученные решения выражены в элементарных функциях, содержат свободные параметры и могут быть использованы для формулировки тестовых задач, которые можно применять для оценки точности численных методов решения нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием.

Автор благодарит А.Д. Полянина за внимание к работе и полезные замечания.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310385-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Браун Д.А., Захаров А.П. К вопросу о численном расчете пространственно-распределенных динамических систем с запаздыванием по времени // Вестник Пермского универ. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2012. Вып. 4. № 12. С. 32–41.
2. Полянин А.Д., Журов А.И. Метод функциональных связей: Точные решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием // Вестник Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ". 2013. Т. 2. № 4. С. 425–431.
3. Bocharov G.A., Rihan F.A. Numerical modelling in biosciences using delay differential equations // J. Comput. Appl. Math. 2000. V. 125. P. 183–199.
4. Faria T., Trofimchuk S. Nonmonotone travelling waves in a single species reaction–diffusion equation with delay // J. Differ. Equ. 2006. V. 228. P. 357–376.
5. Herz A.V.M. et al. Viral dynamics in vivo: limitations on estimates of intracellular delay and virus decay // Proc. Nat. Acad. Sci. 1996. V. 93. P. 7247–7251.
6. Huang J., Zou X. Traveling wavefronts in diffusive and cooperative Lotka–Volterra system with delays // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 271. P. 455–466.
7. Kyrychko Y.N., Hogan S.J. On the use of delay equations in engineering applications // J. of Vibration and Control. 2010. V. 16. № 7–8.
8. Mittler J.E. et al. Influence of delayed viral production on viral dynamics in HIV-1 infected patients // Math. Biosci. 1998. V. 152. P. 143–163.
9. Nelson P.W., Perelson A.S. Mathematical analysis of delay differential equation models of HIV-1 infection // Math. Biosci. 2002. V. 179. P. 73–94.
10. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2014. V. 19. P. 409–416.
11. Shakeri F., Dehghan M. Solution of delay differential equations via a homotopy perturbation method // Math. Comput. Model. 2008. V. 48. P. 486–498.
12. Walter H.O. Topics in Delay Differential Equations // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 2014. V. 116. № 2. P. 87–114.
13. Wu J., Zou X. Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay // J. Dyn. Differ. Equ. 2001. V. 13. № 3. P. 651–687.
14. Wu J.H. Introduction to neural dynamics and signal transmission delay. Berlin: de Gruyter, 2002.
15. Lu J.G. Global exponential stability and periodicity of reaction-diffusion delayed recurrent neural networks with Dirichlet boundary conditions // Chaos, Solitons and Fractals. 2008. V. 35. P. 116–125.
16. Wang L., Gao Y. Global exponential robust stability of reaction-diffusion interval neural networks with time-varying delays // Phys. Lett. A. 2006. V. 350. P. 342–348.
17. Wu J., Campbell S.A., Bélair J. Time-Delayed Neural Networks: Stability and Oscillations // Encyclopedia of Computational Neuroscience. New York: Springer, 2014. P. 1–8.
18. Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: математические модели и качественные особенности // Вестник НИЯУ "МИФИ". 2017. Т. 6. № 1. С. 41–55.
19. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition. Boca Raton: CRC Press, 2012.
20. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2014. V. 19. № 3. P. 417–430.
21. Полянин А.Д., Журов А.И. Некоторые методы построения точных решений нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздывающим аргументом и переменными коэффициентами пе-

- реноса // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2015. Т. 4. № 2. С. 107–118.
22. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2014. V. 67. P. 267–277.
 23. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nonlinear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions // *Appl. Math. Lett.* 2014. V. 37. P. 43–48.
 24. Полянин А.Д. Точные решения с обобщенным разделением переменных нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием // *Теор. осн. хим. техн.* 2015. Т. 49. № 1. С. 112–119.
 25. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2013. V. 54. P. 115–126.
 26. Polyanin A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction–diffusion equations // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2014. V. 59. P. 16–22.
 27. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nonlinear delay reaction–diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions // *Appl. Math. Lett.* 2015. V. 46. P. 38–43.
 28. Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: Точные решения типа бегущей волны // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2015. Т. 4. № 2. С. 119–126.
 29. Polyanin A.D. Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay and variable coefficients // *Appl. Math. Lett.* 2019. Vol. 90. P. 49–53.
 30. Polyanin A.D. Functional separable solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with variable coefficients // *Appl. Math. Comput.* 2019. V. 347. P. 282–292.
 31. Polyanin A.D. Functional separable solutions of nonlinear convection–diffusion equations with variable coefficients // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2019. V. 73. P. 379–390.
 32. Полянин А.Д. Точные решения новых классов реакционно-диффузионных уравнений, содержащих запаздывание и произвольные функции // *Теор. осн. хим. техн.* 2015. Т. 49. № 2. С. 175–181.
 33. Полянин А.Д., Журов А.И. Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием и переменными коэффициентами переноса: решения с обобщенным и функциональным разделением переменных // *Математическое моделирование и численные методы.* 2015. № 8. С. 3–37.
 34. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Generalized and functional separable solutions to non-linear delay Klein – Gordon equations // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2014. V. 19. № 8. P. 2676–2689.
 35. Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Точные решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений гиперболического типа с запаздыванием // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2014. Т. 3. № 2. С. 141–148.
 36. Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Вязьмин А.В. Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения гиперболического типа с запаздыванием: точные решения, глобальная неустойчивость // *Математическое моделирование и численные методы.* 2014. № 4. С. 53–73.
 37. Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Вязьмин А.В. Точные решения и качественные особенности нелинейных гиперболических реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием // *Теор. осн. хим. техн.* 2015. Т. 49. № 5. С. 527–541.
 38. Сорокин В.Г. Точные решения некоторых нелинейных уравнений и систем уравнений в частных производных с запаздыванием // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2016. Т. 5. № 3. С. 199–219.
 39. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Non-linear instability and exact solutions to some delay reaction–diffusion systems // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2014. V. 62. P. 33–40.
 40. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The generating equations method: Constructing exact solutions to delay reaction–diffusion systems and other non-linear coupled delay PDEs // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2015. V. 71. P. 104–115.
 41. Полянин А.Д. Точные решения дифференциально-разностных уравнений тепло-и массопереноса с конечным временем релаксации // *Теор. осн. хим. техн.* 2014. Т. 48. № 2. С. 182–189.
 42. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of nonlinear differential-difference equations of a viscous fluid with finite relaxation time // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2013. V. 57. P. 116–122.
 43. Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay // *J. Math. Anal. Appl.* 2008. V. 338. № 1. P. 448–466.
 44. Long F.-S., Meleshko S.V. On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein – Gordon equation with a delay // *Math. Methods Appl. Sci.* 2016. V. 39. № 12. P. 3255–3270.
 45. Long F.-S., Meleshko S.V. Symmetry analysis of the nonlinear two-dimensional Klein – Gordon equation with a time-varying delay // *Math. Methods Appl. Sci.* 2017. V. 40. № 13. P. 4658–4673.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta “MIFI”, 2019, vol. 8, no. 5, pp. 453–464

Exact Solutions of Nonlinear Telegraph Equations with Delay

V. G. Sorokin[#]

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia

[#]*e-mail: vsesor@gmail.com*

Received August 28, 2019; revised August 28, 2019; accepted September 3, 2019

Abstract—The following nonlinear telegraph equations with delay are considered:

$$\begin{aligned}u_{tt} + H(u)u_t &= (G(u)u_x)_x + F(u, w), \\u_{tt} &= (G(u)u_x)_x + P(u)u_x + F(u, w),\end{aligned}$$

where $u = u(x; t)$, $w = u(x; t - \tau)$, and τ is the constant delay time. The equations contain the nonlinear transfer coefficient $G(u)$ of the power-law or exponential type, as well as the coefficients $H(u)$ and $P(u)$ that either are constant or are nonlinear and have the form similar to the form of $G(u)$. The kinetic functions F of all the equations consist of one or several arbitrary functions of one argument. For the equations under consideration, new exact travelling-wave solutions, as well as new exact solutions with generalized and functional separation of variables, have been obtained by means of the modified method of functional constraints. All the solutions are expressed in terms of elementary functions, contain free parameters, and can be used for the formulation of test problems to assess the accuracy of numerical methods for solving nonlinear partial differential equations with delay. Publications presenting exact solutions of equations with delay and describing methods for constructing exact solutions have been reviewed.

Keywords: telegraph equations with delay, nonlinear differential-difference equations, exact solutions, travelling-wave solutions, separable solutions

DOI: 10.1134/S2304487X19050079

REFERENCES

- Bratsun D.A., Zakharov A.P. K voprosu o chislennom raschete prostranstvenno-raspredelennykh dinamicheskikh sistem s zapazdyvaniem po vremeni [On the numerical calculation of spatially extended dynamical systems with time delay]. *Vestnik Permskogo Universiteta. Ser. Matematika, Mekhanika, Informatika*, 2012, vol. 4, no. 12, pp. 32–41 (in Russian).
- Polyanin A.D., Zhurov A.I. Metod funktsional'nykh svyazey: Tochnye resheniya nelineynykh reakcionno-diffuzionnykh uravneniy s zapazdyvaniem [Method of functional relations: Exact solutions of nonlinear reaction-diffusion equations with delay] *Vestnik NIYaU MIFI*, 2013, vol. 2, no. 4, pp. 425–431 (in Russian).
- Bocharov G.A., Rihan F.A. Numerical modelling in biosciences using delay differential equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 2000, vol. 125, pp. 183–199.
- Faria T., Trofimchuk S. Nonmonotone travelling waves in a single species reaction-diffusion equation with delay. *J. Differ. Equ.*, 2006, vol. 228, pp. 357–376.
- Herz A.V.M. et al. Viral dynamics in vivo: limitations on estimates of intracellular delay and virus decay. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1996, vol. 93, pp. 7247–7251.
- Huang J., Zou X. Traveling wavefronts in diffusive and cooperative Lotka–Volterra system with delays. *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, vol. 271, pp. 455–466.
- Kyrychko Y.N., Hogan S.J. On the use of delay equations in engineering applications. *J. of Vibration and Control*, 2010, vol. 16, no. 7–8.
- Mittler J.E. et al. Influence of delayed viral production on viral dynamics in HIV-1 infected patients. *Math. Biosci.*, 1998, vol. 152, pp. 143–163.
- Nelson P.W., Perelson A.S. Mathematical analysis of delay differential equation models of HIV-1 infection. *Math. Biosci.*, 2002, vol. 179, pp. 73–94.
- Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction-diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, pp. 409–416.
- Shakeri F., Dehghan M. Solution of delay differential equations via a homotopy perturbation method. *Math. Comput. Model.*, 2008, vol. 48, pp. 486–498.
- Walter H.O. Topics in Delay Differential Equations. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 2014, vol. 116, no. 2, pp. 87–114.
- Wu J., Zou X. Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay. *J. Dyn. Differ. Equ.*, 2001, vol. 13, no. 3, pp. 651–687.
- Wu J.H. *Introduction to neural dynamics and signal transmission delay*. Berlin: de Gruyter, 2002.
- Lu J.G. Global exponential stability and periodicity of reaction-diffusion delayed recurrent neural networks with Dirichlet boundary conditions. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, vol. 35, pp. 116–125.
- Wang L., Gao Y. Global exponential robust stability of reaction-diffusion interval neural networks with time-varying delays. *Phys. Lett. A*, 2006, vol. 350, pp. 342–348.
- Wu J., Campbell S.A., Bélair J. Time-Delayed Neural Networks: Stability and Oscillations. *Encyclopedia of Computational Neuroscience*. New York: Springer, 2014, pp. 1–8.
- Polyanin A. D., Sorokin V.G. Reakcionno-diffuzionnye uravneniya s zapazdyvaniem: matematicheskie modeli i kachestvennye osobennosti [Reaction-diffusion equations with delay: mathematical models and qualitative features]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2017, vol. 6, no. 1, pp. 41–55 (in Russian).
- Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition*. Boca Raton: CRC Press, 2012.
- Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 417–430.
- Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nekotorye metody postroyeniya tochnykh resheniy nelineynykh reakcionno-diffuzionnykh uravneniy s zapazdyvayushchim argumentom i

- peremennymi koeficientami perenosy [Some methods for the construction of exact solutions of nonlinear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2015, vol. 4, no. 2, pp. 107–118 (in Russian).
22. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 67, pp. 267–277.
 23. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nonlinear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions. *Appl. Math. Lett.*, 2014, vol. 37, pp. 43–48.
 24. Polyanin A. D. Exact generalized separable solutions to nonlinear delay reaction–diffusion equations. *Theor. Found. Chem. En+*, 2015, vol. 49, no. 1, pp. 107–114.
 25. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2013, vol. 54, pp. 115–126.
 26. Polyanin A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction–diffusion equations. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 59, pp. 16–22.
 27. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nonlinear delay reaction–diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions. *Appl. Math. Lett.*, 2015, vol. 46, pp. 38–43.
 28. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nelinejnye reakcionno-diffuzionnye uravneniya s zapazdyvaniem: Tochnye resheniya tipa begushchej volny [Nonlinear delay reaction–diffusion equations: Exact traveling wave solutions]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2015, vol 4, no. 2, pp. 119–126 (in Russian).
 29. Polyanin A.D. Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay and variable coefficients. *Appl. Math. Lett.*, 2019, vol. 90, pp. 49–53.
 30. Polyanin A.D. Functional separable solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with variable coefficients. *Appl. Math. Comput.*, 2019, vol. 347, pp. 282–292.
 31. Polyanin A. D. Functional separable solutions of nonlinear convection–diffusion equations with variable coefficients. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2019, vol. 73, pp. 379–390.
 32. Polyanin A.D. Exact solutions to new classes of reaction–diffusion equations containing delay and arbitrary functions. *Theor. Found. Chem. En+*, 2015, vol. 49, no. 2, pp. 169–175.
 33. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nelinejnye reakcionno-diffuzionnye uravneniya s zapazdyvaniem i peremennymi koeficientami perenosy: resheniya s obobshchennym i funktsional'nym razdeleniem peremennykh [Nonlinear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients: generalized and functional separable solutions]. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 8, pp. 3–37 (in Russian).
 34. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Generalized and functional separable solutions to non-linear delay Klein – Gordon equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 8, pp. 2676–2689.
 35. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Tochnye resheniya nelinejnykh reakcionno-diffuzionnykh uravnenij giperbolicheskogo tipa s zapazdyvaniem [Exact solutions to nonlinear delay reaction–diffusion equations of hyperbolic type]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2014, vol.3, no 2, pp. 141–148 (in Russian).
 36. Polyanin A.D., Sorokin V.G., and Vyazmin A.V. Nelinejnye reakcionno-diffuzionnye uravneniya giperbolicheskogo tipa s zapazdyvaniem: tochnye resheniya, global'naya neustojchivost' [Nonlinear delay reaction–diffusion equations of hyperbolic type: Exact solutions and global instability]. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 4, pp. 53–73 (in Russian).
 37. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Vyazmin A.V. Exact solutions and qualitative features of nonlinear hyperbolic reaction–diffusion equations with delay. *Theor. Found. Chem. En+*, 2015, vol. 49, no. 5, pp. 622–635.
 38. Sorokin V.G. Tochnye resheniya nekotorykh nelinejnykh uravnenij i sistem uravnenij v chastnykh proizvodnykh s zapazdyvaniem [Exact solutions of some nonlinear partial differential equations with delay and systems of such equations]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2016, vol. 5, no. 3, pp. 199–219 (in Russian).
 39. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Non-linear instability and exact solutions to some delay reaction–diffusion systems. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 62, pp. 33–40.
 40. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The generating equations method: Constructing exact solutions to delay reaction–diffusion systems and other non-linear coupled delay PDEs. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2015, vol. 71, pp. 104–115.
 41. Polyanin A.D. Exact solutions to differential-difference heat and mass transfer equations with a finite relaxation time. *Theor. Found. Chem. En+*, 2014, vol. 48, no 2, pp. 167–174.
 42. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of nonlinear differential-difference equations of a viscous fluid with finite relaxation time. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2013, vol. 57, pp. 116–122.
 43. Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 338, no. 1, pp. 448–466.
 44. Long F.-S., Meleshko S.V. On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein – Gordon equation with a delay. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2016, vol. 39, no. 12, pp. 3255–3270.
 45. Long F.-S., Meleshko S.V. Symmetry analysis of the nonlinear two-dimensional Klein – Gordon equation with a time-varying delay. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2017, vol. 40, no. 13, pp. 4658–4673.