ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2019, том 8, № 5, с. 480–486

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 004.421

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ПОЛИНОМА НАИЛУЧШЕГО РАВНОМЕРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

© 2019 г. К. Я. Кудрявцев*

Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

**e-mail: KYKudryavtsev@mephi.ru*

Поступила в редакцию 10.02.2019 г.
После доработки 20.06.2019 г.
Принята к публикации 25.06.2019 г.

Аппроксимация множества экспериментальных точек с помощью множества функций является актуальной во многих инженерно-технических исследованиях. Для решения таких задач вводится понятие линейного нормированного пространства, элементами которого являются ограниченные вещественные функции, а также вводится понятие метрики (нормы) – меры близости между элементами пространства. Во многих случаях требуется аппроксимировать сложную функцию полиномом заданного порядка и при этом обеспечить максимальное отклонение полинома от функции на величину, не бóльшую некоторой заданной погрешности. В этом случае целесообразно использовать чебышевскую норму и искать полином наилучшего равномерного приближения. Однако для отыскания полинома наилучшего равномерного приближения не существует универсальных эффективных алгоритмов. В данной статье предлагается простой и эффективный алгоритм построения полинома наилучшего равномерного приближения для непрерывно дифференцируемых функций. Алгоритм состоит из трех этапов. На первом строится полином степени *n* с помощью метода наименьших квадратов. На втором строится специальная система нелинейных уравнений. На третьем этапе в результате решения системы нелинейных уравнений любым итерационным методом находятся коэффициенты полинома наилучшего равномерного приближения и точки чебышевского альтернанса. В статье приводится реализация данного алгоритма в системе SciLab 6.0 и проводится его экспериментальное исследование.

Ключевые слова: аппроксимация функций, полином наилучшего равномерного приближения, точки чебышевского альтернанса

DOI: 10.1134/S2304487X1905002X

ВВЕДЕНИЕ

Задача, связанная с приближением заданной функции (или множества экспериментальных точек) с помощью другого, более простого множества функций, является актуальной во многих инженерно-технических исследованиях. Для решения данной задачи вводится понятие линейного нормированного пространства [1], элементами которого являются ограниченные вещественные функции, определенные на отрезке [*a*, *b*] вещественной оси, а также вводится понятие метрики (нормы) – меры близости между элементами пространства. Наиболее часто используемыми нормами являются – чебышевская:

$$\|f\|_c = \max_{[a,b]} |f(x)| \tag{1}$$

и гильбертова

$$\|f\|_{L_2} = \left[\int_a^b [f(x)]^2 dx \right]^{1/2}. \tag{2}$$

Наилучшее приближение будем искать в виде полинома степени *n*:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i. \tag{3}$$

При использовании гильбертовой нормы коэффициенты полинома (полином наилучшего среднеквадратического приближения) вычисляются по известной формуле [1]:

$$\mathbf{a} = [F^T F]^{-1} F^T \vec{f}, \tag{4}$$

где $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_n]^T$ – вектор размерности $n + 1$ искомых коэффициентов полинома, $F^T =$
$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_N^n \end{vmatrix}$ – матрица размерности $(n+1) \times N$, (N – количество точек аппроксимации), $\vec{f} = [f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N)]^T$ – вектор размерности N, где $f(x_i)$ – значение функции f в точках x_i.

Аппроксимация на основе гильбертовой нормы (также известная как аппроксимация на основе метода наименьших квадратов) обеспечивает хорошее приближение полиномом аппроксимируемой функции на большей части отрезка $[a, b]$, но может сильно отличаться от нее на небольших участках. При решении ряда задач (например, в задачах на прочность материалов) такой подход может оказаться недопустимым, т.к. существенное отклонение даже на небольшом участке может привести к разрушению конструкции.

Поэтому для подобных задач целесообразно использовать чебышевскую норму и искать полином наилучшего равномерного приближения. Однако получение аналитического выражения, подобного (4) для чебышевской нормы, не представляется возможным. В настоящее время работ, посвященных нахождению полиномов наилучшего равномерного приближения, относительно немного. Как правило, они посвящены решению частных задач. В [1] приводится несколько примеров построения полиномов наилучшего равномерного приближения. Так, для функции $f(x) = Ax^n + p_{n-1}(x)$ ($A \neq 0$, $p_{n-1}(x)$ – заданный многочлен степени $n - 1$), среди многочленов степени $n - 1$ $\left(q_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right)$ наименее отклоняющимся является многочлен вида

$$q_{n-1}^0(x) = A\left(x^n - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)\right) + p_{n-1}(x),$$

где $T_n(x)$ – полином Чебышева степени n.

П.Л. Чебышев внес огромный вклад в построение полиномов равномерного приближения. Многочлены Чебышева 1-го рода определяются итерационно:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

или в явном виде:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad |x| \le 1;$$
$$T_n(x) = \mathrm{c}h(n \operatorname{arcch} x), \quad |x| \ge 1;$$

Доказано [1], что для произвольного n и произвольной функции $f(x)$, интегрируемой со второй степенью на интервале $[-1,1]$ с весом $w = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, многочлен

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j(f) T_j(x),$$

где

$$a_j(f) = \gamma_j \int_{-1}^{1} f(x) T_j(x) (1 - x^2)^{-1/2} dx,$$
$$\gamma_0 = 1/\pi, \quad \gamma_j = 2/\pi, \quad j = 1, 2, \dots$$

является многочленом наилучшего приближения.

Среди всех многочленов степени n вида $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j T_j(x)$ наименее отклоняющимся от него многочленом степени $n - 1$ на интервале $[-1, 1]$ будет многочлен $\sum_{j=0}^{n-1} a_j T_j(x)$.

В [1] описывается "телескопический" метод нахождения полинома наилучшего равномерного приближения. Представляя функцию $f(x)$ на интервале $[-1, 1]$ в виде ряда Тейлора $f(x) \approx P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ и считая, что известно такое n, при котором погрешность представления меньше заданной, предлагается получить новое приближение в виде многочлена степени $n - 1$ в виде

$$f(x) \approx P_{n-1}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j + a_n \left(x^n - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)\right).$$

Если погрешность нового приближения оказывается снова меньше заданной, то можно повторить процесс понижения порядка полинома.

В работе [2] предлагается искать наилучшее равномерное приближение на основе сплайнов. В [3] подробно рассмотрена теория Чебышева равномерного приближения функций, даны описание и доказательство сходимости алгоритма Е.А. Ремеза. В монографиях [4, 5] затрагиваются практические аспекты реализации алгоритмов построения полиномов наилучшего равномерного приближения.

В работе [6] рассмотрены базовые положения, которым должен удовлетворять полином наилучшего равномерного приближения, но отсутствует простой и эффективный алгоритм вычисления коэффициентов полинома.

В данной статье предлагается достаточно простой, универсальный алгоритм построения полинома наилучшего равномерного приближения для непрерывно дифференцируемых функций. Приводится реализация данного алгоритма в системе SciLab 6.0 и примеры экспериментального исследования алгоритма, иллюстрирующие его эффективность.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Известно [1, 3, 6], что полином наилучшего среднеквадратического приближения (4) обладает тем свойством, что разность

$$Delta(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{5}$$

имеет не менее $n + 1$ нуля.

В самом деле, предположив обратное, т.е. что количество нулей $m \le n$, составим многочлен

$$Q_m(x) = \prod_{j=1}^{m}(x - x_j) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k,$$

где x_j – нули функции $Delta(x)$. Так как $Delta(x)$ и $Q_m(x)$ имеют одни и те же нули, то их произведение $\left[f(x) - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right] Q_m(x)$ не меняет знак и, следовательно, скалярное произведение в гильбертовом пространстве отлично от нуля, т.е.

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right] \sum_{k=0}^{m} b_k x^k dx \ne 0.$$

Выполняя преобразование подынтегрального выражения, можно записать

$$\sum_{k=0}^{m} b_k \left[\int_a^b f(x) x^k dx - \sum_{i=0}^{n} a_i \int_a^b x^i x^k dx\right] \ne 0.$$

Но для полинома наилучшего среднеквадратического приближения коэффициенты a_i выбираются таким образом, чтобы выражение в квадратной скобке обращалось в ноль. Полученное противоречие доказывает утверждение, что разность $Delta(x)$ имеет не менее $n + 1$ нуля и, по крайней мере, не менее $n + 2$ раза меняет знак.

С другой стороны, согласно теореме Чебышева [1], полином наилучшего равномерного приближения степени n должен иметь, по крайней мере, $n + 2$ точки альтернанса, в которых для полинома

$$C_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$$

выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} f(x_i) - C_n(x_i) &= (-1)^i \| f - C_n \|_c = \\ &= (-1)^i \max_{[a,b]} |f(x) - C_n(x)| \end{aligned} \tag{6}$$

Поэтому для построения полинома наилучшего равномерного приближения предлагается на первом этапе воспользоваться полиномом наилучшего среднеквадратического приближения и далее на втором этапе "улучшить" его коэффициенты и добиться равномерного приближения.

Получим основные соотношения, которые будут использованы для построения полинома наилучшего равномерного приближения $C_n(x)$. Обозначим неизвестные $n + 2$ точки чебышевского альтернанса как $\xi_0 < \xi_1 < \cdots \xi_n < \xi_{n+1}$ и введем обозначение максимального отклонения полинома наилучшего равномерного приближения от аппроксимируемой функции

$$L = \max_{[a,b]} |f(x) - C_n(x)|.$$

Следует отметить, что для выпуклых функций крайние точки альтернанса совпадают с концами отрезка $[a,b]$, т.е. $\xi_0 = a$, $\xi_{n+1} = b$

Для $n + 2$ точек чебышевского альтернанса справедливы соотношения:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} c_i a^i - f(a) + L = 0; \\ \sum_{i=0}^{n} c_i \xi_1^{\,i} - f(\xi_1) - L = 0; \\ \sum_{i=0}^{n} c_i \xi_2^{\,i} - f(\xi_2) + L = 0; \\ \cdots \\ \sum_{i=0}^{n} c_i \xi_n^{\,i} - f(\xi_n) + (-1)^n L = 0; \\ \sum_{i=0}^{n} c_i b^i - f(b) + (-1)^{n+1} L = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Кроме того, для внутренних точек альтернанса $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, если функция $f(x)$ является непрерывно дифференцируемой, можно записать:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} i c_i \xi_1^{\,i-1} - \frac{df}{dx}(\xi_1) = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} i c_i \xi_2^{\,i-1} - \frac{df}{dx}(\xi_2) = 0; \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^{n} i c_i \xi_n^{\,i-1} - \frac{df}{dx}(\xi_n) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Объединяя системы нелинейных уравнений (7) и (8), получим систему из $2n + 2$ уравнений с $2n + 2$ неизвестными: $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ – n точек чебышевского альтернанса, $c_0, c_1, \cdots, c_n$ – $n+1$ коэффициент полинома наилучшего равномерного приближения $C_n(x)$, L – значение максимального отклонения. Вводя унифицированные обозначения, перепишем объединенную систему уравнений в следующем виде:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n+1} x_i x_{n+2}^i - f(x_{n+2}) + x_{2n+2} = 0; \\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i x_{n+3}^i - f(x_{n+3}) - x_{2n+2} = 0; \\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i x_{2n+1}^i - f(x_{2n+1}) + x_{2n+2} = 0; \\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i a^i - f(a) - x_{2n+2} = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} i x_i x_{n+2}^{i-1} - \frac{df}{dx}(x_{n+2}) = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} i x_i x_{n+3}^{i-1} - \frac{df}{dx}(x_{n+3}) = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} i x_i x_{2n+1}^{i-1} - \frac{df}{dx}(x_{2n+1}) = 0; \\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i b^i - f(b) + x_{2n+2} = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ соответствуют $c_0, c_1, \ldots, c_n$; $x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n+1}$ соответствуют $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$; x_{2n+2} соответствует L.

Решая систему уравнений (9) каким-либо численным итерационным методом [2], найдем коэффициенты полинома наилучшего равномерного приближения, а также точки чебышевского альтернанса и максимальное отклонение полинома от аппроксимируемой функции.

Для успешного решения системы (9) желательно иметь хорошее начальное приближение. Для этого предлагается построить полином наилучшего среднеквадратического приближения согласно формуле (5) и использовать его коэффициенты в качестве начальных значений для $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, точки максимального отклонения полинома от функции $f(x)$ в качестве начальных точек альтернанса $x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n+1}$ и отклонение в точке a в качестве начального значения x_{2n+2}.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ПОЛИНОМА

Исходя из вышеизложенного, алгоритм построения полинома представим в виде последовательности следующих этапов:

Этап 1. Построение полинома наилучшего среднеквадратического приближения.

Задавая на интервале $[a,b]$ N точек, вычислим значения аппроксимируемой функции $f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$ (или используем множеств из N экспериментальных точек). Используя формулу (4), найдем коэффициенты a_i $(i = 0, 1, \ldots n)$ полинома наилучшего среднеквадратического приближения $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

Этап 2. Построение системы нелинейных уравнений (9).

Для построения системы нелинейных уравнений (9) необходимо вычислить производную аппроксимируемой функции (или полинома $P_n(x)$, полученного на этапе 1) и задать начальные условия переменным $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+2}$. Для непрерывно дифференцируемых функций вычисление производной в точках альтернанса является довольно простой задачей. В крайнем случае, можно воспользоваться приближенным вычислением производных [6]. Задание начальных значений основано на результатах этапа 1.

В качестве начальных значений для $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ используем коэффициенты полинома $a_0, a_1, \cdots, a_n$ полученные на первом этапе.

Для переменных $x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n+1}$ в качестве начальных значений желательно выбрать точки максимального отклонения $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ от функции $f(x)$. Это можно сделать, построив, например, с помощью системы SciLab [7] график функции $Delta(x)$ (5).

Начальное значение x_{2n+2} положим равным $Delta(a)$.

Этап 3. Решение системы нелинейных уравнений (9).

Решение системы нелинейных уравнений проводится любым итерационным методом с использованием или без использования матрицы Якоби (если ее вычисление оказывается громоздким). В системе SciLab [7] для решения нелинейных уравнений имеется функция fsolve. Успешное решение системы уравнений (9) позволяет найти коэффициенты полинома наилучшего равномерного приближения, точки чебышевского альтернанса и максимальное отклонение полинома от аппроксимируемой функции.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА

Экспериментальное исследование предложенного алгоритма проводилось в системе SciLab 6.0. В качестве аппроксимируемой была выбрана функция $f(x) = \sqrt{x}$ на интервале $[1, 64]$.

Для простоты выберем в качестве аппроксимирующего полинома полином второго порядка.

На первом этапе построим полином наилучшего среднеквадратического приближения. Задав

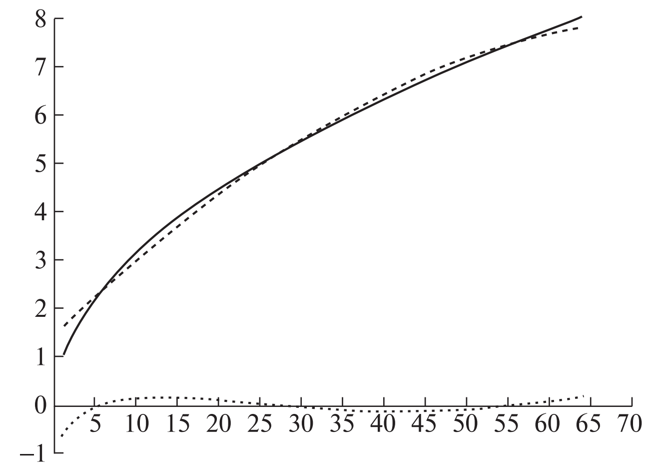

Рис. 1. Полином наилучшего среднеквадратического приближения.

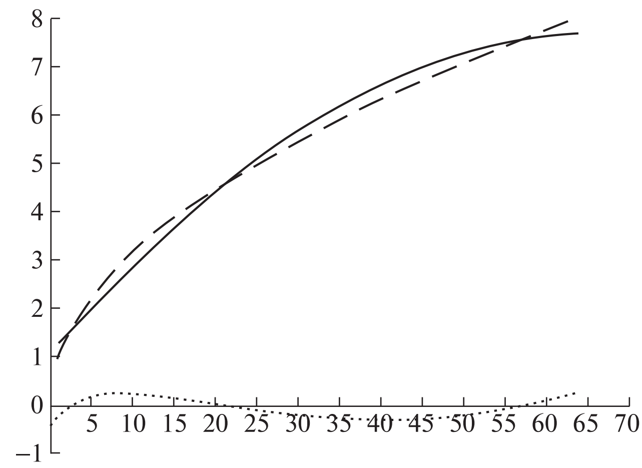

Рис. 2. Полином наилучшего равномерного приближения.

$N = 64$, ($x_i = i$, $i = 1, 2, \ldots, 64$), по формуле (4) найдем полином:

$$P_2(x) = 1.45 + 0.166x - 0.00104x^2.$$

На рис. 1 представлены графики функции $f(x) = \sqrt{x}$ (сплошная линия), полинома $P_2(x)$ (пунктирная линия), и функции $Delta(x) = P_2(x) - \sqrt{x}$ (точечная линия) на интервале [1, 64].

Как видно, полином $P_2(x)$ достаточно хорошо аппроксимирует функцию $\sqrt{x}$ и наибольшее отклонение наблюдается в точках (приблизительно) 1, 12, 45, 64. Легко видеть, что построенный полином не является полиномом равномерного приближения, наибольшее отклонение имеется в начале интервала и составляет более 0.5.

На втором этапе необходимо построить систему нелинейных уравнений и задать начальные значения переменным. В данном случае система нелинейных уравнений содержит 6 переменных: x_1, x_2, x_3 – коэффициенты полинома наилучшего равномерного приближения, x_4, x_5 – внутренние точки чебышевского альтернанса, x_6 – максимальное отклонение.

$$\begin{cases} x_1 + x_2x_4 + x_3x_4^2 - \sqrt{x_4} + x_6 = 0; \\ x_1 + x_2x_5 + x_3x_5^2 - \sqrt{x_5} - x_6 = 0; \\ x_1 + x_2a + x_3a^2 - \sqrt{a} - x_6 = 0; \\ x_2 + 2x_3x_4 - \dfrac{0.5}{\sqrt{x_4}} = 0; \\ x_2 + 2x_3x_5 - \dfrac{0.5}{\sqrt{x_5}} = 0; \\ x_1 + x_2b + x_3b^2 - \sqrt{b} + x_6 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

По результатам первого этапа начальными значениями выберем следующие: $x_1 = 1.45$, $x_2 = 0.166$, $x_3 = 0.00104$ – коэффициенты полинома $P_2(x)$; $x_4 = 12$, $x_5 = 45$ – точки наибольшего отклонения полинома $P_2(x)$ от функции $\sqrt{x}$; $x_6 = 0.5$ – максимальное отклонение $P_2(x)$ от $\sqrt{x}$.

Третий этап состоит в решении системы (10) каким-либо численным методом. В системе SciLab была выбрана функция fsolve, которая позволяет находить решение систем нелинейных уравнений методом итераций с использованием и без использования якобиана.

На рис. 2 представлены графики функции $f(x) = \sqrt{x}$ (сплошная линия), полинома $C_2(x)$ (пунктирная линия), и функции $Delta(x) = C_2(x) - \sqrt{x}$ (точечная линия) на интервале [1, 64].

Как видно, полином $C_2(x)$ обеспечивает равномерное приближение функции $f(x) = \sqrt{x}$ на интервале [1, 64]. Величина максимального отклонения составляет 0.2775. Для полинома $P_2(x)$ максимальное отклонение равнялось 0.6151.

Аналогично можно построить полиномы более высоких порядков. В приложении приведена реализация данного алгоритма в системе SciLab 6.0 для полинома 3-го порядка.

Таким образом, экспериментальной проверкой подтверждена корректность предложенного алгоритма, который позволяет достаточно просто строить полином наилучшего равномерного приближения.

ВЫВОДЫ

В работе предложен алгоритм построения полинома наилучшего равномерного приближения, который позволяет находить коэффициенты полинома, точки чебышевского альтернанса и максимальное отклонение. Алгоритм основан на идее "улучшения" полинома наилучшего среднеквадратического отклонения и требует применения какого-либо численного метода решения систем нелинейных уравнений. Реализация алгоритма в системе SciLab и его экспериментальное исследование подтвердили корректность и эффективность предложенного подхода.

ПРИЛОЖЕНИЕ

```
// Полиномам 3 порядка
N=64;
a=1;
b=64;
function y=f(z)
y=sqrt(z)
endfunction
function [y]=f1(z)
  y1(1)=z(1)+z(2)*z(5)+z(3)*z(5)^2+z(4)*z(5)^3-sqrt(z(5))-z(8)
  y1(2)=z(1)+z(2)*z(6)+z(3)*z(6)^2+z(4)*z(6)^3-sqrt(z(6))+z(8)
  y1(3)=z(1)+z(2)*z(7)+z(3)*z(7)^2+z(4)*z(7)^3-sqrt(z(7))-z(8)
  y1(4)=z(1)+z(2)*a+z(3)*a^2+z(4)*a^3-sqrt(a)+z(8)
  y1(5)=z(2)+2*z(3)*z(5)+3*z(4)*z(5)^2 -0.5/sqrt(z(5))
  y1(6)=z(2)+2*z(3)*z(6)+3*z(4)*z(6)^2 -0.5/sqrt(z(6))
  y1(7)=z(2)+2*z(3)*z(7)+3*z(4)*z(7)^2 -0.5/sqrt(z(7))
  y1(8)=z(1)+z(2)*b+z(3)*b^2+z(4)*b^3-sqrt(b)+z(8)
  y=y1'
endfunction
// Количество точек
x=[a:1:b];
x2=x^2;
x3=x^3;
Ft=[ones(1,N);
  x;
  x2;
  x3];
F=Ft';
FF=Ft*F;
FF1=inv(FF);
Fun=f(x);
B=FF1*Ft*Fun';
// Полином МНК
pMNK = poly(B, "x", "c");
PolMNK=horner(pMNK,x);
DeltaMNK=Fun-PolMNK;
del=-DeltaMNK(1);
normDeltaMNK=norm(DeltaMNK)
// Полином наилучшего равномерного приближения
[ch,v,info]=fsolve([B(1), B(2), B(3), B(4), 6, 24, 50, del], f1);
pCheb = poly([ch(1),ch(2),ch(3), ch(4)], "x", "c");
disp(v);
disp(info);
PolCheb=horner(pCheb,x);
DeltaCheb=Fun-PolCheb;
normDeltaCheb=norm(DeltaCheb)
plot(x, DeltaMNK, x, DeltaCheb)
A1=gca();
A1.x_location="origin";
A1.title.text='Полином'; // подпись графика
a.grid=[0 0]; // включение сетки и задание ее цвета (черный)
```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лебедев В.И.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 296 с. ISBN 5-9221-0092-0.
2. *Babenko V.F.* On best uniform approximations by splines in the presence of restrictions on their derivatives. Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR December 1991. V. 50. Issue 6. P. 1227–1232.
3. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 512 с.
4. *Ремез Е.Я.* Основы численных методов чебышевского приближения. Киев, Наукова думка, 1969.
5. *Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация. М.: МИР, 1975.
6. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 636 с.: ил.
7. Scilab – free and open source software. [Электронный ресурс] URL: https://www.scilab.org/. (Дата обращения 10.02.2019.)

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2019, vol. 8, no. 5, pp. 480–486

Algorithm for Constructing the Best Uniform Approximation Polynomial from Experimental Data

K. Ya. Kudryavtsev[#]

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]*e-mail: KYKudryavtsev@mephi.ru*

Received February 10, 2019; revised June 20, 2019; accepted June 25, 2019

Abstract—Approximation of a set of experimental points using a set of functions is actual for many engineering studies. To solve such problems, the concept of a linear normed space, whose elements are bounded real functions, is introduced, and the concept of a metric (norm), i.e., a measure of proximity between the elements of the space is used. In many cases, it is required to approximate a complex function by a polynomial of a given order and, at the same time, to ensure the maximum deviation of the polynomial from the function by no more than a certain specified error. In this case, it is reasonable to use the Chebyshev norm and look for a polynomial of the best uniform approximation. However, there are no universal effective algorithms for finding the best-dimensional approximation polynomial. In this work, a simple and efficient algorithm is proposed for constructing the best uniform approximation polynomial for continuously differentiable functions. The algorithm consists of three stages. At the first stage, a polynomial of the degree n is constructed using the least squares method. At the second stage, a special system of nonlinear equations is obtained. At the third stage, the coefficients of the best uniform approximation polynomial and the Chebyshev alternance point are found by solving a system of nonlinear equations by any iterative method. This algorithm is implemented in the SciLab 6.0 system and is experimentally tested.

Keywords: approximation of functions, polynomial of the best uniform approximation, points of the Chebyshev alternance

DOI: 10.1134/S2304487X1905002X

REFERENCES

1. Lebedev V.I. *Funktsionalnyy analiz i vychislitelnaya matematika* [Functional analysis and computational mathematics]. M.: FIZMATLIT, 2005. 296 p. – ISBN 5-9221-0092-0
2. Babenko V.F. On best uniform approximations by splines in the presence of restrictions on their derivatives. – Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR December 1991, Volume 50, Issue 6, pp. 1227–1232.
3. Dzyadyk V.K. *Vvedenie v teoriyu ravnomernogo priblizheniya funktsiy polinomami* [Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials]. M .: Science, 1977. 512 p.
4. Remez E.Ya. *Osnovy chislennykh metodov chebyshevskogo priblizheniya* [Fundamentals of numerical methods for the Chebyshev approximation]. – Kiev, Naukova Dumka, 1969.
5. Laurent P.-J. *Approksimatsiya i optimizatsiya* [Approximation and optimization]. M.: MIR, 1975.
6. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Chislennye metody* [Numerical methods]. M.: BINOM. Laboratory of Knowledge, 2008. 636 pp.
7. Scilab – free and open source software. Available at: https://www.scilab.org/ (accessed 18.01.2019)