

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

КАЧЕСТВЕННЫЕ ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЗАДАЧ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ С ПОМОЩЬЮ НЕЛОКАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

© 2019 г. А. Д. Полянин^{1,2,3}, И. К. Шингарева⁴

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

² Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

³ Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

⁴ Университет Сонора, Эрмосильо, штат Сонора, 83000, Мексика

*e-mail: polyanin@ipmnet.ru

**e-mail: inna@mat.uson.mx

Поступила в редакцию 27.08.2019 г.

После доработки 27.08.2019 г.

Принята к публикации 01.10.2019 г.

Описаны качественные особенности численного интегрирования двухточечных краевых задач погранслоного типа с помощью нелокальных преобразований. Такие преобразования, которые иногда называются также преобразованиями типа Сундмана, задаются с помощью вспомогательного дифференциального уравнения и позволяют “растягивать” область пограничного слоя (после чего уже можно применять любые адекватные численные методы с постоянным шагом). Приведены имеющие точные решения в элементарных функциях многопараметрические нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи с малым параметром, которые можно использовать для тестирования различных численных методов с неравномерной сеткой. Особое внимание уделяется исследованию наиболее сложных для численного анализа краевых задач, которые имеют немонотонные решения или вырождаются на границе пограничного слоя. Сопоставление численных и точных решений показывает высокую эффективность метода нелокальных преобразований в краевых задачах с пограничным слоем.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с малым параметром, сингулярно возмущенные краевые задачи, пограничный слой, нелокальные преобразования, точные и численные решения

DOI: 10.1134/S2304487X19060099

1. ВВЕДЕНИЕ

Сингулярно возмущенные линейные и нелинейные краевые задачи с малым параметром ϵ часто используются для математического моделирования различных явлений и процессов в науке и технике (см., например, [1–8]). Важной характеристикой качественной особенности таких задач является то, что при $\epsilon = 0$ порядок рассматриваемого дифференциального уравнения уменьшается и нельзя удовлетворить некоторым граничным условиям.

Решения сингулярно возмущенных краевых задач имеют большие градиенты в узких областях (пограничных слоях), что приводит к потере сходности стандартных конечно-разностных методов и сильно ограничивает их область применимости для интегрирования такого рода задач. Первыми работами, где в полной мере говорилось о неэффективности классических конечно-

разностных схем и необходимости разработки специальных схем, обладающих свойством сходимости независимо от значения малого параметра, были публикации [9, 10], в которых были заложены основы двух разных подходов к решению краевых задач с пограничным слоем. В [9] была предложена классическая центрально-разностная схема с сеткой, сгущающейся вблизи пограничных слоев. В [10] была использована схема экспоненциальной подгонки, коэффициенты которой подобраны так, чтобы на погранслоной составляющей решения схема была асимптотически точной.

Различные методы численного интегрирования линейных и нелинейных сингулярно возмущенных краевых задач рассматриваются, например, в [11–30]. Для численного решения таких задач многие авторы используют методы с кусочно-равномерной сеткой, которая характеризуется малым шагом в пограничном слое и большим ша-

гом за его пределами (см., например, [13, 15, 22–24, 27, 30]). Важно отметить, что в методах, основанных на использовании кусочно-равномерной сетки (а также методов, разработанных в [9, 10]), явно или неявно учитывается априорная информация о структуре и скорости затухания асимптотических решений в пограничном слое.

В данной статье для численного интегрирования сингулярно возмущенных краевых задач с одним пограничным слоем на начальном этапе используются нелокальные преобразования, которые на заключительном этапе позволяют интегрировать редуцированную задачу стандартными численными методами с равномерным шагом. Основные идеи этого метода были изложены в [31, 32]. В данной работе исследуются наиболее сложные для численного анализа краевые задачи, которые имеют немонотонные решения или/и имеет место вырождение на границе пограничного слоя. Предложено несколько новых эффективных нелокальных преобразований.

Замечание 1. Нелокальные преобразования использовались в [33–38] для численного интегрирования нелинейных задач Коши, которые имели монотонные и немонотонные решения с обострением (такие задачи характеризуются очень большими градиентами в окрестности сингулярной точки, положение которой заранее неизвестно). Сравнение точных и численных решений ряда тестовых задач для дифференциальных уравнений первого, второго, третьего и четвертого порядков, а также систем уравнений, показало высокую эффективность этого метода для численного интегрирования задач с обострением.

Замечание 2. Нелокальные преобразования специального вида использовались в [39–41] для получения точных решений, первых интегралов, и линеаризации обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

2. КАЧЕСТВЕННЫЕ ОСОБЕННОСТИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

2.1. Модельная линейная трехпараметрическая краевая задача. Точные и асимптотические решения. Область пограничного слоя

Напомним качественные особенности краевых задач, имеющих решения погранслоного типа, на примере простой модельной задачи.

Тестовая задача 1. Рассмотрим двухточечную краевую задачу для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \varepsilon y''_{xx} + y'_x + y &= 0 \quad (0 < x < 1); \\ y(0) &= a, \quad y(1) = b, \end{aligned} \quad (1)$$

где a, b, ε – свободные определяющие параметры. В этой задаче при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon > 0$) пограничный слой образуется вблизи точки $x = 0$.

В зависимости от значений свободных параметров задача (1) может иметь как монотонные, так и немонотонные решения. Точное решение этой задачи определяется формулами

$$\begin{aligned} y &= \frac{ae^{\lambda_2} - b}{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}} e^{\lambda_1 x} + \frac{b - ae^{\lambda_1}}{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}} e^{\lambda_2 x}, \\ \lambda_1 &= \frac{1}{2} \varepsilon^{-1} (-1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}), \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \varepsilon^{-1} (-1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}). \end{aligned} \quad (2)$$

Для малых ε справедливы приближенные соотношения $\lambda_1 \approx -\varepsilon^{-1}$, $\lambda_2 \approx -1$, $y'_x(0) \approx \varepsilon^{-1}(be - a)$, а соответствующее асимптотическое решение задачи (1) имеет вид

$$y_a \approx (a - eb)e^{-x/\varepsilon} + be^{1-x}. \quad (3)$$

Для конкретности далее будем полагать, что $a \geq 0, b \geq 0$. Если $a > eb$, то функция (3) монотонно убывает. Если $a < eb$, то функция (3) монотонно (и очень быстро) возрастает в узкой области $0 \leq x < x_*$, где

$$x_* \approx \varepsilon \ln \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{a}{eb} \right) \right], \quad y_* \approx eb, \quad (4)$$

а в оставшейся области $x_* \leq x \leq 1$ решение монотонно (и достаточно медленно) убывает.

Точные решения (2) задачи (1) показаны сплошными линиями на рис. 1 для двух наборов численных значений определяющих параметров: а) $a = 1, b = 0, \varepsilon = 0.005$ и б) $a = 0, b = 1, \varepsilon = 0.005$. Для второго набора значений решение в области $0 \leq x \leq x_* \approx 0.026709653$ быстро возрастает (от нуля до максимального значения $y_* \approx 2.646247631$), а в области $x_* \leq x \leq 1$ медленно убывает; в этом случае максимум разности между асимптотическим решением (3) и точным решением (2) на всем интервале $0 \leq x \leq 1$ равен 0.072034196 (а относительная погрешность равна 0.027221260).

При применении прямых численных методов в таких задачах, чтобы учесть особенности решения в области пограничного слоя, необходимо взять достаточно много точек в малой окрестности левой границы. Поэтому использование равномерных сеток во всей области изменения независимой переменной x при $\varepsilon \rightarrow 0$ связано с необходимостью разбиения области $0 \leq x \leq 1$ на большое число интервалов интегрирования.

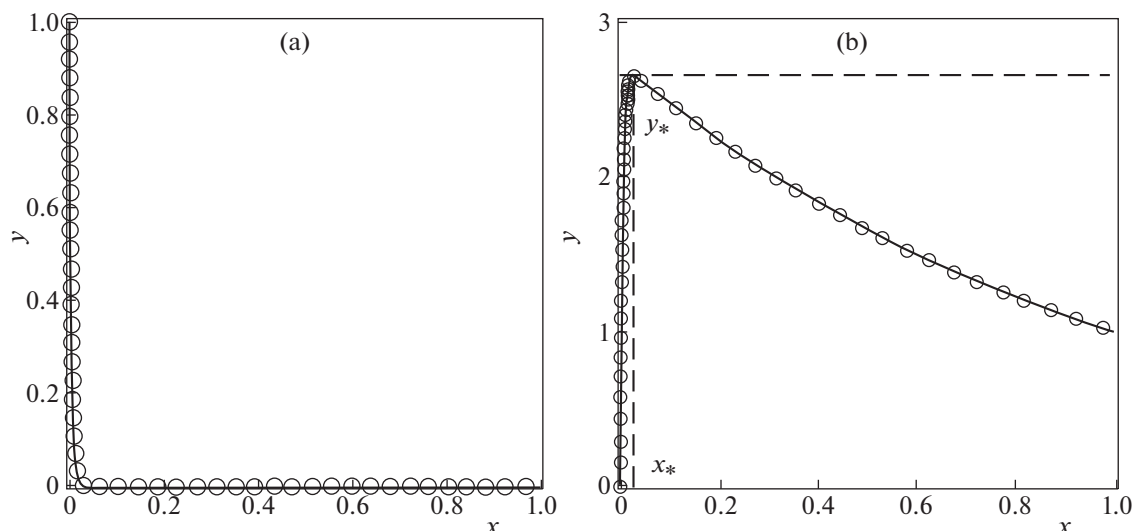


Рис. 1. Точные решения (2) задачи (1) (сплошные линии) и численные решения преобразованной задачи (11) (точки) при $g = (1 + |z| + |f|)^{1/2}$ для двух наборов численных значений определяющих параметров: а) $a = 1, b = 0, \varepsilon = 0.005$; б) $a = 0, b = 1, \varepsilon = 0.005$.

2.2. Порядковое соотношение между первой и второй производной

Важно отметить, что производные от решения (2) на левой границе очень велики при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$(y_a)'_{x=0} \approx -\varepsilon^{-1}(a - eb), \quad (y_a)''_{x=0} \approx \varepsilon^{-2}(a - eb). \quad (5)$$

Например, при $a = 0, b = 1, \varepsilon = 0.005$, имеем $(y_a)'_{x=0} \approx 543.656$.

Пусть $|a - eb| = O(1)$. Исключив ε из (5), получим порядковое соотношение

$$|y''_x| = O(|y'_x|^2). \quad (6)$$

В [31, 32] было показано, что порядковое соотношение между производными (6) носит достаточно общий характер и справедливо в области пограничного слоя, если главный член асимптотического разложения решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет вид $y = \varphi(x/\delta)$, где $\varphi = \varphi(z)$ — гладкая функция, имеющая ограниченные и не обращающиеся в нуль производные в некоторой окрестности точки $z = 0$, а $\delta = \delta(\varepsilon)$ — функция, обладающая свойством $\delta \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

3. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, ОСНОВАННОЕ НА НЕЛОКАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

3.1. Общее описание метода решения

Будем рассматривать двухточечные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с граничными условиями перво-

го рода, которые в безразмерных переменных имеют вид

$$y''_{xx} = f(x, y, y'_x) \quad (0 < x < 1); \quad (7)$$

$$y(0) = a, \quad y(1) = b, \quad (8)$$

где функция f может зависеть от малого параметра $\varepsilon > 0$. Для сингулярно возмущенных краевых задач правая часть рассматриваемого уравнения имеет вид $f = \varepsilon^{-1}F(x, y, y'_x, \varepsilon)$, где $F(x, y, z, 0)$ — гладкая функция трех аргументов.

Нелокальная переменная ξ вводится с помощью дифференциального уравнения первого порядка и начального условия [31, 32]:

$$\xi'_x = g(x, y, y'_x), \quad \xi(0) = 0, \quad (9)$$

где $g = g(x, y, y'_x)$ — регуляризирующая функция, которая может варьироваться.

Представим уравнение второго порядка (7) в виде эквивалентной системы двух уравнений первого порядка

$$y'_x = z, \quad z'_x = f(x, y, z). \quad (10)$$

Используя (9), перейдем от x к новой независимой переменной ξ в (10) и (8). В результате исходная краевая задача (7)–(8) преобразуется к следующей задаче для системы из трех уравнений:

$$\begin{aligned} x'_\xi &= \frac{1}{g(x, y, z)}, & y'_\xi &= \frac{z}{g(x, y, z)}, \\ z'_\xi &= \frac{f(x, y, z)}{g(x, y, z)} & (0 < \xi < \xi_1); \\ x(0) &= 0, & y(0) &= a, & y(\xi_1) &= b, \end{aligned} \quad (11)$$

где значение ξ_1 определяется в процессе вычислений из условия $x(\xi_1) = 1$.

При подходящем выборе регуляризующей функции $g = g(x, y, z)$ задачу (11) можно решать методом пристрелки с помощью стандартных численных методов с постоянным шагом по ξ [42–47].

3.2. Регуляризующие функции. Асимптотическое условие. Примеры

Для численного решения краевых задач будем использовать регуляризующие функции вида [31, 32]:

$$g = G(|z|, |f|) \equiv G(|y'_x|, |y''_{xx}|), \quad (12)$$

где $f = f(x, y, z)$ — правая часть уравнения (7) и $z = y'_x$. На функцию $G = G(u, v)$ накладываем условия

$$\begin{aligned} G > 0; & \quad G_u \geq 0, \quad G_v \geq 0; \\ G \rightarrow \infty & \quad \text{при} \quad u + v \rightarrow \infty; \quad G(0, 0) = 1, \end{aligned} \quad (13)$$

где $u \geq 0, v \geq 0$. Условие нормировки — последнее соотношение в (13) — не является обязательным. При использовании регуляризующих функций вида (12) для плоских и прямолинейных участков кривой $y = y(x)$, на которых $y'_x = \text{const}$, фиксированный размер шага по ξ дает фиксированный размер шага по x . Отметим, что если уравнение (7) является автономным (т. е. не зависит явно от x), а регуляризующая функция выбирается в виде (12), то второе и третье уравнения системы (11) образуют замкнутую подсистему, которая интегрируется независимо от первого уравнения.

Для сингулярно возмущенных краевых задач (7)–(8) с малым параметром при старшей производной, у которых правая часть уравнения (7) имеет вид

$$f(x, y, y'_x) = \varepsilon^{-1} F(x, y, y'_x),$$

при выборе регуляризующих функций помимо условий (12)–(13) следует учитывать дополнительные соображения. Если положить $g = 1$ (т. е. не использовать нелокальные преобразования) и ε устремить к нулю, то правые члены двух последних уравнений системы (11) в области пограничного слоя будут стремиться к бесконечности, поскольку $|z| \rightarrow \infty$ и $|f| \sim z^2$ (см. порядковое соотношение (6)). Указанное обстоятельство существенно образом усложняет численное интегрирование краевой задачи при $g = 1$ и приводит

к необходимости пропорционально измельчать шаг сетки при уменьшении ε .

Избежать измельчения сетки при $\varepsilon \rightarrow 0$ и работать с постоянным шагом по ξ можно путем использования регуляризующих функций $g \neq \text{const}$, удовлетворяющих асимптотическому условию

$$|z|/g = O(1) \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (14)$$

(в этом случае правая часть второго уравнения системы (11) не будет иметь сингулярностей при малых ε , а третье уравнение этой системы в области пограничного слоя будет иметь существенно меньшую сингулярность, чем при $g = 1$). В частности, можно брать регуляризующие функции, имеющие асимптотики

$$\begin{aligned} g &\rightarrow m_1 |z| \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow \infty \\ \text{или} \quad g &\rightarrow m_2 |f|^{1/2} \quad \text{при} \quad |f| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (15)$$

где m_1 и m_2 — положительные константы порядка единицы. Отметим, что простые регуляризующие функции биномиального вида

$$g = 1 + |z| \quad \text{или} \quad g = (1 + |f|)^{1/2} \quad (16)$$

имеют асимптотики (15) при $m_1 = m_2 = 1$ и удовлетворяют условию нормировки в (13). Использование регуляризующих функций (16) позволяет подавить неограниченный рост правой части второго уравнения системы (11) в области пограничного слоя при $\varepsilon \rightarrow 0$ и уменьшить (по сравнению с $g = 1$) правую часть третьего уравнения. Далее, на конкретных примерах будет показано, что регуляризующие функции вида (16) имеют ограниченную область применения.

На практике целесообразно использовать регуляризующие функции смешанного вида

$$\begin{aligned} g &= 1 + k_1 |z| + k_2 |f|^{1/2}, \\ g &= (1 + k_1 z^2 + k_2 |f|)^{1/2}, \end{aligned} \quad (17)$$

которые удовлетворяют асимптотическому условию (14), а также условию нормировки в (13). Формулы (17) включают в себя два параметра $k_1 \geq 0$ и $k_2 \geq 0$, которые могут варьироваться (при $k_1 + k_2 = O(1)$). Далее будет показано, что регуляризующие функции вида (17) являются более универсальными, чем функции (16), и обычно приводят к гораздо более точным численным решениям.

Эффективными также являются более сложные регуляризующие функции

$$\begin{aligned} g &= 1 + R_1, \quad R_1 = \max(|z|, |f|^{1/2}); \\ g &= (1 + R_2)^{1/2}, \quad R_2 = \max(z^2, |f|). \end{aligned} \quad (18)$$

В разд. 4 и 5 будет проведено сопоставление эффективности регуляризующих функций (16)–(18) путем численного интегрирования линейных

и нелинейных сингулярно возмущенных тестовых краевых задач с малым параметром, которые допускают точные решения.

3.3. Дополнительные пояснения и комментарии

1°. Из уравнения (9) и формулы (12), для малых приращений аргумента Δx , пренебрегая членами порядка $o(\Delta x)$, получим

$$\Delta \xi = G(|z|, |f|) \Delta x,$$

где $z = y'_x$ и $f = y''_{xx}$. Отсюда следует, что выбор постоянного шага по новой переменной $\Delta \xi = h$ эквивалентен использованию переменного шага для исходной независимой переменной $\Delta x = h/G$. Предположим, что $G = G(u) > 0$, $G(0) = 1$, $G'_u > 0$ и $u = |z|$. Тогда рост производной z с увеличением x приводит к уменьшению шага Δx . Таким образом, применение нелокальных преобразований соответствует автоматическому выбору переменного шага по x . При использовании формул (16)–(18) шаг Δx мал в области пограничного слоя.

2°. В данной работе используется комбинация классического явного метода Рунге–Кутты четвертого порядка аппроксимации с фиксированным шагом и метода пристрелки, реализованных в среде Maple [46]. Для этого численно интегрируется вспомогательная задача Коши, описываемая преобразованными уравнениями (11) с первыми двумя условиями в левой крайней точке и дополнительным начальным условием $z(0) = s$. В качестве начального пристрелочного значения берется $s = s_0 \approx \varepsilon^{-1}$. Искомое значение параметра s определяется, когда решение удовлетворит граничному условию в крайней правой точке $x = 1$ (см. последнее граничное условие в (11)).

3°. После применения к рассматриваемой краевой задаче нелокального преобразования на заключительном этапе можно использовать любые эффективные численные методы с постоянным шагом (например, явные и неявные методы Рунге–Кутты, явные методы Адамса–Башфорта и неявные методы Адамса–Моултона [48–50]).

4. СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ. СРАВНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ И АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

4.1. Линейная тестовая задача. Численные решения, полученные с использованием различных регуляризующих функций

Сначала проиллюстрируем характерные особенности метода нелокальных преобразований на линейных краевых задачах.

На рис. 1 точками показаны результаты численного решения преобразованной задачи (11),

использованной для решения исходной задачи (1), для $f = -\varepsilon^{-1}(z + y)$ с регуляризующей функцией $g = (1 + |z| + |f|)^{1/2}$, которые получены методом стрельбы с постоянным шагом $h = 0.01$ для двух наборов числовых значений определяющих параметров: $a = 1$, $b = 0$, $\varepsilon = 0.005$ (монотонное решение) и $a = 0$, $b = 1$, $\varepsilon = 0.005$ (немонотонное решение). Видно, что имеет место хорошее совпадение численных и точных решений (точные решения определяются по формуле (2) и представлены сплошными линиями).

В табл. 1 приведены максимальные абсолютные погрешности численных решений преобразованной задачи (11), используемой для интегрирования исходной задачи (1), при $a = 1$, $b = 0$, $\varepsilon = 0.005$ и $a = 0$, $b = 1$, $\varepsilon = 0.005$ для трех шагов h и восьми различных регуляризующих функций g . Для сравнения аналогичные данные указаны также для случая $g = 1$, который соответствует прямому численному решению (без использования преобразований) с тем же шагом по x . Видно, что семь регуляризующих функций (№№ 2–8) позволяют получать численные решения во всей области с высокой точностью даже при достаточно большом шаге (по ξ), равном $h = 0.1$.

В табл. 2 приведены максимальные абсолютные погрешности численных решений преобразованной задачи (11), используемой для интегрирования исходной задачи (1), при $a = 1$, $b = 0$, $\varepsilon = 0.005$ и $a = 0$, $b = 1$, $\varepsilon = 0.005$ для различного числа точек сетки $N = \xi_1/h$ (здесь ξ_1 — длина интервала численного интегрирования преобразованных уравнений).

Сравним, например, максимальные абсолютные погрешности численных решений, полученных для данного $\varepsilon = 0.005$ с регуляризующими функциями № 7 и № 9 (последнее решение получено без использования преобразований) с одинаковым числом точек сетки. В этом случае при $N = 100$ использование нелокального преобразования позволяет повысить точность численного решения более чем в 856–1267 раз, а при $N = 500$ — приблизительно в 853–3016 раз.

Видно, что для всех регуляризующих функций, рассмотренных в табл. 2, точность численного интегрирования задачи (1) с монотонным решением для $a = 1$, $b = 0$ значительно выше точности численного интегрирования задачи (1) с немонотонным решением для $a = 0$, $b = 1$.

Также видно, что функция № 1 малоэффективна для немонотонного решения. Это связано с тем, что вблизи пограничного слоя наблюдается резкий экстремум в точке $x = x_*$ (см. рис. 1b), где производная обращается в нуль: $y'_{xx}|_{x=x_*} = z|_{x=x_*} = 0$. Используя асимптотическую формулу (3) при

Таблица 1. Сравнение точности численных решений преобразованной задачи (11), которая используется для решения исходной задачи (1), для различных регуляризующих функций g при $\varepsilon = 0.005$ для трех шагов h . Здесь $R_1 = \max(|z|, |f|^{1/2})$ и $R_2 = \max(z^2, |f|)$

Максимальная абсолютная погрешность численных решений для $a = 1, b = 0$				
№	Регуляризующая функция	Шаг 0.1	Шаг 0.05	Шаг 0.01
1	$g = 1 + z $	0.017119347	0.006702741	0.000137030
2	$g = (1 + f)^{1/2}$	0.000707586	0.000160259	0.000001602
3	$g = 1 + z + f ^{1/2}$	0.000512010	0.000112509	0.000000410
4	$g = (1 + z + f)^{1/2}$	0.000611528	0.000146118	0.000001741
5	$g = (1 + z^2 + f)^{1/2}$	0.000900004	0.000204128	0.000001775
6	$g = (1 + z^4 + f^2)^{1/4}$	0.000886025	0.000193071	0.000002601
7	$g = 1 + R_1$	0.000550849	0.000119910	0.000000414
8	$g = (1 + R_2)^{1/2}$	0.000707586	0.000160259	0.000001602
9	$g = 1$	процесс расходится	процесс расходится	0.193331173
Максимальная абсолютная погрешность численных решений для $a = 0, b = 1$				
№	Регуляризующая функция	Шаг 0.1	Шаг 0.05	Шаг 0.01
1	$g = 1 + z $	0.047029578	0.013710597	0.000713696
2	$g = (1 + f)^{1/2}$	0.000824707	0.000249922	0.000001663
3	$g = 1 + z + f ^{1/2}$	0.000265927	0.000025385	0.000000017
4	$g = (1 + z + f)^{1/2}$	0.000570299	0.000115649	0.000000554
5	$g = (1 + z^2 + f)^{1/2}$	0.000559160	0.000109360	0.000000180
6	$g = (1 + z^4 + f^2)^{1/4}$	0.000630398	0.000136417	0.000000390
7	$g = 1 + R_1$	0.000602708	0.000090517	0.000000145
8	$g = (1 + R_2)^{1/2}$	0.000592523	0.000122175	0.000000346
9	$g = 1$	процесс расходится	процесс расходится	0.528189578

$a = 0, b = 1$, находим кривизну в точке экстремума

$$k_* = \frac{|y''_{xx}|}{(1 + |y'_x|^2)^{3/2}} \Big|_{x=x_*} = |y''_{xx}|_{x=x_*} \approx e \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right). \quad (19)$$

Таким образом, кривизна k_* стремится к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому в окрестности точки экстремума x_* , где происходят наиболее существенные качественные изменения решения, необходимо сделать небольшой шаг для получения высокой точности численных расчетов. При выборе регуляризующей функции № 1 в табл. 2 в окрестности экстремума имеем $g = 1 + |z| \approx 1$; следовательно величина шага по x (при фиксированном N) здесь будет максимальной (тогда как для

этой области с большой кривизной требуется не-большой шаг). Это обстоятельство приводит к большой ошибке вычисления в области экстремума для функции $g = 1 + |z|$.

Чтобы пояснить вышесказанное более наглядно, сделаем дробно-линейное преобразование независимой переменной

$$X = \frac{(\beta + 1)x}{x + \beta}, \quad \beta = \frac{x_*}{1 - 2x_*}, \quad (20)$$

которое растягивает область пограничного слоя и переводит точку x_* прямой x в точку $X_* = 1/2$ прямой X (и оставляет конечные точки рассматриваемого интервала неподвижными). На рис. 2а) сплошной линией изображено точное решение (2) задачи (1) в плоскости X, y для $a = 0, b = 1$,

Таблица 2. Сравнение точности численных решений преобразованной задачи (11), которая используется для решения исходной задачи (1), для различных регуляризующих функций g при $\varepsilon = 0.005$ для разного числа точек сетки N . Здесь $R_1 = \max(|z|, |f|^{1/2})$ и $R_2 = \max(z^2, |f|)$

Максимальная абсолютная погрешность численных решений для $a = 1, b = 0$				
№	Регуляризующая функция	$N = 100$	$N = 200$	$N = 500$
1	$g = 1 + z $	0.002126935	0.000129392	0.000001946
2	$g = (1 + f)^{1/2}$	0.000183256	0.000007810	0.000000141
3	$g = 1 + z + f ^{1/2}$	0.000337988	0.000010201	0.000000132
4	$g = (1 + z + f)^{1/2}$	0.000227354	0.000007881	0.000000140
5	$g = (1 + z^2 + f)^{1/2}$	0.000216955	0.000012022	0.000000216
6	$g = (1 + z^4 + f^2)^{1/4}$	0.000242947	0.000013334	0.000000289
7	$g = 1 + R_1$	0.000152543	0.000002787	0.000000035
8	$g = (1 + R_2)^{1/2}$	0.000188884	0.000007943	0.000000139
9	$g = 1$	0.193331172	0.006948616	0.000105565
Максимальная абсолютная погрешность численных решений для $a = 0, b = 1$				
№	Регуляризующая функция	$N = 100$	$N = 200$	$N = 500$
1	$g = 1 + z $	0.022065809	0.001390730	0.000470727
2	$g = (1 + f)^{1/2}$	0.000685290	0.000129855	0.000006104
3	$g = 1 + z + f ^{1/2}$	0.001389189	0.000027408	0.000000479
4	$g = (1 + z + f)^{1/2}$	0.000481694	0.000019363	0.000000765
5	$g = (1 + z^2 + f)^{1/2}$	0.000762107	0.000039963	0.000000667
6	$g = (1 + z^4 + f^2)^{1/4}$	0.000751407	0.000081003	0.000000685
7	$g = 1 + R_1$	0.000617123	0.000016893	0.000000338
8	$g = (1 + R_2)^{1/2}$	0.000729929	0.000060206	0.000000643
9	$g = 1$	0.528189578	0.018983935	0.000288408

$\varepsilon = 0.005$. Абсолютная погрешность E численного решения преобразованной задачи (11) с регуляризующей функцией $g = 1 + |z|$, шагом $h = 0.01$ и теми же самыми значениями параметров показана на рис. 2б). Видно, что максимальная абсолютная погрешность в этом случае находится в области перехода между пограничным слоем и внешней областью (вблизи экстремума функции y). К сожалению, в общем случае точка x_* заранее неизвестна; поэтому для численного интегрирования не удается использовать преобразование (20).

Регуляризующие функции смешанного типа №№ 3–8 в табл. 1 и 2 в дополнение к $z = y'_x$ содержат также $f = y''_{xx}$ и удовлетворяют асимптотическому условию (14) в области пограничного слоя. Включение второй производной в эти формулы

позволяет учесть большую кривизну в окрестности точки экстремума (см. (19)) и, соответственно, уменьшает размер шага по x (при постоянном шаге по ξ) в этой области. Поэтому точность численных решений, полученных с помощью регуляризующих функций №№ 3–8, значительно выше, чем при использовании функции № 1. Для немонотонного решения (при $a = 0, b = 1$) наилучшие результаты дает регуляризующая функция № 7.

На рис. 3 изображены результаты численного интегрирования преобразованной задачи (11), используемой для решения исходной задачи (1), для $a = 0, b = 1, \varepsilon = 0.005, h = 0.01$ и $g = (1 + z^2 + |f|)^{1/2}$. Для наглядности решения приводятся как с использованием исходной незави-

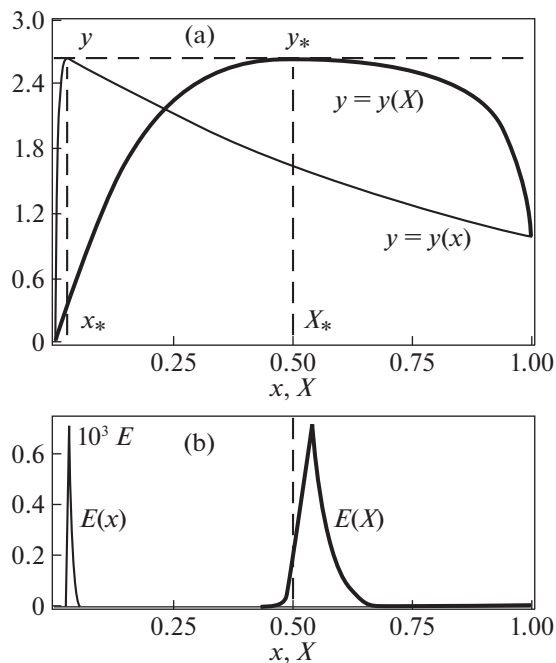


Рис. 2. а) Точное решение (2) задачи (1) при $a = 0$, $b = 1$, $\varepsilon = 0.005$ в плоскости x, y (тонкая сплошная линия) и в плоскости X, y (сплошная линия); б) абсолютная погрешность E численного решения преобразованной задачи (11) с регуляризующей функцией $g = 1 + |z|$ для тех же численных значений параметров в плоскости x, y (тонкая сплошная линия) и в плоскости X, y (сплошная линия).

симой переменной x , так и нормированной нелокальной переменной $\xi = x/\xi_1$, которая растягивает область пограничного слоя. Именно такое растяжение области с большими градиентами, которое происходит автоматически после выбора подходящей регуляризующей функции, уменьшает размер шага по x и обеспечивает высокую точность численных решений в пограничном слое.

Далее будут рассматриваться только сингулярно возмущенные задачи с пограничным слоем, которые имеют немонотонные решения (поскольку такие задачи представляют наибольшие трудности для численного интегрирования).

4.2. Дополнительные комментарии: качественные свойства некоторых регуляризующих функций

Рассмотрим опять краевую задачу для линейного уравнения второго порядка (1) при $a = 0$, $b = 1$, $\varepsilon = 0.005$. Точное решение этой задачи немонотонно и определяется соотношениями (2), а асимптотическое решение задается формулой $y_a = e^{1-x} - e^{1-200x}$. Путем перехода к нелокальной переменной (9) задача для одного уравнения (1)

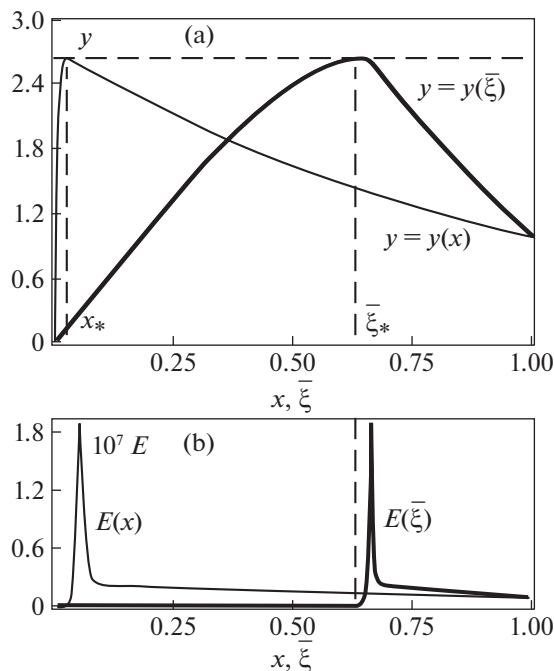


Рис. 3. а) Численные решения преобразованной задачи (11), которая используется для решения исходной задачи (1), при $a = 0$, $b = 1$, $\varepsilon = 0.005$ для $g = (1 + z^2 + |f|)^{1/2}$ и $h = 0.01$: $y(x)$ (тонкая сплошная линия) и $y(\xi)$, где $\xi = x/\xi_1$ (сплошная линия); б) абсолютные погрешности $E(x)$ и $E(\xi)$ численных решений преобразованной задачи (11) для тех же значений параметров и регуляризующей функции g .

преобразуется в задачу для системы уравнений (11), где $f = -\varepsilon^{-1}(z + y)$ и $z = y'_x$.

Проведем качественный анализ второго уравнения системы (11) для некоторых регуляризующих функций g . Для этого исследуем поведение функции $\Phi = z/g$ (это правая часть второго уравнения) в плоскости ξ, Φ для различных функций g на решении рассматриваемой задачи.

Для $g = 1$, что соответствует прямому численному решению при $\xi = x$, функция $\Phi = z/g$ изменяется в широком диапазоне $-2.589 < \Phi < 540.917$, немонотонна и резко возрастает вблизи точки $\xi = 0$, см. рис. 4а. Чтобы получить адекватные численные решения на основе равномерной сетки для $g = 1$, необходимо взять большое количество точек N . На рис. 4а показана аналогичная кривая для регуляризующей функции $g = 1 + |z|$. Эта кривая изменяется в полосе $-1 \leq \Phi \leq 1$ и имеет вид негладкой ступеньки, в окрестности которой наблюдаются большие градиенты; для равномерной сетки по ξ в этом случае также необходимо взять достаточно большое количество точек N (но существенно меньше, чем для $g = 1$ для уме-

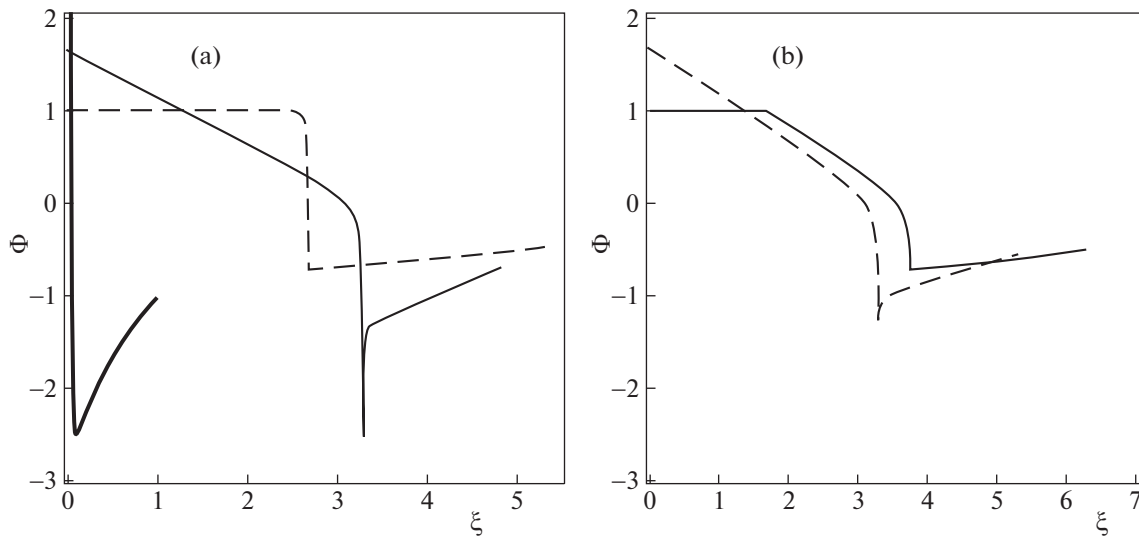


Рис. 4. Зависимость Φ от ξ в задаче (1) при $a = 0$, $b = 1$, $\varepsilon = 0.005$ для регуляризующих функций: а) $g = 1$ (сплошная линия), $g = 1 + |z|$ (штриховая линия) и $g = (1 + |f|)^{1/2}$ (тонкая сплошная линия) и б) $g = 1 + \max(|z|, |f|)^{1/2}$ (сплошная линия) и $g = (1 + z^2 + |f|)^{1/2}$ (штриховая линия).

ренных N). Функция $g = (1 + |f|)^{1/2}$ также приводит к негладкой ступеньке с иглообразным включением (см. тонкую сплошную линию на рис. 4а), которое характеризуется большими градиентами. Поэтому для получения высокой точности вычислений здесь требуется брать достаточно много точек N .

Кривая $\Phi = \Phi(\xi)$ для $g = 1 + \max(|z|, |f|)^{1/2}$ (см. рис. 4б) изменяется в узкой полосе $-1 < \Phi < 1$ и является гораздо более плоской, чем кривые на рис. 4а; тестовые расчеты показывают, что здесь можно использовать равномерную сетку по ξ с достаточно малым числом точек сетки N . На рис. 4б изображена также кривая $\Phi = \Phi(\xi)$ для регуляризующей функции $g = (1 + z^2 + |f|)^{1/2}$. Эта кривая имеет вид сглаженной ступеньки и не слишком большие значения производных. Поэтому в этом случае при численном интегрировании преобразованной системы (11) можно использовать равномерную сетку по ξ с умеренным или относительно небольшим числом точек сетки N .

4.3. Многопараметрическая линейная краевая задача, имеющая решения с несколькими экстремумами

Тестовая задача 2. Рассмотрим теперь более сложную пятипараметрическую линейную краевую задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon y''_{xx} + y'_x + c \cos(\lambda x) &= 0 \quad (0 < x < 1); \\ y(0) &= a, \quad y(1) = b, \end{aligned} \quad (21)$$

где $a, b, c, \lambda, \varepsilon$ — свободные параметры. В зависимости от значений параметров, эта задача может иметь один, два и более экстремумов или не может иметь их вообще.

Легко показать, что точное решение задачи (21) определяется формулами

$$\begin{aligned} y &= A + Be^{-x/\varepsilon} + S(x), \\ S(x) &= \frac{c[\varepsilon\lambda \cos(\lambda x) - \sin(\lambda x)]}{\lambda(1 + \varepsilon^2\lambda^2)}, \\ A &= \frac{b - S(1) + [S(0) - a]e^{-1/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}}, \\ B &= \frac{a - b + S(1) - S(0)}{1 - e^{-1/\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (22)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ соответствующее асимптотическое решение имеет вид

$$\begin{aligned} y &= b + c \frac{\sin \lambda}{\lambda} + \\ &+ \left(a - b - c \frac{\sin \lambda}{\lambda} \right) e^{-x/\varepsilon} - \frac{c}{\lambda} \sin(\lambda x). \end{aligned} \quad (23)$$

Рассмотрим более подробно частный случай $a = 0$, $b = c = 1$ и $\lambda = \pi n$ ($n = 1, 2, \dots$). Подставляя указанные значения параметров в (23), получим

$$y = 1 - e^{-x/\varepsilon} - \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda x), \quad \lambda = \pi n. \quad (24)$$

На рис. 5 сплошными линиями изображены точные решения задачи (21), которые описываются формулами (22) при $a = 0$, $b = c = 1$ и $\varepsilon = 0.005$, для двух значений λ : $\lambda = \pi$ и $\lambda = 2\pi$. В

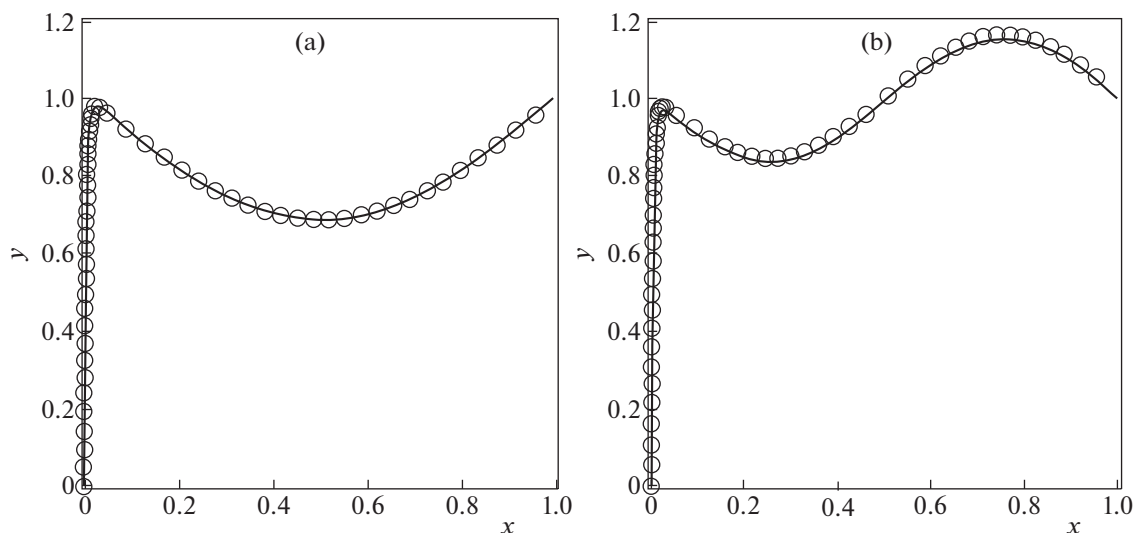


Рис. 5. Точные решения (22) задачи (21) при $a = 0$, $b = c = 1$, $\varepsilon = 0.005$ (сплошные линии) и численные решения соответствующей преобразованной задачи (11) с регуляризующей функцией $g = (1 + z^2 + |f|)^{1/2}$ и шагом $h = 0.01$ (точки) для двух значений λ : а) $\lambda = \pi$ и б) $\lambda = 2\pi$.

этих случаях решение имеет два и три экстремума соответственно (для $\lambda = \pi$ при $x_* = 0.0265534145$ решение достигает максимального значения $y_* = 0.978476138$). Результаты численного решения преобразованной задачи (11), используемой для решения задачи (21), с регуляризующей функцией $g = (1 + z^2 + |f|)^{1/2}$ и фиксированным шагом $h = 0.01$ при тех же значениях определяющих параметров, показаны точками. Видно, что имеет место хорошее совпадение между численными и точными решениями. Максимальная абсолютная погрешность численных решений для $\lambda = \pi$ и $\lambda = 2\pi$ равны соответственно $E = 0.000000926$ и $E = 0.009993346$. Максимальные абсолютные погрешности асимптотических решений (24) для $\lambda = \pi$ и $\lambda = 2\pi$ равны $E = 0.009966909$ и $E = 0.009992805$.

5. СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ. СРАВНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ И АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

5.1. Многопараметрическая краевая задача с квадратичной нелинейностью. Точные и численные решения

Тестовая задача 3. Рассмотрим пятипараметрическую краевую задачу с квадратичной нелинейностью

$$\varepsilon y''_{xx} + (y + px + q)y'_x + p(y + px + q) = 0 \quad (25) \\ (0 < x < 1);$$

$$y(0) = a, \quad y(1) = b, \quad (26)$$

где a, b, p, q, ε — свободные параметры.

Замена $u = y + px + q$ преобразует уравнение (25) в автономное уравнение $\varepsilon u''_{xx} + uu'_x = 0$; введя новую переменную $v(u) = u'_x$ последнее сводится к линейному ОДУ первого порядка $\varepsilon v'_u + u = 0$. В результате можно получить общее решение уравнения (25) в явном виде

$$y = c \frac{1 - Ae^{-cx/\varepsilon}}{1 + Ae^{-cx/\varepsilon}} - px - q. \quad (27)$$

Постоянные интегрирования A и c определяются из трансцендентной системы уравнений

$$c \frac{1 - A}{1 + A} = a + q, \quad c \frac{1 - Ae^{-c/\varepsilon}}{1 + Ae^{-c/\varepsilon}} = b + p + q, \quad (28)$$

которая возникает после подстановки выражения (27) в граничные условия (26).

При $\varepsilon \rightarrow 0$ и $b + p + q > 0$ асимптотическое решение системы (28) приводит к формулам

$$A = \frac{b - a + p}{b + a + p + 2q}, \quad c = b + p + q. \quad (29)$$

Отметим, что асимптотическое решение (29) точно удовлетворяет первому уравнению системы (28), а невязка второго уравнения этой системы имеет порядок $e^{-(b+p+q)/\varepsilon}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

На рис. 6а сплошной линией изображено точное решение задачи (25)–(26) при $a = b = 1$, $p = 1$, $q = 0$, $\varepsilon = 0.005$, которое определяется формулой (27) для $A = 1/3$, $c = 2$ (в этом случае разница

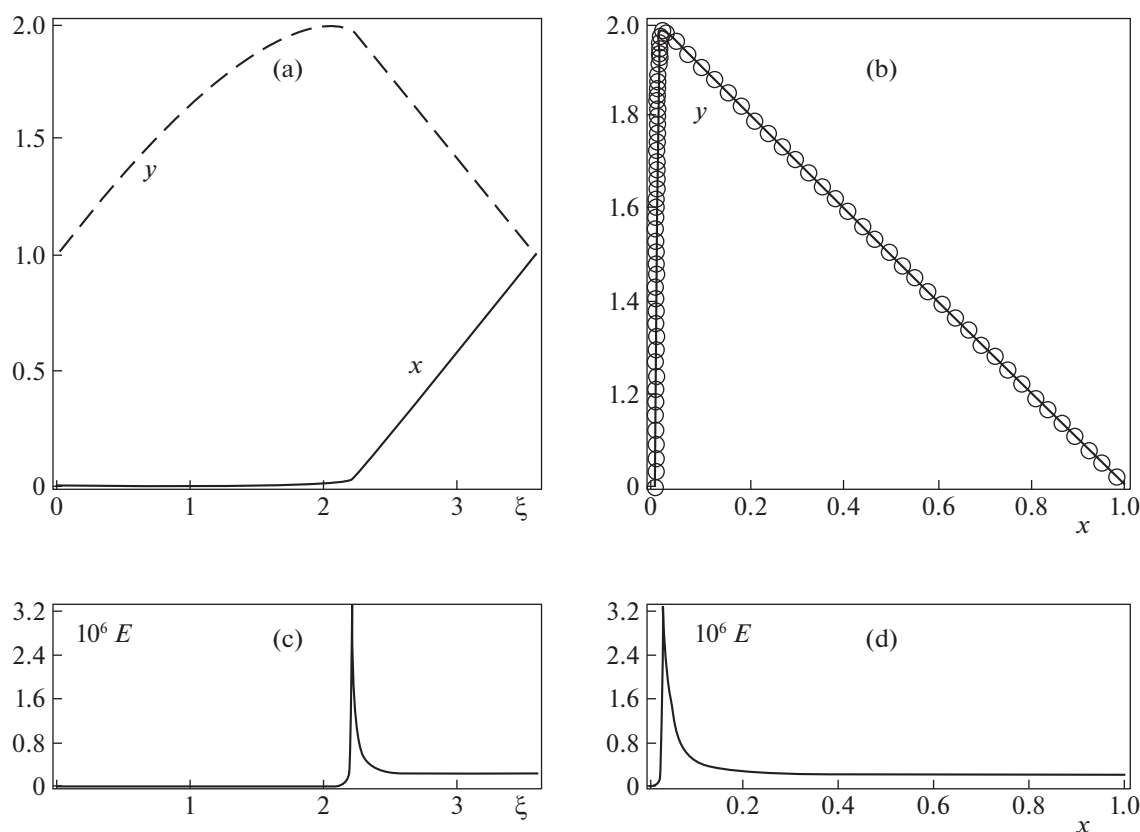


Рис. 6. а) Численное решение преобразованной задачи (11), которая используется для решения исходной задачи (25)–(26), для регуляризующей функции $g = (1 + z^2 + |f|)^{1/2}$ при $a = 1$, $b = 1$, $p = 1$, $q = 0$, $\varepsilon = 0.005$: $x = x(\xi)$ (сплошная линия) и $y = y(\xi)$ (штриховая линия); б) точное решение (27) исходной задачи (25)–(26) (сплошная линия) и численное решение преобразованной задачи (11) (кружки) для $g = (1 + z^2 + |f|)^{1/2}$ с теми же значениями параметров; в) и д) соответствующие абсолютные погрешности $E = E(\xi)$ и $E = E(x)$ численных решений преобразованной задачи (11).

между асимптотическим и точным решениями трансцендентной системы (28) лежит далеко за пределами точности наших расчетов). Кружочки представляют собой результаты численного решения соответствующей преобразованной задачи (11) с регуляризующей функцией $g = (1 + z^2 + |f|)^{1/2}$, которое получено методом пристрелки (из точки $x = 0$) с шагом $h = 0.01$ по ξ с помощью Maple. Максимум модуля разности между точным и численным решением равен 0.000003261.

В табл. 3 приведены максимальные абсолютные погрешности численных решений преобразованной задачи (11), используемой для решения исходной задачи (25)–(26), при $a = b = 1$, $p = 1$, $q = 0$, $\varepsilon = 0.005$ с различными регуляризующими функциями g и тремя разными шагами h . Видно, что функции №№ 2–8 позволяют получать численные решения во всей области с высокой точностью даже при достаточно большом размере шага (по ξ), равном $h = 0.1$.

В табл. 4 и 5 приведены максимальные абсолютные погрешности численных решений преобразованной задачи (11), используемой для решения исходной задачи (25)–(26) при $a = b = 0$, $p = 1$, $q = 0$ и $\varepsilon = 0.005$, для трех шагов h , разного количества точек сетки N и восьми разных регуляризующих функций g . Частный случай $g = 1$ соответствует прямому численному решению (без использования преобразований) с тем же шагом по x . Видно, что функции №№ 3, 5–8 позволяют получать численные решения с высокой точностью. Неудовлетворительные результаты для функции № 2 можно объяснить тем, что в этом случае в начальной точке происходит вырождение, где вторая производная обращается в нуль: $y''_{xx}|_{x=0} = f|_{x=0} = 0$. Действительно, при выборе регуляризующей функции № 2 в окрестности точки $x = 0$ имеем $g = (1 + |f|)^{1/2} \approx 1$ и асимптотическое условие (14) не выполняется. Поэтому функция $g = (1 + |f|)^{1/2}$ не может здесь подавить рост правой части второго уравнения преобразо-

Таблица 3. Сравнение точности численных решений преобразованной задачи (11), которая используется для решения исходной задачи (25)–(26), для различных регуляризующих функций g при $a = b = 1$, $p = 1$, $q = 0$, $\varepsilon = 0.005$ для трех шагов h

Максимальная абсолютная погрешность численных решений задачи (25)–(26)				
№	Регуляризующая функция	Шаг 0.1	Шаг 0.05	Шаг 0.01
1	$g = 1 + z $	0.137389203	0.053399823	0.000857913
2	$g = (1 + f)^{1/2}$	0.000937303	0.000228167	0.000005030
3	$g = 1 + z + f ^{1/2}$	0.000637870	0.000096382	0.000000429
4	$g = (1 + z + f)^{1/2}$	0.000786873	0.000196698	0.000003249
5	$g = (1 + z^2 + f)^{1/2}$	0.000607467	0.000154641	0.000003261
6	$g = (1 + z^4 + f^2)^{1/4}$	0.000617535	0.000156509	0.000005624
7	$g = 1 + R_1$	0.000621275	0.000164464	0.000001680
8	$g = (1 + R_2)^{1/2}$	0.000630415	0.000172091	0.000004600
9	$g = 1$	процесс расходится	процесс расходится	процесс расходится

Таблица 4. Сравнение точности численных решений преобразованной задачи (11), которая используется для решения исходной задачи (25)–(26), для различных регуляризующих функций g при $a = b = 0$, $p = 1$, $q = 0$, $\varepsilon = 0.005$ для трех шагов h

Максимальная абсолютная погрешность численных решений задачи (25)–(26)				
№	Регуляризующая функция	Шаг 0.1	Шаг 0.05	Шаг 0.01
1	$g = 1 + z $	0.177592060	0.035246285	0.000212137
2	$g = (1 + f)^{1/2}$	процесс расходится	0.376921099	0.021473151
3	$g = 1 + z + f ^{1/2}$	0.000393742	0.000067536	0.000000061
4	$g = (1 + z + f)^{1/2}$	0.025249660	0.006467125	0.000196032
5	$g = (1 + z^2 + f)^{1/2}$	0.000752856	0.000163579	0.000000699
6	$g = (1 + z^4 + f^2)^{1/4}$	0.000627973	0.000154532	0.000002003
7	$g = 1 + R_1$	0.000663385	0.000119895	0.000000265
8	$g = (1 + R_2)^{1/2}$	0.000712931	0.000202734	0.000000999
9	$g = 1$	процесс расходится	процесс расходится	0.019513818

ванной задачи (11). В результате длина переменного шага по x (для фиксированного N) здесь будет максимальной (тогда как для этой области с большой первой производной $y'_x|_{x=0} \approx 2\varepsilon^{-1}$, требуется маленький шаг). Указанное обстоятельство приводит к большой ошибке вычислений в области пограничного слоя для функции $g = (1 + |f|)^{1/2}$.

Из табл. 4 и 5 видно, что использование регуляризующей функции № 4 также дает низкую точность численных решений. Это связано с тем, что в этом случае $g = (1 + |z| + |f|)^{1/2}|_{x=0} = O(|z|^{1/2})$,

т.е. вблизи начальной точки $x = 0$ асимптотическое условие (14) не выполняется. Наилучшие результаты в табл. 4 и 5 дают регуляризующие функции № 3 и № 7.

5.2. Многопараметрическая краевая задача с экспоненциальной нелинейностью. Точные и численные решения

Тестовая задача 4. Рассмотрим теперь пятипараметрическую краевую задачу с экспоненциальной нелинейностью

$$\varepsilon y''_{xx} + e^{y+px+q} y'_x + p e^{y+px+q} = 0 \quad (0 < x < 1); \quad (30)$$

Таблица 5. Сравнение точности численных решений преобразованной задачи (11), которая используется для решения исходной задачи (25)–(26), для различных регуляризующих функций g при $a = b = 0$, $p = 1$, $q = 0$, $\varepsilon = 0.005$ для разного числа точек сетки N

Максимальная абсолютная погрешность численных решений задачи (25)–(26)				
№	Регуляризующая функция	$N = 100$	$N = 200$	$N = 300$
1	$g = 1 + z $	0.000734178	0.000325332	0.000061158
2	$g = (1 + f)^{1/2}$	процесс расходится	0.034146715	0.016310528
3	$g = 1 + z + f ^{1/2}$	0.000195161	0.000003566	0.000000433
4	$g = (1 + z + f)^{1/2}$	0.004963520	0.000514743	0.000202650
5	$g = (1 + z^2 + f)^{1/2}$	0.000198725	0.000007921	0.000001328
6	$g = (1 + z^4 + f^2)^{1/4}$	0.000222372	0.000010748	0.000002162
7	$g = 1 + R_1$	0.000118378	0.000004655	0.000000747
8	$g = (1 + R_2)^{1/2}$	0.000159026	0.000009546	0.000001646
9	$g = 1$	0.019513818	0.001179663	0.000182152

$$y(0) = a, \quad y(1) = b, \quad (31)$$

где a, b, p, q, ε – свободные параметры.

Замена $u = y + px + q$ преобразует ОДУ (30) в автономное уравнение $\varepsilon u''_{xx} + e''u'_x = 0$; введя новую переменную $v(u) = u'_x$ последнее сводится к линейному ОДУ первого порядка $\varepsilon v'_u + e'' = 0$. В результате получим общее решение уравнения (30) в явном виде

$$y = -\ln\left(ce^{-kx/\varepsilon} + \frac{1}{k}\right) - px - q. \quad (32)$$

Постоянные интегрирования c и k определяются из трансцендентной системы уравнений

$$c + \frac{1}{k} = e^{-a-q}, \quad ce^{-k/\varepsilon} + \frac{1}{k} = e^{-b-p-q}, \quad (33)$$

которая возникает после подстановки выражения (32) в граничные условия (31) и элементарных преобразований.

При $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотическое решение системы (33) приводит к формулам

$$c = e^{-a-q} - e^{-b-p-q}, \quad k = e^{b+p+q}. \quad (34)$$

В табл. 6 и 7 приведены максимальные абсолютные погрешности численных решений преобразованной задачи (11), используемой для решения исходной задачи (30)–(31) при $a = b = 0$, $p = 1$, $q = -1$, $\varepsilon = 0.005$, для трех шагов h , различного числа точек сетки N и различных регуляризующих функций g . Видно, что функции №№ 2–8 позволяют получать численные решения с высокой точностью. Наиболее эффективными являются функции № 3 и № 7. Отметим, что, как и ранее, функция № 1 малоэффективна; причина это-

го заключается в немонотонности решения и объясняется в разд. 1 и 2.

6. РЕГУЛЯРИЗУЮЩИЕ ФУНКЦИИ, РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Для всех рассматриваемых в данной статье сингулярно возмущенных линейных и нелинейных краевых задач с малым параметром, которые описываются ОДУ вида $\varepsilon y''_{xx} = F(x, y, y'_x)$, наиболее точные численные решения получаются путем использования регуляризующей функции (№ 7 в таблицах):

$$g = 1 + \max(|y'_x|, |y''_{xx}|^{1/2}),$$

где y''_{xx} можно заменить на $f = \varepsilon^{-1}F(x, y, y'_x)$. Эта формула наиболее универсальна и хорошо работает во всех случаях. Вместо нее можно использовать также функцию $g = \max(1, |y'_x|, |y''_{xx}|^{1/2})$. Кроме этого, хорошие результаты дают более простые регуляризующие функции $g = 1 + |y'_x| + |y''_{xx}|^{1/2}$ и $g = (1 + |y'_x|^2 + |y''_{xx}|)^{1/2}$ (№№ 3 и 5 в таблицах).

Напомним, что ранее в разд. 4.1 и 5.1 путем анализа численных решений тестовых задач (1) и (25)–(26) (для некоторых значений параметров) было показано, что регуляризующие функции (16) (функции №№ 1 и 2 в таблицах) имеют ограниченную применимость и плохо работают для немонотонных решений или если исходное уравнение вырождается на границе пограничного слоя.

Таблица 6. Сравнение точности численных решений преобразованной задачи (11), которая используется для решения исходной задачи (30)–(31), для различных регуляризующих функций g при $a = b = 0$, $p = 1$, $q = -1$, $\varepsilon = 0.005$ для трех шагов h

Максимальная абсолютная погрешность численных решений задачи (30)–(31)				
№	Регуляризующая функция	Шаг 0.1	Шаг 0.05	Шаг 0.01
1	$g = 1 + z $	0.185049898	0.035618317	0.000212182
2	$g = (1 + f)^{1/2}$	0.000692372	0.000191043	0.000001852
3	$g = 1 + z + f ^{1/2}$	0.000479280	0.000062701	0.000000075
4	$g = (1 + z + f)^{1/2}$	0.000699196	0.000182170	0.000000707
5	$g = (1 + z^2 + f)^{1/2}$	0.000706940	0.000139584	0.000000656
6	$g = (1 + z^4 + f^2)^{1/4}$	0.000741403	0.000160845	0.000002135
7	$g = 1 + R_1$	0.000492648	0.000109479	0.000000283
8	$g = (1 + R_2)^{1/2}$	0.000790921	0.000199628	0.000001181
9	$g = 1$	процесс расходится	процесс расходится	0.016651291

Таблица 7. Сравнение точности численных решений преобразованной задачи (11), которая используется для решения исходной задачи (30)–(31), для различных регуляризующих функций g при $a = b = 0$, $p = 1$, $q = -1$, $\varepsilon = 0.005$ для разного числа точек сетки N

Максимальная абсолютная погрешность численных решений задачи (30)–(31)				
№	Регуляризующая функция	$N = 100$	$N = 200$	$N = 300$
1	$g = 1 + z $	0.008033009	0.000490903	0.000168976
2	$g = (1 + f)^{1/2}$	0.000174781	0.000006417	0.000001164
3	$g = 1 + z + f ^{1/2}$	0.000254116	0.000003781	0.000000540
4	$g = (1 + z + f)^{1/2}$	0.000146092	0.000005956	0.000000895
5	$g = (1 + z^2 + f)^{1/2}$	0.000215039	0.000007804	0.000001386
6	$g = (1 + z^4 + f^2)^{1/4}$	0.000186220	0.000009774	0.000002374
7	$g = 1 + R_1$	0.000096813	0.000004651	0.000000799
8	$g = (1 + R_2)^{1/2}$	0.000149504	0.000009551	0.000001620
9	$g = 1$	0.016651291	0.000385984	0.000062467

7. КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Рассмотрены сингулярно возмущенные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при старшей производной. Такие задачи характеризуются узкими пограничными слоями с большими градиентами, что значительно ограничивает применимость к ним стандартных численных методов с постоянным шагом (что может привести к значительным погрешностям вычислений). Описан эффективный метод численного интегрирования сингулярно возмущенных краевых задач, основанный на использовании нело-

кальных преобразований. После применения таких преобразований получаются более удобные редуцированные задачи, которые позволяют применять стандартные численные методы с постоянным шагом по новой независимой переменной. Обширная апробация метода проводится на различных многопараметрических линейных и нелинейных задачах с монотонными и немонотонными решениями. Сравнение численных и точных решений тестовых сингулярно возмущенных краевых задач с малым параметром показало высокую точность метода, основанного на нелокальных преобразованиях.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310385-6) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10025).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
2. Kevorkian J., Cole J.D. Perturbation Methods in Applied Mathematics. New York: Springer, 1981.
3. Lagerstrom P.A. Matched Asymptotic Expansions. Ideas and Techniques. New York: Springer, 1988.
4. Il'in A.M. Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems. Providence: American Mathematical Society, 1992.
5. Nayfeh A.H. Perturbation Methods. New York: Wiley-Interscience, 2000.
6. Polyanin A.D., Kutepov A.M., Vyazmin A.V., Kazenin D.A. Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering. London: Taylor & Francis, 2002.
7. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton-London: Chapman & Hall/CRC Press, 2003.
8. Verhulst F. Methods and Applications of Singular Perturbations, Boundary Layers and Multiple Timescale Dynamics. New York: Springer, 2005.
9. Бахвалов Н.С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1969. Т. 9. № 4. С. 841–859.
10. Ильин А.М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Мат. заметки. 1969. Т. 6. № 2. С. 237–248.
11. Vulanovic R. A uniform numerical method for quasilinear singular perturbation problems without turning points // Computing. 1989. V. 41. № 1. P. 97–106.
12. Jain M.K., Iyengar S.R.K., Subramanyam G.S. Variable mesh methods for the numerical solution of two-point singular perturbation problems // Comp. Methods in Appl. Mech. Eng. 1984. V. 42. № 3. P. 273–286.
13. Шишкин Г.И. Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
14. Beckett G., Mackenzie J.A. Convergence analysis of finite difference approximations on equidistributed grids to a singularly perturbed boundary value problem // Appl. Numer. Math. 2000. V. 35. № 2. P. 87–109.
15. Farrell P., Hegarty A., Miller J.M., O'Riordan E., Shishkin G.I. Robust Computational Techniques for Boundary Layers. Boca Raton-London: Chapman & Hall/CRC Press, 2000.
16. Qiu Y., Sloan D.M., Tang T. Numerical solution of a singularly perturbed two-point boundary value problem using equidistribution, analysis of convergence // J. Comput. Appl. Math. 2000. V. 116. № 1. P. 121–143.
17. Frohner A., Roos H.-G. The ε -uniform convergence of a defect correction method on a Shishkin mesh // Appl. Numerical Math. 2001. V. 37. P. 79–94.
18. Miranker W.L. Numerical Methods for Stiff Equations and Singular Perturbation Problems. Dordrecht: Reidel Publ, 2001.
19. Aziz T., Khan A. A spline method for second-order singularly perturbed boundary-value problems // J. Comput. Appl. Math. 2002. V. 147. № 2. P. 445–452.
20. Vigo-Aguiar J., Natesan S. An efficient numerical method for singular perturbation problems // J. Comput. Appl. Math. 2006. V. 192. № 1. P. 132–141.
21. Rao S.C.S., Kumar M. Exponential B-spline collocation method for self-adjoint singularly perturbed boundary value problems // Appl. Numerical Math. 2008. V. 58. P. 1572–1581.
22. Shishkin G.I., Shishkina L.P. Difference Methods for Singular Perturbation Problems. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2009.
23. Kopteva N., O'Riordan E. Shishkin meshes in the numerical solution of singularly perturbed differential equations // Int. J. Numer. Analysis and Modeling. 2010. V. 7. № 3. P. 393–415.
24. Vulkov L.G., Zadorin A.I. Two-grid algorithms for an ordinary second order equation with an exponential boundary layer in the solution // Int. J. Numer. Analysis and Modeling. 2010. V. 7. № 3. P. 580–592.
25. Attili B.S. Numerical treatment of singularly perturbed two point boundary value problems exhibiting boundary layers // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2011. V. 16. № 9. P. 3504–3511.
26. Liu C.-S. The Lie-group shooting method for solving nonlinear singularly perturbed boundary value problems // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2012. V. 17. № 4. P. 1506–1521.
27. Das P. Comparison of a priori and a posteriori meshes for singularly perturbed nonlinear parameterized problems // J. Comput. Appl. Math. 2015. V. 290. P. 16–25.
28. Brdar M., Zarin H. A singularly perturbed problem with two parameters on a Bakhvalov-type mesh // J. Comput. Appl. Math. 2016. V. 292. P. 307–319.
29. Zarin H. Exponentially graded mesh for a singularly perturbed problem with two small parameters // Appl. Numerical Math. 2017. V. 120. P. 233–242.
30. Ahmadinia M., Safari Z. Numerical solution of singularly perturbed boundary value problems by improved least squares method // J. Comput. Appl. Math. 2018. V. 331. P. 156–165.
31. Polyanin A.D., Shingareva I.K. Application of non-local transformations for numerical integration of singularly perturbed boundary-value problems with a small parameter // Int. J. Non-Linear Mechanics. 2018. V. 103. P. 37–54.
32. Полянин А.Д., Шингарева И.К. Сингулярные краевые задачи с пограничным слоем: Метод нелокальных преобразований, тестовые задачи, численное интегрирование // Вестник НИЯУ МИФИ. 2018. Т. 7. № 1. С. 33–51.
33. Polyanin A.D., Shingareva I.K. The use of differential and non-local transformations for numerical integration of non-linear blow-up problems // Int. J. Non-Linear Mechanics. 2017. V. 94. P. 178–184.

34. Polyanin A.D., Shingareva I.K. Non-monotonic blow-up problems: Test problems with solutions in elementary functions, numerical integration based on non-local transformations // *Appl. Math. Letters*. 2018. V. 76. P. 123–129.
35. Polyanin A.D., Shingareva I.K. Non-linear problems with non-monotonic blow-up solutions: Non-local transformations, test problems, exact solutions, and numerical integration // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 2018. V. 99. P. 258–272.
36. Polyanin A.D., Shingareva I.K. Nonlinear problems with blow-up solutions: Numerical integration based on differential and nonlocal transformations, and differential constraints // *Appl. Math. Comput.* 2019. V. 336. P. 107–137.
37. Polyanin A.D., Shingareva I.K. The method of non-local transformations: Applications to blow-up problems // *J. Physics: IOP Conf. Series*. 2017. V. 937. 012042.
38. Polyanin A.D., Shingareva I.K. Non-linear blow-up problems for systems of ODEs and PDEs: Non-local transformations, numerical and exact solutions // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 2018. V. 111. P. 28–41.
39. Kudryashov N.A., Sinelshchikov D.I. On the criteria for integrability of the Liénard equation // *Appl. Math. Letters*. 2016. V. 57. P. 114–120.
40. Muriel C., Romero J.L. Nonlocal transformations and linearization of second-order ordinary differential equations // *J. Physics A, Math. Theor.* 2010. V. 43. 434025.
41. Meleshko S.V., Moyo S., Muriel C., Romero J.L., Guha P., Choudhury A.G. On first integrals of second-order ordinary differential equations // *J. Eng. Math.* 2013. V. 82. P. 17–30.
42. Keller H.B. Numerical Solution of Two Point Boundary Value Problems. Philadelphia: SIAM, 1974.
43. Butcher J.C. The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations, Runge–Kutta and General Linear Methods. New York: Wiley-Interscience, 1987.
44. Fox L., Mayers D.F. Numerical Solution of Ordinary Differential Equations for Scientists and Engineers. London: Chapman & Hall, 1987.
45. Ascher U.M., Petzold L.R. Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations. Philadelphia: SIAM, 1998.
46. Shingareva I.K., Lizárraga-Celaya C. Maple and Mathematica. A Problem Solving Approach for Mathematics, 2nd ed. Wien – New York: Springer, 2009.
47. Griffiths D., Higham D.J. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Wien – New York: Springer, 2010.
48. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems, 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
49. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems, 2nd ed. New York: Springer, 1996.
50. Lambert J.D. Numerical Methods for Ordinary Differential Systems. New York: Wiley, 1991.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2019, vol. 8, no. 6, pp. 515–532

The Qualitative Features of the Numerical Integration Problems with a Boundary Layer by Nonlocal Transformations

A. D. Polyanin^{a,b,c,#} and I. K. Shingareva^{d,##}

^a Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia

^b Bauman State Technical University, Moscow, 105005 Russia

^c National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

^d University of Sonora, Hermosillo, Sonora, 83000 México

[#]e-mail: polyanin@ipmnet.ru

^{##}e-mail: inna@mat.uson.mx

Received August 27, 2019; revised August 27, 2019; accepted October 1, 2019

Abstract—The qualitative features of the numerical integration of two-point boundary-value problems of boundary-layer type by using nonlocal transformations are described. Such transformations, sometimes also called Sundman-type transformations, are defined by using an auxiliary differential equation and allow one to “stretch” the boundary-layer region (after which any adequate numerical methods with a fixed stepsize can be applied). Multiparameter nonlinear singularly perturbed boundary-value problems with a small parameter having exact solutions in elementary functions are presented, which can be used to test various numerical methods on non-uniform grids. Particular attention is paid to the study of the most difficult boundary-value problems for numerical analysis, which have non-monotonic solutions or degenerate solutions at the boundary of the boundary-layer. A comparison of numerical and exact solutions shows the high efficiency of the nonlocal transformation method for numerical integration of boundary-value problems with a boundary layer.

Keywords: ordinary differential equations with a small parameter, singularly perturbed boundary-value problems, boundary layer, nonlocal transformations, exact and numerical solutions

DOI: 10.1134/S2304487X19060099

REFERENCES

1. Van Dyke M., *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, New York, Academic Press, 1964.
2. Kevorkian J., Cole J. D., *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, New York, Springer, 1981.
3. Lagerstrom P.A., *Matched Asymptotic Expansions. Ideas and Techniques*, New York, Springer, 1988.
4. Il'in A.M., *Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems*, Providence, American Mathematical Society, 1992.
5. Nayfeh A.H., *Perturbation Methods*, New York, Wiley–Interscience, 2000.
6. Polyanin A.D., Kutepov A.M., Vyazmin A.V., Kazenin D.A., *Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering*, London, Taylor & Francis, 2002.
7. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, 2nd ed., Boca Raton – London, Chapman & Hall/CRC Press, 2003.
8. Verhulst F., *Methods and Applications of Singular Perturbations, Boundary Layers and Multiple Timescale Dynamics*, New York, Springer, 2005.
9. Bakhvalov N.S., On the optimization methods for solving boundary value problems with boundary layers, *Zh. Vychisl. Math. Fiz.*, 1969, vol. 24, pp. 841–859 (in Russian).
10. Il'in A.M., A difference scheme for a differential equation with a small parameter affecting the highest derivative, *Mat. Zametki*, 1969, vol. 6, pp. 237–248 (in Russian).
11. Vulanovic R., A uniform numerical method for quasilinear singular perturbation problems without turning points, *Computing*, 1989, vol. 41, no. 1, pp. 97–106.
12. Jain M.K., Iyengar S.R.K., Subramanyam G.S., Variable mesh methods for the numerical solution of two-point singular perturbation problems, *Comp. Methods in Appl. Mech. Eng.*, 1984, vol. 42, no. 3, pp. 273–286.
13. Shishkin G.I., *Setochnyye approksimatsii singulyarno vozmushchennykh ellipticheskikh i parabolicheskikh uravneniy* [Grid Approximations of Singularly Perturbed Elliptic and Parabolic Equations], Ekaterinburg, Ural Branch of Russian Academy of Sciences, 1992 (in Russian).
14. Beckett G., Mackenzie J.A., Convergence analysis of finite difference approximations on equidistributed grids to a singularly perturbed boundary value problem, *Appl. Numer. Math.*, 2000, vol. 35, no. 2, pp. 87–109.
15. Farrell P., Hegarty A., Miller J.M., O'Riordan E., Shishkin G.I., *Robust Computational Techniques for Boundary Layers*, Boca Raton – London, Chapman & Hall/CRC Press, 2000.
16. Qiu Y., Sloan D.M., Tang T., Numerical solution of a singularly perturbed two-point boundary value problem using equidistribution, analysis of convergence, *J. Comput. Appl. Math.*, 2000, vol. 116, no. 1, pp. 121–143.
17. Frohner A., Roos H.-G., The ε -uniform convergence of a defect correction method on a Shishkin mesh, *Appl. Numerical Math.*, 2001, vol. 37, pp. 79–94.
18. Miranker W.L., *Numerical Methods for Stiff Equations and Singular Perturbation Problems*, Dordrecht, Reidel Publ, 2001.
19. Aziz T., Khan A., A spline method for second-order singularly perturbed boundary-value problems, *J. Comput. Appl. Math.*, 2002, vol. 147, no. 2, pp. 445–452.
20. Vigo-Aguiar J., Natesan S., An efficient numerical method for singular perturbation problems, *J. Comput. Appl. Math.*, 2006, vol. 192, no. 1, pp. 132–141.
21. Rao S.C.S., Kumar M., Exponential B-spline collocation method for self-adjoint singularly perturbed boundary value problems, *Appl. Numerical Math.*, 2008, vol. 58, pp. 1572–1581.
22. Shishkin G.I., Shishkina L.P., *Difference Methods for Singular Perturbation Problems*, Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2009.
23. Kopteva N., O'Riordan E., Shishkin meshes in the numerical solution of singularly perturbed differential equations, *Int. J. Numer. Analysis and Modeling*, 2010, vol. 7, no. 3, pp. 393–415.
24. Vulkov L.G., Zadorin A.I., Two-grid algorithms for an ordinary second order equation with an exponential boundary layer in the solution, *Int. J. Numer. Analysis and Modeling*, 2010, vol. 7, no. 3, pp. 580–592.
25. Attili B.S., Numerical treatment of singularly perturbed two point boundary value problems exhibiting boundary layers, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2011, vol. 16, no. 9, pp. 3504–3511.
26. Liu C.-S., The Lie-group shooting method for solving nonlinear singularly perturbed boundary value problems, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2012, vol. 17, no. 4, pp. 1506–1521.
27. Das P., Comparison of a priori and a posteriori meshes for singularly perturbed nonlinear parameterized problems, *J. Comput. Appl. Math.*, 2015, vol. 290, pp. 16–25.
28. Brdar M., Zarin H., A singularly perturbed problem with two parameters on a Bakhvalov-type mesh, *J. Comput. Appl. Math.*, 2016, vol. 292, pp. 307–319.
29. Zarin H., Exponentially graded mesh for a singularly perturbed problem with two small parameters, *Appl. Numerical Math.*, 2017, vol. 120, pp. 233–242.
30. Ahmadinia M., Safari Z., Numerical solution of singularly perturbed boundary value problems by improved least squares method, *J. Comput. Appl. Math.*, 2018, vol. 331, pp. 156–165.
31. Polyanin A.D., Shingareva I.K., Application of non-local transformations for numerical integration of singularly perturbed boundary-value problems with a small parameter, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 2018, vol. 103, pp. 37–54.
32. Polyanin A.D., Shingareva I.K., Singularly perturbed boundary value problems with a boundary layer: Method of nonlocal transformations, test problems, and numerical integration, *Vestnik NIYaU MIFI*, 2018, vol. 7, no. 1, pp. 33–51 (in Russian).
33. Polyanin A.D., Shingareva I.K., The use of differential and non-local transformations for numerical integration of non-linear blow-up problems, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 2017, vol. 94, pp. 178–184.
34. Polyanin A.D., Shingareva I.K., Non-monotonic blow-up problems: Test problems with solutions in elementary functions, numerical integration based on non-local transformations, *Appl. Math. Letters*, 2018, vol. 76, pp. 123–129.

35. Polyanin A.D., Shingareva I.K., Non-linear problems with non-monotonic blow-up solutions: Non-local transformations, test problems, exact solutions, and numerical integration, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 2018, vol. 99, pp. 258–272.
36. Polyanin A.D., Shingareva I.K., Nonlinear problems with blow-up solutions: Numerical integration based on differential and nonlocal transformations, and differential constraints, *Appl. Math. Comput.*, 2019, vol. 336, pp. 107–137.
37. Polyanin A.D., Shingareva I.K., The method of non-local transformations: Applications to blow-up problems, *J. Physics: IOP Conf. Series*, 2017, vol. 937, 012042.
38. Polyanin A.D., Shingareva I.K., Non-linear blow-up problems for systems of ODEs and PDEs: Non-local transformations, numerical and exact solutions, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 2018, vpl. 111, pp. 28–41.
39. Kudryashov N.A., Sinelshchikov D.I., On the criteria for integrability of the Liénard equation, *Appl. Math. Letters*, 2016, vol. 57, pp. 114–120.
40. Muriel C., Romero J.L., Nonlocal transformations and linearization of second-order ordinary differential equations, *J. Physics A, Math. Theor.*, 2010, vol. 43, 434025.
41. Meleshko S.V., Moyo S., Muriel C., Romero J.L., Guha P., Choudhury A.G., On first integrals of second-order ordinary differential equations, *J. Eng. Math.*, 2013, vol. 82, pp. 17–30.
42. Keller H.B., *Numerical Solution of Two Point Boundary Value Problems*, Philadelphia, SIAM, 1974.
43. Butcher J.C., *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations, Runge–Kutta and General Linear Methods*, New York, Wiley-Interscience, 1987.
44. Fox L., Mayers D.F., *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations for Scientists and Engineers*, London, Chapman & Hall, 1987.
45. Ascher U.M., Petzold L.R., *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*, Philadelphia, SIAM, 1998.
46. Shingareva I.K., Lizárraga-Celaya C., *Maple and Mathematica. A Problem Solving Approach for Mathematics*, 2nd ed., Wien – New York, Springer, 2009.
47. Griffiths D., Higham D.J., *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, Wien – New York, Springer, 2010.
48. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G., *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1993.
49. Hairer E., Wanner G., *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*, 2nd ed., Springer, New York, 1996.
50. Lambert J.D., *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems*, Wiley, New York, 1991.