ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2019, том 8, № 6, с. 533–539

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.91

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. А. Кудряшов[1,*], А. А. Кутуков[1,]**

[1] Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия

**e-mail: nakudr@gmail.com*

***e-mail: alexkutuk@gmail.com*

Поступила в редакцию 09.10.2019 г.
После доработки 09.10.2019 г.
Принята к публикации 15.10.2019 г.

В работе представлено описание программы AFES (automatic finding exact solutions), предназначенной для нахождения точных решений обыкновенных дифференциальных уравнений в полиномиальной форме. Для нахождения точных решений используется метод простейших уравнений, который заключается в поиске точных решений дифференциального уравнения с использованием общего решения дифференциального уравнения меньшего порядка. Для того чтобы выбрать, в каком виде ищется точное решение, необходимо определить порядок полюса решения исходного уравнения и порядок полюса решения простейшего уравнения. Для этого применяется программа автоматического построения многоугольников Ньютона ACNP (automatic construction of Newton polygons). В работе в качестве простейших уравнений рассматриваются уравнение Риккати и уравнение для эллиптической функции Вейерштрасса. В целях тестирования программы приводятся примеры построения точных решений различных нелинейных дифференциальных уравнений. Программа AFES написана в системе компьютерной алгебры Maple. Приводится алгоритм работы программы и примеры ее применения. Программа AFES имеет ряд преимуществ по сравнению с известными программами для нахождения точных решений дифференциальных уравнений. В частности, построенные точные решения являются различными, то есть не сводятся друг к другу путем элементарных преобразований.

Ключевые слова: метод простейших уравнений, точные решения, нелинейные дифференциальные уравнения, система компьютерной алгебры

DOI: 10.1134/S2304487X19060038

1. ВВЕДЕНИЕ

Математические модели многих физических процессов содержат неинтегрируемые нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, например, уравнения для описания распространения импульсов в оптическом волокне [1–3], уравнение Курамото–Сивашинского [4, 5], уравнение для описания волн в жидкости с конвекцией [6] и другие. В ряде случаев удается осуществить редукцию к обыкновенным дифференциальным уравнениям и найти их аналитические решения, содержащие меньшее количество произвольных констант, чем порядок дифференциального уравнения (эти решения называют точными). Среди методов для нахождения точных решений можно выделить метод гиперболического тангенса [7, 8], метод экспоненциальных функций [9], метод G'/G разложений [10], метод логистических функций [11], метод простейших уравнений [12, 13]. Большинство этих методов имеют схожие принципы [14]. Как показано в работах [15, 16], неаккуратное использование методов гиперболического тангенса и экспоненциальных функций приводит к нахождению на первый взгляд новых решений, однако детальное рассмотрение показывает, что они отличаются от уже известных только формой записи. В связи с этим для автоматизации построения точных решений выбран метод простейших уравнений. Он объединяет в себе некоторые другие методы построения точных решений и прост для реализации в системах компьютерной алгебры.

Рассматривается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n в полиномиальной форме

$$M(y(z), y_z(z), y_{zz}(z), \ldots, z) = 0. \tag{1}$$

Пусть общее решение уравнения (1) имеет порядок полюса p. Выберем уравнение порядка $m < n$, решение которого известно

$$E(Y(z), Y_z(z), \ldots, z) = 0. \tag{2}$$

Зависимость $y(z) = F(Y(z))$ выбирается исходя из порядков полюсов простейшего (2) и исходного (1) уравнений.

В качестве примера простейшего уравнения может быть выбрано уравнение Риккати

$$Y_z = -Y^2 + b, \tag{3}$$

или уравнения для эллиптических функций Якоби

$$Q_z^2 = Q^4 + aQ^3 + bQ^2 + cQ + d, \tag{4}$$

или Вейерштрасса

$$R_z^2 = -4R^3 + aR^2 + 2bR + c. \tag{5}$$

2. АЛГОРИТМ ПРОГРАММЫ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Программа AFES [17] написана в системе компьютерной алгебры Maple. Входные данные представляют собой обыкновенное дифференциальное уравнение *ode* полиномиального вида (1). Вывод программы осуществляется в рабочем пространстве среды Maple и представляет собой точные решения уравнения *ode* с ограничениями на параметры, либо информационное сообщение с причиной, по которой не удалось найти точное решение уравнения.

Программа AFES позволяет искать точные решения дифференциальных уравнений полиномиального вида с целым порядком полюса. Для поиска решений использованы два простейших уравнения:

• уравнение Риккати $Y_z = -Y^2 + b$;

• уравнение для эллиптической функции Вейерштрасса

$$\wp_z^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

Алгоритм программы AFES для нахождения точных решений нелинейных *ode*:

1. Определение порядка полюса *ode* при помощи многоугольника Ньютона [18–20].

2. При выборе уравнения Риккати задание усеченного разложения в виде $y(z) = \sum_{k=0}^{p} A_k Y^k(z)$.

3. При выборе уравнения для эллиптической функции Вейерштрасса задание усеченного разложения в виде $y(z) = A_0 + \sum_{k=0}^{p-2} A_{k+1} \dfrac{d^k Y}{dz^k}$ при $p \geq 2$ и $y(z) = A_0 + A_1 \dfrac{Y'(z)}{Y(z)}$ при $p = 1$.

4. Подстановка усеченного разложения в исходное уравнение.

5. Подстановка в полученное уравнение выражений для старших производных $Y(z)$ в зависимости от выбранного простейшего уравнения.

6. Приравнивание нулю коэффициентов при одинаковых степенях $Y(z)$ и, при наличии, $Y'(z)$.

7. Решение полученной алгебраической системы уравнений встроенной функцией *solve()* с учетом параметров *ode*, выбранных пользователем.

8. Исключение из системы тривиальных и вырожденных случаев.

9. Проверка полученных решений путем подстановки в исходное уравнение.

10. Вывод найденных точных решений.

3. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОГРАММЫ AFES

3.1. Построение точных решений уравнения Курамото–Сивашинского

Для проверки работы программы AFES рассматривается уравнение Курамото–Сивашинского в переменных бегущей волны

$$y_{zzz} + \sigma y_{zz} + y_z + \frac{1}{2} y^2 - C_0 y + C_1 = 0. \tag{6}$$

В случае, если в качестве простейшего уравнения выбрать уравнение Риккати, дополнительно в качестве входных данных для программы необходимо указать параметры σ и C_1. На выходе программы имеется десять известных решений в виде уединенных волн и сингулярных решений.

1. $$y_1(z) = C_0 - \frac{135 \tanh\left(\frac{\sqrt{11}\sqrt{19}(z+\varphi)}{38}\right)\sqrt{11}\sqrt{19}}{361} + \frac{165 \tanh\left(\frac{\sqrt{11}\sqrt{19}(z+\varphi)}{38}\right)^3 \sqrt{11}\sqrt{19}}{361}, \tag{7}$$

$$C_1 = -\frac{4950}{6859} + \frac{C_0^2}{2}, \quad \sigma = 0;$$

2. $y_2(z) =$

$$= \frac{\left(-15\tan\left(\frac{\sqrt{19}(z+\varphi)}{38}\right)^3 - 45\tan\left(\frac{\sqrt{19}(z+\varphi)}{38}\right)\right)\sqrt{19}}{361} + \tag{8}$$

$$+ C_0, \quad C_1 = \frac{450}{6859} + \frac{C_0^2}{2}, \quad \sigma = 0;$$

3. $$y_3(z) = -11 + C_0 - 15\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{z}{2}\right) - $$
$$-15\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{z}{2}\right)^2 - 15\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{z}{2}\right)^3, \tag{9}$$
$$C_1 = -8 + \frac{C_0^2}{2}, \quad \sigma = 4;$$

4. $$y_4(z) = -9 + C_0 - 15\tanh\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{z}{2}\right) +$$
$$+15\tanh\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{z}{2}\right)^2 + 15\tanh\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{z}{2}\right)^3, \tag{10}$$
$$C_1 = -18 + \frac{C_0^2}{2}, \quad \sigma = -4;$$

5. $$y_5(z) = 9 + C_0 - 15\tanh\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{z}{2}\right) -$$
$$-15\tanh\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{z}{2}\right)^2 + 15\tanh\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{z}{2}\right)^3, \tag{11}$$
$$C_1 = -18 + \frac{C_0^2}{2}, \quad \sigma = 4;$$

6. $$y_6(z) = 11 + C_0 - 15\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{z}{2}\right) +$$
$$+15\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{z}{2}\right)^2 - 15\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{z}{2}\right)^3, \tag{12}$$
$$C_1 = -8 + \frac{C_0^2}{2}, \quad \sigma = -4;$$

7. $$y_7(z) = C_0 - \frac{45\sqrt{47}}{2209} +$$
$$+\frac{45\tanh\left(\frac{\sqrt{47}(\varphi+z)}{94}\right)\sqrt{47}}{2209} +$$
$$+\frac{45\sqrt{47}\tanh\left(\frac{\sqrt{47}(\varphi+z)}{94}\right)^2}{2209} + \tag{13}$$
$$+\frac{15\tanh\left(\frac{\sqrt{47}(\varphi+z)}{94}\right)^3\sqrt{47}}{2209},$$
$$C_1 = \frac{C_0^2}{2} - \frac{1800}{103\,823}, \quad \sigma = -\frac{12\sqrt{47}}{47};$$

8. $$y_8(z) = C_0 + \frac{45\sqrt{47}}{2209} +$$
$$+\frac{45\tanh\left(\frac{\sqrt{47}(\varphi+z)}{94}\right)\sqrt{47}}{2209} -$$
$$-\frac{45\sqrt{47}\tanh\left(\frac{\sqrt{47}(\varphi+z)}{94}\right)^2}{2209} + \tag{14}$$
$$+\frac{15\tanh\left(\frac{\sqrt{47}(\varphi+z)}{94}\right)^3\sqrt{47}}{2209},$$
$$C_1 = \frac{C_0^2}{2} - \frac{1800}{103\,823}, \quad \sigma = \frac{12\sqrt{47}}{47};$$

9. $$y_9(z) = C_0 - \frac{60\sqrt{73}}{5329} +$$
$$+\frac{75\tanh\left(\frac{\sqrt{73}(\varphi+z)}{146}\right)\sqrt{73}}{5329} +$$
$$+\frac{60\sqrt{73}\tanh\left(\frac{\sqrt{73}(\varphi+z)}{146}\right)^2}{5329} + \tag{15}$$
$$+\frac{15\tanh\left(\frac{\sqrt{73}(\varphi+z)}{146}\right)^3\sqrt{73}}{5329},$$
$$C_1 = \frac{C_0^2}{2} - \frac{4050}{389\,017}, \quad \sigma = -\frac{16\sqrt{73}}{73};$$

10. $$y_{10}(z) = C_0 + \frac{60\sqrt{73}}{5329} +$$
$$+\frac{75\tanh\left(\frac{\sqrt{73}(\varphi+z)}{146}\right)\sqrt{73}}{5329} -$$
$$-\frac{60\sqrt{73}\tanh\left(\frac{\sqrt{73}(\varphi+z)}{146}\right)^2}{5329} + \tag{16}$$
$$+\frac{15\tanh\left(\frac{\sqrt{73}(\varphi+z)}{146}\right)^3\sqrt{73}}{5329},$$
$$C_1 = \frac{C_0^2}{2} - \frac{4050}{389\,017}, \quad \sigma = \frac{16\sqrt{73}}{73}.$$

В случае, если в качестве простейшего уравнения выбрать уравнение для эллиптической функции Вейерштрасса, дополнительно в качестве входных данных для программы необходимо указать параметр σ. На выходе программы имеется два известных периодических решения

$$\begin{gathered} y_{1,2}(z) = C_0 \mp 1 \mp \\ \mp 60\wp\left(\varphi + z, \frac{1}{12}, -\frac{C_0^2}{2160} + \frac{13}{1080} + \frac{C_1}{1080}\right) - \\ -60\wp_z\left(\varphi + z, \frac{1}{12}, -\frac{C_0^2}{2160} + \frac{13}{1080} + \frac{C_1}{1080}\right), \\ \sigma = \pm 4. \end{gathered} \tag{17}$$

Таким образом, программа AFES успешно проходит проверку для уравнения Курамото–Сивашинского.

3.2. Построение точных решений уравнений, описывающих распространение сигналов в оптическом волокне

Рассматривается уравнение, описывающее распространение импульсов в оптическом волокне [21]

$$\begin{gathered} a_1 y_{zz} + a_2 y^2 + \frac{a_3}{y^3} + a_4 y^{2n+1} + \\ + a_5 y^{n+1} + a_6 y^{1-n} + a_7 y^{1-2n} = 0. \end{gathered} \tag{18}$$

Уравнение (18) получено путем перехода к переменным бегущей волны в уравнении Шредингера с нелинейностью произвольной степени. Производится поиск периодических решений уравнения (18) в случае $n = 1$. На выходе программы имеется решение

$$\begin{gathered} y(z) = \frac{\sqrt{-6a_1a_2}\wp_z(z + C, g_2, 0) - 2a_2\wp(z + C, g_2, 0)}{2a_5\wp(z + C, g_2, 0)}, \\ a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{a_5^2}{3a_2}, \quad a_6 = \frac{a_2^2}{3a_5}, \quad a_7 = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Решение (18) содержит две произвольные константы, поэтому является общим решением для уравнения (18). Таким образом, в ситуации, когда исходное уравнение можно привести к уравнению для эллиптических функций, программа позволяет искать общие решения таких уравнений.

В работе [3] приводятся примеры нелинейных неинтегрируемых обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого и шестого порядков для описания распространения импульсов в оптическом волокне. Особенностью этих уравнений является тот факт, что все они имеют одно общее точное решение, выраженное при помощи эллиптических функций. Рассматриваются два дифференциальных уравнения четвертого порядка и осуществляется поиск точных решений при помощи программы AFES. Одно из уравнений имеет вид

$$\begin{gathered} y_{zzzz} - 6ay^2y_{zz} - cy_{zz} - 12a^2y^5 - \\ - 12acy^3 - 12aC_1y = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Другое уравнение четвертого порядка

$$y_{zzzz} - cy_{zz} - 24a^2y^5 - 18acy^3 - 12aC_1y = 0. \tag{21}$$

При помощи программы AFES не удается найти точные решения уравнений (20), (21) без дополнительного преобразования $y(z) = \sqrt{v(z)}$. После указанной замены получается одно общее для двух уравнений точное решение

$$\begin{gathered} y(z) = \\ = \sqrt{\frac{-c + 3\wp\left(z + \varphi, -4aC_1 + \frac{4c^2}{3}, \frac{4}{3}C_1ac - \frac{8}{27}c^3\right)}{3a}}. \end{gathered} \tag{22}$$

Удалось найти новое точное решение для уравнения (20)

$$y(z) = \sqrt{\frac{-11c - 48\wp\left(z + \varphi, -4aC_1 + \frac{781c^2}{768}, -\frac{11}{12}C_1ac + \frac{20449}{110592}c^3\right)}{24a}} \tag{23}$$

и новое точное решение для уравнения (21)

$$y(z) = \sqrt{\frac{-4c - 15\wp\left(z + \varphi, -4aC_1 + \frac{4c^2}{3}, -\frac{16}{15}C_1ac + \frac{944}{3375}c^3\right)}{15a}}. \tag{24}$$

Таким образом, помимо общих друг для друга точных решений уравнения (20), (21) имеют различные невырожденные точные периодические решения.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлен алгоритм программы AFES для построения точных решений обыкновенных дифференциальных уравнений полиномиального вида. Программа AFES успешно проходит проверку для уравнения Курамото–Сивашинского. В случае уравнений для описания распространения импульсов в оптическом волокне показано, что при помощи программы AFES для некоторых уравнений могут быть найдены общие решения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00209).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kudryashov N.A.* Periodic and solitary waves of the Biswas–Arshed equation // Optik, 2020. V. 200. P. 163442.
2. *Kudryashov N.A.* The Painleve approach for finding solitary wave solutions of nonlinear nonintegrable differential equations // Optik, 2019. V. 183. P. 642–649.
3. *Kudryashov N.A.* Construction of nonlinear differential equations for description of propagation pulses in optical fiber // Optik, 2019. V. 192. P. 162964.
4. *Kuramoto Y., Tsuzuki T.* Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium // Prog. Theor. Phys., 1976. V. 55. № 2. P. 356–369.
5. *Sivashinsky G.I.* Instabilities, pattern formation, and turbulence in flames // Annu. Rev. Fluid Mech., 1983. V. 15. № 1. P. 179–199.
6. *Aspe H., Depassier M.C.* Instabilities, pattern formation, and turbulence in flames // Phys. Rev. A., 1990. V. 41. I. 6. P. 3125–3128.
7. *Parkes E.J., Duffy B.R.* An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations // Comput. Phys. Commun., 1996. V. 98. I. 3. P. 288–300.
8. *Liang S., Jeffrey D.J.* Automatic computation of the travelling wave solutions to nonlinear PDEs // Comput. Phys. Commun., 2008. V. 178. I. 9. P. 700–712.
9. *He J.-H., Wu X.-H.* Exp-function method for nonlinear wave equations // Chaos, Solitons & Fractals, 2006. V. 30. I. 3. P. 700–708.
10. *Wang M., Li X., Zhang J.* The (G'/G)-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics // Phys. Lett. A., 2008. V. 372. I. 4. P. 417–423.
11. *Kudryashov N.A.* Method of the Logistic Function for Finding Analytical Solutions of Nonlinear Differential Equations // Modeling and Analysis of Information Systems, 2015. V. 22. I. 1. P. 23–37.
12. *Kudryashov N.A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // Chaos, Solitons & Fractals, 2005. V. 24. I. 5. P. 1217–1231.
13. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики // Издательский дом “Интеллект”, 2010. 368 с.
14. *Kudryashov N.A.* A note on the G'/G-expansion method // Appl. Math. Comput., 2010. V. 217. I. 4. P. 1755–1758.
15. *Kudryashov N.A.* Seven common errors in finding exact solutions of nonlinear differential equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2009. V. 14. I. 9–10. P. 3507–3529.
16. *Kudryashov N.A.* Be careful with the Exp-function method // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2009. V. 14. I. 5. P. 1881–1890.
17. *Кудряшов Н.А., Кутуков А.А.* Программа построения точных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в полиномиальной форме // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ, 2019. № 2019661587.
18. *Кудряшов Н.А., Кутуков А.А.* Автоматизация построения многоугольников Ньютона, соответствующих обыкновенным дифференциальным уравнениям полиномиального вида // Вестник НИЯУ “МИФИ”, 2019. Т. 8. №3. С. 284–289.
19. *Кудряшов Н.А., Кутуков А.А.* Программа для построения многоугольников Ньютона, соответствующих обыкновенным дифференциальным уравнениям полиномиального вида // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ, 2019. № 2019617572.
20. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Успехи мат. наук, 2004. Т. 59. Вып. 3. С. 31–80.
21. *Kudryashov N.A.* A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber // Optik, 2019. V. 189. P. 42–52.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2019, vol. 8, no. 6, pp. 533–539

Automation of the Construction of Exact Solutions of Nonlinear Differential Equations

N. A. Kudryashov[a,#] and A. A. Kutukov[a,##]

[a] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

[#] *e-mail: nakudr@gmail.com*

[##] *e-mail: alexkutuk@gmail.com*

Received October 9, 2019; revised October 9, 2019; accepted October 15, 2019

Abstract—The AFES program (automatic finding exact solutions) designed to find exact solutions of polinomial ordinary differential equations has been described. The simplest equations method has been used to find exact solutions. The method consists in constructing exact solutions of differential equations using a general solution of a lower order differential equation. In order to choose the form of the exact solution, it is necessary to determine the pole order of the solution of the original equation and the pole order of the solution of the simplest equation. The program for automatically constructing Newton polygons ACNP (automatic construction of Newton polygons) has been used. The Riccati equation and the equation for the elliptic Weierstrass function have been considered as simple equations. In order to test the program, examples of constructing exact solutions of various nonlinear differential equations are given. The AFES program is written in the Maple computer algebra system. The algorithm of the program and examples of its application are given. The AFES program has several advantages over well-known programs for finding exact solutions of differential equations. In particular, constructed exact solutions are different and they cannot be transformed to each other.

Keywords: simple equations method, exact solutions, nonlinear differential equations, computer algebra system

DOI: 10.1134/S2304487X19060038

REFERENCES

1. Kudryashov N.A. Periodic and solitary waves of the Biswas–Arshed equation, *Optik*, 2020, vol. 200, pp. 163442.
2. Kudryashov N.A. The Painleve approach for finding solitary wave solutions of nonlinear nonintegrable differential equations, *Optik*, 2019, vol. 183, pp. 642–649.
3. Kudryashov N.A. Construction of nonlinear differential equations for description of propagation pulses in optical fiber, *Optik*, 2019, vol. 192, pp. 162964.
4. Kuramoto Y., Tsuzuki T. Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium, *Prog. Theor. Phys.*, 1976, vol. 55, no. 2, pp. 356–369.
5. Sivashinsky G.I. Instabilities, pattern formation, and turbulence in flames, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1983, vol. 15, no. 1, pp. 179–199.
6. Aspe H., Depassier M.C. Instabilities, pattern formation, and turbulence in flames, *Phys. Rev. A*, 1990, vol. 41, i. 6, pp. 3125–3128.
7. Parkes E.J., Duffy B.R. An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations, *Comput. Phys. Commun.*, 1996, vol. 98, i. 3, pp. 288–300.
8. Liang S., Jeffrey D.J. Automatic computation of the travelling wave solutions to nonlinear PDEs, *Comput. Phys. Commun.*, 2008, vol. 178, i. 9, pp. 700–712.
9. He J.-H., Wu X.-H. Exp-function method for nonlinear wave equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2006, vol. 30, i. 3, pp. 700–708.
10. Wang M., Li X., Zhang J. The (G'/G)-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, *Phys. Lett. A*, 2008, vol. 372, i. 4, pp. 417–423.
11. Kudryashov N.A. Method of the Logistic Function for Finding Analytical Solutions of Nonlinear Differential Equations, *Modeling and Analysis of Information Systems*, 2015, vol. 22, i. 1, pp. 23–37.
12. Kudryashov N.A. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, vol. 24, i. 5, pp. 1217–1231.
13. Kudryashov N.A. *Metody nelinejnoj matematicheskoj fiziki* [Methods of nonlinear mathematical physics]. Izdatelskii dom Intellekt, 2010, 368 p.

14. Kudryashov N.A. A note on the G'/G-expansion method, *Appl. Math. Comput.*, 2010, vol. 217, i. 4, pp. 1755–1758.
15. Kudryashov N.A. Seven common errors in finding exact solutions of nonlinear differential equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2009, vol. 14, i. 9-10, pp. 3507–3529.
16. Kudryashov N.A. Be careful with the Exp-function method, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2009, vol. 14, i. 5, pp. 1881–1890.
17. Kudryashov N.A., Kutukov A.A. *Programma postroeniya tochnyh reshenij nelinejnykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii v polinomialnoi forme* [The program for constructing exact solutions of nonlinear ordinary differential equations in polynomial form]. Certificate of RF registration of a computer program, no. 2019661587, 2019.
18. Kudryashov N.A., Kutukov A.A. Automatic construction of Newton polygons corresponding to polynomial ordinary differential equations. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2019, vol. 8, no. 3, pp. 284–289 (in Russian).
19. Kudryashov N.A., Kutukov A.A. *Programma dlya postroeniya mnogougol'nikov N'yutona, sootvetstvuyushchih obyknovennym differentsial'nym uravneniyam polinomial'nogo vida* [The program for constructing Newton polygons corresponding to ordinary differential equations of polynomial form]. Certificate of RF registration of a computer program, no. 2019617572, 2019.
20. Bruno A.D. Asymptotics and expansions of solutions of an ordinary differential equation. *Uspekhi mat. nauk*, 2004, vol. 59, no. 3, pp. 31–80 (in Russian).
21. Kudryashov N.A. A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber, *Optik*, 2019, vol. 189, pp. 42–52.