

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 536.2

ПОЛУЧЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛООБМЕНА ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

© 2019 г. А. В. Еремин¹, В. К. Ткачев¹, Т. Б. Тарабрина¹, И. В. Кудинов¹, С. В. Колесников²

¹ Самарский государственный технический университет, Самара, 443001, Россия

² Филиал “Самарский” ПАО “Т Плюс”, Самара, 443100, Россия

*e-mail: tvk93@yandex.ru

Поступила в редакцию 22.04.2019 г.

После доработки 09.09.2019 г.

Принята к публикации 01.10.2019 г.

На основе определения дополнительной искомой функции (ДИФ) и дополнительных граничных (ДГУ) условий получено приближенное аналитическое решение задачи теплообмена в турбулентном пограничном слое для граничных условий первого рода. В качестве дополнительной искомой функции принимается соотношение, характеризующее изменение толщины теплового пограничного слоя от продольной переменной. Ее использование позволяет сводить уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению. ДГУ принимаются в виде, при котором их удовлетворение искомым решением адекватно удовлетворению уравнения в точках границы. Применительно к получению решения задачи для теплового турбулентного слоя использовались эмпирические формулы профиля скорости и его толщины в турбулентном динамическом пограничном слое. Из анализа результатов можно заключить, что ряд полученного решения быстро сходится, о чем свидетельствует практическое совпадение результатов третьего и четвертого приближений.

Рассмотренный в работе метод ДГУ может быть эффективно использован для решения и более сложных краевых задач с дифференциальными уравнениями, не допускающими разделения переменных (нелинейными, с переменными физическими свойствами среды, с учетом диссипации энергии и др.).

Ключевые слова: турбулентный тепловой пограничный слой, аналитическое решение, ДИФ, ДГУ, интегральный метод

DOI: 10.1134/S2304487X19060026

Трудности решения уравнений пограничного слоя обусловлены их нелинейностью. Их точные решения пока не получены — найдены лишь численные решения [1]. Известным приближенным аналитическим методом, использующимся для решения задач применительно динамическому и тепловому пограничным слоям, является интегральный метод. Однако применительно к данным задачам при его использовании получены решения лишь в первом приближении, точность которого недостаточна для выполнения как научных исследований, так и для практических приложений [1–12].

В работах [9–12] для интегральных уравнений Т. Кармана и Г.Н. Кружилина применительно к динамическому и тепловому пограничным слоям, при использовании ДГУ получены аналитические решения уравнений Л. Прандтля и Польгаузена соответственно для динамического и теплового ламинарных пограничных слоев. Однако режим течения жидкости в пограничном слое мо-

жет быть не только ламинарным, но и турбулентным. Переход ламинарного режима к турбулентному происходит на расстоянии $x_{кр}$ от кромки пластины, которое определяется из критического значения числа Рейнольдса. Ввиду отсутствия информации о характере смыкания турбулентного пограничного слоя с ламинарным вязким подслоем, всегда существующим вблизи стенки, а также о законе трения в этой переходной зоне, теоретические методы расчета распределения скорости в турбулентном пограничном слое и его толщины пока не разработаны. В связи с чем, для определения этих величин используются эмпирические зависимости [1–7]

$$v_x/v = (y/\delta)^{1/n}; \quad (1)$$

$$\delta(x) = 0.375x/\text{Re}_x^{0.2}, \quad (2)$$

где $n = 6$ при $\text{Re} = 40 \times 10^3$; $n = 7$ при $\text{Re} = 110 \times 10^3$; $n = 10$ при $\text{Re} = 3240 \times 10^3$; v_x —

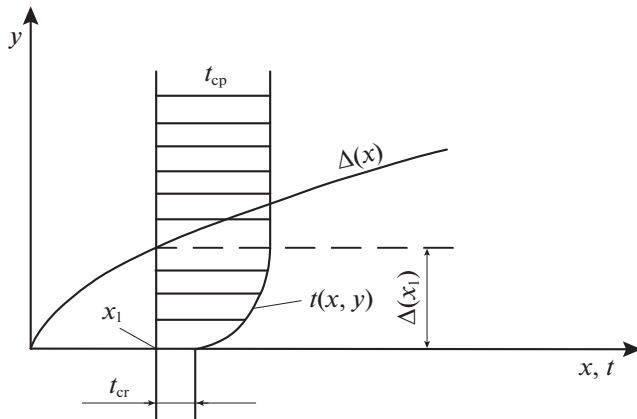


Рис. 1. Схема теплового пограничного слоя при $t_{ст} < t_{cp}$. $t_{ст}$ — температура стенки; t_{cp} — температура невозмущенного потока; $\Delta(x)$ — толщина пограничного слоя; $\Delta(x_1)$ — толщина пограничного слоя в точке $x = x_1$.

распределение скорости в турбулентном динамическом пограничном слое; $\delta(x)$ — толщина турбулентного динамического слоя; $Re_x = vx/\nu$ — число Рейнольдса, в котором в качестве характерного размера принято расстояние x [1–7]; ν — коэффициент кинематической вязкости.

Математическая постановка задачи для турбулентного теплового пограничного слоя имеет вид [1–7, 10] (рис. 1)

$$v_x \frac{\partial t(x, y)}{\partial x} + v_y \frac{\partial t(x, y)}{\partial y} = a_3 \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial y^2}; \quad (3)$$

$$t(x, 0) = t_{ст}; \quad (4)$$

$$t(x, \Delta) = t_{cp}; \quad (5)$$

$$\partial t(x, \Delta) / \partial y = 0, \quad (6)$$

где v_x , v_y — составляющие скорости по координатным осям x и y ; $t(x, y)$ — температура в пограничном слое; $\Delta(x)$ — толщина пограничного слоя; $t_{ст}$ — температура стенки; t_{cp} — температура невозмущенного потока; $a_3 = a + a_t$ — эквивалентный коэффициент температуропроводности; a — коэффициент молекулярной температуропроводности жидкости; a_t — коэффициент турбулентной температуропроводности, характеризующий не физическое свойство жидкости, а режим ее течения.

Для нахождения как можно более точного решения задачи (3)–(6) необходимо использовать дополнительные граничные условия. Первое такое условие применительно к точке $y = 0$, где $v_x = v_y = 0$, находится из уравнения (3) и имеет вид

$$\partial^2 t(x, 0) / \partial y^2 = 0. \quad (7)$$

Потребуем удовлетворения искомым решением уравнения (3), осредненного по толщине пограничного слоя

$$\int_0^{\Delta} v_x \frac{\partial t(x, y)}{\partial x} dy + \int_0^{\Delta} v_y \frac{\partial t(x, y)}{\partial y} dy = a_3 \int_0^{\Delta} \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial y^2} dy. \quad (8)$$

Вычислив интегралы в (8), получим [5]

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\Delta} v_x [t_{cp} - t(x, y)] dy = a_3 \frac{\partial t(x, 0)}{\partial y}. \quad (9)$$

Последнее уравнение, исходя из баланса по тепловым потокам, получено также Кружилиным Г.Н. [6].

Рассмотрим избыточную температуру $T = t - t_{ст}$. Уравнение (9) и условия (4)–(6) относительно этой температуры будут

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\Delta} v_x [T_{cp} - T(x, y)] dy = a_3 \frac{\partial T(x, 0)}{\partial y}, \quad (10)$$

$$T(x, 0) = 0; \quad (11)$$

$$T(x, \Delta) = T_{cp}; \quad (12)$$

$$\partial T(x, \Delta) / \partial y = 0; \quad (13)$$

$$\partial^2 T(x, 0) / \partial y^2 = 0, \quad (14)$$

где $T_{cp} = t_{cp} - t_{ст}$.

Ввиду того, что толщины динамического и теплового слоев должны подчиняться условию $\Delta(x) \leq \delta(x)$ [1–7], то критерий Прандтля должен быть $Pr \geq 1$. Это условие выполняется для газов ($Pr \approx 0.75$), жидкостей ($Pr > 1$), и не выполняется применительно жидким металлам ($10^{-3} \leq Pr \leq 10^{-2}$).

Решение задачи (10)–(14) принимается в виде

$$T(x, y) = \sum_{k=1}^n a_k(\Delta) y^{2k-1}, \quad (15)$$

где $a_k(\Delta(x))$ — неизвестные коэффициенты; $\Delta(x)$ — толщина турбулентного теплового пограничного слоя, представляющая дополнительную искомую функцию.

Очевидно, что соотношение (15) удовлетворяет граничным условиям (11), (14). Неизвестные константы $a_k(\Delta)$ находятся из условий (12), (13). Подставляя (15), ограничиваясь двумя членами ряда, в (12), (13), относительно коэффициентов $a_k(\Delta)$, ($k = 1, 2$) получим два алгебраических уравнения.

Их решение: $a_1(\Delta) = 1.5T_{cp}/\Delta$; $a_2(\Delta) = -0.5T_{cp}/\Delta^3$. Соотношение (15) с учетом найденных значений коэффициентов $a_k(\Delta)$ принимает вид

$$\frac{T}{T_{cp}} = \frac{3y}{2\Delta} \left(1 - \frac{y^2}{3\Delta^2} \right). \quad (16)$$

Подставляя (1) и (16) в (10), относительно толщины турбулентного теплового пограничного слоя получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$vT_{cp} \frac{343}{1160} \frac{d}{dx} [\beta^{8/7} \delta(x)] = a_3 \frac{3}{2\beta \delta(x)} T_{cp}, \quad (17)$$

где $\beta = \Delta(x)/\delta(x)$, а величина n в формуле (1) принята равной 7.

Так как величина β не зависит от переменной x [2–5], уравнение (15) можно представить в виде

$$686v\beta^{15/7} \delta(x) \frac{d\delta(x)}{dx} = 3480a_3, \quad (18)$$

где $\delta(x)$ определяется по формуле (2).

Независимость величины β от координаты x объясняется полной идентичностью математических постановок краевых задач для динамического и теплового пограничных слоев, представленных в безразмерном виде. Это означает, что безразмерные решения этих задач будут одинаковы, а размерные — взаимно подобны. Следовательно, отношение толщин теплового и динамического пограничных слоев будет неизменным по координате x [2–6].

Подставляя (2) в (18), находим

$$\Delta(x) = \frac{1.99625(a_3 \text{Re}^{2/5} v^{14} x^{14})}{x^6 v^7 \text{Re}_x^{1/5}}. \quad (19)$$

Соотношения (16), (19) будут решением задачи (10)–(14) для первого приближения применительно к тепловому турбулентному пограничному слою. Расчеты температуры $\Theta = T/T_{cp} = (t - t_{cm})/(t_{cp} - t_{cm})$ по соотношению (16) приводятся на рис. 2. Здесь же приведены результаты расчетов теплового ламинарного пограничного слоя, полученные в [9–12].

Повышение точности связано с использованием ДГУ. Метод их получения детально рассмотрен в [9–12]. И, в частности, уравнение (3) применительно к точке $y = \Delta(x)$ с учетом (6) приводится к виду

$$\frac{\partial t(x, \Delta)}{\partial x} = \frac{a_3}{v_x} \frac{\partial^2 t(x, \Delta)}{\partial y^2}. \quad (20)$$

Дифференцируя (5) по x , с учетом (20) находим дополнительное граничное условие вида

$$\partial^2 t(x, \Delta)/\partial y^2 = 0. \quad (21)$$

Дифференцируя уравнение (3) по переменной y , применительно к точке $y = 0$ находим

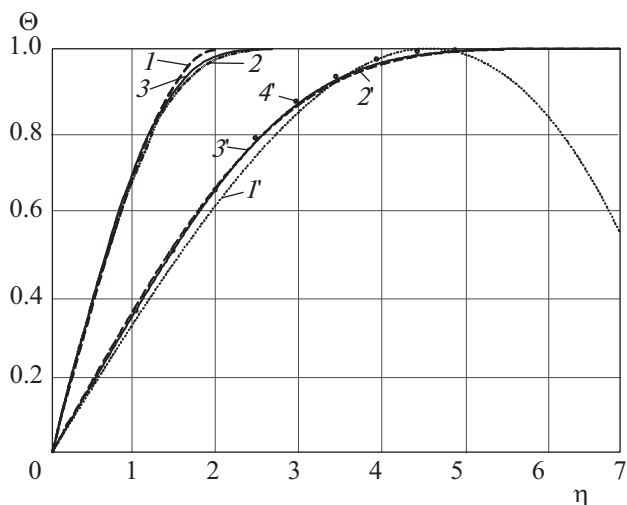


Рис. 2. Распределение безразмерной температуры: 1, 2, 3 — 1-ое, 2-ое, 3-е приближения (турбулентное течение); 1', 2', 3' — 1-ое, 2-ое, 3-е приближение (ламинарное движение); 4 — точное решение (ламинарное движение); $\eta = y\sqrt{v/(vx)}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial t(x, 0)}{\partial x} + v_x \frac{\partial^2 t(x, 0)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial t(x, 0)}{\partial y} + \\ + v_y \frac{\partial^2 t(x, 0)}{\partial y^2} = a_3 \frac{\partial^3 t(x, 0)}{\partial y^3}. \end{aligned} \quad (22)$$

Выражение (22), с учетом (6), (7), а также того, что $\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ (так как $v_x(0, x) = v_y(0, x) = 0$), будет

$$\frac{\partial^2 t(x, 0)}{\partial x \partial y} = \frac{a_3}{v_x} \frac{\partial^3 t(x, 0)}{\partial y^3}. \quad (23)$$

Дифференцируя (6) по x и, сравнивая с (23), получаем третье ДГУ

$$\partial^3 t(x, 0)/\partial y^3 = 0. \quad (24)$$

Во втором приближении, подставив (15), в (12), (13), (21), (24) для неизвестных постоянных a_k , ($k = 1, 4$) получим систему, включающую четыре алгебраических уравнения (все ДГУ для функций T и t идентичны). Подставляя найденные из решения этой системы постоянные a_k в (15), будем иметь

$$\frac{T(x, y)}{T_{cp}} = \frac{35}{24} \frac{y}{\delta} - \frac{7}{8} \left(\frac{y}{\Delta} \right)^5 + \frac{5}{12} \left(\frac{y}{\Delta} \right)^7. \quad (25)$$

Подставляя (25), (1) в (10), находим

$$v \frac{16807}{58824} \frac{d}{dx} [\beta^{8/7} \delta(x)] = \frac{35a_3}{24\beta \delta(x)}. \quad (26)$$

Ввиду независимости β от x , уравнение (26) запишется в виде

$$\frac{16807}{58824} v \beta^{15/7} \delta(x) \frac{d\delta(x)}{dx} = \frac{35}{24} a_3, \quad (27)$$

где $\delta(x)$ находится по соотношению (2).

Подставив (2) в (27), получим

$$\Delta(x) = \frac{2.0025 (a_3 \text{Re}_x^{2/5} v^{14} x^{14})^{7/15}}{x^6 v^7 \text{Re}_x^{1/5}}. \quad (28)$$

Соотношение (25), учитывая (28), будет решением для второго приближения. Расчеты по формуле (25) приводятся на рис. 2. Из их анализа видно, что решение во втором приближении, в сравнении с первым, уточняется на 3%.

Для нахождения ДГУ третьего приближения продифференцируем уравнение (3) по y и представим его для точки $y = \Delta(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial t(x, \Delta)}{\partial x} + v_x \frac{\partial^2 t(x, \Delta)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial t(x, \Delta)}{\partial y} + \\ + v_y \frac{\partial^2 t(x, \Delta)}{\partial y^2} = a \frac{\partial^3 t(x, \Delta)}{\partial y^3}. \end{aligned} \quad (29)$$

Продифференцируем условие (5) по переменным x и y :

$$\partial t(x, \Delta) / \partial x = 0; \quad \partial t(x, \Delta) / \partial y = 0. \quad (30)$$

Соотношение (29) с учетом (3), (7), (30) приводится к следующему ДГУ

$$\partial^3 t(x, \Delta) / \partial y^3 = 0. \quad (31)$$

Посредством дифференцирования (3) по y и сравнения его с основными и ДГУ, продифференцированными по x и y , можно найти какое угодно количество ДГУ. Для точки $y = \Delta(x)$ следующие ДГУ будут

$$\partial^4 t(x, \Delta) / \partial y^4 = 0; \quad (32)$$

$$\partial^5 t(x, \Delta) / \partial y^5 = 0. \quad (33)$$

Основные (5), (6) и дополнительные (21), (24), (31), (32) условия позволяют найти шесть неизвестных постоянных $a_k(\Delta)$, ($k = \overline{1, 6}$) соотношения (15). Подставляя (15) в перечисленные условия, для неизвестных коэффициентов $a_k(\Delta)$ получим систему, включающую шесть алгебраических линейных уравнений. После нахождения неизвестных постоянных $a_k(\Delta)$ соотношение (15) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{T(x, y)}{T_{\text{ср}}} = \frac{231}{128} \frac{y}{\delta} - \frac{231}{64} \left(\frac{y}{\Delta} \right)^5 + \frac{165}{32} \left(\frac{y}{\Delta} \right)^7 - \\ - \frac{385}{128} \left(\frac{y}{\Delta} \right)^9 + \frac{21}{32} \left(\frac{y}{\Delta} \right)^{11}. \end{aligned} \quad (34)$$

Подставляя (34) в уравнение (10), для неизвестной функции $\Delta(x)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$v \frac{9058973}{39444760} \frac{d}{dx} [\beta^{8/7} \delta(x)] = \frac{231 a_3}{128 \beta \delta(x)}. \quad (35)$$

С учетом того, что $\beta = \Delta(x) / \delta(x)$ не зависит от переменной x , находим

$$\frac{9058973}{39444760} v \beta^{15/7} \delta(x) \frac{d\delta(x)}{dx} = \frac{231}{128} a_3, \quad (36)$$

где $\delta(x)$ определяется по формуле (2).

Подставляя (2) в (36), получаем

$$\Delta(x) = \frac{2.4492 (a_3 \text{Re}_x^{2/5} v^{14} x^{14})^{7/15}}{x^6 v^7 \text{Re}_x^{1/5}}. \quad (37)$$

Соотношение (34), учитывая (37) будет решением для третьего приближения. Анализ результатов позволяет заключить, что их расхождение для второго и третьего приближений не превышает 1%. Исследования показали, что результаты третьего и четвертого приближений практически совпадают, что свидетельствует о сходимости приближений.

ВЫВОДЫ

1. С использованием математической модели теплового пограничного слоя путем определения ДИФ и ДГУ получено приближенное аналитическое решение исходных дифференциальных уравнений пограничного слоя. Дополнительная искомая функция представляет зависимость толщины пограничного слоя от продольной переменной. Ее использование позволяет сводить уравнение в частных производных к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения. ДГУ находятся в виде, при котором их выполнение искомым решением эквивалентно удовлетворению уравнения в точке границы и на фронте возмущения. Расчеты показывают, что удовлетворение уравнения в точках границы приводит к его удовлетворению и внутри пограничного слоя.

2. Ввиду отсутствия необходимости интегрирования уравнения в частных производных по поперечной пространственной переменной, ограничиваясь интегрированием обыкновенного уравнения для ДИФ, данный метод эффективен применительно к решению задач с уравнениями, которые не допускают разделения переменных (нелинейные, с переменными физическими свойствами, с учетом диссипации энергии и др.).

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-38-00029 мол_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
2. Прибытков И.А., Левицкий И.А. Теоретические основы теплотехники. М.: Академия, 2004. 464 с.
3. Исаев С.И., Кожин И.А., Кованов В.И. и др. Теория теплообмена: Учебник для вузов / Под ред. Леонтьева А.И. М.: Высшая школа, 1979. 495 с.
4. Юдаев Б.Н. Теплопередача: Учебник для вузов. М.: Высшая школа, 1981. 319 с.
5. Жуковский В.С. Основы теплопередачи. М.—Л.: Госэнергоиздат, 1960. 211 с.
6. Болгарский А.В., Мухачев Г.А., Шукин В.К. Термодинамика и теплопередача. М.: Высшая школа, 1975. 495 с.
7. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977. 344 с.
8. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
9. Стефанюк Е.В., Кудинов В.А. Получение аналитических решений уравнений гидродинамического и теплового пограничных слоев на основе введения дополнительных граничных условий. Теплофизика высоких температур. 2010. Т. 48. № 2. С. 290–302.
10. Кудинов И.В., Кудинов В.А., Еремин А.В., Колесников С.В. Математическое моделирование гидродинамики и теплообмена в движущихся жидкостях. Санкт Петербург: Издательство “Лань”, 2015. 208 с.
11. Кудинов И.В., Бранфилева А.Н., Еремин А.В., Скворцова М.П. Моделирование теплообмена в турбулентном пограничном слое с использованием полупериодической теории турбулентности. Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2014. № 4 (37). С. 157–169.
12. Стефанюк Е.В. Модельные представления аналитических решений краевых задач теории теплообмена на основе введения дополнительных граничных условий. Диссертация доктора технических наук. Москва. МАТИ, 2010.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta “MIFI”, 2019, vol. 8, no. 6, pp. 540–545

Analytical Solution of a Heat Exchange Problem for Turbulent Boundary Layer

A. V. Eremin^{a,*}, V. K. Tkachev^a, T. B. Tarabrina^a, I. V. Kudinov^a, and S. V. Kolesnikov^b

^a Samara State Technical University, Samara, 443001 Russia

^b Filial “Samara” PJSC “T Plus”, Samara, 443100 Russia

*e-mail: tvk93@yandex.ru

Received April 22, 2019; revised September 9, 2019; accepted October 1, 2019

Abstract—Based on the definition of an additional sought-for function (ASF) and additional boundary conditions (ABC), a highly accurate solution of the heat transfer problem in a turbulent boundary layer for boundary conditions of the first kind was obtained. The relation characterizing the change of the thermal boundary layer thickness that depends on longitudinal variables is taken as an additional sought-for function. The use of this function makes it possible to reduce the partial differential equation to the ordinary differential equation. Additional boundary conditions are accepted in such a form that their satisfying is equal to satisfying an equation at the boundary points. Empirical formulas of the velocity profile and its thickness in the turbulent dynamic boundary layer were used to obtain the solution of the problem for the thermal turbulent layer. Based on the results one can conclude that the thickness of the laminar thermal boundary layer is almost twice the thickness of the turbulent one.

Keywords: turbulent thermal boundary layer, analytical solution, additional sought-for functions, additional boundary conditions, integral method

DOI: 10.1134/S2304487X19060026

REFERENCES

1. Shlihting G. *Teoriya pogranichnogo sloya* [Boundary-layer theory]. Moscow, Nauka, 1969. 742 p.
2. Pribytkov I.A., Levitskiy I.A. *Teoreticheskie osnovy teplotekhniki* [Theoretical basics of heat]. Moscow, Akademiya, 2004. 464 p.
3. Isaev S.I., Kozhinov I.A., Kofanov V.I. i dr. *Teoriya teploobmena* [Heat exchange theory]: Uchebnik dlya vuzov / Pod red. Leontyeva A.I. Moscow, Vysshaya shkola, 1979. 495 p.
4. Yudaev B.N. *Teploperedacha* [Heat transfer]: Uchebnik dlya vuzov, Moscow, Vysshaya shkola, 1981.

5. Zhukovskiy V.S. *Osnovy teorii teploperedachi* [Basic theory of heat transfer]. Moscow—Leningrad, Gosudarstvennoye Energeticheskoye Izdatelstvo, 1960. 211 p.
6. Bolgarskiy A.V., Mukhachev G.A., Shchukin V.K. *Teplo dinamika i teploperedacha* [Thermodynamics and heat transfer]. Moscow, Vysshaya shkola, 1975. 495 p.
7. Mikheev M.A., Mikheeva I.M. *Osnovy teploperedachi* [Basic heat transfer]. Moscow, Energiya, 1977. 344 p.
8. Loytsyansky L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid mechanics]. Moscow, Drofa, 2003. 840 p.
9. Stefanyuk E.V., Kudinov V.A. Obtaining analytical solutions of equations of hydrodynamic and thermal boundary layers by means of introduction of additional boundary conditions. *Teplofizika vysokikh temperatur*. 2010. V. 48. № 2. P. 290—302 (in Russian).
10. Kudinov I.V., Kudinov V.A., Eremin A.V., Kolesnikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamiki i teploobmena v dvizhushchikhsya zhidkostyakh* [Mathematical modeling of hydrodynamics and heat transfer in moving fluids]. Sankt-Peterburg, Lan' Publ., 2015. 208 p.
11. Kudinov I.V., Branfileva A.N., Eremin A.V., Skvortsova M.P. Heat transfer simulation in stirring boundary layer using the semiempirical turbulence theory. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskiye nauki*. 2014. № 4 (37). P. 157—169 (in Russian).
12. Stefanyuk E.V. *Model'nye predstavleniya analiticheskikh reshenii kraevykh zadach teorii teploobmena na osnove vvedeniya dopolnitel'nykh granichnykh usloviy. Diss. dokt. tekhn. nauk* [Model representations of analytical solutions of boundary value problems of heat transfer theory based on the introduction of additional boundary conditions. Dr. eng. sci. diss.]. Moscow, MATI Publ., 2010. 337 p.