ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2020, том 9, № 1, с. 25–31

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ТРЕТЬЕЙ И ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

© 2020 г. Н. А. Кудряшов[1,*], Д. В. Сафонова[1,]**

[1] *Национальный исследовательский ядерный университет ”МИФИ”, Москва, 115409, Россия*

**e-mail: nakudr@gmail.com*

***e-mail: safonovadashav@gmail.com*

Поступила в редакцию 05.12.2019 г.
После доработки 10.12.2019 г.
Принята к публикации 24.12.2019 г.

В данной работе рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка с нелинейностью третьей и пятой степени. Это уравнение может быть использовано для описания импульсов в оптических волокнах. Задача Коши для него не решается методом обратной задачи рассеяния, поэтому уравнение рассмотрено в переменных бегущей волны. В результате подстановки решения определенного вида найдена система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для мнимой и действительной частей уравнения. Для полученной системы ОДУ проведен тест Пенлеве. В результате применения теста установлено, что рассматриваемая система ОДУ не обладает свойством Пенлеве, поскольку в разложении общего решения в ряд Лорана имеются комплексные индексы Фукса. При использовании теста на свойство Пенлеве получено условие для скорости бегущей волны, при котором система упрощается до одного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Для этого уравнения найден первый интеграл. Использован метод простейших уравнений для построения точного решения рассматриваемого ОДУ. Найденное решение имеет две произвольные постоянные и выражено через эллиптическую функцию Вейерштрасса. Рассмотрен частный случай, когда решение принимает вид уединенной волны. Иллюстрируются периодические и уединенные волновые решения при различных значениях параметров.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, точное решение, первый интеграл

DOI: 10.1134/S2304487X20010046

1. ВВЕДЕНИЕ

Анализ распространения импульсов в оптическом волокне является важной задачей, решение которой в настоящее время в полной мере не закончено. Существуют различные модели описания распространения оптических солитонов. Упомянем здесь: уравнение Радхакришнана-Кунду-Лакшманана [1, 2], уравнение Чена-Ли-Лу [3, 4], уравнение Кунду–Мекури–Наскара [5, 6] и другие [7–9]. Большое количество используемых моделей связано со сложной структурой оптических волокон. Поэтому представляет интерес поиск новых уравнений полезных для нелинейной оптики.

В работе [10] предложены уравнения в частных производных высокого порядка, которые могут быть использованы для описания распространения импульсов в оптических волокнах. Основная идея для построения уравнений заключалась в наличие у них солитонных решений определенной формы.

В настоящей работе изучается одно из уравнений, предложенных в работе [10]. Это уравнение не относится к классу интегрируемых методом обратной задачи рассеяния уравнений. Поэтому оно рассматривается в переменных бегущей волны. Цель работы – исследовать аналитические свойства полученного уравнения и построить общее решение в переменных бегущей волны.

2. ТЕСТ ПЕНЛЕВЕ

Рассмотрим уравнение в частных производных, которое может быть использовано для описания импульсов в оптической среде:

$$iu_t + \alpha u_{xx} + i\beta u_{xxx} + u_{xxxx} + \mu|u|^2 u + \nu|u|^4 u = 0. \quad (1)$$

Будем искать решение уравнения (1), используя переменные бегущей волны

$$u(x,t) = y(z)\exp(i(\psi(z) - \omega t)), \quad z = x - C_0 t. \tag{2}$$

Подставляя зависимость (2) в уравнение (1), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для мнимой и действительной части. Обозначив $\psi_z = \phi$, имеем

$$\begin{gathered} y_z C_0 - 2\alpha y_z \varphi + 3\beta y_z \phi^2 + 6y\phi^2\phi_z - \alpha y \phi_z - \\ - 4y_z\phi_{zz} - \beta y_{zzz} - 6y_{zz}\phi_z - 4y_{zzz}\phi - y\phi_{zzz} + \\ + 3\beta y \phi_z \phi + 4y_z\phi^3 = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} \mu y^3 + \nu y^5 + \alpha y_{zz} - 6y_{zz}\phi^2 - 3y\phi_z^2 + y\phi^4 + \\ + y\omega - 3\beta y_z \phi_z - 3\beta y_{zz}\phi - 12 y_z\phi_z\phi - \beta y \phi_{zz} + \\ + y\phi C_0 - \alpha y \phi^2 + \beta y \phi^3 - 4y\phi_{zz}\phi + y_{zzzz} = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Найдем ведущие члены уравнений (3), (4), используя подстановку $y(z) = y_0 z^{-p}$ и $\phi(z) = \phi_0 z^{-q}$.

Получаем два варианта разложения общего решения.

В первом случае получаем

$$\begin{gathered} y_0^4 = -\frac{24}{\nu}, \quad p = 1, \\ \phi_0 = -\frac{\beta}{4}, \quad q = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Система уравнений с ведущими членами (3), (4) имеет вид

$$\begin{cases} -\beta y_{zzz} - 4y_{zzz}\phi = 0, \\ y_{zzzz} + \nu y^5 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Во втором случае находим

$$\begin{gathered} y_0^4 = \frac{126}{\nu}, \quad p = 1, \\ \phi_0 = \pm\sqrt{5}, \quad q = 1. \end{gathered} \tag{7}$$

При этом система уравнений с ведущими членами имеет вид

$$\begin{cases} -4y_z\phi_{zz} - 6y_{zz}\phi_z - 4y_{zzz}\phi - y\phi_{zzz} + 6y\phi^2\phi_z + 4y_z\phi^3 = 0, \\ y_{zzzz} - 6y_{zz}\phi^2 - 3y\phi_z^2 + y\phi^4 - 12y_z\phi_z\phi - 4y\phi_{zz}\phi + \nu y^5 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Рассмотрим первый случай. Подставляя

$$y(z) = \frac{y_0}{z} + a_1 z^{j-1}, \quad \phi(z) = \phi_0 + a_2 z^j \tag{9}$$

в (6) и приравнивая нулю коэффициенты при a_1 и a_2, получаем матрицу для определения индексов Фукса в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & -(-24\nu^{-1})^{1/4} z^{j-4}(j-4)(j^2-3j+6) \\ z^{j-5}(j-6)(j+1)(j^2-5j+16) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Из равенства нулю определителя этой матрицы, находим индексы Фукса

$$\begin{gathered} j_1 = -1, \quad j_2 = 6, \quad j_{3,4} = \frac{5}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{39}, \\ j_1 = 4, \quad j_{6,7} = \frac{3}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{15}. \end{gathered} \tag{10}$$

Используем разложение $y(z)$ и $\phi(z)$ в следующем виде

$$\begin{gathered} y(z) = \frac{y_0}{z} + y_1 + y_2 z + y_3 z^2 + y_4 z^3 + y_5 z^4 + y_6 z^5, \\ \phi(z) = \phi_0 + \phi_1 z + \phi_2 z^2 + \phi_3 z^3 + \phi_4 z^4. \end{gathered} \tag{11}$$

Подставляя (11) в уравнения (3), (4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, найдем константы в разложениях (11). Они являются следующими:

$$\begin{gathered} y_0^4 = -\frac{24}{\nu}, \quad y_1 = 0, \\ y_2 = -\frac{4\mu y_0^2 + 3\beta^2 + 8\alpha}{20 y_0^3 \nu}, \quad y_3 = 0, \\ y_4 = (15\beta^4 y_0^4 \nu + 80\alpha\beta^2 y_0^4 \nu + 320 C_0 \beta y_0^4 \nu + \\ + 256\mu^2 y_0^4 - 1280\omega y_0^4 \nu - 192\beta^2 \mu y_0^2 - \\ - 512\alpha\mu y_0^2 - 288\beta^4 - 1536\alpha\beta^2 - \\ - 2048\alpha^2)/(6400\nu^2 y_0^7), \quad y_5 = 0, \\ \phi_0 = -\frac{\beta}{4}, \quad \phi_1 = 0, \\ \phi_2 = \frac{1}{64}\beta^3 + \frac{1}{16}\alpha\beta + \frac{1}{8}C_0, \quad \varphi_3 = 0, \end{gathered} \tag{12}$$

y_6, φ_4 — произвольные постоянные, другие коэффициенты зависят от параметров уравнения и от произвольных постоянных y_6 и φ_4.

Рассмотрим второй случай. Подставляя

$$y(z) = \frac{y_0}{z} + a_1 z^{j-1}, \quad \phi(z) = \frac{\phi_0}{z} + a_2 z^{j-1} \tag{13}$$

в (8) и также приравнивая нулю коэффициенты при a_1 и a_2, получаем матрицу для определения индексов Фукса в виде

$$\begin{pmatrix} -2\sqrt{(5)}z^{j-5}(j-5)j(2j-5) & -\sqrt{3}(14\nu^{-1})^{1/4}z^{j-5}(j-5)(j^2-5j-20) \\ z^{j-5}(j^4-10j^3+5j^2+100j+504) & -2\sqrt{15}(14\nu^{-1})^{1/4}z^{j-5}(2j-5)(j-5) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Из равенства нулю определителя этой матрицы, находим следующие индексы Фукса

$$j_1 = -1, \quad j_2 = 6, \quad j_3 = 5, \\ j_{4,5,6,7} = \frac{5}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{-67 \pm 4i\sqrt{1151}}. \tag{14}$$

Используя разложения решений для $y(z)$ и $\phi(z)$ в следующем виде

$$y(z) = \frac{y_0}{z} + y_1 + y_2 z + y_3 z^2 + y_4 z^3 + y_5 z^4 + y_6 z^5, \\ \phi(z) = \frac{\phi_0}{z} + \phi_1 + \phi_2 z + \phi_3 z^2 + \phi_4 z^3 + \phi_5 z^4 + \phi_6 z^5 \tag{15}$$

и подставляя (15) в уравнения (3), (4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, найдем константы в разложениях (15). Получаем, что y_6, ϕ_5 – произвольные постоянные, другие коэффициенты зависят от параметров уравнения и произвольных постоянных y_6, ϕ_5.

В результате выполнения теста Пенлеве получаем, что рассматриваемая система уравнений (3)–(4) не проходит тест Пенлеве, так как индексы Фукса являются комплексными.

Если взять $\phi(z)$ как укороченное разложение (11) при $\phi_2 \neq 0$, то уравнения (3)–(4) не удовлетворяются. Полагая дополнительно $\phi_2 = 0$, получаем условие на скорость бегущей волны

$$C_0 = -\frac{1}{2}\alpha\beta - \frac{1}{8}\beta^3. \tag{16}$$

При этом из (12) следует, что $\psi = \psi_0 = -\beta/4$ в соответствии с (5). В этом случае система (3)–(4) упрощается, так как уравнение (3) тождественно удовлетворяется и остается одно уравнение (4), имеющее вид

$$y_{zzzz} + \left(\alpha + \frac{3}{8}\beta^2\right)y_{zz} + \left(\omega + \frac{\alpha\beta^2}{16} + \frac{5}{256}\beta^4\right)y + \\ + \mu y^3 + \nu y^5 = 0. \tag{17}$$

Умножив уравнение (17) на y_z и проинтегрировав его по z, получаем первый интеграл в виде

$$y_z y_{zzz} - \frac{1}{2}y_{zz}^2 + \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{3}{8}\beta^2\right)y_z^2 + \\ + \frac{1}{2}\left(\omega + \frac{\alpha\beta^2}{16} + \frac{5}{256}\beta^4\right)y^2 + \frac{\mu}{4}y^4 + \frac{\nu}{6}y^6 = C, \tag{18}$$

где C – постоянная интегрирования. Это уравнение так же не проходит тест Пенлеве, поэтому у него не существует общего решения. Но из последнего шага теста Пенлеве получаем, что могут существовать точные решения уравнения с двумя произвольными постоянными. Следующий раздел посвящен поиску таких решений.

3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ

Для нахождения точных решений уравнения (18) будем использовать метод простейших уравнений [11], [12], с использованием простейшего уравнения в виде

$$Y_z^2(z) - aY^4(z) - cY^2(z) - d = 0. \tag{19}$$

Продифференцировав (19) по z, получаем, что решение уравнения (19) так же удовлетворяет следующим уравнениям:

$$Y_{zz} = 2aY^3 + cY, \\ Y_{zzz} = 6aY^2Y_z + cY_z, \\ Y_{zzzz} = 6aY^2Y_{zz} + 12aYY_z^2 + cY_{zz}. \tag{20}$$

Покажем, что решение уравнения (19) выражается через эллиптическую функцию Вейерштрасса [10].

$$Y = \sqrt{\wp\left(\sqrt{a}(z - z_0); \frac{4c^2}{3a^2} - \frac{4d}{a}; \frac{4cd}{3a^2} - \frac{8c^3}{27a^3}\right) - \frac{c}{4a}}. \tag{21}$$

Будем искать решение уравнения (18), выраженное через решение уравнения (19). Порядки полюсов решений этих уравнений совпадают и равны единице, поэтому решение уравнения (18) ищем в ввиде

$$y(z) = AY(z) + B, \tag{22}$$

где $Y(z)$ – решение уравнения (19), A и B – неизвестные постоянные, которые требуется найти.

Дифференцируя (22) и подставляя производные Y из (20), получаем выражения для производных функции y:

$$\begin{gathered} y_z = A\sqrt{aY^4(z) + cY^2(z) + d}, \\ y_{zz} = 2aAY^3 + cAY, \\ y_{zzz} = 6aAY^2\sqrt{aY^4(z) + cY^2(z) + d} + \\ + cA\sqrt{aY^4(z) + cY^2(z) + d}, \\ y_{zzzz} = 24a^2AY^5 + 20acAY^3 + 12aAdY + c^2AY. \end{gathered} \tag{23}$$

Подставляя (22), (23) в (18) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях Y, получаем вместо дифференциального уравнения (18) полином шестой степени, который равен нулю:

$$\begin{gathered} (A^6\nu + 24A^2a^2)Y^6 + 6\nu A^5Y^5B + \\ + \Big(\frac{3}{2}\mu A^4 + 30A^2ac + 15\nu A^4B^2 + 3A^2\alpha a \\ + \frac{9}{8}A^2\beta^2a\Big)Y(z)^4 + (20A^3B^3\nu + 6A^3B\mu)Y^3 + \\ + \Big(3A^2c^2 + 3\omega A^2 + 36A^2ad + 3A^2\alpha c + \\ + \frac{15}{256}\beta^4A^2 + 15\nu A^2B^4 + \frac{9}{8}A^2\beta^2c - \\ - \frac{3}{16}\alpha\beta^2A^2 + 9\mu A^2B^2\Big)Y^2 + \Big(6\nu AB^5 + \frac{15}{128}\beta^4AB + \\ + 6\omega AB - \frac{3}{8}\alpha\beta^2AB + 6\mu AB^3\Big)Y(z) + \frac{9}{8}A^2\beta^2d + \\ + 3A^2\alpha d + 3\omega B^2 + \frac{15}{256}\beta^4B^2 + 6A^2cd + \frac{3}{2}\mu B^4 + \\ + 6C + \nu B^6 - \frac{3}{16}\alpha\beta^2B^2 = 0. \end{gathered} \tag{24}$$

Из (24) находим, что при

$$\begin{gathered} A^4 = -\frac{24a^2}{\nu}, \quad B = 0, \\ c = -\frac{3}{80}\beta^2 - \frac{A^2\mu}{20a} - \frac{1}{10}\alpha, \quad \nu > 0, \\ d = -\frac{5}{3072}\frac{\beta^4}{a} + \frac{1}{192}\frac{\alpha\beta^2}{a} - \frac{\beta^2c}{32a} - \\ - \frac{\alpha c}{12a} - \frac{c^2}{12a} - \frac{\omega}{12a}, \\ C = \frac{1}{61440}\frac{A^2}{a^2}(15a\beta^6 - 5A^2\beta^4\mu + 16A^2\alpha\beta^2\mu - \\ - 96A^2\beta^2c\mu - 8a\alpha\beta^4 + 288a\beta^4c - 256A^2\alpha c\mu - \\ - 256A^2c^2\mu - 128a\alpha^2\beta^2 + 1536a\alpha\beta^2c + \\ + 768a\beta^2c^2 - 256A^2\mu\omega + 2048a\alpha^2c + \\ + 2048a\alpha c^2 + 768a\beta^2\omega + 2048a\alpha\omega) \end{gathered} \tag{25}$$

выражение (22) будет решением уравнения (18). Таким образом получаем решение в виде

$$y = A\sqrt{\wp\left(\sqrt{a}(z - z_0); \frac{4c^2}{3a^2} - \frac{4d}{a}; \frac{4cd}{3a^2} - \frac{8c^3}{27a^3}\right) - \frac{c}{4a}}, \tag{26}$$

где z_0, a — произвольные постоянные.

Решение (21) при условиях (25) и различных значениях параметров: $a = 1$, $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\nu = -1$, $\mu = 3$, $\omega = 10$, $z_0 = 0$ и $a = 1$, $\alpha = -1$, $\beta = 10$, $\nu = -1$, $\mu = 3$, $\omega = 10$, $z_0 = 0$ предоставлено на рис. 1.

Если в уравнении (19) выбрать $d = 0$, то решение уравнения (19) принимает вид уединенной волны:

$$Y(z) = \frac{4ce^{\sqrt{c}(z-z_0)}}{e^{2\sqrt{c}(z-z_0)} - 4ac}. \tag{27}$$

Проделав вычисления описанные выше, получаем условия:

$$\begin{gathered} A^4 = -\frac{24a^2}{\nu}, \quad B = 0, \quad c = -\frac{3}{80}\beta^2 - \frac{A^2\mu}{20a} - \frac{1}{10}\alpha, \\ \omega = -\frac{5}{256}\beta^4 + \frac{1}{16}\alpha\beta^2 - \frac{3}{8}\beta^2c - \alpha c - c^2, \quad C = 0. \end{gathered} \tag{28}$$

Таким образом, искомое решение имеет вид уединенной волны

$$y = A\frac{4ce^{\sqrt{c}(z-z_0)}}{e^{2\sqrt{c}(z-z_0)} - 4ac}, \tag{29}$$

где z_0, a — произвольные постоянные.

Решение (29) при условиях (28) и различных значениях параметров: $a = -1, -0.005, -0.00001$, $\alpha = -20$, $\beta = 2$, $\nu = -1$, $\mu = 3$, $z_0 = 10$ и $a = -1$, $\alpha = -1, -10, -20$, $\beta = 2$, $\nu = -1$, $u = 3$, $z_0 = 10$ построены на рис. 2.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка. С помощью переменных бегущей волны получена система обыкновенных дифференциальных уравнений. Установлено, что полученная система ОДУ не является интегрируемой в смысле Пенлеве, так как имеются комплексные индексы Фукса. Получен первый интеграл уравнения для реальной части. С помощью метода простейших уравнений построены точные решения с двумя произвольными постоянными, выраженные через эллиптическую функцию Вейерштрасса и экспоненциальную функцию. Пери-

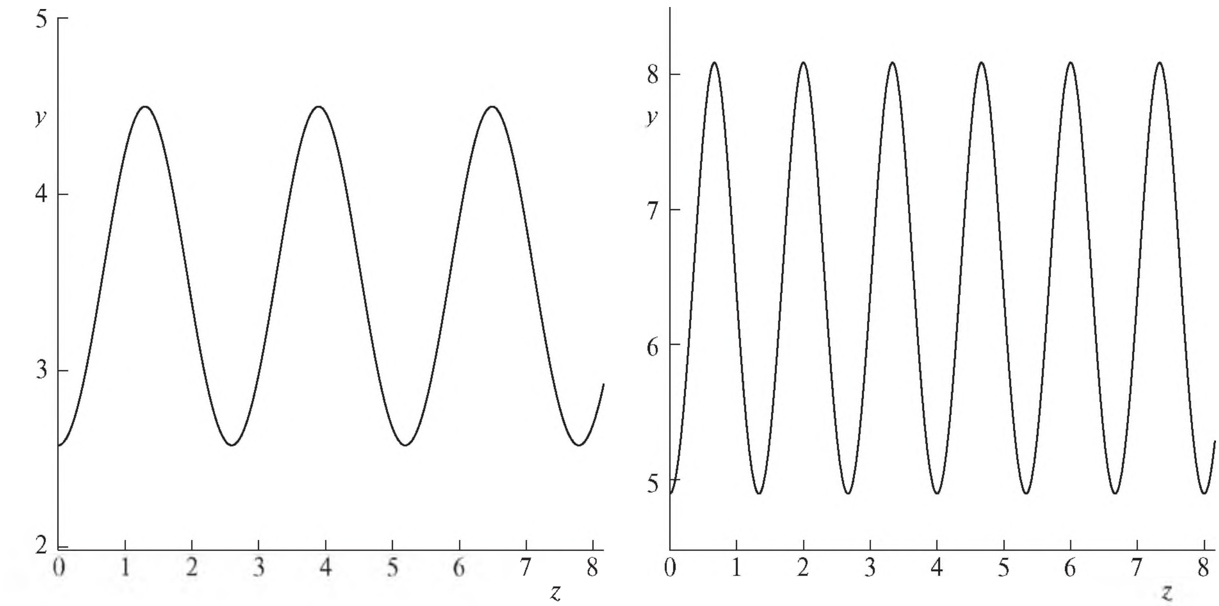

Рис. 1. Решение (21) при условиях (25) и параметрах $a = 1$, $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\nu = -1$, $\mu = 3$, $\omega = 10$, $z_0 = 0$ (слева), при параметрах $a = 1$, $\alpha = -1$, $\beta = 10$, $\nu = -1$, $\mu = 3$, $\omega = 10$, $z_0 = 0$ (справа).

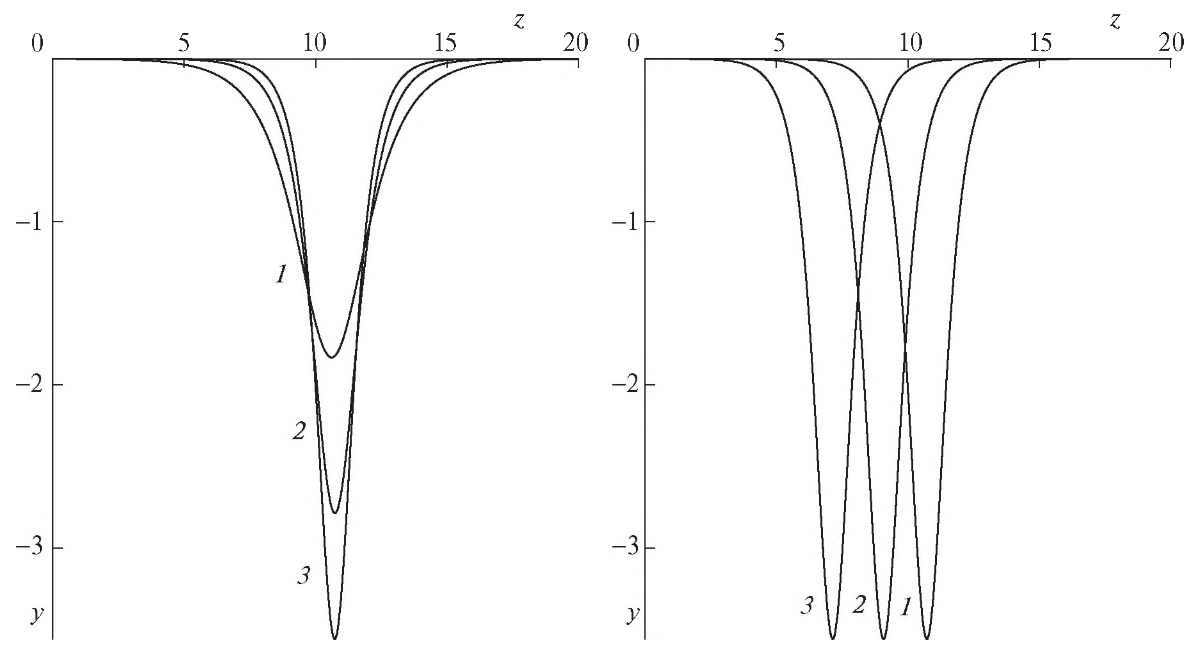

Рис. 2. Решение (29) при условиях (28) и параметрах $a = -1$ (*1*), -0.005 (*2*), -0.00001 (*3*), $\alpha = -20$, $\beta = 2$, $\nu = -1$, $\mu = 3$, $z_0 = 10$ (справа), при параметрах $a = -1$, $\alpha = -1$ (*1*), -10 (*2*), -20 (*3*), $\beta = 2$, $\nu = -1$, $\mu = 3$, $z_0 = 10$ (слева).

одические и уединенные волновые решения демонстрируются на рисунках.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), № 18-29-10039.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Biswas A.* 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan–Kundu–Laksmanan equation, Physics Letters A. 2009. V. 373. P. 2546–2548.
2. *Kudryashov N.A., Safonova D.V., Biswas A.* Painlevé analysis and solution to the traveling wave reduction of Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation. Regu-

lar and Chaotic Dynamics. 2019. V. 24. № 6. P. 607–614.

3. *Biswas A.* Chirp-free bright optical soliton perturbation with Chen–Lee–Liu equation by traveling wave hypothesis and semi-inverse variational principle. Optik. 2018. V. 172. P. 772–776.
4. *Kudryashov N.A.* General solution of the traveling wave reduction for the perturbed Chen-Lee-Liu equation. Optik. 2019. V. 186. P. 339–349.
5. *Kundu A., Mukherjee A.* Novel integrable higher-dimensional nonlinear Schrödingerequation: properties, solutions, applications, 2013.
6. *Kudryashov N.A.* General solution of traveling wave reduction for the Kundu-Mukherjee-Naskar equation. Optik. 2019. V. 186. P. 22–27.
7. *Kudryashov N.A.* Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with cubic-quintic nonlinearity. Optik. 2019. V. 188. P. 27–35.
8. *Kudryashov N.A.* First integral and general solution of traveling wave reduction for the Triki-Biswas equation. Optik. 2019. V. 185. P. 275–281.
9. *Kudryashov N.A.* Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with antyi-cubic nonlinearity. Optik. 2019. V. 185. P. 665–671.
10. *Kudryashov N.A.* Construction of nonlinear equations for description of propagation pulses in optical fiber. Optik. 2019. V. 192. 162964.
11. *Kudryashov N.A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. Chaos Soliton Fractals. 2005. V. 24. P. 1217–1231.
12. *Kudryashov N.A.* Exact solitary waves of the Fisher equations. Physics Letters A. 2005. V. 342. P. 99–106.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 1, pp. 25–31

Exact Solutions of a Nonlinear Differential Equation with Third and Fifth Degree Nonlinearities for Description of Optical Pulses

N. A. Kudryashov[a,#] and D. V. Safonova[a,##]

[a] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409, Russia*

[#] *e-mail: nakudr@gmail.com,*

[##] *e-mail: safonovadashav@gmail.com*

Received December 5, 2019; revised December 10, 2019; accepted December 24, 2019

Abstract—A fourth-order nonlinear partial differential equation with the third- and fifth-degree nonlinearities has been considered. This equation can be used to describe pulses in optical fibers. The Cauchy problem for this equation cannot be solved by the inverse scattering transform method; for this reason, the equation is considered using the traveling wave variables. The substitution of a certain type solution gives a system of ordinary differential equations (ODEs) for the imaginary and real parts of the equation. The Painlevé test is applied to the resulting system of ODEs. According to the test, the considered ODE system does not have the Painlevé property because the expansion of the general solution into the Laurent series contains complex Fuchs indices. When using the Painlevé test, a condition for the velocity of a traveling wave at which the system is simplified to one ordinary fourth-order differential equation is obtained. The first integral is found for this equation. The method of the simplest equations is used to construct the exact solution of the considered ODE. The found solution has two arbitrary constants and is expressed in terms of the elliptic Weierstrass function. A special case where the solution has the form of a solitary wave is considered. Periodic and solitary wave solutions at different parameter values are illustrated.

Keywords: nonlinear differential equation, exact solution, first integral

DOI: 10.1134/S2304487X20010046

REFERENCES

1. Biswas A. 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan–Kundu–Laksmanan equation. *Physics Letters A*, 2009, vol. 373, pp. 2546–2548.
2. Kudryashov N.A., Safonova D.V., Biswas A. Painlevé analysis and solution to the traveling wave reduction of Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019, vol. 24, no. 6, pp. 607–614.
3. Biswas A. Chirp-free bright optical soliton perturbation with Chen–Lee–Liu equation by traveling wave hypothesis and semi-inverse variational principle. *Optik*, 2018, vol. 172, pp. 772–776.
4. Kudryashov N.A. General solution of the traveling wave reduction for the perturbed Chen-Lee-Liu equation. *Optik*, 2019, vol. 186, pp. 339–349.

5. Kundu A., Mukherjee A. Novel integrable higher-dimensional nonlinear Schrödingerequation: properties, solutions, applications, 2013.
6. Kudryashov N.A. General solution of traveling wave reduction for the Kundu-Mukherjee-Naskar equation. *Optik*, 2019, vol. 186, pp. 22–27.
7. Kudryashov N.A. Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with cubic-quintic nonlinearity. *Optik*, 2019, vol. 188, pp. 27–35.
8. Kudryashov N.A. First integral and general solution of traveling wave reduction for the Triki-Biswas equation. *Optik*, 2019, vol. 185, pp. 275–281.
9. Kudryashov N.A. Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with antyi-cubic nonlinearity. *Optik*, 2019, vol. 185, pp. 665–671.
10. Kudryashov N.A. Construction of nonlinear equations for description of propagation pulses in optical fiber. *Optik*, 2019, vol. 192, 162964.
11. Kudryashov N.A. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. *Chaos Soliton Fractals*, 2005, vol. 24, pp. 1217–1231.
12. Kudryashov N.A. Exact solitary waves of the Fisher equations. *Physics Letters A*, 2005, vol. 342, pp. 99–106.