ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 1, с. 32–44

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РАСЩЕПЛЕНИЯ

© 2020 г. А. Д. Полянин[1,*], Л. В. Линчук[2,3,]**

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия*

[2] *Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, 195251, Россия*

[3] *Российский государственный педагогический университет им А.И. Герцена, Санкт-Петербург, 191186, Россия*

**e-mail: polyanin@ipmnet.ru*

***e-mail: lidiya_linchuk@mail.ru*

Поступила в редакцию 16.01.2020 г.
После доработки 16.01.2020 г.
Принята к публикации 21.01.2020 г.

Рассматриваются различные классы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Для построения точных решений в неявной форме используется метод расщепления, основанный на обобщенном разделении переменных. Основное внимание уделяется нелинейным уравнениям достаточно общего вида, которые содержат одну или несколько произвольных функций (важно отметить, что точные решения нелинейных дифференциальных уравнений, которые зависят от произвольных функций и поэтому обладают достаточной общностью, представляют наибольший практический интерес для тестирования численных и приближенных методов решения различных задач). Приведены примеры конкретных нелинейных уравнений и их точных решений. В отдельных случаях удается найти общие решения уравнений или понизить их порядок. Используемый подход допускает обобщение на нелинейные уравнения с частными производными. Для уравнений реакционно-диффузионного типа получены новые точные решения с функциональным разделением переменных.

Ключевые слова: нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, реакционно-диффузионные уравнения, точные решения в неявном виде, обобщенное разделение переменных, функциональное разделение переменных, метод расщепления

DOI: 10.1134/S2304487X20010071

1. ВВЕДЕНИЕ

Методы, основанные на разделении переменных, чаще всего используются для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка [1–7], для поиска полных интегралов нелинейных уравнений с частными производными первого порядка специального вида [7–9], для построения точных решений линейных уравнений математической физики [7, 10–13]. Для поиска точных решений нелинейных уравнений математической физики применяются методы обобщенного и функционального разделения переменных (см., например, [7, 14–22]).

В классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений принято рассматривать методы, позволяющие получать общие решения уравнений в замкнутой форме (см., например, [1–5, 7]). При этом практически не уделяется внимание методам поиска частных точных решений нелинейных уравнений. Подобное положение дел тормозит развитие методов поиска точных решений нелинейных уравнений математической физики, которые можно выразить в терминах элементарных или специальных функций.

Важно отметить, что для приложений нередко оказывается полезнее найти частное решение достаточно широкого класса дифференциальных уравнений, зависящего от свободных физико-химических параметров a_n, чем найти общее решение входящего в него более узкого класса уравнений при фиксированных значениях отдельных a_n.

В литературе описано сравнительно мало методов построения частных точных решений ОДУ (см., например, [23–43]), которые обычно имеют весьма узкую область применимости. Эти методы чаще всего основаны на явном задании вида решения (иногда после некоторого простого точечного преобразования рассматриваемого уравнения) и содержат свободные параметры, значения которых определяются далее методом неопределенных коэффициентов [23–28, 30–34, 36–41] (для этого нередко используются методы компьютерной алгебры). Существенным ограничением подобных прямых методов является то, что решение ищется в явном априорно заданном виде, в то время как подавляющее большинство известных общих решений нелинейных уравнений представляется в неявной или параметрической форме (подобный вывод следует из статистической обработки материалов наиболее полных справочников по точным решениям ОДУ [6, 44]). Более перспективными представляются методы, которые основаны на использовании решений более простых вспомогательных уравнений [29, 35, 42, 43] (см., также, [6]).

В данной работе будет показано, что метод расщепления, основанный на обобщенном разделении переменных, может применяться для построения точных решений в неявной форме различных нелинейных дифференциальных уравнений.

Прежде чем перейти к детальному описанию предлагаемого метода, сначала продемонстрируем его характерную особенность на простом конкретном примере.

Пример 1. Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

$$a(x)f(y)y'_x = b(x)g(y)$$

можно записать в виде

$$\vartheta(x) = \int \zeta(y)dy, \tag{1}$$

где

$$\vartheta(x) = \int \frac{b(x)}{a(x)}dx + C, \quad \zeta(y) = \frac{f(y)}{g(y)},$$

C – произвольная постоянная.

Интегральное соотношение с разделенными переменными вида (1) и его обобщения далее будем использовать для построения точных решений и упрощения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, которые зависят от произвольных функций.

2. ПРОЦЕДУРА ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОДУ. ПРИНЦИП РАСЩЕПЛЕНИЯ

Будем рассматривать нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения

$$F(x, y, y'_x, y''_{xx}, \ldots) = 0. \tag{2}$$

Предлагаемый метод построения точных решений ОДУ состоит из нескольких последовательных этапов. На первом этапе используем преобразование (1), где $\vartheta = \vartheta(x)$ и $\zeta = \zeta(y)$ – функции, которые подлежат определению в ходе дальнейшего анализа. После того, как эти функции будут определены, интегральное соотношение (1) будет задавать точное решение рассматриваемого уравнения в неявной форме.

Продифференцировав (1) по x, находим производные

$$\begin{gathered} y'_x = \vartheta'_x \frac{1}{\zeta}, \quad y''_{xx} = \vartheta''_{xx}\frac{1}{\zeta} - (\vartheta'_x)^2 \frac{\zeta'_y}{\zeta^3}, \\ y'''_{xxx} = \vartheta'''_{xxx}\frac{1}{\zeta} - 3\vartheta'_x\vartheta''_{xx}\frac{\zeta'_y}{\zeta^3} - (\vartheta'_x)^3\frac{1}{\zeta}\left(\frac{\zeta'_y}{\zeta^3}\right)'_y, \quad \ldots \end{gathered} \tag{3}$$

Будем считать, что после подстановки выражений (3) в (2) полученное уравнение можно преобразовать к билинейному виду:

$$\sum_{n=1}^{N} \Phi_n\Psi_n = 0, \tag{4}$$

где

$$\Phi_n = \Phi_n(x, \vartheta'_x, \vartheta''_{xx}, \ldots), \quad \Psi_n = \Psi_n(y, \zeta, \zeta'_y, \zeta''_{yy}, \ldots). \tag{5}$$

Для построения точных решений уравнения (4)–(5) используем принцип расщепления, описанный ниже.

Принцип расщепления. Рассматриваем линейные комбинации двух наборов элементов $\{\Phi_j\}$ и $\{\Psi_j\}$, входящих в (4), которые связаны соотношениями

$$\begin{gathered} \sum_{n=1}^{N} \alpha_{ni}\Phi_n = 0, \quad i = 1, \ldots, l; \\ \sum_{n=1}^{N} \beta_{nj}\Psi_n = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \end{gathered} \tag{6}$$

где $1 \le l \le N-1$ и $1 \le m \le N-1$. Константы α_{ni} и β_{nj} в (6) выбираются так, чтобы билинейное равенство (4) удовлетворялось тождественно (это всегда можно сделать, см. далее). Важно отметить, что соотношения (6) носят чисто алгебраический характер и не связаны с конкретным видом дифференциальных форм (5).

После получения соотношений (6) в них подставляются дифференциальные формы (5), что приводит к системам дифференциальных уравнений (часто переопределенным) для искомых функций $\vartheta = \vartheta(x)$ и $\zeta = \zeta(y)$, которые входят в (1).

Замечание 1. Необходимо отдельно рассматривать также вырожденные случаи, когда, помимо линейных соотношений (6), некоторые дифференциальные формы Φ_n или Ψ_n равны нулю.

Замечание 2. Билинейные уравнения, внешне похожие на (4)–(5), возникают при поиске точных решений нелинейных уравнений с частными производными методами обобщенного и функционального разделения переменных [18–22] (см. также разд. 7).

Замечание 3. Так как выражения Φ_n в (5) не зависят явно от ϑ (а только от x и производных ϑ'_x, ϑ''_{xx}, ...), вместо преобразования (1) однопараметрические семейства решений иногда удобнее искать в виде

$$\int \theta(x)dx + C = \int \zeta(y)dy, \qquad (7)$$

где C – произвольная постоянная. В этом случае в формулах для производных (3) и соотношениях (5) следует положить $\vartheta'_x = \theta$, $\vartheta''_{xx} = \theta'_x$, ...

3. ФОРМУЛЫ, ПОЗВОЛЯЮЩИЕ ТОЖДЕСТВЕННО УДОВЛЕТВОРИТЬ БИЛИНЕЙНОМУ СООТНОШЕНИЮ (4)

1. Для любого N билинейному соотношению (4) можно удовлетворить, если все Φ_i положить пропорциональными одному и тому же выбранному элементу Φ_j $(j \neq i)$. В результате получим

$$\begin{gathered}\Phi_i = -A_i\Phi_j, \quad i = 1,\dots,j-1,j+1,\dots,N;\\ \Psi_{j-1} = A_1\Psi_1 + \dots + A_{j-1}\Psi_j + \\ + A_{j+1}\Psi_{j+1} + \dots + A_N\Psi_N,\end{gathered} \qquad (8)$$

где A_i – произвольные постоянные. В формулах (8) можно сделать переобозначения символов $\Phi \rightleftarrows \Psi$.

2. Для четных N равенство (4) удовлетворяется, если обращаются в нуль изолированные парные суммы $\Phi_i\Psi_i + \Phi_j\Psi_j = 0$. В этом случае имеем соотношения

$$\Phi_i - A_{ij}\Phi_j = 0, \quad A_{ij}\Psi_i + \Psi_j = 0 \quad (i \neq j),$$

где A_{ij} – произвольные постоянные, а индексы i и j в совокупности принимают все значения от 1 до N.

3. При $N \geq 3$ равенство (4) также будет удовлетворяться тождественно, если задать линейные соотношения

$$\begin{gathered}\Phi_m - A_m\Phi_{N-1} - B_m\Phi_N = 0, \quad m = 1,2,\dots,N-2;\\ \Psi_{N-1} + A_1\Psi_1 + \dots + A_{N-2}\Psi_{N-2} = 0,\\ \Psi_N + B_1\Psi_1 + \dots + B_{N-2}\Psi_{N-2} = 0,\end{gathered} \qquad (9)$$

где A_i и B_i – произвольные постоянные. В формулах (9) можно сделать переобозначения символов $\Phi \rightleftarrows \Psi$ или одновременные парные перестановки $\Phi_i \rightleftarrows \Phi_j$ и $\Psi_i \rightleftarrows \Psi_j$.

Существуют и более сложные линейные комбинации вида (6), тождественно удовлетворяющие билинейному соотношению (4).

4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (1) ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОДУ

Проиллюстрируем возможности метода расщепления для построения точных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$y''_{xx} + a(x)f(y)y'_x + b(x)g(y) + c(x)h(y) = 0. \qquad (10)$$

Далее для краткости часто будем опускать аргументы, входящие в преобразование (1) и исследуемые уравнения.

Сделаем замену (1) и подставим производные (3) в (10). После умножения на ζ получим уравнение

$$\begin{gathered}\vartheta''_{xx} - (\vartheta'_x)^2\zeta^{-2}\zeta'_y + a(x)f(y)\vartheta'_x + \\ + b(x)g(y)\zeta + c(x)h(y)\zeta = 0.\end{gathered} \qquad (11)$$

Обозначая

$$\begin{gathered}\Phi_1 = \vartheta''_{xx}, \Phi_2 = (\vartheta'_x)^2, \quad \Phi_3 = a\vartheta'_x,\\ \Phi_4 = b, \quad \Phi_5 = c;\\ \Psi_1 = 1, \quad \Psi_2 = -\zeta^{-2}\zeta'_y, \quad \Psi_3 = f,\\ \Psi_4 = g\zeta, \quad \Psi_5 = h\zeta,\end{gathered} \qquad (12)$$

приводим уравнение (11) к билинейной форме (4) при $N = 5$:

$$\sum_{n=1}^{5}\Phi_n\Psi_n = 0. \qquad (13)$$

Рассмотрим два случая.

1. Уравнению (13) можно, например, тождественно удовлетворить, если положить

$$\begin{gathered}\Phi_1 = k_1\Phi_4, \quad \Phi_2 = k_2\Phi_5, \quad \Phi_3 = 0;\\ \Psi_4 = -k_1\Psi_1, \quad \Psi_5 = -k_2\Psi_2,\end{gathered} \qquad (14)$$

где k_1, k_2 – произвольные постоянные. Подставив (12) в (14), приходим к системе уравнений

$$\begin{gathered}\vartheta''_{xx} = k_1 b, \quad (\vartheta'_x)^2 = k_2 c, \quad a = 0;\\ g\zeta = -k_1, \quad h\zeta = k_2\zeta^{-2}\zeta'_y.\end{gathered} \qquad (15)$$

При $k_1 = k_2 = 1$ решение системы (15) имеет вид

$$\begin{gathered}c = B^2, \quad h = -gg'_y,\\ B = \int b\,dx + b_0, \quad \vartheta = \int B\,dx + C,\end{gathered}$$

где b_0 и C – произвольные постоянные. В результате получим уравнение

$$\begin{gathered}y''_{xx} + b(x)g(y) - B^2(x)g(y)g'_y(y) = 0,\\ B(x) = \int b(x)dx + b_0,\end{gathered} \qquad (16)$$

где $b(x)$ и $g(y)$ – произвольные функции, которое допускает однопараметрическое семейство точных решений

$$\int B(x)dx + C = -\int \frac{dy}{g(y)}. \tag{17}$$

Отметим, что трехпараметрическое уравнение типа Эмдена–Фаулера

$$y''_{xx} + \alpha x^n y^m - \frac{m\alpha^2}{(n+1)^2} x^{2n+2} y^{2m-1} = 0$$

является частным случаем уравнения (16) при $b(x) = \alpha x^n$, $g(y) = y^m$, $b_0 = 0$.

2. Уравнение (13) удовлетворяется при выполнении условий

$$\begin{gathered}\Phi_1 = k_1\Phi_3, \quad \Phi_2 = k_2\Phi_4, \quad \Phi_5 = 0;\\ \Psi_3 = -k_1\Psi_1, \quad \Psi_4 = -k_2\Psi_2,\end{gathered} \tag{18}$$

где k_1, k_2 – произвольные постоянные. Подставив (12) в (18), приходим к системе

$$\begin{gathered}\vartheta''_{xx} = k_1 a\vartheta'_x, \quad (\vartheta'_x)^2 = k_2 b, \quad c = 0;\\ f = -k_1, \quad g\zeta = k_2\zeta^{-2}\zeta'_y,\end{gathered} \tag{19}$$

решение которой при $k_1 = k_2 = -1$ имеет вид

$$\begin{gathered}b = -e^{-2A}, \quad A = \int a dx, \quad \vartheta = \int e^{-A}dx + C_1,\\ f = 1, \quad \zeta = \pm(2G + C_2)^{-1/2}, \quad G = \int g dy + C_2,\end{gathered} \tag{20}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, $a = a(x)$ и $g = g(y)$ – произвольные функции. В итоге получим нелинейное уравнение

$$\begin{gathered}y''_{xx} + a(x)y'_x - \exp[-2A(x)]g(y) = 0,\\ A(x) = \int a(x)dx,\end{gathered} \tag{21}$$

общее решение которого имеет две ветви и может быть представлено в неявной форме

$$\begin{gathered}\int \exp[-A(x)]dx + C_1 = \int \zeta(y)dy,\\ \zeta(y) = \pm\left[2\int g(y)dy + C_2\right]^{-1/2}.\end{gathered} \tag{22}$$

Пример 3. Рассмотрим теперь уравнение с квадратичной нелинейностью относительно производной

$$y''_{xx} + a(x)f(y)(y'_x)^2 + b(x)g(y)y'_x + c(x)h(y) = 0. \tag{23}$$

Сделав замену (1), подставим производные (3) в (23). После элементарных преобразований получим уравнение

$$\frac{\vartheta''_{xx}}{\zeta} - \frac{(\vartheta'_x)^2\zeta'_y}{\zeta^3} + \frac{af(\vartheta'_x)^2}{\zeta^2} + \frac{bg\vartheta'_x}{\zeta} + ch = 0, \tag{24}$$

которое можно представить в билинейном виде (13), где

$$\begin{gathered}\Phi_1 = \vartheta''_{xx}, \quad \Phi_2 = (\vartheta'_x)^2, \quad \Phi_3 = a(\vartheta'_x)^2,\\ \Phi_4 = b\vartheta'_x, \quad \Phi_5 = c;\\ \Psi_1 = \frac{1}{\zeta}, \quad \Psi_2 = -\frac{\zeta'_y}{\zeta^3}, \quad \Psi_3 = \frac{f}{\zeta^2},\\ \Psi_4 = \frac{g}{\zeta}, \quad \Psi_5 = h.\end{gathered} \tag{25}$$

Уравнению (13) можно удовлетворить, если положить

$$\begin{gathered}\Phi_1 = k_1\Phi_5, \quad \Phi_2 = k_2\Phi_4, \quad \Phi_3 = k_3\Phi_5 + k_4\Phi_4;\\ \Psi_4 = -k_2\Psi_2 - k_4\Psi_3, \quad \Psi_5 = -k_1\Psi_1 - k_3\Psi_3,\end{gathered} \tag{26}$$

где k_1, k_2, k_3 – произвольные постоянные. Подставим (25) в (26). Получим переопределенную систему

$$\begin{gathered}\vartheta''_{xx} = k_1 c, \quad (\vartheta'_x)^2 = k_2 b\vartheta'_x,\\ a(\vartheta'_x)^2 = k_3 c + k_4 b\vartheta'_x;\\ \frac{g}{\zeta} = k_2\frac{\zeta'_y}{\zeta^3} - k_4\frac{f}{\zeta^2}, \quad h = -k_1\frac{1}{\zeta} - k_3\frac{f}{\zeta^2}.\end{gathered} \tag{27}$$

При $k_1 = k_2 = 1$, $k_3 = \alpha$, $k_4 = \beta$ решение уравнений (27) можно представить в виде

$$\begin{gathered}a = \alpha b^{-2}b'_x + \beta, \quad c = b'_x, \quad \vartheta = \int b dx + C;\\ g = -\beta f\xi - \xi'_y, \quad h = -(\alpha f\xi + 1)\xi, \quad \zeta = \frac{1}{\xi},\end{gathered} \tag{28}$$

где $b = b(x)$, $f = f(y)$, $\xi = \xi(y)$ – произвольные функции, C, α, β – произвольные постоянные.

Подставив (28) в (23) и (1), приходим к уравнению

$$\begin{gathered}y''_{xx} + (\alpha b^{-2}b'_x + \beta)f(y'_x)^2 -\\ - b(\beta f\xi + \xi'_y)y'_x - b'_x\xi(\alpha f\xi + 1) = 0,\end{gathered} \tag{29}$$

которое допускает однопараметрическое семейство решений

$$\int b dx + C = \int \frac{dy}{\xi}. \tag{30}$$

Пример 4. Будем искать точные решения уравнений вида

$$\begin{gathered}y'_x y''_{xx} + a(x)f(y)(y'_x)^2 + b(x)g(y)y'_x +\\ + c(x)h(y) = 0.\end{gathered} \tag{31}$$

Сделаем замену (1) и подставим производные (3) в (31). В результате получим

$$\frac{\vartheta'_x\vartheta''_{xx}}{\zeta^2} - \frac{(\vartheta'_x)^3\zeta'_y}{\zeta^4} + \frac{af(\vartheta'_x)^2}{\zeta^2} + \frac{bg\vartheta'_x}{\zeta} + ch = 0. \tag{32}$$

Это уравнение можно представить в билинейной форме (13), если обозначить

$$\Phi_1 = \vartheta'_x\vartheta''_{xx}, \quad \Phi_2 = (\vartheta'_x)^3, \quad \Phi_3 = a(\vartheta'_x)^2,$$
$$\Phi_4 = b\vartheta'_x, \quad \Phi_5 = c;$$
$$\Psi_1 = \frac{1}{\zeta^2}, \quad \Psi_2 = -\frac{\zeta'_y}{\zeta^4}, \quad \Psi_3 = \frac{f}{\zeta^2}, \tag{33}$$
$$\Psi_4 = \frac{g}{\zeta}, \quad \Psi_5 = h.$$

Рассмотрим два случая.

1. Уравнению (13) можно тождественно удовлетворить, если использовать линейные соотношения

$$\Phi_3 = k_3\Phi_1, \quad \Phi_4 = k_1\Phi_2, \quad \Phi_5 = k_2\Phi_2; \quad \Psi_1 = -k_3\Psi_3, \quad \Psi_2 = -k_1\Psi_4 - k_2\Psi_5, \tag{34}$$

где k_1, k_2, k_3 – произвольные постоянные. Подставляя в (34) зависимости (33), приходим к системе

$$b = k_1(\vartheta'_x)^2, \quad a\vartheta'_x = k_3\vartheta''_{xx}, \quad c = (\vartheta'_x)^3; \quad 1 = -k_3 f, \quad \zeta'_y = k_1 g\zeta^3 + k_2 h\zeta^4. \tag{35}$$

Решение первых четырех уравнений (35) имеет вид

$$a = k_3\frac{v'_x}{v}, \quad b = k_1 v^2, \quad c = k_2 v^3, \quad \vartheta = \int v\,dx + C; \quad f = -\frac{1}{k_3}, \tag{36}$$

где $v = v(x)$ – произвольная функция, C – произвольная постоянная. Подставляя (36) в (31) и полагая $k_1 = k_2 = 1$, получим уравнение

$$y'_x y''_{xx} - \frac{v'_x}{v}(y'_x)^2 + v^2 g y'_x + v^3 h = 0, \tag{37}$$

которое содержит три произвольные функции $v = v(x)$, $g = g(y)$, $h = h(y)$. Его общее решение определяется неявной зависимостью

$$\int v\,dx + C = \int \zeta\,dy, \tag{38}$$

где C – произвольная константа, а функция $\zeta = \zeta(y)$ является решением последнего уравнения (35) при $k_1 = k_2 = 1$:

$$\zeta'_y = h\zeta^4 + g\zeta^3. \tag{39}$$

В уравнении (39) переменные разделяются, если $\alpha g + \beta h = 0$, где α и β – произвольные постоянные. Поэтому уравнение (39) интегрируется в квадратурах, например, при $g \equiv 0$ или $h \equiv 0$.

2. Уравнению (13) можно удовлетворить, если положить Φ_1, Φ_3, Φ_4, Φ_5 пропорциональными Φ_2. Тогда получим следующие зависимости:

$$\Phi_1 = k_1\Phi_2, \quad \Phi_3 = k_2\Phi_2, \quad \Phi_4 = k_3\Phi_2, \quad \Phi_5 = k_4\Phi_2; \quad \Psi_2 = -k_1\Psi_1 - k_2\Psi_3 - k_3\Psi_4 - k_4\Psi_5, \tag{40}$$

где k_1, k_2, k_3, k_4 – произвольные константы. Подставив (33) в (40), имеем систему для поиска неизвестных функций

$$\vartheta''_{xx} = k_1(\vartheta'_x)^2, \quad a = k_2\vartheta'_x, \quad b = k_3(\vartheta'_x)^2, \quad c = k_4(\vartheta'_x)^3; \quad \frac{\zeta'_y}{\zeta^4} = \frac{k_1}{\zeta^2} + \frac{k_2 f}{\zeta^2} + \frac{k_3 g}{\zeta} + k_4 h. \tag{41}$$

Решение первых четырех уравнений (41) описывается формулами

$$a = -\frac{C_1k_2}{k_1(C_1x + C_2)}, \quad b = \frac{C_1^2k_3}{k_1^2(C_1x + C_2)^2}, \quad c = -\frac{C_1^3k_4}{k_1^3(C_1x + C_2)^3}, \quad \vartheta = -\frac{\ln(C_1x + C_2)}{k_1} + C, \tag{42}$$

где C, C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Подставим (42) в (31). Полагая $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $k_1 = -1$, $k_2 = k_3 = k_4 = 1$, приходим к уравнению

$$y'_x y''_{xx} + x^{-1}f(y)(y'_x)^2 + x^{-2}g(y)y'_x + x^{-3}h(y) = 0, \tag{43}$$

где $f(y)$, $g(y)$, $h(y)$ – произвольные функции. Общее решение уравнения (43) можно представить в неявной форме

$$\ln x + C = \int \zeta(y)\,dy, \tag{44}$$

где функция $\zeta = \zeta(y)$ определяется из ОДУ первого порядка

$$\zeta'_y + [1 - f(y)]\zeta^2 - g(y)\zeta^3 - h(y)\zeta^4 = 0, \tag{45}$$

которое получено из последнего уравнения (41) при $k_1 = -1$, $k_2 = k_3 = k_4 = 1$.

Замечание 4. Уравнение (43) является однородным по переменной x.

Пример 5. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$[a(x)f(y)y'_x]'_x + b(x)g(y)y'_x + c(x)h(y) = 0. \tag{46}$$

Сделав замену (1), получим уравнение

$$(a\vartheta'_x)'_x f + a(\vartheta'_x)^2\left(\frac{f}{\zeta}\right)'_y + b\vartheta'_x g + ch\zeta = 0, \tag{47}$$

которое можно представить в билинейной форме

$$\sum_{n=1}^{4}\Phi_n\Psi_n = 0, \tag{48}$$

где

$$\Phi_1 = (a\vartheta'_x)'_x, \quad \Phi_2 = a(\vartheta'_x)^2,$$
$$\Phi_3 = b\vartheta'_x, \quad \Phi_4 = c; \tag{49}$$
$$\Psi_1 = f, \quad \Psi_2 = (f/\zeta)'_y, \quad \Psi_3 = g, \quad \Psi_4 = h\zeta.$$

Далее рассмотрим два случая.

1. Уравнению (48) можно удовлетворить, если положить

$$\Phi_1 = -k_1\Phi_3, \quad \Phi_2 = -k_2\Phi_4; \qquad \Psi_3 = k_1\Psi_1, \quad \Psi_4 = k_2\Psi_2, \tag{50}$$

где k_1, k_2 – произвольные числа. Подставив (49) в (50), имеем уравнения

$$(a\vartheta'_x)'_x = -k_1 b\vartheta'_x, \quad a(\vartheta'_x)^2 = -k_2 c; \qquad h\zeta = k_2(f/\zeta)'_y, \quad g = k_1 f. \tag{51}$$

Решая систему (51), получим следующие зависимости:

$$c = -\frac{C^2}{k_2 a}\exp\left(-2k_1\int\frac{b}{a}dx\right),$$
$$\vartheta = C\int\frac{1}{a}\exp\left(-k_1\int\frac{b}{a}dx\right)dx + C_1; \tag{52}$$
$$g = k_1 f, \quad \zeta = \pm f(y)\left[\frac{2}{k_2}\int f(y)h(y)dy + C_2\right]^{-1/2},$$

где $a = a(x)$, $b = b(x)$, $f = f(y)$, $h = h(y)$ – произвольные функции, C, C_1, C_2 – произвольные постоянные. Полагая $C = k_1 = k_2 = 1$ в (52), приходим к уравнению

$$[a(x)f(y)y'_x]'_x + b(x)f(y)y'_x - \frac{1}{a(x)}\exp\left(-2\int\frac{b(x)}{a(x)}dx\right)h(y) = 0, \tag{53}$$

общее решение которого можно представить в неявной форме

$$\int\exp\left(-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx\right)\frac{dx}{a(x)} + C_1 = \pm\int f(y)\left[2\int f(y)h(y)dy + C_2\right]^{-1/2}dy, \tag{54}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

2. Соотношение (48) обращается в верное тождество, если имеют место линейные связи

$$\Phi_1 = -k_1\Phi_4, \quad \Phi_3 = -k_2\Phi_4; \qquad \Psi_2 = 0, \quad \Psi_4 = k_1\Psi_1 + k_2\Psi_3, \tag{55}$$

где k_1, k_2 – произвольные константы. Подставив (49) в (55), получим систему

$$(a\vartheta'_x)' = -k_1 c, \quad b\vartheta'_x = -k_2 c; \qquad (f/\zeta)'_y = 0, \quad h\zeta = k_1 f + k_2 g, \tag{56}$$

решение которой можно представить в виде

$$b = \frac{k_2}{k_1}\frac{av'_x}{v}, \quad c = -\frac{v'_x}{k_1}, \quad \vartheta = \int\frac{v}{a}dx + C; \qquad h = \frac{k_1 f + k_2 g}{\gamma f}, \quad \zeta = \gamma f, \tag{57}$$

где $a = a(x)$, $v = v(x)$, $f = f(y)$, $g = g(y)$ – произвольные функции, C, γ – произвольные постоянные. Полагая $k_1 = k_2 = \gamma = 1$ в (57), приходим к уравнению

$$[a(x)f(y)y'_x]'_x + a(x)\frac{v'_x(x)}{v(x)}g(y)y'_x - v'_x(x)\left[1 + \frac{g(y)}{f(y)}\right] = 0, \tag{58}$$

которое допускает однопараметрическое семейство решений

$$\int\frac{v(x)}{a(x)}dx + C = \int f(y)dy,$$

где C – произвольная постоянная.

5. ОБОБЩЕНИЯ, ОСНОВАННЫЕ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Другие точные решения можно получить, если вместо преобразованного уравнения (4)–(5) рассматривать эквивалентные дифференциальные уравнения, которые сводятся к (4)–(5) на множестве функций, удовлетворяющих соотношению (1).

Укажем здесь два класса эквивалентных уравнений, которые будут использованы далее.

1. Можно использовать уравнения вида

$$\sum_{n=1}^{N}\tilde{\Phi}_n\tilde{\Psi}_n = 0, \quad \tilde{\Phi}_n = \Phi_n\eta_n(\vartheta), \qquad \tilde{\Psi}_n = \Psi_n/\eta_n(Z), \quad Z = \int\zeta(y)dy, \tag{59}$$

которые сохраняют билинейную структуру и, в силу (1) (т.е. $\vartheta = Z$), эквивалентны уравнению (4)–(5) для любых функций $\eta_n(\vartheta)$.

2. Также можно использовать уравнения вида

$$G(x,y,\vartheta) - G(x,y,Z) + \sum_{n=1}^{N}\Phi_n\Psi_n = 0, \tag{60}$$

которые для любых функций $G(x,y,z)$ эквивалентны уравнению (4)–(5).

Использование принципа расщепления к уравнениям (59) и (60) в случае общего положения будет приводить к другим точным решениям рассматриваемого класса ОДУ, чем использование этого принципа к уравнению (4).

Для иллюстрации вышесказанного вернемся к дифференциальному уравнению (46). Как и ранее, его решения ищем в виде (1). Подставляя производные (3) в (46), получим уравнение (47). Вместо этого уравнения рассмотрим более сложное уравнение

$$(a\vartheta'_x)'_x f + a(\vartheta'_x)^2\left(\frac{f}{\zeta}\right)'_y + b\vartheta'_x g + ch\zeta\frac{\eta(\vartheta)}{\eta(Z)} = 0, \quad Z = \int \zeta(y)dy, \tag{61}$$

где $\eta(\vartheta)$ – произвольная функция. Уравнение (61) эквивалентно уравнению (47) в силу (1).

Уравнение (61) можно представить в билинейном виде

$$\sum_{n=1}^{4}\tilde{\Phi}_n\tilde{\Psi}_n = 0, \tag{62}$$

где использованы обозначения

$$\begin{gathered}\tilde{\Phi}_1 = (a\vartheta'_x)'_x, \quad \tilde{\Phi}_2 = a(\vartheta'_x)^2,\\ \tilde{\Phi}_3 = b\vartheta'_x, \quad \tilde{\Phi}_4 = c\eta(\vartheta);\\ \tilde{\Psi}_1 = f, \quad \tilde{\Psi}_2 = (f/\zeta)'_y,\\ \tilde{\Psi}_3 = g, \quad \tilde{\Psi}_4 = h\zeta/\eta(Z).\end{gathered} \tag{63}$$

Уравнению (62) можно удовлетворить, если положить

$$\tilde{\Phi}_1 = -\tilde{\Phi}_4,\ \tilde{\Phi}_2 = -\tilde{\Phi}_3;\ \tilde{\Psi}_1 = \tilde{\Psi}_4,\ \tilde{\Psi}_2 = \tilde{\Psi}_3. \tag{64}$$

Подставив (63) в (64), приходим к системе уравнений

$$\begin{gathered}(a\vartheta'_x)'_x = -c\eta(\vartheta), \quad a\vartheta'_x = -b;\\ f = h\zeta/\eta(Z), \quad (f/\zeta)'_y = g,\end{gathered} \tag{65}$$

решение которой можно представить в виде

$$\begin{gathered}b = -a\vartheta'_x, \quad c = -(a\vartheta'_x)'_x/\eta(\vartheta);\\ \zeta = \frac{f}{G}, \quad h = G\eta\left(\int\frac{f}{G}dy\right), \quad G = \int g dy + C_1,\end{gathered} \tag{66}$$

где $a = a(x)$, $\vartheta = \vartheta(x)$, $f = f(y)$, $g = g(y)$, $\eta(\vartheta)$ – произвольные функции, C_1 – произвольная постоянная. Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 6. Положим в (66):

$$\begin{gathered}a = 1, \quad b = -(\alpha e^x + \beta e^{-x}), \quad c = -1,\\ \vartheta = \alpha e^x - \beta e^{-x}, \quad \eta(\vartheta) = \vartheta, \quad C_1 = 0.\end{gathered}$$

В результате приходим к нелинейному уравнению

$$\begin{gathered}[f(y)y'_x]'_x - (\alpha e^x + \beta e^{-x})g(y)y'_x -\\ - G(y)\int\frac{f(y)}{G(y)}dy = 0,\\ G(y) = \int g(y)dy,\end{gathered} \tag{67}$$

зависящему от двух произвольных функций $f(y)$ и $g(y)$ и двух свободных параметров α и β, которое допускает точное решение в неявной форме

$$\alpha e^x - \beta e^{-x} = \int\frac{f(y)}{G(y)}dy. \tag{68}$$

При $f(y) = y^2$, $g(y) = y$ уравнение (67) принимает вид

$$(y^2y'_x)'_x - (\alpha e^x + \beta e^{-x})yy'_x - y^3 = 0,$$

а его точное решение точное решение (68) может быть представлено в явной форме

$$y = \frac{1}{2}(\alpha e^x - \beta e^{-x}).$$

Пример 7. Положим в (66):

$$\begin{gathered}a = 1, \quad b = -k\cos x, \quad c = 1,\\ \vartheta = k\sin x, \quad \eta(\vartheta) = \vartheta, \quad C_1 = 0.\end{gathered}$$

В результате приходим к уравнению

$$\begin{gathered}[f(y)y'_x]'_x - k\cos x g(y)y'_x + G(y)\int\frac{f(y)}{G(y)}dy = 0,\\ G(y) = \int g(y)dy,\end{gathered} \tag{69}$$

которое допускает точное решение в неявном виде

$$k\sin x = \int\frac{f(y)}{G(y)}dy. \tag{70}$$

В (69) и (70) подставим функции $f(y) = y^2$, $g(y) = y$. Получим уравнение

$$(y^2y'_x)'_x - k\cos x yy'_x + y^3 = 0,$$

которое допускает точное решение в явном виде

$$y = \frac{1}{2}k\sin x.$$

6. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (1) ДЛЯ УПРОЩЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Покажем, что преобразование (1) может использоваться также для упрощения уравнений.

Пример 8. Рассмотрим уравнение

$$y''_{xx} + f(y)(y'_x)^2 + b(x)g(y)y'_x + c(x)h(y) = 0. \tag{71}$$

Преобразование (1) приводит (71) к виду

$$\begin{gathered}\vartheta''_{xx} + (\vartheta'_x)^2\frac{1}{\zeta}\left[f(y) - \frac{\zeta'_y}{\zeta}\right] +\\ + b(x)g(y)\vartheta'_x + c(x)h(y)\zeta = 0.\end{gathered} \tag{72}$$

В (72) положим

$$f(y) - \frac{\zeta'_y}{\zeta} = 0, \quad g(y) = 1, \quad h(y)\zeta = 1, \tag{73}$$

что дает

$$\zeta = \exp\Big[\int f(y)dy\Big], \quad h(y) = \exp\Big[-\int f(y)dy\Big]. \quad (74)$$

В результате имеем нелинейное уравнение

$$\begin{aligned} &y''_{xx} + f(y)(y'_x)^2 + b(x)y'_x + \\ &+ c(x)\exp\Big[-\int f(y)dy\Big] = 0, \end{aligned} \quad (75)$$

где $b(x)$, $c(x)$, $f(y)$ – произвольные функции, которое с помощью преобразования

$$\vartheta = \int \exp\Big[\int f(y)dy\Big]dy, \quad (76)$$

приводится к линейному уравнению

$$\vartheta''_{xx} + b(x)\vartheta'_x + c(x) = 0. \quad (77)$$

Это уравнение легко интегрируется с помощью подстановки $u = \vartheta'_x$.

Пример 9. Автономное уравнение второго порядка общего вида

$$y''_{xx} + F(y, y'_x) = 0 \quad (78)$$

преобразованием (1) при $\vartheta(x) = x + C_1$, где C_1 – произвольная постоянная, приводится к уравнению первого порядка

$$\zeta'_y = \zeta^3 F(y, 1/\zeta). \quad (79)$$

Аналогичным образом понижается порядок автономного уравнения любого порядка.

Замечание 5. Решение более общего, чем (78), нелинейного уравнения

$$y''_{xx} - \frac{v'_x}{v}y'_x + v^2F(y, y'_x/v) = 0, \quad (80)$$

где $v = v(x)$ и $F(y,z)$ – произвольные функции, можно представить в неявной форме (38), где функция $\zeta = \zeta(y)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка (79).

Замечание 6. Уравнение (21) является частным случаем уравнения (80) при

$$v(x) = \exp\Big[-\int a(x)dx\Big], \quad F(y,z) = -g(y).$$

Замечание 7. Уравнение (37) является частным случаем уравнения (80) при $F(y,z) = g(y) + h(y)z^{-1}$.

7. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. МЕТОД ПОИСКА ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

Описанный в разд. 2 метод построения точных решений допускает обобщение на случай нелинейных уравнений с частными производными. Для простоты будем рассматривать уравнения с двумя независимыми переменными

$$F(x, t, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \ldots) = 0, \quad (81)$$

где $u = u(x,t)$ – искомая функция.

Для построения точных решений уравнения (81) на начальном этапе используем нелинейное преобразование [20–22]

$$\vartheta = \int \zeta(u)du, \quad (82)$$

где $\vartheta = \vartheta(x,t)$ и $\zeta = \zeta(u)$ – функции, которые ищутся в ходе дальнейшего анализа. После того, как эти функции будут определены, интегральное соотношение (82) будет задавать точное решение рассматриваемого уравнения в неявной форме.

Дифференцируя (82) по независимым переменным, находим частные производные

$$\begin{gathered} u_x = \frac{\vartheta_x}{\zeta}, \quad u_t = \frac{\vartheta_t}{\zeta}, \quad u_{xx} = \frac{\vartheta_{xx}}{\zeta} - \frac{\vartheta_x^2\zeta'_u}{\zeta^3}, \\ u_{xt} = \frac{\vartheta_{xt}}{\zeta} - \frac{\vartheta_x\vartheta_t\zeta'_u}{\zeta^3}, \quad \ldots \end{gathered} \quad (83)$$

Будем считать, что после подстановки выражений (83) в (81) полученное уравнение можно преобразовать к билинейному виду (4), где

$$\begin{gathered} \Phi_n = \Phi_n(x, t, \vartheta_x, \vartheta_t, \vartheta_{xx}, \ldots), \\ \Psi_n = \Psi_n(u, \zeta, \zeta'_u, \zeta''_{uu}, \ldots). \end{gathered} \quad (84)$$

Дальнейшая процедура построения точных решений основана на использовании метода расщепления к уравнению (4), в которое подставляются функции (84), и полностью аналогична процедуре, изложенной в разд. 2.

Применяя описанный метод в [20, 22] был получен ряд точных решений нелинейных уравнений диффузионного типа. Ниже этим методом будут построены несколько новых точных решений.

Рассмотрим класс нелинейных уравнений реакционно-диффузионного типа с переменными коэффициентами

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u) + c(x)h(u). \quad (85)$$

Далее для краткости аргументы функций, входящих в преобразование (82) и уравнение (85), часто будут опускаться.

Сделав замену (82), подставим производные (83) в (85). После элементарных преобразований получим

$$-\vartheta_t + (a\vartheta_x)_x f + a\vartheta_x^2\left(\frac{f}{\zeta}\right)'_u + bg\zeta + ch\zeta = 0. \quad (86)$$

При $\zeta = 1$ уравнение (86) совпадает с исходным уравнением (85), где $u = \vartheta$. Поэтому на данном этапе никакие решения не теряются.

Введем обозначения:

$$\begin{gathered} \Phi_1 = -\vartheta_t, \quad \Phi_2 = (a\vartheta_x)_x, \quad \Phi_3 = a\vartheta_x^2, \\ \Phi_4 = b, \quad \Phi_5 = c; \\ \Psi_1 = 1, \quad \Psi_2 = f, \quad \Psi_3 = (f/\zeta)'_u, \\ \Psi_4 = g\zeta, \quad \Psi_5 = h\zeta. \end{gathered} \quad (87)$$

В результате уравнение (86) можно представить в билинейном виде (4) при $N = 5$:

$$\sum_{n=1}^{5} \Phi_n \Psi_n = 0. \qquad (88)$$

Пример 10. Уравнению (88) можно тождественно удовлетворить, если использовать линейные соотношения

$$\begin{gathered} \Phi_1 = -\Phi_4, \quad \Phi_2 = 0, \quad \Phi_3 = -\Phi_5; \\ \Psi_1 = \Psi_4, \quad \Psi_3 = \Psi_5. \end{gathered} \qquad (89)$$

Подставляя (87) в (89), приходим к уравнениям

$$\begin{gathered} \vartheta_t = b, \quad (a\vartheta_x)_x = 0, \quad a\vartheta_x^2 = -c; \\ g\zeta = 1, \quad (f/\zeta)'_u = h\zeta. \end{gathered} \qquad (90)$$

Общее решение переопределенной системы, состоящей из первых трех уравнений (90), имеет вид

$$\begin{gathered} b(x) = \beta, \quad c(x) = -\frac{\lambda^2}{a(x)}, \\ \vartheta(x,t) = \beta t + \lambda \int \frac{dx}{a(x)} + C_1, \end{gathered} \qquad (91)$$

где $a(x)$ – произвольная функция, C_1, β, λ – произвольные постоянные. Общее решение системы, состоящей из двух последних уравнений (90), записывается так (берутся одновременно либо верхние, либо нижние знаки):

$$\begin{gathered} g = \pm \frac{\sqrt{2E(u) + C_2}}{f}, \quad h = \pm \frac{f}{\sqrt{2E(u) + C_2}}, \\ E(u) = \int f(u)h(u)\,du, \end{gathered} \qquad (92)$$

где $f(u)$ и $g(u)$ – произвольные функции. Из формул (91) и (92) получим два уравнения

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x \pm \beta \frac{\sqrt{2E(u) + C_2}}{f(u)} - \frac{\lambda^2}{a(x)} h(u), \qquad (93)$$

которые допускают точные решения типа обобщенной бегущей волны в неявной форме

$$\pm \int \frac{f(u)\,du}{\sqrt{2E(u) + C_2}} = \beta t + \lambda \int \frac{dx}{a(x)} + C_1. \qquad (94)$$

Сделав переобозначения $\beta \Rightarrow \pm\beta$, $C_1 \Rightarrow \pm C_1$, $h(u) \Rightarrow h(u)/2$ в (93) и (94), приходим к одному уравнению

$$\begin{gathered} u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \frac{\beta}{f(u)} \sqrt{E(u) + C_2} - \frac{\lambda^2}{2a(x)} h(u), \\ E(u) = \int f(u)h(u)\,du, \end{gathered} \qquad (95)$$

которое допускает два точных решения

$$\int \frac{f(u)\,du}{\sqrt{E(u) + C_2}} = \beta t \pm \lambda \int \frac{dx}{a(x)} + C_1. \qquad (96)$$

Отметим, что уравнение (95) содержит три произвольные функции $a(x)$, $f(u)$, $h(u)$ и три произвольные постоянные C_2, β, λ.

В частном случае $h(u) = 1$ уравнение (95) и его точные решения (96) были получены в [45].

Замечание 8. Более общее, чем (95), уравнение

$$\begin{gathered} u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \frac{\beta(t)}{f(u)} \sqrt{E(u) + C_2} - \frac{\lambda^2 h(u)}{2a(x)}, \\ E(u) = \int f(u)h(u)\,du, \end{gathered}$$

зависящее от четырех произвольных функций $a(x)$, $f(u)$, $h(u)$, $\beta(t)$, допускает два точных решения

$$\int \frac{f(u)\,du}{\sqrt{E(u) + C_2}} = \int \beta(t)\,dt \pm \lambda \int \frac{dx}{a(x)} + C_1.$$

Опуская промежуточные выкладки, приведем еще два новых точных решения нелинейных уравнений диффузионного типа достаточно общего вида, которые зависят от пяти произвольных функций.

Пример 11. Нелинейное уравнение параболического типа

$$\begin{gathered} u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u)u_x + \\ + b'_x(x)G(u) + \frac{\lambda(t)G(u)}{f(u)}, \quad G(u) = \int g(u)\,du \end{gathered}$$

допускает точное решение с функциональным разделением переменных в неявной форме

$$\int \lambda(t)\,dt - \int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx + C = \int \frac{f(u)}{G(u)}\,du,$$

где $a(x)$, $b(x)$, $\lambda(t)$, $f(u)$, $g(u)$ – произвольные функции, C – произвольная постоянная.

Пример 12. Уравнение

$$\begin{gathered} u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)f(u)u_x + c(x)F(u) + \\ + \frac{\lambda(t)F(u)}{f(u)}, \quad F(u) = \int f(u)\,du \end{gathered}$$

имеет точное решение с функциональным разделением переменных в неявном виде

$$\exp\Bigl(\int \lambda(t)\,dt\Bigr)\varphi(x) = \int f(u)\,du,$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $f(u)$, $\lambda(t)$ – произвольные функции, а функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет линейному ОДУ второго порядка

$$[a(x)\varphi'_x]'_x + b(x)\varphi'_x + c(x)\varphi = 0.$$

8. КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Описаны различные классы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которые допускают построение точных решений методом расщепления. Решения ищутся в виде неявной зависимости, которая содержит несколько свободных функций (эти функции определяются в ходе дальнейшего анализа). Особое внимание уделено нелинейным уравнениям общего вида, которые зависят от одной или нескольких произвольных функций. Получен ряд новых точных решений нелинейных ОДУ. Показано, что используемый подход допускает обобщение на нелинейные уравнения с частными производными. Построены новые точные решения с функциональным разделением переменных для уравнений реакционно-диффузионного типа.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690135-5) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10025).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений, 8-е изд. М.: Физматлит, 1959.
2. *Murphy G.M.* Ordinary Differential Equations and Their Solutions. New York: D. Van Nostrand, 1960.
3. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, 2-е изд. М.: Высшая школа, 1963.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, 5-е изд. М.: Наука, 1976.
5. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.
6. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. Boca Raton: CRC Press, 2018.
7. *Polyanin A.D., Manzhirov A.V.* Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.
8. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966.
9. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. М.: Физматлит, 2003.
10. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
11. *Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г. и др.* Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 1964.
12. *Корн Г.А., Корн Т.М.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968.
13. *Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd ed. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2016.
14. *Galaktionov V.A., Posashkov S.A., Svirshchevskii S.R.* Generalized separation of variables for differential equations with polynomial nonlinearities // Differential Equations. 1995. V. 31. № 2. P. 233–240.
15. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
16. *Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R.* Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.
17. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.
18. *Polyanin A.D.* Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients // Int. J. Non-Linear Mech. 2019. V. 111. P. 95–105.
19. *Polyanin A.D.* Construction of functional separable solutions in implicit form for non-linear Klein–Gordon type equations with variable coefficients // Int. J. Non-Linear Mech. 2019. V. 114. P. 29–40.
20. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Separation of variables in PDEs using nonlinear transformations: Applications to reaction-diffusion type equations // Applied Math. Letters. 2020. V. 100. 106055.
21. *Полянин А.Д.* Методы функционального разделения переменных и их применение в математической физике // Мат. моделирование и числ. методы. 2019. № 1. С. 65–97.
22. *Polyanin A.D.* Functional separation of variables in nonlinear PDEs: General approach, new solutions of diffusion-type equations // Mathematics. 2020. V. 8. № 1. 90.
23. *Malfliet W., Hereman W.* The tanh method: exact solutions of nonlinear evolution and wave equations // Phys Scripta. 1996. V. 54. P. 563–568.
24. *Parkes E.J., Duffy B.R.* An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations // Computer Physics Communications. 1996. V. 98. P. 288–300.
25. *Fan E.* Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations // Phys. Letters A. 2000. V. 277. № 4–5. P. 212–218.
26. *Elwakila S.A., El-Labany S.K., Zahran M.A., Sabry R.* Modified extended tanh-function method for solving nonlinear partial differential equations // Phys. Letters A. 2002. V. 299. № 2–3. P. 179–188.
27. *Yan Z.* The extended Jacobian elliptic function expansion method and its application in the generalized Hirota–Satsuma coupled KdV system // Chaos, Solitons & Fractals. 2003. V. 15. № 3. P. 575–583.
28. *Wazwaz A.-M.* The sine-cosine method for obtaining solutions with compact and noncompact structures // Appl. Math. & Comput. 2004. V. 159. № 2. P. 559–576.
29. *Kudryashov N.A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // Chaos, Solitons & Fractals, 2005. V. 24. № 5. P. 1217–1231.
30. *Wazwaz A.-M.* The tanh method and the sine-cosine method for solving the KP-MEW equation // Int. J. Computer Math. 2005. V. 82. № 2. P. 235–246.

31. *He J.H., Wu X.H.* Exp-function method for nonlinear wave equations // Chaos, Solitons & Fractals. 2006. V. 30. № 3. P. 700–708.
32. *He J.H., Abdou M.A.* New periodic solutions for nonlinear evolution equation using Exp-method // Chaos Solitons & Fractals. 2007. V. 34. P. 1421–1429.
33. *Bekir A., Boz A.* Exact solutions for nonlinear evolution equations using Exp-function method // Phys. Letters A. 2008. V. 372. № 10. P. 1619–1625.
34. *Chun C.* Soliton and periodic solutions for the fifth-order KdV equation with the Exp-function method // Phys. Letters A. 2008. V. 372. № 16. P. 2760–2766.
35. *Kudryashov N.A., Loguinova N.B.* Extended simplest equation method for nonlinear differential equations // Appl. Math. & Comput. 2008. V. 205. № 1. P. 396–402.
36. *Salas A.H.* Exact solutions for the general fifth KdV equation by the exp function method // Appl. Math. & Comput. 2008. V. 205. № 1. P. 291–297.
37. *Erbas B., Yusufoglu E.* Exp-function method for constructing exact solutions of Sharma–Tasso–Olver equation // Chaos, Solitons & Fractals. 2009. V. 41. № 5. P. 2326–2330.
38. *Kudryashov N.A., Loguinova N.B.* Be careful with the Exp-function method // Commun. Nonlinear Science & Numer. Simulation. 2009. V. 14. № 5. P. 1881–189.
39. *Zhang S., Tonga J.L., Wanga W.* Exp-function method for a nonlinear ordinary differential equation and new exact solutions of the dispersive long wave equations // Comp. Math. Appl. 2009. V. 58. № 11–12. P. 2294–2299.
40. *Parkes E.J.* Observations on the tanh-coth expansion method for finding solutions to nonlinear evolution equations // Appl. Math. Comp. 2010. V. 217. № 4. P. 1749–1754.
41. *Zhang L.* The extended tanh method and the exp-function method to solve a kind of nonlinear heat equation // Math. Prob. Engng. 2010. V. 2010. 935873.
42. *Полянин А.Д.* Переопределенные системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами и их приложения // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2016. Т. 5. № 2. С. 122–136.
43. *Polyanin A.D., Shingareva I.K.* Overdetermined systems of ODEs with parameters and their applications: The method of differential constraints and the generalized separation of variables in PDEs // Math. Advances in Pure & Appl. Sciences. 2018. V. 1. № 1. P. 1–22.
44. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, 2nd Edition. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2003.
45. *Полянин А.Д., Журов А.И.* Об одном методе построения точных решений нелинейных уравнений математической физики // Доклады Академии наук. 2019. Т. 489. № 3. С. 235–239.

Vestnik Natsional’nogo issledovatel’skogo yadernogo universiteta “MIFI”, 2020, vol. 9, no. 1, pp. 32–44

Construction of Exact Solutions of Nonlinear Differential Equations by the Splitting Method

A. D. Polyanin[a,#] **and L.V. Linchuk**[b,c,##]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia*

[b] *Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, 195251 Russia*

[c] *Herzen State Pedagogical University of Russia, St. Petersburg, 191186 Russia*

[#]*e-mail: polyanin@ipmnet.ru,*

[##]*e-mail: lidiya_linchuk@mail.ru*

Received January 16, 2020; revised January 16, 2020; accepted January 21, 2020

Abstract—Various classes of nonlinear ordinary differential equations are considered. To construct exact solutions in an implicit form, the splitting method based on the generalized separation of variables is used. The main attention is paid to nonlinear equations of a sufficiently general form that contain one or more arbitrary functions. It is important to note that the exact solutions of nonlinear differential equations that depend on arbitrary functions and, therefore, are sufficiently general are of the greatest practical interest for testing numerical and approximate methods for solving various problems. Examples of particular nonlinear equations and their exact solutions are given. In some cases, it is possible to find general solutions of the equations or lower their order. The approach used can be generalized to nonlinear partial differential equations. New exact solutions with functional separation of variables are obtained for reaction-diffusion type equations.

Keywords: nonlinear ordinary differential equations, reaction-diffusion equations, exact solutions in an implicit form, generalized separation of variables, functional separation of variables, splitting method

DOI: 10.1134/S2304487X20010071

REFERENCES

1. Stepanov V.V., *Kurs differentsial'nykh uravneniy* [Course of Differential Equations], 8th ed., Fizmatlit, Moscow, 1959 (in Russian).
2. Murphy G.M., *Ordinary Differential Equations and Their Solutions*, D. Van Nostrand, New York, 1960.
3. Matveev N.M., *Metody integrirovaniya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Integration Methods of Ordinary Differential Equations], 2nd ed., Vysshaya shkola, Moscow, 1963 (in Russian).
4. Kamke E., *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* [Handbook of Ordinary Differential Equations], 5th ed., Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
5. Elsgolts L.E., *Differentsial'nyye uravneniya i variatsionnoye ischisleniye* [Differential Equations and Calculus of Variations], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
6. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems*, CRC Press, Boca Raton, 2018.
7. Polyanin A.D., Manzhirov A.V., *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2007.
8. Kamke E., *Spravochnik po differentsial'nym uravneniyam v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka* [Handbook of First-Order Partial Differential Equations], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
9. Zaitsev V.F., Polyanin A.D., *Spravochnik po differentsial'nym uravneniyam s chastnymi proizvodnymi pervogo poryadka* [Handbook of First-Order Partial Differential Equations] Fizmatlit, Moscow, 2003 (in Russian).
10. Tikhonov A.N., Samarsky A.A., *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1972 (in Russian).
11. Babich V.M., Kapilevich M.B., Mikhlin S.G. et al., *Lineynyye uravneniya matematicheskoy fiziki* [Linear Equations of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1964 (in Russian).
12. Korn G.A., Korn T.M., *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Handbook of Mathematics for Scientists and Engineers], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
13. Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E., *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd ed.*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2016.
14. Galaktionov V.A., Posashkov S.A., Svirshchevskii S.R., Generalized separation of variables for differential equations with polynomial nonlinearities, *Differential Equations*, 1995, vol. 31, no. 2, pp. 233–240.
15. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I., *Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki* [Solution methods for nonlinear equations of mathematical physics and mechanics], Fizmatlit, Moscow, 2005 (in Russian).
16. Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R., *Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2007.
17. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed.*, CRC Press, Boca Raton, 2012.
18. Polyanin A.D., Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2019, vol. 111, pp. 95–105.
19. Polyanin A.D., Construction of functional separable solutions in implicit form for non-linear Klein–Gordon type equations with variable coefficients, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2019, vol. 114, pp. 29–40.
20. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Separation of variables in PDEs using nonlinear transformations: Applications to reaction-diffusion type equations, *Applied Math. Letters*, 2020, vol. 100, 106055.
21. Polyanin A.D., Metody funktsional'nogo razdeleniya peremennykh i ikh primeneniye v matematicheskoy fizike [Methods of functional separation of variables and their application in mathematical physics], *Math. Modeling and Comput. Methods*, 2019, no. 1, pp. 65–97.
22. Polyanin A.D., Functional separation of variables in nonlinear PDEs: General approach, new solutions of diffusion-type equations, *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 1. 90.
23. Malfliet W., Hereman W., The tanh method: exact solutions of nonlinear evolution and wave equations, *Phys Scripta*, 1996, vol. 54, pp. 563–568.
24. Parkes E.J., Duffy B.R. An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations, *Computer Physics Communications*, 1996, V. 98, pp. 288–300.
25. Fan E., Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations, *Phys. Letters A*, 2000, V. 277, no. 4–5, pp. 212–218.
26. Elwakila S.A., El-Labany S.K., Zahran M.A., Sabry R., Modified extended tanh-function method for solving nonlinear partial differential equations, *Phys. Letters A*, 2002, V. 299, no. 2–3, pp. 179–188.
27. Yan Z., The extended Jacobian elliptic function expansion method and its application in the generalized Hirota–Satsuma coupled KdV system, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2003, vol. 15, no. 3, pp. 575–583.
28. Wazwaz A.-M., The sine-cosine method for obtaining solutions with compact and noncompact structures, *Appl. Math. & Comput.,* 2004, vol. 159, no. 2, pp. 559–576.
29. Kudryashov N.A., Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, vol. 24, no. 5, pp. 1217–1231.
30. Wazwaz A.-M., The tanh method and the sine-cosine method for solving the KP-MEW equation, *Int. J. Computer Math.*, 2005, vol. 82, no. 2, pp. 235–246.
31. He J.H., Wu X.H., Exp-function method for nonlinear wave equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2006, vol. 30, no. 3, pp. 700–708.
32. He J.H., Abdou M.A., New periodic solutions for nonlinear evolution equation using Exp-method, *Chaos Solitons & Fractals*, 2007, vol. 34, pp. 1421–1429.

33. Bekir A., Boz A., Exact solutions for nonlinear evolution equations using Exp-function method, *Phys. Letters A*, 2008, vol. 372, no. 10, pp. 1619–1625.
34. Chun C., Soliton and periodic solutions for the fifth-order KdV equation with the Exp-function method, *Phys. Letters A*, 2008, vol. 372, no. 16, pp. 2760–2766.
35. Kudryashov N.A., Loguinova N.B., Extended simplest equation method for nonlinear differential equations, *Appl. Math. & Comput.*, 2008, vol. 205, no. 1, pp. 396–402.
36. Salas A.H., Exact solutions for the general fifth KdV equation by the exp function method, *Appl. Math. & Comput.*, 2008, vol. 205, no. 1, pp. 291–297.
37. Erbas B., Yusufoglu E., Exp-function method for constructing exact solutions of Sharma–Tasso–Olver equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2009, vol. 41, no. 5, pp. 2326–2330.
38. Kudryashov N.A., Loguinova N.B., Be careful with the Exp-function method, *Commun. Nonlinear Science & Numer. Simulation*, 2009, vol. 14, no. 5, pp. 1881–189.
39. Zhang S., Tonga J. L., Wanga W., Exp-function method for a nonlinear ordinary differential equation and new exact solutions of the dispersive long wave equations, *Comp. Math. Appl.*, 2009, vol. 58, no. 11–12, pp. 2294–2299.
40. Parkes E.J., Observations on the tanh-coth expansion method for finding solutions to nonlinear evolution equations, *Appl. Math. Comput.*, 2010, vol. 217, no. 4, pp. 1749–1754.
41. Zhang L., The extended tanh method and the exp-function method to solve a kind of nonlinear heat equation, *Math. Prob. Eng.*, 2010, vol. 2010, 935873.
42. Polyanin A.D., *Pereopredelennyye sistemy nelineynykh obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy s parametrami i ikh prilozheniya* [Overdetermined systems of nonlinear ordinary differential equations with parameters and their applications], *Vestnik NIYaU MIFI*, 2016, vol. 5, no. 2, pp. 122–136 (in Russian).
43. Polyanin A.D., Shingareva I.K., Overdetermined systems of ODEs with parameters and their applications: The method of differential constraints and the generalized separation of variables in PDEs, *Math. Advances in Pure & Appl. Sciences*, 2018, vol. 1, no. 1, pp. 1–22.
44. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, 2nd ed.,* Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2003.
45. Polyanin A.D., Zhurov A.I., On one method for constructing exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics, *Doklady Mathematics*, vol. 100, no. 3, pp. 1–4.