

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ  
СИСТЕМОЙ УРАВНЕНИЙ РАДХАКРИШНАНА–КУНДУ–ЛАКСМАНАНА

© 2020 г. С. Ф. Лаврова<sup>1,\*</sup>, Н. А. Кудряшов<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup> Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

\*e-mail: infuriatedot@gmail.com

\*\*e-mail: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию 17.12.2019 г.

После доработки 17.12.2019 г.

Принята к публикации 21.01.2020 г.

Для описания распространения уединенных волн в оптических средах в настоящее время используется ряд нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. В данной работе исследуется нелинейная динамика, описываемая уравнением Радхакришнана–Кунду–Лаксманана для нелинейных дисперсионных волн в сохраняющих поляризацию оптических волокнах с нелинейностью Керра. С целью исследования динамических процессов в исходном уравнении использованы безразмерные переменные. Введены переменные бегущей волны, которые позволили записать его в виде системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. Для векторного поля нормального вида этой системы в шестимерном фазовом пространстве рассчитана дивергенция. Установлено, что изучаемая система уравнений не является диссипативной. По алгоритму Беннетина проведен расчет старших ляпуновских показателей исследуемой системы уравнений при различных значениях одного из параметров модели. Установлено, что несмотря на то, что при некоторых значениях параметра в системе присутствует положительный старший ляпуновский показатель, существование аттрактора и хаотического режима динамики не реализуется, поскольку по одной из переменных решение неограниченно убывает, а алгоритм Беннетина требует выбор начальной точки на аттракторе.

*Ключевые слова:* оптические солитоны, уравнения в частных производных, ляпуновские показатели, хаос

DOI: 10.1134/S2304487X20010058

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование распространения импульсов в оптических средах является важной проблемой и в настоящее время интенсивно изучается [1–5]. Как правило динамика таких процессов описывается с помощью целого ряда нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, таких как нелинейное уравнение Шредингера [6], уравнение Фокаса–Леннелса [7].

Одним из важных факторов, определяющих динамику оптических солитонов, является учет дисперсионных выражений. Они возникают тогда, когда дисперсионный член в оптическом уравнении доминирует, что ведет к существованию уединенных волн солитонного типа. В данной работе рассматривается уравнение Радхакришнана–Кунду–Лаксманана, которое было использовано ранее в ряде работ, в которых были получены его точные решения [8–13].

Уравнение Радхакришнана–Кунду–Лаксманана, описывающее дисперсионные нелинейные

волны в сохраняющих поляризацию волокнах с нелинейностью Керра, имеет вид

$$iu_t + au_{xx} + b|u|^2u = i\alpha(|u|^2u)_x - i\beta u_{xxx}, \quad (1.1)$$

где  $a, b, \alpha, \beta$  – параметры уравнения. Здесь  $u(x, t)$  – комплекснозначный профиль волны с независимыми переменными  $x$  и  $t$ , учитывающими пространственную и временную компоненты. Параметр  $a$  отвечает за дисперсию групповой скорости,  $b$  – коэффициент Керра, параметр  $\alpha$  устраняет возможность появления ударных волн,  $\beta$  характеризует дисперсию третьего порядка, приводящую к оптическим импульсам.

Нелинейные динамические процессы, описываемые уравнением (1.1), до настоящего времени практически не изучались. Уравнение (1.1) имеет определенное применение в медицине [14], поэтому интерес представляет изучение его динамики и выявление в нем хаотического поведения, так как на практике его присутствие нежелательно.

**2. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ПЕРЕМЕННЫХ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ, ПОЛУЧЕННОЙ ИЗ УРАВНЕНИЯ РКЛ**

Для исследования нелинейной динамики, описываемой уравнением (1.1), удобно ввести безразмерные переменные. Введем переменные

$$u = Au', \quad x = Xx', \quad t = Tt',$$

где  $A, X$  и  $T$  – постоянные, тогда для удобства сразу пренебрегая штрихами, получим, что уравнение (1.1) примет вид

$$\begin{aligned} iu_t + \frac{aT}{X^2} u_{xxx} + b|A|^2 T |u|^2 u = \\ = \frac{i\alpha|A|^2 T}{X} (|u|^2 u)_x - \frac{i\beta T}{X^3} u_{xxx}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В (2.1) приравняем к единице коэффициенты при третьем члене левой части и членах правой части. В результате имеем

$$|A|^2 = \frac{b^2\beta}{\alpha^3}, \quad T = \frac{\alpha^3}{b^3\beta}, \quad X = \frac{\alpha}{b}. \quad (2.2)$$

Пусть  $\frac{\alpha\alpha}{b\beta} = \kappa$ . С учетом (2.2) уравнение (2.1) имеет вид

$$iu_t + \kappa u_{xxx} + |u|^2 u = i(|u|^2 u)_x - u_{xxx}. \quad (2.3)$$

Будем искать решение уравнения (2.3) в виде

$$u(x, t) = y(z)e^{i\psi(z) - \omega t}, \quad z = x - C_0 t, \quad (2.4)$$

подставляя (2.4) в (2.3), получаем следующее уравнение

$$\begin{aligned} i(-C_0 y_z + 2\kappa y_z \psi_z + \kappa y \psi_{zz} - 3y^2 y_z + y_{zzz} - \\ - 3y_z \psi_z^2 - 3y \psi_z \psi_{zz}) + C_0 y \psi_z + \omega y + \\ + \kappa y_{zz} - \kappa y \psi_z^2 + y^3 + y^3 \psi_z - 3y_{zz} \psi_z - \\ - y \psi_{zzz} - 3y_z \psi_{zz} + y \psi_z^3 = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Приравнивая к нулю действительную и комплексную части уравнения (2.5), получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} -C_0 y_z + 2\kappa y_z \psi_z + \kappa y \psi_{zz} - 3y^2 y_z + y_{zzz} - \\ - 3y_z \psi_z^2 - 3y \psi_z \psi_{zz} = 0, \\ \omega y + C_0 y \psi_z + \kappa y_{zz} - \kappa y \psi_z^2 + y^3 + y^3 \psi_z - \\ - 3y_{zz} \psi_z - y \psi_{zzz} - 3y_z \psi_{zz} + y \psi_z^3 = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В нормальной форме она выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} v_z = C_0 u - 2\kappa i u \phi - \kappa u \mu + 3y^2 u + 3i u \phi^2 + 3y u \mu, \\ \mu_z = \omega + C_0 \phi + \kappa \frac{v}{y} - \kappa \phi^2 + y^2 + \\ + y^2 \phi - \frac{3v\phi}{y} - \frac{3i u \mu}{y} + \phi^3, \\ y_z = u, \quad u_z = v, \quad \psi_z = \phi, \quad \phi_z = \mu. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Векторное поле системы (2.7) в шестимерном фазовом пространстве имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(v, \mu, y, u, \psi, \phi) = \left\{ C_0 u - 2\kappa i u \phi - \kappa u \mu + \right. \\ \left. + 3y^2 u + 3i u \phi^2 + 3y u \mu, \omega + C_0 \phi + \kappa \frac{v}{y} - \kappa \phi^2 + \right. \\ \left. + y^2 + y^2 \phi - \frac{3v\phi}{y} - \frac{3i u \mu}{y} + \phi^3, u, v, \phi, \mu \right\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Дивергенция этого поля

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{L}) = \frac{\partial L_v}{\partial v} + \frac{\partial L_\mu}{\partial \mu} + \frac{\partial L_y}{\partial y} + \frac{\partial L_u}{\partial u} + \\ + \frac{\partial L_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial L_\phi}{\partial \phi} = -\frac{3u}{y}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

На рис. 1 приведены зависимости переменных  $y$  и  $u$  от  $z$ . Из них видно, что ансамбль начальных условий, занимающий объем  $\Delta V_0$ , не концентрируется на аттракторе, так как объем изменяется по закону  $\Delta V = \Delta V_0 \exp\left(\frac{3uz}{y}\right)$ , а знак выражения под экспонентой не является постоянно отрицательным.

Динамику уравнений (2.7) исследуем при помощи вычисления старшего ляпуновского показателя при варьировании параметра  $\kappa$ . Старший ляпуновский показатель вычислялся по алгоритму Беннетина [15].

Ляпуновские показатели качественно описывают степень расхождения близких траекторий системы. Для обнаружения хаотического поведения достаточно рассчитать старший ляпуновский показатель.

Алгоритм его вычисления следующий. После достаточного времени для выхода системы на аттрактор выбирается начальная точка фазового пространства  $v_0$ . Затем рассматриваются выходящая из точки  $v_0$  невозмущенная траектория и выходящая из точки  $v_0 + \delta v_0$  возмущенная траектория. При расчетах использован вектор начального возмущения с единичной нормой  $\delta v_0 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$ . Выбирая интервал времени  $T = 1$  и одновременно решая численно систему уравнений (2.7) и систему уравнений, описывающую эволюцию малого возмущения  $\delta v = (\delta v, \delta \mu, \delta y, \delta u, \delta \psi, \delta \phi)$

$$\begin{aligned} \delta v_z = C_0 \delta u - 2\kappa \delta i u \phi - 2\kappa i u \delta \phi - \kappa \delta u \mu - \\ - \kappa u \delta \mu + 6y \delta u u + 3y^2 \delta u + 3i u \phi^2 + 6i u \phi \delta \phi + \\ + 3\delta y u \mu + 3y \delta \phi \mu + 3y \phi \delta \mu, \\ \delta \mu_z = C_0 \delta \phi + \kappa \frac{\delta v}{y} - \kappa \frac{v \delta y}{y^2} - 2\phi \delta \phi + 2y \delta u + \\ + 2y \delta u \phi + y^2 \delta \phi - \frac{3\delta v \phi}{y} + \frac{6v \delta u \phi}{y^2} - \frac{3v \delta \phi}{y} - \end{aligned} \quad (2.10)$$

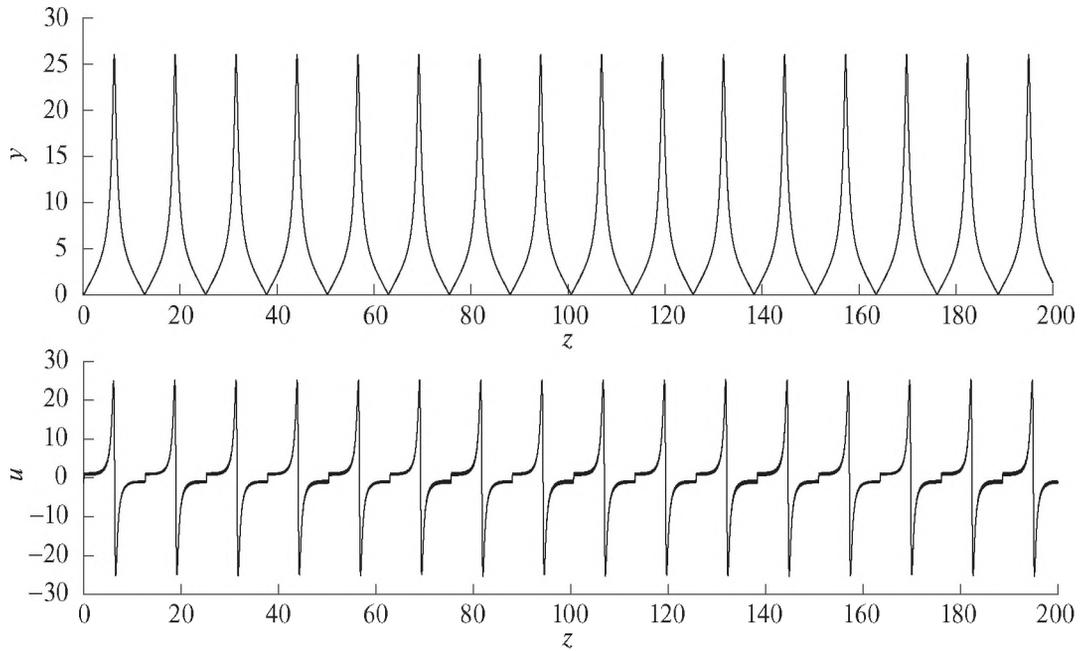


Рис. 1. Зависимость переменных  $y$  и  $u$  от  $z$  при  $C_0 = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $\kappa = -79.5$ .

$$-\frac{3\delta u \delta \mu}{y} - \frac{3u \delta \mu}{y} + \frac{3u \delta y}{y^2} + 3\phi^2 \delta \phi,$$

$$\delta y_z = \delta u, \quad \delta u_z = \delta v, \quad \delta \psi_z = \delta \phi, \quad \delta \phi_z = \delta \mu,$$

получаем вектор состояния и его возмущение в момент  $T$ :  $\mathbf{v}(T) = \mathbf{v}_1$ ,  $\delta \mathbf{v}(T) = \delta \tilde{\mathbf{v}}_1$ . Величина  $\|\delta \tilde{\mathbf{v}}_1\|$  описывает изменение нормы вектора возмущения за время  $T$ . Переопределив вектор возмущения так, чтобы у него была единичная норма:  $\delta \mathbf{v}_1 = \delta \tilde{\mathbf{v}}_1 / \|\delta \tilde{\mathbf{v}}_1\|$ , продолжим численно решать системы уравнений (2.7) и (2.10) с начальными условиями  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_1 + \delta \mathbf{v}_1$ . Затем снова переопределим вектор возмущения в момент времени  $2T$  и продолжим решать рассматриваемые системы уравнений с меняющимися на каждом шаге начальными условиями в течение  $M$  шагов. Эволюция амплитуды возмущения системы характеризуется старшим ляпуновским показателем, так как начальное условие  $\mathbf{v}_0$  взято на аттракторе, а начальное возмущение траектории выбрано наугад. Фактор изменения амплитуды за  $M$  шагов определяется в соответствии с нормой

$$P = \frac{1}{M} \prod_{n=1}^M \|\delta \tilde{\mathbf{v}}_1\|, \quad (2.11)$$

Старший ляпуновский показатель оценивается по формуле

$$\Lambda = \frac{1}{M} \ln(P) = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \ln(\|\delta \tilde{\mathbf{v}}_1\|). \quad (2.12)$$

Количество шагов, используемое при проведении расчетов,  $M = 10000$ .

График зависимости старшего ляпуновского показателя от параметра  $\kappa$  представлен на рис. 3. Из графика видно, что при некоторых значениях  $\kappa$  старший ляпуновский показатель положителен, но информации о хаотическом режиме в системе это не дает, так как в алгоритме Беннетина начальная точка должна выбираться на аттракторе, а аттрактора в системе нет, потому что переменная  $\psi$  неограниченно убывает (рис. 2).

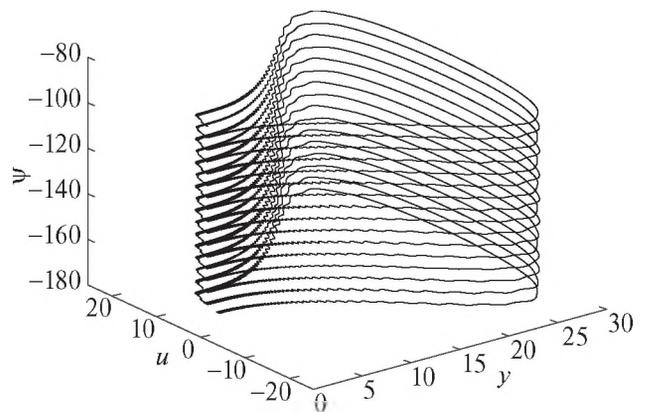


Рис. 2. Фазовый портрет при  $C_0 = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $\kappa = -79.5$ .

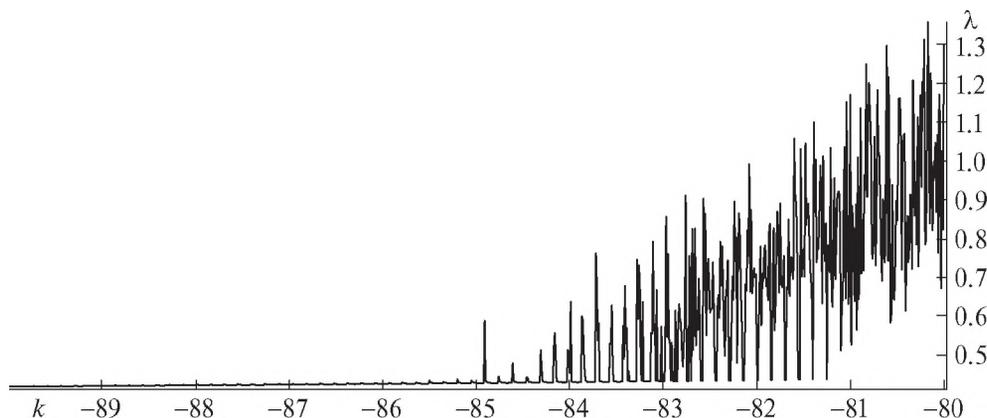


Рис. 3. Зависимость ляпуновских показателей от  $k$  при  $C_0 = 1$ ,  $\omega = 1$ .

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена система дифференциальных уравнений в нормальном виде, полученная из уравнения в частных производных Радхакришнана-Кунду-Лаксманана путем перехода к переменным бегущей волны. Показано, что система уравнений не является диссипативной. Описан алгоритм вычисления старшего ляпуновского показателя исследуемой системы и по нему рассчитаны старшие ляпуновские показатели для большого числа различных значений параметра  $k$  при фиксированных параметрах бегущей волны  $\omega$  и  $C_0$ . Несмотря на то, что при некоторых  $k$  старший ляпуновский показатель положителен, наличие хаотического поведения в системе не подтверждается, так как решение системы по переменной  $\psi$  неограниченно убывает.

Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00209).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Biswas Anjan*. "Optical solitons: Quasi-stationarity versus Lie transform." *Optical and Quantum Electronics*. 2003. 35.10. P. 979–998.
2. *Khalique C.M., Biswas A.* "Optical solitons with parabolic and dual-power law nonlinearity via Lie symmetry analysis." *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. 2009. 23.7. P. 963–973.
3. *Kohl Russell et al.* "Optical soliton perturbation in a non-Kerr law media." *Optics & Laser Technology*. 2008. 40.4. P. 647–662.
4. *Topkara Engin et al.* "Optical solitons with non-Kerr law nonlinearity and inter-modal dispersion with time-dependent coefficients." *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2010. 15.9. P. 2320–2330.
5. *Konar S., Mishra M., Soumendu Jana.* "Nonlinear evolution of cosh-Gaussian laser beams and generation of flat top spatial solitons in cubic quintic nonlinear media." *Physics Letters A*. 2007. 362.5–6. P. 505–510.
6. *Yan Zhenya*. "Generalized method and its application in the higher-order nonlinear Schrodinger equation in nonlinear optical fibres." *Chaos, Solitons & Fractals*. 2003. 16.5. P. 759–766.
7. *Triki Houria, and Abdul-Majid Wazwaz.* "Combined optical solitary waves of the Fokas-Ben-Lenells equation." *Waves in Random and Complex Media*. 2017. 27.4. P. 587–593.
8. *Biswas A.* "1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan, Kundu, Lakshmanan equation." *Physics Letters A*. 2009. 373.30. P. 2546–2548.
9. *Zhang Jianming, Shuming Li, and Hongpeng Geng.* "Bifurcations of exact travelling wave solutions for the generalized RKL equation." *J. Appl. Anal. Comput.* 2016. 6.4. P. 1205–1210.
10. *Biswas A.* Optical soliton perturbation with Radhakrishnan–Kundu–Laksmanan equation by traveling wave hypothesis, *Optik*. 2018. V. 171. P. 217–220.
11. *Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., Alshomrani A.S.,* Optical soliton with Radhakrishnan–Kundu–Laksmanan by extended trial function scheme, *Optik*. 2018. V. 160. P. 415–427.
12. *Gonzalez-Gaxiola O., Anjan Biswas,* Optical solitons with Radhakrishnan–Kundu–Laksmanan equation by Laplace–Adomian decomposition method, *Optik*. 2019. V. 179. 434–442.
13. *Kudryashov N.A., Safonova D.V., A. Biswas,* Painleve analysis and solution to travelling wave reduction of Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation, *Regular and Chaotic Dynamics*. 2019. 24.6. P. 607–614
14. *Lu Dianchen, Aly R. Seadawy, and Mostafa M.A. Khat-er.* "Dispersive optical soliton solutions of the generalized Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan dynamical equation with power law nonlinearity and its applications." *Optik*. 2018. 164. P. 54–64.
15. *Benettin Giancarlo et al.* "Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory." *Meccanica*. 1980. 15.1. P. 9–20.

## Nonlinear Dynamic Processes Described by the Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan Equations

S. F. Lavrova<sup>a,##</sup> and N. A. Kudryashov<sup>a,#</sup>

<sup>a</sup> National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

<sup>#</sup>e-mail: infuriatedot@gmail.com,

<sup>##</sup>e-mail: nakudr@gmail.com

Received December 17, 2019; revised December 17, 2019; accepted January 21, 2020

**Abstract**—The propagation of solitary waves through optical media is described by a variety of nonlinear partial differential equations. In this work, the nonlinear dynamics of dispersive nonlinear waves in polarization-preserving fibers having Kerr nonlinearity has been described by the Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation. Dimensionless variables are used in the initial equation to study of dynamic processes. The introduction of the traveling wave variables reduces the equation to the system of two third order ordinary differential equations. The divergence is calculated for the normal form vector field of this system. It has been found that this system of equations is not dissipative. The largest Lyapunov exponents are computed by the Bennetin algorithm for the different values of one of the model parameters. Despite the presence of a positive largest Lyapunov exponent for some parameter values, there are no attractors or chaotic dynamical regimes in this system, since the solution unboundedly decreases in one variable and the initial point in the algorithm has to be chosen on the attractor.

**Keywords:** optical solitons, partial differential equations, Lyapunov exponents, chaos

DOI: 10.1134/S2304487X20010058

### REFERENCES

1. Biswas Anjan. "Optical solitons: Quasi-stationarity versus Lie transform." *Optical and Quantum Electronics* 35.10. 2003. P. 979–998.
2. Khalique C. M., and Biswas A. "Optical solitons with parabolic and dual-power law nonlinearity via Lie symmetry analysis." *Journal of Electromagnetic Waves and Applications* 23.7. 2009. P. 963–973.
3. Kohl Russell et al. "Optical soliton perturbation in a non-Kerr law media." *Optics & Laser Technology* 40.4. 2008. P. 647–662.
4. Topkara Engin et al. "Optical solitons with non-Kerr law nonlinearity and inter-modal dispersion with time-dependent coefficients." *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 15.9. 2010. P. 2320–2330.
5. Konar S., Mishra M., and Soumendu Jana. "Nonlinear evolution of cosh-Gaussian laser beams and generation of flat top spatial solitons in cubic quintic nonlinear media." *Physics Letters A* 362.5-6. 2007. P. 505–510.
6. Zhenya Yan. "Generalized method and its application in the higher-order nonlinear Schrodinger equation in nonlinear optical fibres." *Chaos, Solitons & Fractals* 16.5. 2003. P. 759–766.
7. Houria Triki, and Wazwaz Abdul-Majid. "Combined optical solitary waves of the Fokas' Lenells equation." *Waves in Random and Complex Media* 27.4. 2017. P. 587–593.
8. Biswas A. "1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan, Kundu, Lakshmanan equation." *Physics Letters A* 373.30. 2009. P. 2546–2548.
9. Zhang Jianming, Shuming Li, and Hongpeng Geng. "Bifurcations of exact travelling wave solutions for the generalized RKL equation." *J. Appl. Anal. Comput.* 6.4. 2016. P. 1205–1210.
10. Biswas A. Optical soliton perturbation with Radhakrishnan–Kundu–Laksmanan equation by traveling wave hypothesis, *Optik*, 171. 2018. P. 217–220.
11. Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., Alshomrani A.S. Optical soliton with Radhakrishnan–Kundu–Laksmanan by extended trial function scheme, *Optik*, 160. 2018. P. 415–427.
12. Gonzalez-Gaxiola O., Biswas Anjan. Optical solitons with Radhakrishnan–Kundu–Laksmanan equation by Laplace – Adomian decomposition method, *Optik*, 179. 2019. P. 434–442.
13. Kudryashov N.A., Safonova D.V., A. Biswas, Painleve analysis and solution to travelling wave reduction of Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019, 24.6. 2019. P. 607–614.
14. Lu Dianchen, Aly R. Seadawy, and Mostafa M.A. Khater. "Dispersive optical soliton solutions of the generalized Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan dynamical equation with power law nonlinearity and its applications." *Optik* 164. 2018. P. 54–64.
15. Benettin Giancarlo et al. "Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory." *Meccanica* 15.1. 1980. P. 9–20.