ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 2, с. 110–114

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ ОБОБЩЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ 3-Й, 5-Й И 7-Й СТЕПЕНИ

К. В. Кан[1,*], Н. А. Кудряшов[1,]**

[1] Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия

**e-mail: kan_13@mail.ru*

***e-mail: nakudr@gmail.com*

Поступила в редакцию 21.02.2020 г.
После доработки 21.02.2020 г.
Принята к публикации 10.03.2020 г.

Семейство нелинейных уравнений Шредингера описывает ряд процессов, возникающих в физике. В настоящее время большой интерес уделяется моделированию и анализу распространения высокодисперсных оптических импульсов с учетом различных типов нелинейности. Влияние дисперсии обусловлено порядком рассматриваемого уравнения. В данной работе изучается уравнение 6-го порядка, учитывающее нелинейность 3-й, 5-й и 7-й степени. Поиск уединенных волн, распространяющихся в нелинейной среде, играет важную роль в исследовании распространения оптических импульсов. Для решения данной задачи используется метод, основанный на поиске решений в виде уединенных волн. На первом этапе метода осуществляется переход к уравнению, записанному с помощью переменных бегущей волны. В результате подстановки исходное уравнение сводится к переопределенной системе, состоящей из двух уравнений, соответствующих действительной и мнимой частям уравнения. Из уравнения, соответствующего мнимой части, получены ограничения на параметры. Определен порядок полюса уравнения, соответствующего действительной части. Ненулевой порядок полюса позволил перейти к следующему этапу метода и найти решение в виде уединенных волн. В работе построены решения и проанализированы графики решений при различных значениях параметров.

Ключевые слова: уединенные волны, уравнение Шредингера, нелинейные дифференциальные уравнения, распространение импульсов, оптоволокно

DOI: 10.1134/S2304487X20020054

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время большое внимание уделяется изучению высокодисперсных оптических солитонов в нелинейной среде, используемых при описании распространения импульсов в оптическом волокне [1–5]. Оптоволокно – это простая тонкая стеклянная нить, действующая как светопроводящий канал [6]

В данной работе рассматривается уравнение Шредингера, имеющее вид [7]:

$$iq_t + ia_1q_x + a_2q_{xx} + ia_3q_{xxx} + a_4q_{xxxx} + ia_5q_{xxxxx} + \\ + a_6q_{xxxxxx} + (b_1|q|^2 + b_2|q|^4 + b_3|q|^6)q = 0, \quad (1)$$

где $q(x,t)$ – это профиль пульса, $a_j (j = 1,\ldots,6)$ и $b_k (k = 1,2,3)$ – параметры математических моделей, в основе которых лежит уравнение (1). Для того, чтобы найти уединенные волны, описываемые уравнением (1), используется метод, представленный в работах [9–13].

Уравнение (1) содержит в себе некоторое число эволюционных уравнений, которые используются для описания распространения импульсов в оптическом волокне. При $a_2 \neq 0$, $a_j = 0$ $(j \neq 2)$ и $b_2 = b_3 = 0$ уравнение (1) – это хорошо известное нелинейное уравнение Шредингера

$$iq_t + a_2q_{xx} + b_1|q|^2q = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) описывает огибающую волнового пакета в среде с дисперсией и кубической нелинейностью. Задача Коши для (2) решается методом обратной задачи рассеяния [14]. Для уравнения (2) найден ряд точных решений, которые описывают стационарные нелинейные волны. В частности, решения имеют вид:

$$q(x,t) = y(z)e^{i\varphi(x,t)}, \quad (3)$$

где $z = x - vt$, $\varphi(x,t) = -kx + \omega t + \theta_0$.

Подстановка (3) позволяет перейти к уравнению, описывающему уединенную волну (групповой солитон) $y(z)$. Групповые солитоны, которые описываются нелинейным уравнением Шредингера, находят разнообразное применение в нелинейной оптике, поскольку они могут использоваться при передаче информации в волоконно-оптических линиях связи. Это одно из перспективных направлений возможного применения солитонов [8].

2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА

Будем искать высокодисперсные оптические солитоны уравнения (1) в форме (3).

Подставляя (3) в уравнение (1), получаем переопределенную систему из двух уравнений для функции $y(z)$. Используя ограничения для параметров уравнения (1), решаем одно из уравнений для функции $y(z)$. Для того, чтобы решить другое уравнение, применяем метод, который состоит в том, чтобы искать решение в виде

$$y(z) = \sum_{i=0}^{p} c_i R(z)^i, \tag{4}$$

где c_i – это коэффициенты разложения (4), p – порядок полюса для общего решения уравнения (1). Порядок полюса решения уравнения (1) $p = 1$ при $b_3 \neq 0$. Функция $R(z)$ имеет форму

$$R(z) = \frac{4ae^{-\alpha z}}{4a^2 e^{2\alpha z} + \chi}, \tag{5}$$

которая удовлетворяет следующему уравнению

$$R_z^2 = R^2(1 - \chi R^2). \tag{6}$$

В данной работе описанный метод применяется для поиска высокодисперсных оптических солитонов уравнения (1).

3. ВЫСОКОДИСПЕРСНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ УРАВНЕНИЯ (1)

В первую очередь рассмотрим уравнение (1) при $b_3 \neq 0$. Подставляя решение $q(x, t)$ из (3) в (1) получаем переопределенную систему из двух уравнений по отношению к неизвестной функции $y(z)$

$$\begin{gathered} a_6 y_{zzzzzz} + (a_4 + 5a_5 k - 15a_6 k^2) y_{zzzz} + \\ + (15a_6 k^4 - 10a_5 k^3 - 6a_4 k^2 + 3a_3 k + a_2) y_{zz} - \\ - b_3 y^7 - b_2 y^5 - b_1 y^3 + (a_6 k^6 - a_5 k^5 - \\ - a_4 k^4 + a_3 k^3 + a_2 k^2 - a_1 k + \omega) y = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

и

$$\begin{gathered} (a_5 - 6a_6 k) y_{zzzz} + (20a_6 k^3 - 10a_5 k^2 - \\ - 4a_4 k + a_3) y_{zz} + (-6a_6 k^5 + 5a_5 k^4 + 4a_4 k^3 - \\ - 3a_3 k^2 - 2a_2 k - v + a_1) y = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Функция $y(z)$ должна быть решением этих двух уравнений. Отметим, что система уравнений (7) и (8) имеет особую форму. Мы можем видеть, что уравнение (8) линейное, тогда как уравнение (7) – нелинейное. Также можно отметить, что в (7) присутствуют производные $y(z)$ и высокие степени функции $y(z)$. Однако, если мы используем условия

$$\begin{gathered} a_5 = 6aj_6 k, \\ a_3 = 40a_6 k^3 + 4a_4 k, \\ a_1 = v - 96a_6 k^5 - 8a_4 k^3 - 2a_2 k, \end{gathered} \tag{9}$$

то с учетом условий (9) любая функция $y(z)$ удовлетворяет уравнению (8), и теперь необходимо найти зависимую $y(z)$, которая будет удовлетворять уравнению (7).

Уравнение (7) с учетом (9) записывается в виде:

$$\begin{gathered} a_6 y_{zzzzzz} + (15a_6 k^2 + a_4) y_{zzzz} + (75a_6 k^4 + \\ + 6a_4 k^2 + a_2) y_{zz} - b_3 y^7 - b_2 y^5 - b_1 y^3 - \\ - (35a_6 k^6 + 3a_4 k^4 + a_2 k^2 - a_1 k + \omega) y = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Нелинейное уравнение 6-го порядка (7) не имеет общего решения с 6 произвольными постоянными. Поэтому мы ищем точное решение этого уравнение с количеством произвольных констант, меньшим 6.

Подставляя $y(z)$ из (4) при $p = 1$ и в уравнение (10), мы имеем алгебраическое уравнение относительно функции $R(z)$ в форме

$$\begin{gathered} c_1(b_3 c_1^6 - 720\chi^3 a_6) R(z)^7 + 7R(z)^6 b_3 c_0 c_1^6 + \\ + (21c_1^4 b_3 c_0^2 + 360\chi^2 k^2 a_6 + c_1^4 b_2 + 24\chi^2 a_4 + \\ + 840\chi^2 a_6) c_1 R(z)^5 + 5c_1^4 c_0 (7b_3 c_0^2 + b_2) R(z)^4 - \\ - c_1(-35c_1^2 b_3 c_0^4 + 150k^4 a_6 - 10c_1^2 b_2 c_0^2 + 12\chi k^2 a_4 + \\ + 300\chi k^2 a_6 - c_1^2 b_1 + 2\chi a_2 + 20\chi a_4 + \\ + 182\chi a_6) R(z)^3 + c_1^2 c_0 (21b_3 c_0^4 + 10b_2 c_0^2 + 3b_1) R(z)^2 - \\ + c_1(61k^6 a_6 + 7b_3 c_0^6 + 5k^4 a_4 + 75k^4 a_6 + 5b_2 c_0^4 + \\ + k^2 a_2 + 6k^2 a_4 + 15k^2 a_6 + 3b_1 c_0^2 + vk - \omega + \\ + a_2 + a_4 + a_6) R(z) + (61k^6 a_6 + b_3 c_0^6 + 5a_4 k^4 + \\ + b_2 c_0^4 + a_2 k^2 + b_1 c_0^2 + vk - \omega) c_0 = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Из (11) мы можем найти условия для параметров уравнения (1) вследствие того, что функция $R(z)$ удовлетворяет уравнению (11). В результате вычислений мы получаем следующие условия для параметров уравнения (1):

$$a_6 = \frac{b_3 c_1^6}{720\chi^3}, \tag{12}$$

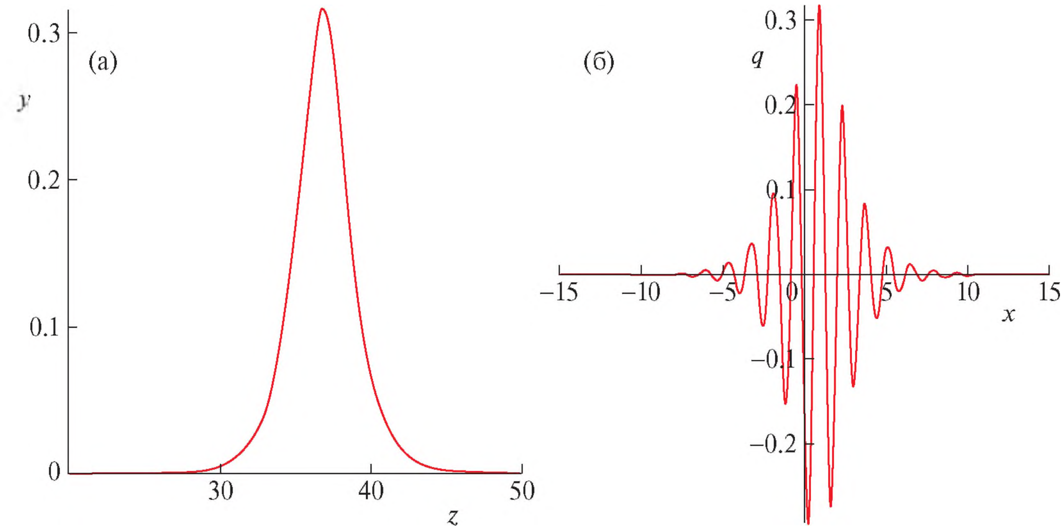

Рис. 1. Графики уединенной волны (19) и вещественной части решения (20) при $t = 10$, $a = 1.5$, $\alpha = 0.7$, $\chi = 0.1$, $k = 4.5$, $b_1 = 1.0$, $b_2 = 1.0$, $b_3 = 1.0$, $\theta_0 = 1.0$, $z_0 = 40.0$, $c_1 = 0.1$.

$$a_4 = -\frac{c_1^4}{144\chi^3}(3k^2b_3c_1^2 + 7b_3c_1^2 + 6\chi b_2), \tag{13}$$

$$a_2 = \frac{c_1^4}{720\chi^3}(15k^4b_3c_1^4 + 210k^2b_3c_1^4 + 180\chi k^2b_2c_1^2 + 259b_3c_1^4 + 300\chi b_2c_1^2 + 360\chi^2b_1), \tag{14}$$

$$\omega = \frac{c_1^2}{720\chi^3}(k^6b_2c_1^6 + 35k^4b_3c_1^6 + 30\chi k^4b_2c_1^4 + 259k^2b_3c_1^6 + 300\chi k^2b_2c_1^4 + 360\chi^2k^2b_1c_1^2 + 225b_3c_1^6 + 270\chi b_2c_1^4 + 720kv\chi^3 + 360\chi^2b_1c_1^2), \tag{15}$$

$$c_0 = 0.$$

При этом $c_0 = 0$. Используя формулы для a_6, a_4, a_2 и ω, мы можем получить условия для параметров a_5, a_3 и a_1, учитывая формулу (9). Условия следующие:

$$a_5 = \frac{kb_3c_1^6}{120\chi^3}, \tag{16}$$

$$a_3 = \frac{kc_1^4}{36\chi^3}(2k^2b_3c_1^2 - 3k^2b_3c_1^2 - 7b_3c_1^2 - 6\chi b_2), \tag{17}$$

$$a_1 = \frac{1}{360\chi^3}((3k^4 + 70k^2 + 259)kb_3c_1^6 + 60k\chi b_2(k^2 + 5)c_1^4 + 360\chi^2kb_1c_1^2 + 360v\chi^3). \tag{18}$$

Решение (10) в форме уединенной волны

$$y(z) = \frac{4ac_1}{4a^2e^{\alpha z} + \chi e^{-\alpha z}}. \tag{19}$$

Тогда решение (1) записывается в форме

$$q(x,t) = \frac{4ac_1e^{i(-kx+\omega t+\theta_0)}}{4a^2e^{\alpha(x-vt-z_0)} + \chi e^{-\alpha(x-vt-z_0))}}, \tag{20}$$

где a, χ, v, k и z_0 являются произвольными постоянными.

На рис. 1 представлен аналог группового солитона. Подробнее о развитии теории солитонов можно посмотреть в [15].

Из результатов можно заметить, что при увеличении параметра k амплитуда полученной уединенной волны уменьшается. Также, при увеличении значения α уменьшается длина волны. Таким образом, показано, что амплитуда и скорость волны в групповом солитоне определяются произвольными постоянными и не связаны друг с другом [15].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрено обобщенное нелинейное уравнение Шредингера 6-го порядка с третьей, пятой и седьмой степенями нелинейности. Найдены высокодисперсные солитоны, которые являются решениями этого уравнения. Показано, что существуют высокодисперсные оптические солитоны, которые являются решением уравнения (1). Однако отметим, что высокодисперсные оптические солитоны могут существовать только для некоторых форм нелинейности. Мы получили, что существует точное решение (1) для различных значений параметров b_1, b_2 и b_3.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 18-11-00209.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kudryashov N.A.* First integrals and general solution of the traveling wave reduction for Schrödinger equation with anti-cubic nonlinearity // Optic. 2019. V. 185. P. 665–671.
2. *Kudryashov N.A.* Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with cubic-quintic nonlinearity // Optic. 2019. V. 188. P. 27–35.
3. *Kudryashov N.A.* A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber // Optic. 2019. V. 189. P. 42–52.
4. *Kudryashov N.A.* Construction of nonlinear differential equations for description of propagation pulses in optical fiber // 2019. [Online] Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030402619308411.
5. *Kudryashov N.A.* Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber // 2019. [Online] Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030402619309374.
6. *Бейтли Д., Райт Э.* Волоконная оптика: теория и практика / Пер. с англ. М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2006. 320 с.
7. *Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., and Belic M.R.* Highly dispersive optical solitons with cubic-quintic-septic law by F-expansion // Optik. V. 182. P. 897–906.
8. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики: Учебное пособие. М.: МИФИ, 2008. 352 с.
9. *Kudryashov N.A.* One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2012. V. 17. № 6. P. 2248–2253.
10. *Kudryashov N.A.* Polynomials in logistic function and solitary waves of nonlinear differential equations // Applied Mathematics and Computation. 2013. V. 219. № 17. P. 9245–9253.
11. *Kudryashov N.A.* Logistic function as solution of many nonlinear differential equations // Applied Mathematical Modelling. 2015. V. 39. № 18. P. 5733–5742.
12. *Kudryashov N.A.* Solitary wave solutions of hierarchy with non-local nonlinearity // 2019. V. 103. [Online] Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893965919304811.
13. *Kudryashov N.A.* Highly dispersive solitary wave solutions of perturbed nonlinear Schrödinger equations // Optic. 2020. V. 371. [Online] Available: https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85076831328&origin=resultslist&sort=plf-f&src=s&sidkbe774af7c2c3ee36f5262b2 c13392b&sot=autdocs&sdt=autdocs&sl=17&s=AU-ID7007152165&relpos 1&citeCnt=0&searchTerm
14. *Абловиц М.Д., Бао-Фэн Фэн, Сюй-Дань Ло, Мусслимани З.* “Метод обратной задачи рассеяния для нелокального нелинейного уравнения Шредингера с обращением пространства-времени”, ТМФ. 2018. Т. 196. № 3. С. 343–372; Theoret. and Math. Phys. 2018. V. 196. № 3. P. 1241–1267.
15. *Кудряшов Н.А.* Солитоны в природе и физике // Вестник национального исследовательского ядерного университета “МИФИ”. 2018. Т. 7. № 2. С. 113–124.

Vestnik Natsional’nogo issledovatel’skogo yadernogo universiteta “MIFI”, 2020, vol. 9, no. 2, pp. 110–114

Soltary Wave Solutions of the Generalized Nonlinear Schrödinger Equation with Cubic, Quintic, and Septic Nonlinearities

K. V. Kan[a,#] and N. A. Kudryashov[a,##]

[a] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

[#]*e-mail: kan_13@mail.ru*

[##]*e-mail: nakudr@gmail.com*

Received February 21, 2020; revised February 21, 2020; accepted March 10, 2020

Abstract—The family of nonlinear Schrödinger equations describes a number of physical phenomena. The simulation and analysis of the propagation of highly dispersive optical pulses with allowance for several nonlinearity types are currently of great interest. The dispersion is determined by the order of the governing equation. In this work, we consider the sixth order equation with cubic, quintic, and septic nonlinearities is analyzed. The search for solitary waves propagating in a nonlinear medium plays an important role in the study of the propagation of optical pulses. To solve this problem, the method based on the search for solitary wave solutions is used. At the first step, the substitution of travelling wave variables reduces the initial equation to the system of two differential equations corresponding to the real and imaginary parts of the initial equation. Restrictions on the parameters have been obtained from the equation corresponding to the imaginary part.

The pole order of the equation corresponding to the real part has been determined. A nonzero pole order makes it possible to find solitary wave solutions at the next step. These solutions have been constructed and plots of solutions at different parameters have been analyzed.

Keywords: solitary waves, Schrödinger equation, nonlinear differential equations, pulse propagation, optical fiber

DOI: 10.1134/S2304487X20020054

REFERENCES

1. *Kudryashov N.A.* First integrals and general solution of the traveling wave reduction for Schrödinger equation with anti-cubic nonlinearity // Optic. 2019. Vol. 185. P. 665–671.
2. *Kudryashov N.A.* Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with cubic-quintic nonlinearity // Optic. 2019. Vol. 188. P. 27–35.
3. *Kudryashov N.A.* A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber // Optic. 2019. Vol. 189. P. 42–52.
4. *Kudryashov N.A.* Construction of nonlinear differential equations for description of propagation pulses in optical fiber // 2019. [Online] Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030402619308411.
5. *Kudryashov N.A.* Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber // 2019. [Online] Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030402619309374.
6. *Bejtli D., Rajt E.* Volokonnaya optika: teoriya i praktika/Per. s angl. – M.: KUDIC-OBRAZ, 2006. – 320 s.
7. *Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., and Belic M.R.* Highly dispersive optical solitons with cubic-quintic-septic law by F-expansion // Optik. Vol. 182. P. 897–906.
8. *Kudryashov N.A.* Metody nelinejnoj matematicheskoj fiziki: Uchebnoe posobie. – M.: MIFI, 2008. 352 s.
9. *Kudryashov N.A.* One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2012. Vol. 17. no. 6. P. 2248–53.
10. *Kudryashov N.A.* Polynomials in logistic function and solitary waves of nonlinear differential equations // Applied Mathematics and Computation. 2013. Vol. 219. no. 17. P. 9245–9253.
11. *Kudryashov N.A.* Logistic function as solution of many nonlinear differential equations // Applied Mathematical Modelling. 2015. Vol. 39. no. 18. P. 5733–5742.
12. *Kudryashov N.A.* Solitary wave solutions of hierarchy with non-local nonlinearity // 2019. Vol. 103. [Online] Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893965919304811.
13. *Kudryashov N.A.* Highly dispersive solitary wave solutions of perturbed nonlinear Schrödinger equations // Optic. 2020. Vol. 371. [Online] Available: https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85076831328&origin=resultslist&sort=plf-f&src=s&sidkbe774af7c2c3ee36f5262b2 c13392b&sot=autdocs&sdt=autdocs&sl=17&s=AU-ID7007152165&relpos 1&citeCnt=0&searchTerm
14. M. D. Ablovic, Bao-Fen Fen, Syuj-Dan' Lo, Z. Musslimani, вЂњMetod obratnoj zadachi rasseyaniya dlya nelokal'nogo nelinejnogo uravneniya SHredingera s obrashcheniem prostranstva-vremeniвЂќ, TMF, 196:3 (2018), 343–372; Theoret. and Math. Phys., 196:3 (2018), 1241–1267.
15. *Kudryashov, N.A.* Solitony v prirode i fizike // Vestnik nacional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta “MIFI”. 2018. T. 7. No. 2. P. 113–124.