

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ С ПОМОЩЬЮ РЕШЕНИЙ БОЛЕЕ ПРОСТЫХ УРАВНЕНИЙ БЕЗ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

© 2020 г. А. Д. Полянин^{1,*}, В. Г. Сорокин^{1,**}

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

*e-mail: polyanin@ipmnet.ru

**e-mail: vsesor@gmail.com

Поступила в редакцию 17.02.2020 г.

После доработки 17.02.2020 г.

Принята к публикации 10.03.2020 г.

Описаны новые методы построения точных решений нелинейных уравнений математической физики с запаздыванием, основанные на использовании решений специального вида вспомогательных более простых уравнений математической физики без запаздывания. Возможности предложенных методов иллюстрируются на нелинейных реакционно-диффузионных и волновых уравнениях с запаздыванием и переменными коэффициентами, которые содержат от трех до семи произвольных функций, зависящих от пространственной переменной или искомой величины. Получены новые решения типа обобщенной бегущей волны и решения с функциональным разделением переменных, допускающие представление в неявной форме. Приведены также примеры точных решений более сложных нелинейных уравнений с переменным запаздыванием, которое произвольным образом зависит от времени. Рассмотренные уравнения и их точные решения могут быть использованы для формулировки тестовых задач, предназначенных для проверки адекватности и оценки точности численных и приближенных аналитических методов решения соответствующих нелинейных начально-краевых задач для уравнений в частных производных с запаздыванием.

Ключевые слова: нелинейные уравнения в частных производных с запаздыванием, реакционно-диффузионные уравнения с переменными коэффициентами, волновые уравнения с переменными коэффициентами, точные решения в неявном виде, решения с функциональным разделением переменных

DOI: 10.1134/S2304487X20020108

1. ВВЕДЕНИЕ

Точные решения дифференциальных уравнений математической физики с частными производными всегда играли и продолжают играть огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Точные решения нелинейных уравнений наглядно демонстрируют и позволяют лучше понять механизмы таких сложных эффектов, как пространственная локализация процессов переноса, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях, существование режимов с обострением, возможная негладкость или разрывность искомых величин и др. Простые решения линейных и нелинейных уравнений широко используются для иллюстрации теоретического материала и некоторых приложений в учебных курсах университетов и технических вузов (по теории тепло-

массопереноса, гидродинамике, газовой динамике, теории волн, нелинейной оптике и др.). Даже те точные решения дифференциальных уравнений, которые не имеют ясного физического смысла, могут быть использованы в качестве тестовых задач, позволяя анализировать область применимости и точность различных численных и приближенных аналитических методов.

Методы поиска точных решений нелинейных уравнений с частными производными излагаются, например, в [1–9]. В [2–4, 6, 8–33] описаны точные решения нелинейных уравнений теплопроводности, диффузии, теории волн, гидродинамики и некоторых других уравнений.

Для математического моделирования сложных явлений и процессов, состояние которых зависит не только от данного момента времени, но и от одного или нескольких моментов времени в прошлом, используются дифференциальные уравнения с запаздыванием. К подобным уравне-

ниям относятся, например, нелинейные уравнения реакционно-диффузионного типа с запаздыванием

$$u_t = [a(u)u_x]_x + f(u, w)$$

и нелинейные уравнения волнового типа с запаздыванием

$$u_{tt} = [a(u)u_x]_x + f(u, w),$$

где $u = u(x, t)$, $w = u(x, t - \tau)$, $\tau = \text{const} > 0$ — время запаздывания. Такие дифференциальные уравнения обладают рядом специфических качественных особенностей [34–38], которые не присущи уравнениям без запаздывания.

В данной статье термин “точное решение” для нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием будем применять в случаях, когда решение выражается:

(i) через элементарные функции и неопределенные или/и определенные интегралы;

(ii) через решения обыкновенных дифференциальных уравнений без запаздывания или систем таких уравнений;

(iii) через решения обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием или систем таких уравнений.

Допустимы комбинации решений из пп. (i)–(iii).

Замечание 1. Если уравнение зависит от специальных или произвольных функций, то в п. (i) к элементарным функциям надо добавить также функции, входящие в уравнение.

Устойчивость решений типа бегущей волны реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием исследовалась в работах [39–44]. Некоторые точные решения этого типа, допускающие представление в элементарных функциях, получены в [45].

Точным решениям нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием, отличным от решений типа бегущей волны, посвящено сравнительно немного публикаций. В [46–57] описаны точные решения широкого класса нелинейных уравнений и систем уравнений реакционно-диффузионного типа с запаздыванием. Точные решения нелинейных уравнений и систем уравнений гиперболического типа с запаздыванием получены в работах [37, 55, 58–61]. В [62] приведены некоторые точные решения уравнения гидродинамического типа с запаздыванием (релаксацией) типа Каттанео–Вернотте. О специфических методах построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием см. [48, 53, 54]. Важно отметить, что методы группового анализа, которые хорошо зарекомендовали себя для уравнений математической физики без запаздывания [1, 2], малоэффективны для уравнений с запаздывани-

ем (сравните, например, результаты работ [58] и [59], где рассматривались нелинейные уравнения типа Клейна–Гордона с запаздыванием).

В данной статье описаны два новых метода построения точных решений нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием, которые основаны на использовании решений специального вида вспомогательных более простых уравнений в частных производных без запаздывания. Широкие возможности предложенных методов демонстрируются на нелинейных реакционно-диффузионных и волновых уравнениях с запаздыванием и переменными коэффициентами, которые содержат от трех до семи произвольных функций. Впервые получены точные решения в неявной форме нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием.

2. ПЕРВЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

2.1. Общее описание метода

Рассмотрим нелинейные уравнения в частных производных с двумя независимыми переменными вида

$$\Phi(x, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots; \alpha_1, \dots, \alpha_m) = 0, \quad (1)$$

где $u = u(x, t)$ — искомая функция, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — свободные параметры.

Покажем, что в некоторых случаях точные решения уравнения (1) можно использовать для построения точных решений более сложных нелинейных уравнений с запаздыванием. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть уравнение (1) имеет решение типа обобщенной бегущей волны, которое можно представить в неявном виде

$$F(u) = kt + \theta(x), \quad (2)$$

где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$P(k, \alpha_1, \dots, \alpha_m) = 0, \quad (3)$$

а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$Q(x, \theta, \theta'_x, \theta''_{xx}, \dots; \alpha_1, \dots, \alpha_m) = 0. \quad (4)$$

Тогда более сложное нелинейное уравнение с запаздыванием, которое получается из (1) формальной заменой свободных параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ на функции по правилу

$$\alpha_i \Rightarrow \varphi_i(F(u) - F(w)), \quad i = 1, \dots, m, \quad (5)$$

где $w = u(x, t - \tau)$, а $\varphi_i(z)$ — заданные (достаточно произвольно) функции, также допускает точное решение вида (2), причем константа k и функция

$\theta = \theta(x)$ определяются из уравнений (3) и (4), в которых следует положить

$$\alpha_i = \varphi_i(k\tau), \quad i = 1, \dots, m. \quad (6)$$

Доказательство. На решениях вида (2) имеем $F(w) = k(t - \tau) + \theta(x) = F(u) - k\tau$, т. е.

$$F(u) - F(w) = k\tau = \text{const}. \quad (7)$$

Поэтому любое уравнение с запаздыванием, полученное из (1) заменой параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ на функции по правилу (5), на решениях вида (2) в силу (7) эквивалентно уравнению (1) при условии (6).

Утверждение 1 можно использовать для построения точных решений в явном и неявном виде некоторых уравнений в частных производных с запаздыванием.

Замечание 2. В вырожденных случаях уравнение (4) может быть алгебраическим или трансцендентным (т.е. не содержать производных функции θ) или даже задавать функцию θ в явной форме. В частности, любое решение типа бегущей волны можно представить в виде (2) при $\theta(x) = \beta x$, где β — произвольная постоянная.

2.2. Методические примеры практического применения метода

Пример 1. Для иллюстрации практического применения утверждения 1 возьмем линейное уравнение диффузионного типа без запаздывания

$$u_t = u_{xx} + a, \quad (8)$$

где a — свободный параметр.

Уравнение (8) допускает простое точное решение с разделяющимися переменными, которое записывается в явном виде

$$u = kt + \lambda x^2 + C_1 x + C_2, \quad (9)$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные, а параметр k следующим образом выражается через a и λ :

$$k = 2\lambda + a. \quad (10)$$

Решение (9) является частным случаем решения (2) при $F(u) = u$. Подставляя эту функцию в (7), имеем $F(u) - F(w) = u - w = k\tau$. Используя утверждение 1, заменим в уравнении (8) параметр a на $\varphi(u - w)$, где $\varphi(z)$ — произвольная функция. В результате приходим к нелинейному уравнению с запаздыванием

$$u_t = u_{xx} + \varphi(u - w),$$

которое допускает точное решение (9), где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$k = 2\lambda + \varphi(k\tau)$$

(получено из (10) при $a = \varphi(k\tau)$).

Пример 2. Рассмотрим нелинейное реакционно-диффузионное уравнение с запаздыванием

$$u_t = (u^n u_x)_x + au^{1-n}, \quad (11)$$

где a — свободный параметр.

Уравнение (11) допускает решение типа бегущей волны в явном виде

$$u = (kt + \lambda x + C_1)^{1/n}, \quad (12)$$

где C_1, λ — произвольные постоянные, а параметр k выражается через a, λ и n следующим образом:

$$k = an + \frac{\lambda^2}{n}. \quad (13)$$

Решение (12) является частным случаем решения (2) при $F(u) = u^n$. Подставляя эту функцию в (7), имеем $F(u) - F(w) = u^n - w^n = k\tau$. Используя утверждение 1, заменим в уравнении (11) параметр a на $\varphi(u^n - w^n)$, где $\varphi(z)$ — произвольная функция. В результате приходим к нелинейному уравнению с запаздыванием

$$u_t = (u^n u_x)_x + u^{1-n} \varphi(u^n - w^n),$$

которое допускает точное решение вида (12), где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$k = n\varphi(k\tau) + \frac{\lambda^2}{n}$$

(получено из (13) при $a = \varphi(k\tau)$).

2.3. Построение нелинейных уравнений с запаздыванием и их точных решений

Уравнение 1. Нелинейное уравнение реакционно-диффузионного типа без запаздывания

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \sigma + \frac{\beta}{f(u)}, \quad (14)$$

которое содержит две произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$ и два свободных параметра σ и β , допускает решение типа обобщенной бегущей волны в неявном виде [30]:

$$\int f(u)du = kt - \sigma \int \frac{xdx}{a(x)} + C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2, \quad (15)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а константа k связана с параметром β линейным соотношением

$$k = \beta. \quad (16)$$

Решение (15) является решением вида (2) при $F(u) = \int f(u)du$.

Используя утверждение 1, заменим в уравнении (14) параметры σ и β соответственно на

$\varphi(F(u) - F(w))$ и $\psi(F(u) - F(w))$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – произвольные функции. В результате приходим к новому нелинейному уравнению реакционно-диффузионного типа с запаздыванием

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \varphi(F(u) - F(w)) + \frac{1}{f(u)}\psi(F(u) - F(w)), \quad (17)$$

$$F(u) = \int f(u)du,$$

которое зависит от четырех произвольных функций и имеет точное решение

$$\int f(u)du = kt - \varphi(k\tau) \int \frac{x dx}{a(x)} + C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2, \quad (18)$$

где постоянная k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$k = \psi(k\tau) \quad (19)$$

(получено из (16) при $\beta = \psi(k\tau)$).

Пример 3. Полагая $F(u) = u^{n+1}$, $f(u) = (n+1)u^n$, $a(x) = a_0 / (n+1) = \text{const}$, $\psi(z) = (n+1)\bar{\psi}(z)$ в (17)–(19), приходим к нелинейному уравнению с запаздыванием

$$u_t = a_0(u^n u_x)_x + \varphi(u^{n+1} - w^{n+1}) + u^{-n}\bar{\psi}(u^{n+1} - w^{n+1}),$$

зависящему от двух произвольных функций $\varphi(z)$ и $\bar{\psi}(z)$, точное решение которого допускает представление в явном виде

$$u = \left[kt - \frac{n+1}{2a_0} \varphi(k\tau)x^2 + C_1 x + C_2 \right]^{\frac{1}{n+1}}, \quad (20)$$

где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $k = (n+1)\bar{\psi}(k\tau)$.

Пример 4. Полагая $F(u) = e^{\lambda u}$, $f(u) = \lambda e^{\lambda u}$, $a(x) = a_0 / \lambda = \text{const}$, $\psi(z) = \lambda \bar{\psi}(z)$ в (17)–(19), получим нелинейное уравнение с запаздыванием

$$u_t = a_0(e^{\lambda u} u_x)_x + \varphi(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}) + e^{-\lambda u} \bar{\psi}(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}),$$

которое имеет точное решение

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln \left[kt - \frac{\lambda}{2a_0} \varphi(k\tau)x^2 + C_1 x + C_2 \right], \quad (21)$$

где постоянная k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $k = \lambda \bar{\psi}(k\tau)$.

Уравнение 2. Более общее, чем (17), нелинейное уравнение с запаздыванием

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)\varphi(F(u) - F(w)) + \frac{1}{f(u)}\psi(F(u) - F(w)),$$

зависящее от пяти произвольных функций $a(x)$, $b(x)$, $f(u)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$, имеет точное решение

$$\int f(u)du = kt - \varphi(k\tau) \int \frac{1}{a(x)} \left(\int b(x)dx \right) dx + C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2,$$

где константа k является корнем алгебраического (трансцендентного) уравнения (19).

Далее, опуская подробности, приведем еще несколько нелинейных уравнений в частных производных без запаздывания, допускающих точные решения вида (2), и порождаемые ими более сложные нелинейные уравнения с запаздыванием и их точные решения.

Уравнение 3. Рассмотрим другое нелинейное уравнение без запаздывания

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x - \mu a(x)f(u)u_x + \sigma + \frac{\beta}{f(u)},$$

которое допускает точное решение [9]:

$$\int f(u)du = kt + \frac{\sigma}{\mu} \int \frac{dx}{a(x)} + C_1 \int \frac{e^{\mu x}}{a(x)} dx + C_2, \quad (22)$$

где константа k связана с параметром β линейным соотношением (16).

Рассуждая также, как и в примере 1, получим нелинейное уравнение с запаздыванием

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x - \mu a(x)f(u)u_x + \varphi(F(u) - F(w)) + \frac{1}{f(u)}\psi(F(u) - F(w)),$$

точное решение которого определяется формулой (22) при $\sigma = \varphi(k\tau)$, а постоянная k является корнем алгебраического (трансцендентного) уравнения (19).

Уравнение 4. Нелинейное волновое уравнение типа Клейна–Гордона без запаздывания

$$u_{tt} = [a(x)f(u)u_x]_x + \sigma - \beta \frac{f'_u(u)}{f^3(u)},$$

которое содержит две произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$ и два свободных параметра β и σ , допускает решение типа обобщенной бегущей волны [31]:

$$\int f(u)du = kt - \sigma \int \frac{x dx}{a(x)} + C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2, \quad (23)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, а константа k связана с параметром β соотношением

$$k^2 = \beta.$$

При $\beta > 0$ имеем два действительных решения $k = \pm \sqrt{\beta}$.

Решение (23) является решением вида (2) при $F(u) = \int f(u)du$.

Рассуждая аналогично тому, как это делалось ранее в примере 1, приходим к нелинейному уравнению типа Клейна–Гордона с запаздыванием

$$u_{tt} = [a(x)f(u)u_x]_x + \varphi(F(u) - F(w)) - \frac{f'_u(u)}{f^3(u)}\psi(F(u) - F(w)), \quad (24)$$

точное решение которого можно представить в неявной форме (23) при $\sigma = \varphi(k\tau)$, а константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $k^2 = \psi(k\tau)$.

Пример 5. Полагая $F(u) = u^{n+1}$, $f(u) = (n+1)u^n$, $a(x) = a_0/(n+1) = \text{const}$, $\psi(z) = n^{-1}(n+1)^2\bar{\psi}(z)$ в (24), приходим к нелинейному уравнению с запаздыванием

$$u_{tt} = a_0(u^n u_x)_x + \varphi(u^{n+1} - w^{n+1}) - u^{-2n-1}\bar{\psi}(u^{n+1} - w^{n+1}),$$

точное решение которого описывается формулой (20), где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $nk^2 = (n+1)^2\bar{\psi}(k\tau)$.

Пример 6. Полагая $F(u) = e^{\lambda u}$, $f(u) = \lambda e^{\lambda u}$, $a(x) = a_0/\lambda = \text{const}$, $\psi(z) = \lambda\bar{\psi}(z)$ в (24), получим нелинейное уравнение с запаздыванием

$$u_{tt} = a_0(e^{\lambda u} u_x)_x + \varphi(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}) - e^{-2\lambda u}\bar{\psi}(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}),$$

которое имеет точное решение (21), где постоянная k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $k^2 = \lambda\bar{\psi}(k\tau)$.

Уравнение 5. Нелинейное волновое уравнение типа Клейна–Гордона без запаздывания

$$u_{tt} = [a(x)u_x]_x + \beta \frac{a'_x(x)}{\sqrt{a(x)}} f(u), \quad (25)$$

содержащее две произвольные функции $a(x)$ и $g(u)$, допускает два точных решения [31]:

$$\int \frac{du}{f(u)} = \pm 2kt - 2k \int \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C, \quad (26)$$

где константа k связана с параметром β линейным соотношением (16). Решение (26) является решением вида (2) при $F(u) = \int [du/f(u)]$.

Уравнение (25) порождает более сложное уравнение с запаздыванием

$$u_{tt} = [a(x)u_x]_x + \frac{a'_x(x)}{\sqrt{a(x)}} f(u)\psi(F(u) - F(w)),$$

$$F(u) = \int \frac{du}{f(u)},$$

точные решения которого определяются формулой (26), где константа k находится из алгебраического (трансцендентного) уравнения $k = \psi(k\tau)$.

3. ВТОРОЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

3.1. Общее описание метода

Утверждение 2. Пусть уравнение (1) имеет решение с функциональным разделением переменных специального вида

$$F(u) = e^{kt}\theta(x), \quad (27)$$

где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения (3), а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (4). Тогда более сложное нелинейное уравнение с запаздыванием, которое получается из (1) формальной заменой свободных параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ на функции по правилу

$$\alpha_i \Rightarrow \varphi_i(F(w)/F(u)), \quad i = 1, \dots, m, \quad (28)$$

где $w = u(x, t - \tau)$, а $\varphi_i(z)$ — заданные (достаточно произвольно) функции, также допускает точное решение вида (27), причем константа k и функция $\theta = \theta(x)$ определяются из уравнений (3) и (4), в которых следует положить

$$\alpha_i = \varphi_i(e^{-k\tau}), \quad i = 1, \dots, m. \quad (29)$$

Доказательство. На решениях вида (27) имеем $F(w) = e^{k(t-\tau)}\theta(x) = e^{-k\tau}F(u)$, т. е.

$$F(w)/F(u) = e^{-k\tau} = \text{const}. \quad (30)$$

Поэтому любое уравнение с запаздыванием, полученное из (1) заменой параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ на функции по правилу (28), на решениях вида (27) в силу (30) эквивалентно уравнению (1) при условии (29).

Утверждение 2 можно использовать для построения точных решений в явном и неявном виде некоторых уравнений в частных производных с запаздыванием.

Замечание 3. Утверждение 2 можно свести к утверждению 1. Для этого надо, считая $F(u) > 0$, прологарифмировать решение (27), а затем сделать переобозначения $\ln F(u) \Rightarrow F(u)$ и $\ln \theta \Rightarrow \theta$ (аналогичным образом рассматривается и случай $F(u) < 0$). Однако на практике часто встречается представление решения непосредственно в виде (27), поэтому проще и удобнее его и использовать.

3.2. Методические примеры практического применения метода

Пример 7. Рассмотрим линейное уравнение диффузионного типа

$$u_t = u_{xx} + au, \quad (31)$$

где a — свободный параметр.

Уравнение (31) допускает точное решение с разделяющимися переменными

$$u = e^{kt} \theta(x), \quad (32)$$

где k — произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет линейному ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\theta''_{xx} + (a - k)\theta = 0. \quad (33)$$

Решение (32) является частным случаем решения (27) при $F(u) = u$. Подставляя эту функцию в (30), имеем $F(w)/F(u) = w/u = e^{-k\tau}$. Используя утверждение 2, заменим в уравнении (31) параметр a на $\phi(w/u)$, где $\phi(z)$ — произвольная функция. В результате приходим к нелинейному уравнению с запаздыванием

$$u_t = u_{xx} + u\phi(w/u),$$

которое допускает точное решение (32), где k — произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет линейному ОДУ

$$\theta''_{xx} + [\phi(e^{-k\tau}) - k]\theta = 0.$$

Это уравнение получено подстановкой константы $a = \phi(e^{-k\tau})$ в (33) и легко интегрируется.

Пример 8. Рассмотрим реакционно-диффузионное уравнение с квадратичной нелинейностью

$$u_t = (uu_x)_x + au + bu^2, \quad (34)$$

где a, b — свободные параметры.

При $b > 0$ уравнение (34) допускает точное решение с разделяющимися переменными в явном виде

$$u = e^{kt} \sqrt{|C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)|}, \quad \beta = \sqrt{2b}, \quad (35)$$

которое является частным случаем решения (32), где параметр k удовлетворяет линейному соотношению

$$k = a. \quad (36)$$

Как и в примере 7, имеем $F(u) = u$ и, следовательно, $F(w)/F(u) = w/u = e^{-k\tau}$. Используя утверждение 2, заменим в уравнении (34) параметры a и b соответственно на $\phi(w/u)$ и $\psi(w/u)$, где $\phi(z)$ и $\psi(z)$ — произвольные функции. В результате приходим к нелинейному уравнению с запаздыванием

$$u_t = (uu_x)_x + u\phi(w/u) + u^2\psi(w/u),$$

которое допускает точное решение вида (35), где k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$k = \phi(e^{-k\tau})$$

(получено из (36) при $a = \phi(e^{-k\tau})$).

3.3. Построение нелинейных уравнений с запаздыванием и их точных решений

Уравнение 6. Рассмотрим нелинейное уравнение реакционно-диффузионного типа без запаздывания

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \left[b + \frac{c}{f(u)} \right] F(u), \quad (37)$$

$$F(u) = \int f(u) du,$$

зависящее от произвольной функции $f(u)$ и двух свободных параметров b и c . Это уравнение допускает точное решение, которое можно представить в неявном виде [6]:

$$\int f(u) du = e^{kt} \theta(x), \quad (38)$$

где

$$k = c, \quad (39)$$

а функция $\theta = \theta(x)$ определяется из линейного ОДУ второго порядка

$$\theta''_{xx} + b\theta = 0. \quad (40)$$

Решение (38) является решением вида (27) при $F(u) = \int f(u) du$.

Используя утверждение 2, заменим в уравнении (37) параметры b и c соответственно на $\phi(F(w)/F(u))$ и $\psi(F(w)/F(u))$, где $\phi(z)$ и $\psi(z)$ — произвольные функции. В результате приходим к более сложному нелинейному уравнению реакционно-диффузионного типа с запаздыванием

$$u_t = [f(u)u_x]_x + F(u) \left[\phi \left(\frac{F(w)}{F(u)} \right) + \frac{1}{f(u)} \psi \left(\frac{F(w)}{F(u)} \right) \right], \quad (41)$$

$$F(u) = \int f(u) du,$$

которое зависит от трех произвольных функций и имеет точное решение вида (38), где константа k является корнем алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$k = \psi(e^{-k\tau}) \quad (42)$$

(получено из (39) при $c = \psi(e^{-k\tau})$), а функция $\theta = \theta(x)$ определяется из линейного ОДУ второго порядка (40) при $b = \phi(e^{-k\tau})$.

Пример 9. Полагая $\varphi(z) = bz$ и $\psi(z) = cz$ в (41), приходим к уравнению

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \left[b + \frac{c}{f(u)} \right] F(w),$$

которое получается из (37) формальным переобозначением $F(u) \Rightarrow F(w)$.

Уравнение 7. Более общее, чем (41), нелинейное уравнение с запаздыванием

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)F(u)\varphi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right) + \frac{F(u)}{f(u)}\psi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right),$$

зависящее от пяти произвольных функций $a(x)$, $b(x)$, $f(u)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$, допускает точное решение вида (38), где константа k является корнем алгебраического (трансцендентного) уравнения (42), а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет линейному ОДУ второго порядка

$$[a(x)\theta'_x]_x + \varphi(e^{-k\tau})b(x)\theta = 0.$$

Уравнение 8. Нелинейное уравнение

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \mu f(u)u_x + \frac{\lambda}{f(u)} F(u), \quad (43)$$

$$F(u) = \int f(u)du,$$

зависящее от произвольной функции $f(u)$ и двух свободных параметров μ и λ , допускает решение

$$\int f(u)du = e^{kt}(C_1 + C_2 e^{-\mu x}), \quad (44)$$

где $k = \lambda$ [9].

Используя утверждение 2, можно, например, показать, что нелинейное уравнение с запаздыванием

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \mu f(u)u_x + \frac{F(u)}{f(u)}\varphi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right), \quad (45)$$

$$F(u) = \int f(u)du,$$

допускает точное решение вида (44), где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $k = \varphi(e^{-k\tau})$.

Пример 10. Полагая $\varphi(z) = \lambda z$ в (45), приходим к уравнению

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \mu f(u)u_x + \frac{\lambda}{f(u)} F(w),$$

которое получается из (43) формальным переобозначением $F(u) \Rightarrow F(w)$.

Уравнение 9. Нелинейное уравнение

$$u_t = [f(u)u_x]_x - 2\alpha f(u)u_x + \left[\alpha^2 + \frac{\beta}{f(u)} \right] F(u), \quad (46)$$

$$F(u) = \int f(u)du,$$

зависящее от произвольной функции $f(u)$ и двух свободных параметров α и β , допускает точное решение в неявном виде [9]:

$$\int f(u)du = e^{kt+\alpha x}(C_1 x + C_2), \quad (47)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные и $k = \beta$.

Более сложное, чем (46), нелинейное уравнение с запаздыванием

$$u_t = [f(u)u_x]_x - 2\alpha f(u)u_x + \alpha^2 F(u) + \frac{F(u)}{f(u)}\varphi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right)$$

также имеет точное решение (47), где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $k = \varphi(e^{-k\tau})$.

Уравнение 10. Рассмотрим нелинейное уравнение волнового типа с переменными коэффициентами

$$u_{tt} = [f(x, a)u^n u_x]_x + g(x, b)u^{n+1} + cu, \quad (48)$$

где $f(x, a)$, $g(x, b)$ — произвольные функции, a , b , c — свободные параметры.

Уравнение (48) допускает точное решение с разделяющимися переменными вида (32), где параметр k удовлетворяет квадратичному соотношению

$$k^2 = c, \quad (49)$$

а функция $\theta = \theta(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка

$$[f(x, a)\theta^n \theta'_x]_x + g(x, b)\theta^{n+1} = 0. \quad (50)$$

В данном случае имеем $F(u) = u$ и $F(w)/F(u) = w/u = e^{-k\tau}$. Используя утверждение 2, заменим в уравнении (48) параметры a , b , c соответственно на $\varphi(w/u)$, $\psi(w/u)$, $\omega(w/u)$, где $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\omega(z)$ — произвольные функции. В результате приходим к нелинейному уравнению с запаздыванием

$$u_{tt} = [f(x, \varphi(w/u))u^n u_x]_x + u^{n+1}g(x, \psi(w/u)) + u\omega(w/u),$$

которое допускает точное решение вида (32), где k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$k^2 = \omega(e^{-k\tau})$$

(получено из (49) при $c = \omega(e^{-k\tau})$), а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ

$$[f(x, a)\theta''\theta'_x]_x + g(x, b)\theta^{n+1} = 0, \\ a = \varphi(e^{-k\tau}), \quad b = \psi(e^{-k\tau}).$$

Это уравнение с помощью замены $\xi(x) = \theta^{n+1}(x)$ сводится к линейному ОДУ второго порядка.

Уравнение 11. Нелинейное уравнение волнового типа (нелинейное уравнение Клейна–Гордона при $a(x) = \text{const}$, $b(x) = 0$)

$$u_{tt} = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)F(u) + \\ + \lambda \left[\frac{F(u)}{f(u)} - \frac{f'_u(u)}{f^3(u)} F^2(u) \right], \quad F = \int f(u)du, \quad (51)$$

зависящее от трех произвольных функций $a(x)$, $b(x)$, $f(u)$ и свободного параметра λ , допускает точное решение в неявном виде (38), где константа k связана с λ соотношением $k^2 = \lambda$, а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет линейному ОДУ второго порядка [31]:

$$[a(x)\theta'_x]_x + b(x)\theta = 0. \quad (52)$$

Более сложное, чем (51), нелинейное уравнение с запаздыванием

$$u_{tt} = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)F(u) + \\ + \left[\frac{F(u)}{f(u)} - \frac{f'_u(u)}{f^3(u)} F^2(u) \right] \varphi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right)$$

также имеет решение вида (38), где константа k определяется из алгебраического уравнения $k^2 = \varphi(e^{-k\tau})$, а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет линейному ОДУ второго порядка (52).

В качестве дальнейшего обобщения приведем уравнение

$$u_{tt} = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)F(u)\varphi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right) + \\ + c(x)F(w)\psi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right) + \left[\frac{F(u)}{f(u)} - \frac{f'_u(u)}{f^3(u)} F^2(u) \right] \times \\ \times \chi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right), \quad F = \int f(u)du,$$

зависящее от произвольных функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $f(u)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\chi(z)$, которое допускает решение вида (38), где константа k является корнем алгебраического (трансцендентного) уравнения $k^2 = \chi(e^{-k\tau})$, а функция $\theta = \theta(x)$ описывается линейным ОДУ второго порядка

$$[a(x)\theta'_x]_x + [\varphi(e^{-k\tau})b(x) + e^{-k\tau}\psi(e^{-k\tau})c(x)]\theta = 0.$$

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Приведем несколько нелинейных уравнений в частных производных с переменным запаздыванием, допускающих точные решения в неявной форме.

Уравнение 12. Рассмотрим нелинейное уравнение с переменным запаздыванием

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x) + \frac{1}{f(u)}\varphi(F(u) - F(w)),$$

$$F(u) = \int f(u)du, \quad w = u(x, t - \tau(t)),$$

которое содержит пять произвольных функций $a(x)$, $b(x)$, $f(u)$, $\varphi(z)$ и $\tau(t)$. Это уравнение допускает точные решения с функциональным разделением переменных в неявном виде

$$\int f(u)du = \xi(t) + \theta(x),$$

где функции $\theta = \theta(x)$ и $\xi = \xi(t)$ описываются соответственно линейным ОДУ второго порядка и нелинейным ОДУ первого порядка с запаздыванием:

$$[a(x)\theta'_x]_x + b(x) = 0; \quad (53)$$

$$\xi'_t(t) = \varphi(\xi(t) - \xi(t - \tau)), \quad \tau = \tau(t). \quad (54)$$

Общее решение уравнения (53) определяется формулой

$$\theta = -\int \frac{1}{a(x)} \left(\int b(x)dx \right) dx + C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Если $\tau = \text{const}$, то уравнение (54) имеет частные решения вида $\xi(t) = kt + C$, где C — произвольная постоянная, а k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $k = \varphi(k\tau)$.

Уравнение 13. Рассмотрим другое нелинейное уравнение с переменным запаздыванием

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)F(u) + \frac{F(u)}{f(u)}\varphi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right),$$

$$F(u) = \int f(u)du, \quad w = u(x, t - \tau(t)),$$

где $a(x)$, $b(x)$, $f(u)$, $\varphi(z)$, $\tau(t)$ — произвольные функции. Это уравнение также допускает точные решения с функциональным разделением переменных в неявной форме

$$\int f(u)du = \xi(t)\theta(x),$$

где функции $\theta = \theta(x)$ и $\xi = \xi(t)$ описываются соответственно линейным ОДУ второго порядка и нелинейным ОДУ первого порядка с запаздыванием:

$$[a(x)\theta'_x]_x + b(x)\theta = 0; \quad (55)$$

$$\xi'_i(t) = \xi(t)\varphi(\xi(t-\tau)/\xi(t)), \quad \tau = \tau(t).$$

Если $\tau = \text{const}$, то уравнение (55) имеет частные решения экспоненциального вида $\xi(t) = Ce^{kt}$, где C — произвольная постоянная, а k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $k = \varphi(e^{-k\tau})$.

Уравнение 14. Нелинейное волновое уравнение с переменным запаздыванием

$$u_{tt} = [a(x)u^n u_x]_x + b(x)u^{n+1} + u\varphi(w/u) + w\psi(w/u), \\ w = u(x, t - \tau(t)),$$

где $a(x)$, $b(x)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\tau(t)$ — произвольные функции, допускает точное решение в виде произведения функций разных аргументов

$$u = \xi(t)\theta(x),$$

где функции $\theta = \theta(x)$ и $\xi = \xi(t)$ описываются соответственно линейным ОДУ второго порядка и нелинейным ОДУ с запаздыванием второго порядка:

$$[a(x)\eta'_x]_x + (n+1)b(x)\eta = 0, \quad \eta = \theta^{n+1}; \\ \xi''_{tt}(t) = \xi(t)\varphi(\xi(t-\tau)/\xi(t)) + \\ + \xi(t-\tau)\psi(\xi(t-\tau)/\xi(t)), \quad \tau = \tau(t).$$

Уравнение 15. Нелинейное волновое уравнение с переменным запаздыванием

$$u_{tt} = [a(x)e^{\beta u} u_x]_x + b(x)e^{\beta u} + \varphi(w-u), \\ w = u(x, t - \tau(t)),$$

где $a(x)$, $b(x)$, $\varphi(z)$, $\tau(t)$ — произвольные функции, допускает точное решение в виде суммы функций разных аргументов

$$u = \xi(t) + \theta(x),$$

где функции $\theta = \theta(x)$ и $\xi = \xi(t)$ описываются соответственно линейным ОДУ второго порядка и нелинейным ОДУ с запаздыванием второго порядка:

$$[a(x)\eta'_x]_x + \beta b(x)\eta = 0, \quad \eta = e^{\beta\theta(x)}; \\ \xi''_{tt}(t) = \varphi(\xi(t-\tau)/\xi(t)), \quad \tau = \tau(t).$$

5. КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Предложено два новых метода построения точных решений нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием. Методы основаны на использовании решений специального вида вспомогательных более простых уравнений в частных производных без запаздывания. Описан ряд нелинейных уравнений реакционно-диффузионного и волнового типов с переменны-

ми коэффициентами, которые содержат от трех до семи произвольных функций и допускают применение этих методов. Построены новые решения с функциональным разделением переменных в неявной форме, которые содержат свободные параметры. Рассмотрены также некоторые уравнения с переменным по времени запаздыванием и построены их точные решения. Полученные решения могут быть использованы для формулировки тестовых задач, предназначенных для оценки точности численных и приближенных аналитических методов решения нелинейных начально-краевых задач с запаздыванием.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690135-5) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10025).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. Ibragimov N.H. (Ed.). CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 1. Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. Boca Raton: CRC Press, 1994.
3. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
4. Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.
5. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Изд. Дом Интеллект, 2010.
6. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition. Boca Raton: CRC Press, 2012.
7. Polyanin A.D. Comparison of the effectiveness of different methods for constructing exact solutions to nonlinear PDEs. Generalizations and new solutions // Mathematics. 2019. V. 7. № 5. P. 386.
8. Полянин А.Д. Методы функционального разделения переменных и их применение в математической физике // Мат. модел. числ. методы. 2019. № 1. С. 65–97.
9. Polyanin A.D. Functional separation of variables in nonlinear PDEs: General approach, new solutions of diffusion-type equations // Mathematics. 2020. V. 8. № 1. 90.
10. Kudryashov N.A. On exact solutions of families of Fisher equations // Theor. Math. Phys. 1993. V. 94. № 2. P. 211–218.
11. Galaktionov V.A. Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions // Nonlinear Anal. Theor. Meth. Appl. 1994. V. 23. P. 1595–1621.

12. *Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov A.A.* Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics. Kluwer: Dordrecht, 1998.
13. *Ludlow D.K., Clarkson P.A., Bassom A.P.* Similarity reductions and exact solutions for the two-dimensional incompressible Navier – Stokes equations // *Studies Appl. Math.* 1999. V. 103. P. 183–240.
14. *Ludlow D.K., Clarkson P.A., Bassom A.P.* New similarity solutions of the unsteady incompressible boundary-layer equations // *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* 2000. V. 53. P. 175–206.
15. *Qu C.Z., Zhang S.L., Liu R.C.* Separation of variables and exact solutions to quasilinear diffusion equations with the nonlinear source // *Physica D.* 2000. V. 144. № 1–2. P. 97–123.
16. *Polyanin A.D.* Exact solutions to the Navier – Stokes equations with generalized separation of variables // *Doklady Physics.* 2001. V. 46. № 10. P. 726–731.
17. *Estevez P.G., Qu C., Zhang S.* Separation of variables of a generalized porous medium equation with nonlinear source // *J. Math. Anal. Appl.* 2002. V. 275. P. 44–59.
18. *Kaptsov O.V., Verevkin I.V.* Differential constraints and exact solutions of nonlinear diffusion equations // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2003. V. 36. P. 1401–1414.
19. *Zhang S.L., Lou S.Y., Qu C.Z.* New variable separation approach: Application to nonlinear diffusion equations // *J. Physics A: Math. Gen.* 2003. V. 36(49). P. 12223–12242.
20. *Vaneeva O.O., Johnpillai A.G., Popovych R.O., Sophocleous C.* Extended group analysis of variable coefficient reaction-diffusion equations with power nonlinearities // *J. Math. Anal. Appl.* 2007. V. 330. № 2. P. 1363–1386.
21. *Ivanova N.M.* Exact solutions of diffusion-convection equations // *Dynamics of PDE.* 2008. V. 5. № 2. P. 139–171.
22. *Jia H., Xu W., Zhao X., Li Z.* Separation of variables and exact solutions to nonlinear diffusion equations with x -dependent convection and absorption // *J. Math. Anal. Appl.* 2008. V. 339. P. 982–995.
23. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Unsteady axisymmetric boundary-layer equations: Transformations, properties, exact solutions, order reduction and solution method // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2015. V. 74. P. 40–50.
24. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Functional and generalized separable solutions to unsteady Navier – Stokes equations // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2016. V. 79. P. 88–98.
25. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Direct functional separation of variables and new exact solutions to axisymmetric unsteady boundary-layer equations // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2016. V. 31. № 1–3. P. 11–20.
26. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* One-dimensional reductions and functional separable solutions to unsteady plane and axisymmetric boundary-layer equations for non-Newtonian fluids // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2016. V. 85. P. 70–80.
27. *Cherniha R., Serov M., Pliukhin O.* Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2018.
28. *Polyanin A.D.* Functional separable solutions of nonlinear convection–diffusion equations with variable coefficients // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2019. V. 73. P. 379–390.
29. *Polyanin A.D.* Functional separable solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with variable coefficients // *Appl. Math. Comput.* 2019. V. 347. P. 282–292.
30. *Polyanin A.D.* Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2019. V. 111. P. 95–105.
31. *Polyanin A.D.* Construction of functional separable solutions in implicit form for non-linear Klein – Gordon type equations with variable coefficients // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2019. V. 114. P. 29–40.
32. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Separation of variables in PDEs using nonlinear transformations: Applications to reaction–diffusion type equations. // *Appl. Math. Lett.* 2020. V. 1000. 106055.
33. *Zhurov A.I., Polyanin A.D.* Symmetry reductions and new functional separable solutions of nonlinear Klein – Gordon and telegraph type equations. // *J. Nonlinear Math. Phys.* 2020. V. 27. № 2. P. 227–242.
34. *Wu J.* Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer, 1996.
35. *Jordan P.M., Dai W., Mickens R.E.* A note on the delayed heat equation: instability with respect to initial data // *Mech. Res. Commun.* 2008. V. 35. P. 414–420.
36. *Racke R.* Instability of coupled systems with delay // *Commun. Pur. Appl. Anal.* 2012. V. 11. № 5. P. 1753–1773.
37. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Вязьмин А.В.* Точные решения и качественные особенности гиперболических реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием // *Теор. основы хим. технологии.* 2015. Т. 49. № 5. С. 527–541.
38. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г.* Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: Математические модели и качественные особенности // *Вестник НИЯУ МИФИ.* 2017. Т. 6. № 1. С. 41–55.
39. *Smith H.L., Zhao X.-Q.* Global asymptotic stability of traveling waves in delayed reaction-diffusion equations // *SIAM J. Math. Anal.* 2000. V. 31. № 3. P. 514–534.
40. *Lv G., Wang M.* Nonlinear stability of travelling wave fronts for delayed reaction diffusion equations // *Nonlinearity.* 2010. V. 23. 845.
41. *Chern I.-L., Mei M., Yang X., Zhang Q.* Stability of non-monotone critical traveling waves for reaction–diffusion equations with time-delay // *J. Differ. Equations.* 2015. V. 259. № 4. P. 1503–1541.
42. *Lv G., Wang Z.* Stability of traveling wave solutions to delayed evolution equation // *J. Dyn. Control Syst.* 2015. V. 21. № 2. P. 173–187.
43. *Mei M., So J.W.-H., Li M.Y., Shen S.S.P.* Asymptotic stability of travelling waves for Nicholson’s blowflies equation with diffusion // *P. Roy. Soc. Edinb. A.* 2004. V. 134. № 3. P. 579–594.

44. Mei M., Lin C.-K., Lin C.-T., So J.W.-H. Traveling wavefronts for time-delayed reaction–diffusion equation: (I) Local nonlinearity // J. Differ. Equations. 2009. V. 247. № 2. P. 495–510.
45. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nonlinear delay reaction–diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions // Appl. Math. Lett. 2015. V. 46. P. 38–43.
46. Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 338. P. 448–466.
47. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time // Int. J. Non-Linear Mech. 2013. V. 54. P. 115–126.
48. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction–diffusion equations and more complex nonlinear equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2014. V. 19. № 3. P. 417–430.
49. Polyanin A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction–diffusion equations // Int. J. Non-Linear Mech. 2014. V. 59. P. 16–22.
50. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2014. V. 19. P. 409–416.
51. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nonlinear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions // Appl. Math. Lett. 2014. V. 37. P. 43–48.
52. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Non-linear instability and exact solutions to some delay reaction–diffusion systems // Int. J. Non-Linear Mech. 2014. V. 62. P. 33–40.
53. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients // Int. J. Non-Linear Mech. 2014. V. 67. P. 267–277.
54. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The generating equations method: Constructing exact solutions to delay reaction–diffusion systems and other non-linear coupled delay PDEs // Int. J. Non-Linear Mech. 2015. V. 71. P. 104–115.
55. Сорокин В.Г. Точные решения некоторых нелинейных уравнений и систем уравнений в частных производных с запаздыванием // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2016. Т. 5. № 3. С. 199–219.
56. Polyanin A.D. Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay and variable coefficients // Appl. Math. Lett. 2019. V. 90. P. 49–53.
57. Sorokin V.G., Polyanin A.D. Nonlinear partial differential equations with delay: Linear stability/instability of solutions, numerical integration // J. Physics: Conf. Series. 2019. V. 1205. 012053.
58. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Generalized and functional separable solutions to non-linear delay Klein – Gordon equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2014. V. 19. № 8. P. 2676–2689.
59. Long F.-S., Meleshko S.V. On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein – Gordon equation with a delay // Math. Methods Appl. Sci. 2016. V. 39. № 12. P. 3255–3270.
60. Long F.-S., Meleshko S.V. Symmetry analysis of the nonlinear two-dimensional Klein – Gordon equation with a time-varying delay // Math. Methods Appl. Sci. 2017. V. 40. № 13. P. 4658–4673.
61. Сорокин В.Г. Точные решения нелинейных телеграфных уравнений с запаздыванием // Вестник НИЯУ МИФИ. 2019. Т. 8. № 5. С. 453–464.
62. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of non-linear differential-difference equations of a viscous fluid with finite relaxation time // Int. J. Non-Linear Mech. 2013. V. 57. P. 116–122.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta “MIFI”, 2020, vol. 9, no. 2, pp. 115–128

Construction of Exact Solutions for Nonlinear Equations of Mathematical Physics with Delay Using Solutions of Simpler Equations without Delay

A. D. Polyanin^{a,*} and V. G. Sorokin^{a,**}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia*

^{*}*e-mail: polyanin@ipmnet.ru*

^{**}*e-mail: vsesor@gmail.com*

Received February 17, 2020; revised February 17, 2020; accepted March 10, 2020

Abstract—New methods for constructing exact solutions of nonlinear mathematical physics equations with delay have been proposed with the use of special solutions of simpler auxiliary equations of mathematical physics without delay. The capabilities of the proposed methods are illustrated on nonlinear reaction–diffusion and wave equations with delay and variable coefficients, which contain three-to-seven arbitrary functions depending on the spatial variable or the unknown. New generalized traveling wave solutions and functional separable solutions are obtained in the implicit form. Examples of exact solutions of more complex nonlinear equations with variable delay, which arbitrarily depends on time, are also given. The considered

equations and their exact solutions can be used to formulate test problems intended to verify the adequacy and evaluate the accuracy of numerical and approximate analytical methods for solving the corresponding nonlinear initial-boundary value problems with delay.

Keywords: nonlinear delay partial differential equations, reaction–diffusion equations with variable coefficients, wave equations with variable coefficients, exact solutions in the implicit form, functional separable solutions

DOI: 10.1134/S2304487X20020108

REFERENCES

1. Ovsiannikov L.V. *Group Analysis of Differential Equations*. New York, Academic Press, 1982.
2. Ibragimov N.H. (Ed). *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 1. Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws*. Boca Raton, CRC Press, 1994.
3. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I. *Metody resheniya nelinejnykh uravnenij matematicheskoy fiziki i mehaniki* [Solution methods for nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2005.
4. Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. *Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2007.
5. Kudryashov N.A. *Metody nelinejnoj matematicheskoy fiziki* [Methods of nonlinear mathematical physics]. Dolgoprudnyj, Izd. Dom Intellect, 2010.
6. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition*. CRC Press, Boca Raton, 2012.
7. Polyanin A.D. Comparison of the effectiveness of different methods for constructing exact solutions to nonlinear PDEs. Generalizations and new solutions. *Mathematics*, 2019, vol. 7, no. 5, 386.
8. Polyanin A.D. Methods of functional separation of variables and their application in mathematical physics. *Mat. modelir. chisl. metody*, 2019, no. 1, pp. 65–97 (in Russian).
9. Polyanin A.D. Functional separation of variables in nonlinear PDEs: General approach, new solutions of diffusion-type equations. *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 1, 90.
10. Kudryashov N.A. On exact solutions of families of Fisher equations. *Theor. Math. Phys.*, 1993, vol. 94, no. 2, pp. 211–218.
11. Galaktionov V.A. Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions. *Nonlinear Anal. Theor. Meth. Appl.*, 1994, vol. 23, pp. 1595–1621.
12. Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov, A.A. *Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics*. Dordrecht, Kluwer, 1998.
13. Ludlow D.K., Clarkson P.A., Bassom A.P. Similarity reductions and exact solutions for the two-dimensional incompressible Navier – Stokes equations. *Studies Appl. Math.*, 1999, vol. 103, pp. 183–240.
14. Ludlow D.K., Clarkson P.A., Bassom A.P. New similarity solutions of the unsteady incompressible boundary-layer equations. *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 2000, vol. 53, pp. 175–206.
15. Qu C.Z., Zhang S.L., Liu R.C. Separation of variables and exact solutions to quasilinear diffusion equations with the nonlinear source. *Physica D*, 2000, vol. 144, no. 1–2, pp. 97–123.
16. Polyanin A.D. Exact solutions to the Navier – Stokes equations with generalized separation of variables. *Doklady Physics*, 2001, vol. 46, no. 10, pp. 726–731.
17. Estevez P.G., Qu C., Zhang S. Separation of variables of a generalized porous medium equation with nonlinear source *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, vol. 275, pp. 44–59.
18. Kaptsov O.V., Verevkin I.V. Differential constraints and exact solutions of nonlinear diffusion equations. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2003, vol. 36, pp. 1401–1414.
19. Zhang S.L., Lou S.Y., Qu C.Z. New variable separation approach: Application to nonlinear diffusion equations. *J. Physics A: Math. Gen.*, 2003, vol. 36, no. 49, pp. 12223–12242.
20. Vaneva O.O., Johnpillai A.G., Popovych R.O., Sophocleous C. Extended group analysis of variable coefficient reaction-diffusion equations with power nonlinearities *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, vol. 330, no. 2, pp. 1363–1386.
21. Ivanova N.M. Exact solutions of diffusion-convection equations. *Dynamics of PDE*, 2008, vol. 5, no. 2, pp. 139–171.
22. Jia H., Xu W., Zhao X., Li Z. Separation of variables and exact solutions to nonlinear diffusion equations with x -dependent convection and absorption. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 339, pp. 982–995.
23. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Unsteady axisymmetric boundary-layer equations: Transformations, properties, exact solutions, order reduction and solution method. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2015, vol. 74, pp. 40–50.
24. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional and generalized separable solutions to unsteady Navier – Stokes equations. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2016, vol. 79, pp. 88–98.
25. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Direct functional separation of variables and new exact solutions to axisymmetric unsteady boundary-layer equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2016, vol. 31, no. 1–3, pp. 11–20.
26. Polyanin A.D., Zhurov A.I. One-dimensional reductions and functional separable solutions to unsteady

- plane and axisymmetric boundary-layer equations for non-Newtonian fluids. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2016, vol. 85, pp. 70–80.
27. Cherniha R., Serov M., Pliukhin O. *Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2018.
 28. Polyanin A.D. Functional separable solutions of nonlinear convection–diffusion equations with variable coefficients. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2019, vol. 73, pp. 379–390.
 29. Polyanin A.D. Functional separable solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with variable coefficients. *Appl. Math. Comput.*, 2019, vol. 347, pp. 282–292.
 30. Polyanin A.D. Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2019, vol. 111, pp. 95–105.
 31. Polyanin A.D. Construction of functional separable solutions in implicit form for non-linear Klein – Gordon type equations with variable coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2019, vol. 114, pp. 29–40.
 32. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Separation of variables in PDEs using nonlinear transformations: Applications to reaction–diffusion type equations. *Appl. Math. Lett.*, 2020, vol. 1000, 106055.
 33. Zhurov A.I., Polyanin A.D. Symmetry reductions and new functional separable solutions of nonlinear Klein – Gordon and telegraph type equations. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 2020, vol. 27, no. 2, pp. 227–242.
 34. Wu J. *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*. New York, Springer, 1996.
 35. Jordan P.M., Dai W., Mickens R.E. A note on the delayed heat equation: instability with respect to initial data. *Mech. Res. Commun.*, 2008, vol. 35, pp. 414–420.
 36. Racke R. Instability of coupled systems with delay. *Commun. Pur. Appl. Anal.*, 2012, vol. 11, no. 5, pp. 1753–1773.
 37. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Vyazmin A.V. Exact solutions and qualitative features of nonlinear hyperbolic reaction-diffusion equations with delay. *Theor. Found. Chem. En+*, 2015, vol. 49, no. 5, pp. 622–635.
 38. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Reaction–diffusion equations with delay: Mathematical models and qualitative features. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2017, vol. 6, no. 1, pp. 41–55.
 39. Smith H.L., Zhao X.-Q. Global asymptotic stability of traveling waves in delayed reaction-Ddiffusion equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 2000, vol. 31, no. 3, pp. 514–534.
 40. Lv G., Wang M. Nonlinear stability of travelling wave fronts for delayed reaction diffusion equations. *Nonlinearity*, 2010, vol. 23, no. 4, 845.
 41. Chern I.-L. et al. Stability of non-monotone critical traveling waves for reaction–diffusion equations with time-delay. *J. Differ. Equations*, 2015, vol. 259, no. 4, pp. 1503–1541.
 42. Lv G., Wang Z. Stability of traveling wave solutions to delayed evolution equation. *J. Dyn. Control Syst.*, 2015, vol. 21, no. 2, pp. 173–187.
 43. Mei M. et al. Asymptotic stability of travelling waves for Nicholson’s blowflies equation with diffusion. *P. Roy. Soc. Edinb. A.*, 2004, vol. 134, pp. 579–594.
 44. M. Mei et al. Traveling wavefronts for time-delayed reaction–diffusion equation: (I) Local nonlinearity. *J. Differ. Equations*, 2009, vol. 247, no. 2, pp. 495–510.
 45. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nonlinear delay reaction–diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions. *Appl. Math. Lett.*, 2015, vol. 46, pp. 38–43.
 46. S.V. Meleshko, S. Moyo. On the complete group classification of the reaction-diffusion equation with a delay. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 338, pp. 448–466.
 47. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2013, vol. 54, pp. 115–126.
 48. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction–diffusion equations and more complex nonlinear equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 417–430.
 49. Polyanin A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction–diffusion equations. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 59, pp. 16–22.
 50. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, pp. 409–416.
 51. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nonlinear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions. *Appl. Math. Lett.*, 2014, vol. 37, pp. 43–48.
 52. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Non-linear instability and exact solutions to some delay reaction-diffusion systems. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 62, pp. 33–40.
 53. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 67, pp. 267–277.
 54. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The generating equations method: Constructing exact solutions to delay reaction–diffusion systems and other non-linear coupled delay PDEs. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2015, vol. 71, pp. 104–115.
 55. Sorokin V.G. Tochnye resheniya nekotoryh nelineynykh uravnenij i sistem uravnenij v chastnyh proizvodnykh s zapazdyvaniem [Exact solutions of some nonlinear partial differential equations with delay and systems of such equations]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2016, vol. 5, no. 3, pp. 199–219 (in Russian).
 56. Polyanin A.D. Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay and variable coefficients. *Appl. Math. Lett.*, 2019, vol. 90, pp. 49–53.
 57. Sorokin V.G., Polyanin A.D. Nonlinear partial differential equations with delay: Linear stability/instability of solutions, numerical integration. *J. Physics: Conf. Series*, 2019, vol. 1205, 012053.

58. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Generalized and functional separable solutions to non-linear delay Klein – Gordon equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 8, pp. 2676–2689.
59. Long F.-S., Meleshko S.V. On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein – Gordon equation with a delay. *Math. Methods Appl. Sciences.*, 2016, vol. 39, no. 12, pp. 3255–3270.
60. Long F.-S., Meleshko S.V. Symmetry analysis of the nonlinear two-dimensional Klein – Gordon equation with a time-varying delay. *Math. Methods Appl. Sciences.*, 2017, vol. 40, no. 13, pp. 4658–4673.
61. Sorokin V.G. Tochnye resheniya nelinejnyh telegrafnyh uravnenij s zapazdyvaniem [Exact solutions of nonlinear telegraph equations with delay]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2019, vol. 8, no. 5, pp. 453–464 (in Russian).
62. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of non-linear differential-difference equations of a viscous fluid with finite relaxation time. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2013, vol. 57, pp. 116–122.