

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ ОБОБЩЕННЫМ УРАВНЕНИЕМ КУРАМОТО–СИВАШИНСКОГО В ПЕРЕМЕННЫХ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

© 2020 г. С. Ф. Лаврова<sup>1,\*</sup>, Н. А. Кудряшов<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup> *Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия*

*\*e-mail: infuriatedot@gmail.com*

*\*\*e-mail: nakudr@gmail.com,*

Поступила в редакцию 18.05.2020 г.

После доработки 18.05.2020 г.

Принята к публикации 09.06.2020 г.

Обобщенное уравнение Курамото–Сивашинского используется для описания большого количества нелинейных физических процессов. В данной работе проведено изучение нелинейных динамических режимов, описываемых обобщенным уравнением Курамото–Сивашинского в переменных бегущей волны. Основной задачей работы является изучение влияния дисперсионного члена на подавление хаотических режимов. Уравнение Курамото–Сивашинского в переменных бегущей волны сведено к нормальной системе уравнений и для векторного поля этой системы в трехмерном фазовом пространстве рассчитана дивергенция. Найдены значения параметра при которых изучаемая система является диссипативной. Для трех различных степеней нелинейности уравнения построена бифуркационная диаграмма, показывающая изменение динамических режимов системы при варьировании параметра перед дисперсионным членом. Помимо этого для трех рассматриваемых моделей построен график старшего ляпуновского показателя как функции бифуркационного параметра. Вычисление ляпуновских экспонент было проведено по алгоритму Беннетина. Установлено, что при некоторых значениях дисперсионного параметра в системах наблюдается хаотический режим. Анализ динамических режимов по графикам ляпуновских показателей идет в согласии с построенными бифуркационными диаграммами. Описаны сценарии перехода к хаосу. Приведены фазовые портреты для некоторых динамических режимов трех изучаемых систем.

*Ключевые слова:* бифуркационная диаграмма, уравнения в частных производных, ляпуновские показатели, хаос

**DOI:** 10.1134/S2304487X20020091

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Обобщенное уравнение Курамото–Сивашинского имеет вид

$$u_t + u^m u_x + u_{xx} + \beta u_{xxx} + u_{xxxx} = 0. \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) при  $m = 1$  и  $\beta = 0$  было независимо выведено Курамото [1] для угловой фазовой турбулентности системы трех реакционно-диффузионных уравнений, моделирующих реакцию Белоусова–Жаботинского и Сивашинским [2–4] для моделирования мелких термальных диффузионных нестабильностей ламинарного волнового фронта.

Также это уравнение возникает при описании множества нелинейных физических процессов, таких как, например, стекание жидкости с наклонных поверхностей [5] и вертикальных колонн [6] и т.д.

При  $m = 1$  уравнение (1.1) изучалось многими авторами с использованием как аналитических, так и численных подходов. В работах [9–11] приведены некоторые аналитические решения (1.1). Пенлеве анализ исследуемого уравнения проведен в [12]. В работе [13] численно изучается сценарий перехода к хаосу в (1.1) при  $\beta = 0$ . В [14] динамические режимы уравнения (1.1) описаны аналитически. Ляпуновские показатели изучаемой динамической системы при  $\beta = 0$  приведены в [15].

При  $m \neq 1$  уравнение (1.1) также применяется для описания физических процессов. В [17] оно было выведено для описания нелинейных длинных волн в вязко-эластичной трубе.

В данной работе исследуется влияние дисперсионного члена  $\beta u_{xxx}$  на динамические режимы уравнения (1.1) в переменных бегущей волны при различных степенях нелинейности  $m = 1, 2, 3$ . Во

втором разделе уравнение (1.1) сведено к нормальной системе обыкновенных дифференциальных уравнений в переменных бегущей волны. В третьем разделе для полученной системы строятся бифуркационные диаграммы. Четвертая секция посвящена вычислению старших ляпуновских показателей как функции бифуркационного параметра  $\beta$ .

## 2. ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ КУРАМОТО–СИВАШИНСКОГО В ПЕРЕМЕННЫХ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Уравнение (1.1) можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению используя переменные бегущей волны

$$u(z) = y(z), \quad z = x - Vt,$$

получим уравнение

$$y_{zzz} + \beta y_{zz} + y_z + \frac{1}{m+1} y^{m+1} - Vy = 0. \quad (2.1)$$

Тогда нормальная система уравнений, соответствующая (2.1), выглядит следующим образом

$$y_z = u, \quad u_z = r, \quad r_z = Vy - \frac{1}{m+1} y^{m+1} - u - \beta r. \quad (2.2)$$

Векторное поле системы уравнений (2.2) в трехмерном фазовом пространстве имеет следующий вид

$$\mathbf{L}(y, u, r) = \left\{ u, r, Vy - \frac{1}{m+1} y^{m+1} - u - \beta r \right\}. \quad (2.3)$$

Дивергенция этого векторного поля:

$$\operatorname{div}(\mathbf{L}) = \frac{\partial L_y}{\partial y} + \frac{\partial L_u}{\partial u} + \frac{\partial L_r}{\partial r} = -\beta, \quad (2.4)$$

что говорит о том, что система консервативная, если  $\beta = 0$  и диссипативная, если  $\beta > 0$ .

Согласно теореме Пуанкаре–Бендиксона, в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с размерностью фазового пространства, большей или равной трем, осуществляется хаотический режим динамики. Классическими инструментами изучения нелинейных динамических режимов системы (2.2) являются построение ее бифуркационной диаграммы и расчета зависимости старшего ляпуновского показателя от параметра.

## 3. БИФУРКАЦИОННЫЕ ДИАГРАММЫ УРАВНЕНИЯ КУРАМОТО–СИВАШИНСКОГО В ПЕРЕМЕННЫХ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Построение бифуркационной диаграммы позволяет качественно определить характер нелинейной динамики системы [16, 20].

В данной работе бифуркационная диаграмма строилась следующим образом. Значения  $y$  из сечения Пуанкаре откладывались по оси ординат, а величины варьируемого параметра  $\beta$  – по оси абсцисс. Сечение решения было проведено плоскостью  $u = 0$  в положительном направлении изменения переменной  $y$ .

Для  $m = 1$  при скорости бегущей волны  $V = 0.8$  бифуркационная диаграмма представлена на рис. 1. Такое значение скорости бегущей волны выбрано, потому в этом случае при трех степенях нелинейности в системах есть хаотические режимы. При  $\beta \gtrsim 0.8$  решение является стационарной точкой (рис. 1а). При уменьшении бифуркационного параметра режим динамики несет сначала одноперіодический характер, затем двухперіодический, затем имеет период четыре. После в системе возникает хаос с промежутками квазиперіодического поведения (рис. 1б–с). Некоторые фазовые портреты описанных динамических режимов представлены на рис. 2–7.

Для  $m = 2$  при скорости бегущей волны  $V = 0.8$  бифуркационная диаграмма представлена на рис. 8. При значениях  $\beta \gtrsim 1.6$  решение выходит на стационарную точку. Затем одноперіодический режим сменяется двухперіодическим с кратким окном режима периода четыре, который с уменьшением снова переходит в режим с периодом два, а затем с периодом 5. При  $\beta \lesssim 0.7$  в системе начинается хаотический режим с краткими вставками періодических режимов. Примеры фазовых портретов для этого случая представлены на рис. 9–14.

Для  $m = 3$  при скорости бегущей волны  $V = 0.8$  бифуркационная диаграмма представлена на рис. 15. При значениях  $\beta \gtrsim 2.4$  решение является стационарной точкой. Уменьшение бифуркационного параметра ведет к бифуркациям удвоения периода и последующему промежутку хаотических режимов с квазиперіодическими окнами. Примеры фазовых портретов для этого случая представлены на рис. 16–21.

Таким образом, в рассмотренных ситуациях при одинаковой скорости бегущей волны уменьшение параметра  $\beta$  ведет к появлению хаотического поведения в системе через бифуркации удвоения периода при  $m = 1$  и  $m = 3$ . При  $m = 2$  переход к хаосу осуществляется также через ква-

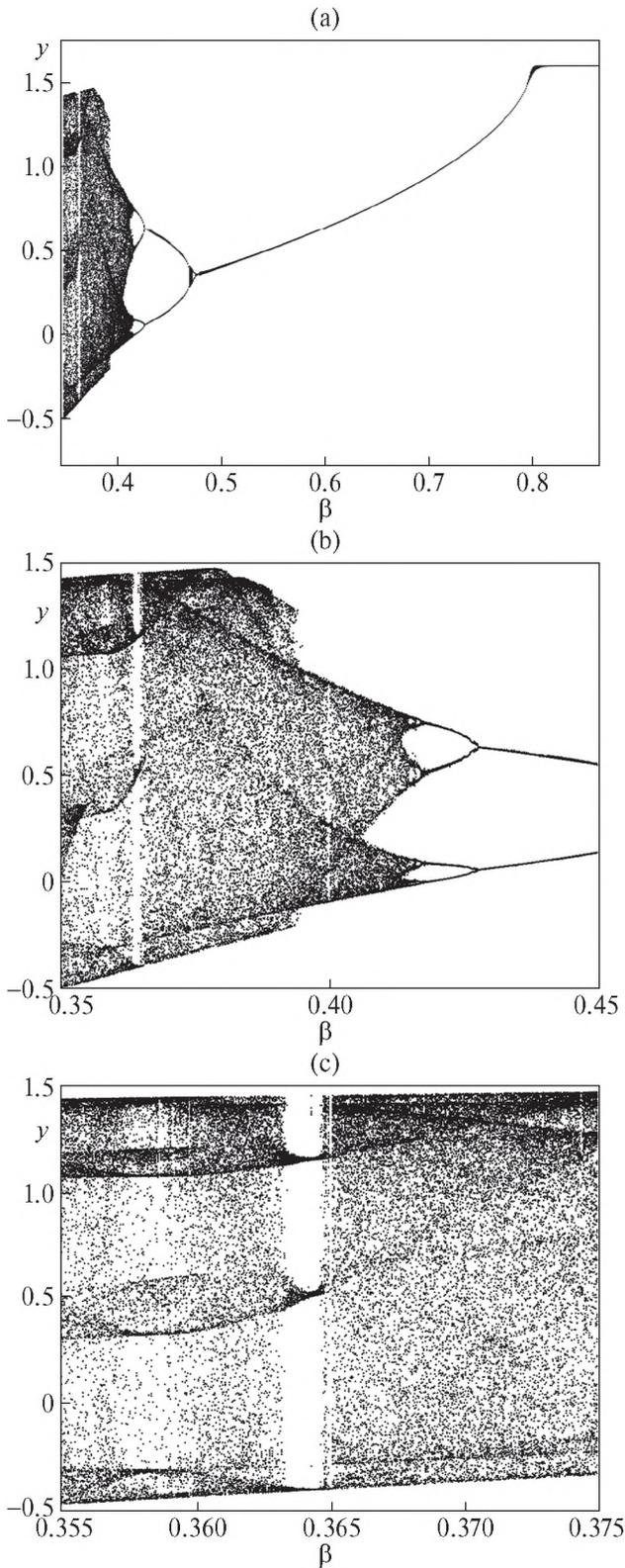


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма системы уравнений (2.2) при  $V = 0.5$ ,  $m = 1$  в плоскости  $\beta - y$ .

зипериодические режимы, но с более сложным образом изменяющимся периодом. Также при  $m = 2$  хаотическое окно имеет большую ширину,

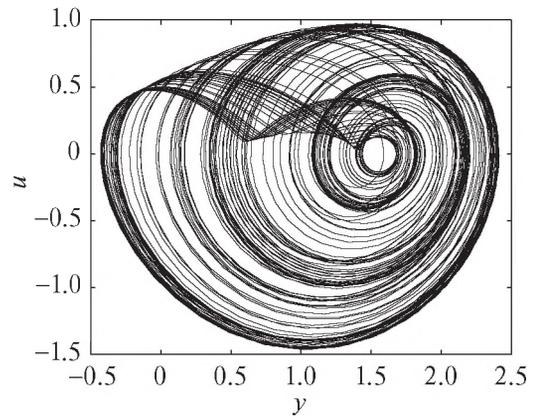


Рис. 2. Хаотический однополосный аттрактор  $\beta = 0.36$ ,  $m = 1$ .

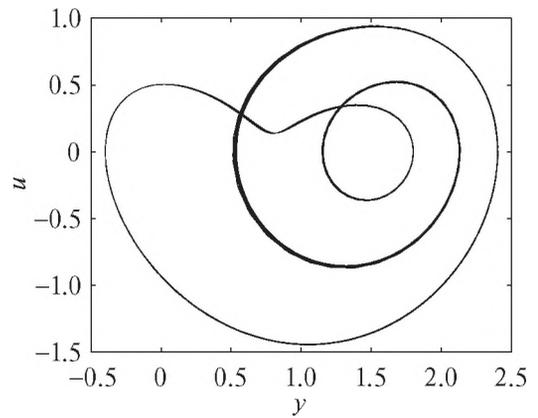


Рис. 3. Аттрактор периода 3  $\beta = 0.3645$ ,  $m = 1$ .

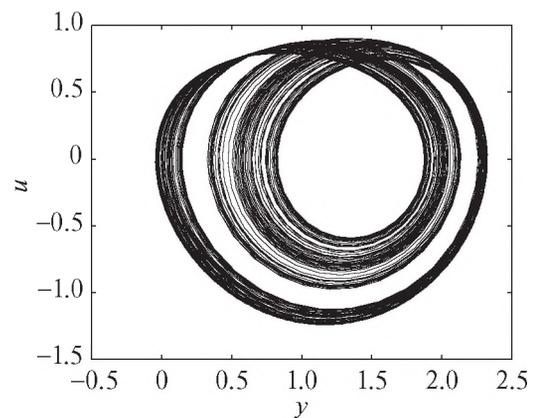


Рис. 4. Хаотический двухполосный аттрактор  $\beta = 0.41$ ,  $m = 1$ .

в то время как при  $m = 1$  и  $m = 3$  их ширина примерно одинакова, однако квазипериодические вставки при  $m = 3$  шире, чем при  $m = 1$ .

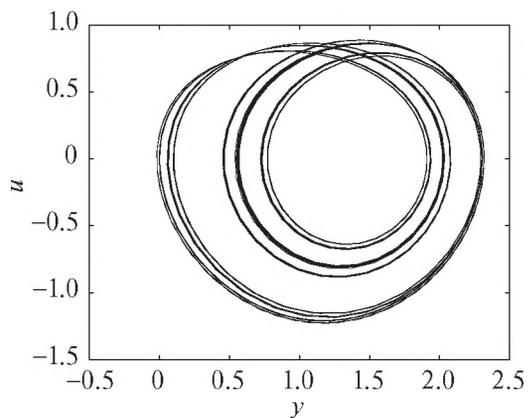


Рис. 5. Аттрактор периода 8  $\beta = 0.415$ ,  $m = 1$ .

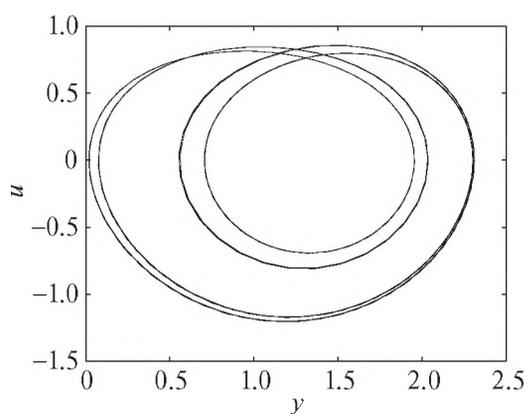


Рис. 6. Аттрактор периода 4  $\beta = 0.423$ ,  $m = 1$ .

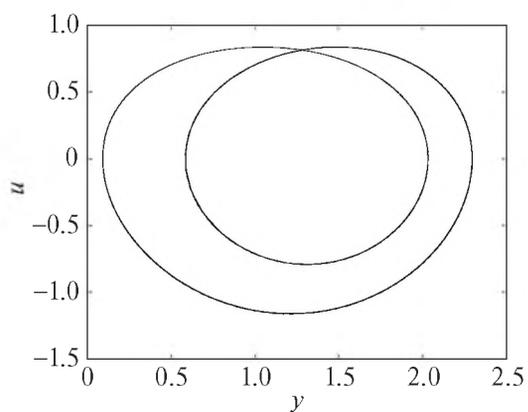


Рис. 7. Аттрактор периода 2  $\beta = 0.44$ ,  $m = 1$ .

#### 4. СТАРШИЕ ЛЯПУНОВСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ УРАВНЕНИЯ КУРАМОТО–СИВАШИНСКОГО В ПЕРЕМЕННЫХ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Старший ляпуновский показатель является количественным критерием наличия хаотическо-

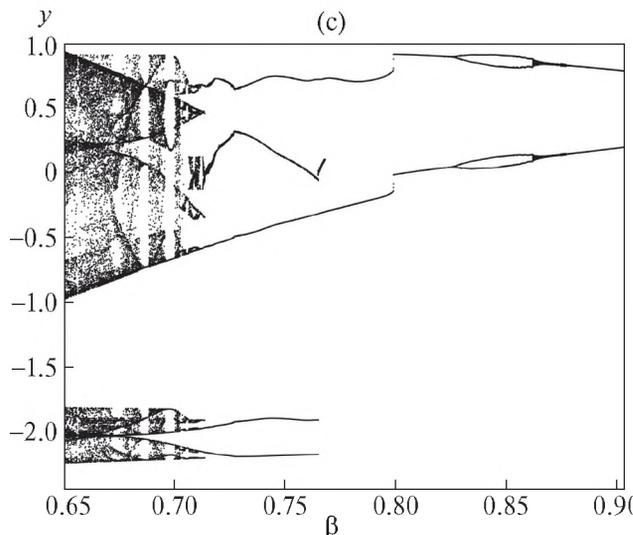
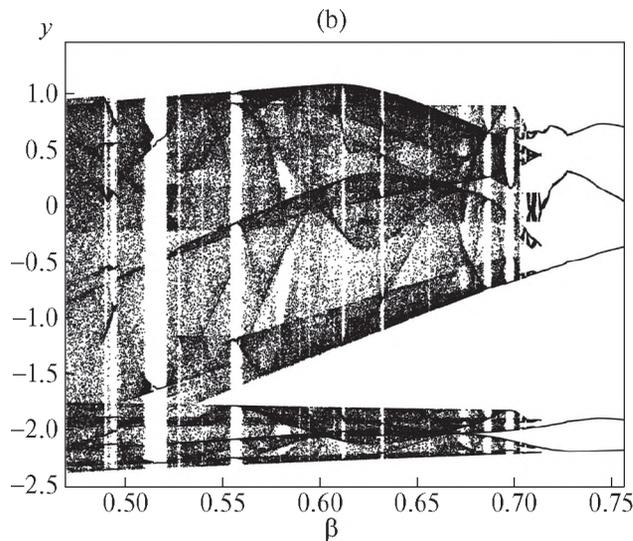
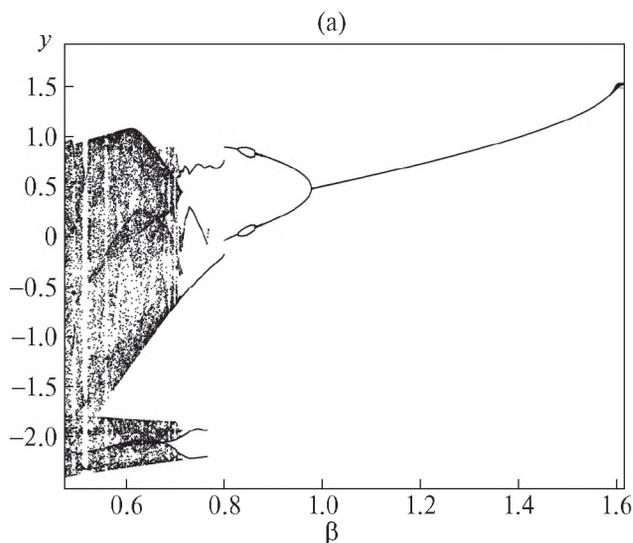


Рис. 8. Бифуркационная диаграмма системы уравнений (2.2) при  $V = 0.8$ ,  $m = 2$  в плоскости  $\beta - y$ .

го динамического режима поведения в динамической системе. Если старший ляпуновский пока-

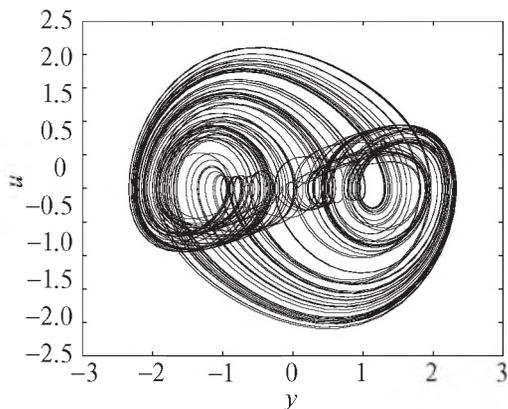


Рис. 9. Хаотический аттрактор  $\beta = 0.5, m = 2$ .

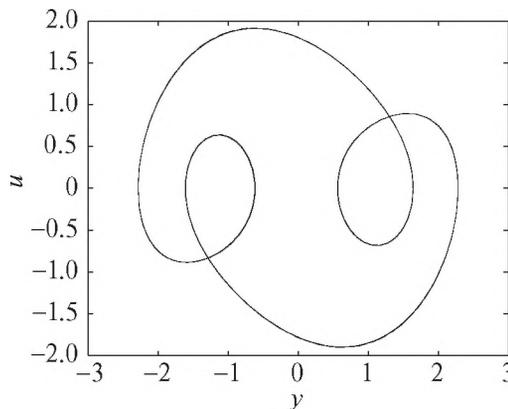


Рис. 10. Аттрактор периода 3  $\beta = 0.515, m = 2$ .

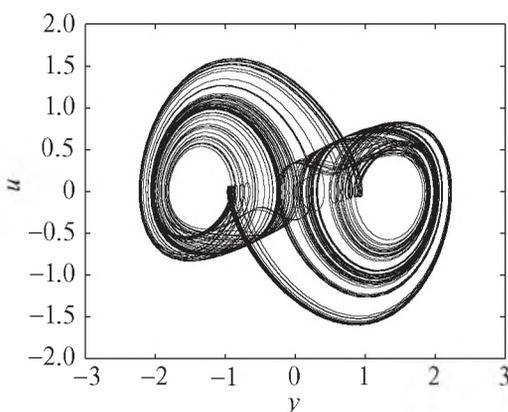


Рис. 11. Хаотический аттрактор  $\beta = 0.6, m = 2$ .

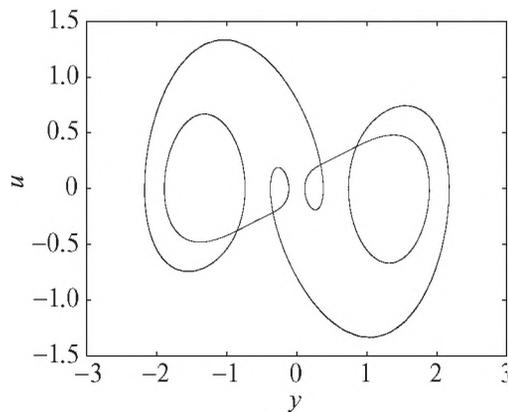


Рис. 12. Аттрактор периода 5  $\beta = 0.725, m = 2$ .

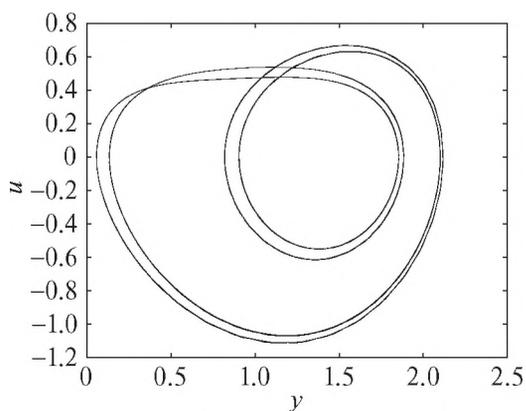


Рис. 13. Аттрактор периода 4  $\beta = 0.85, m = 2$ .

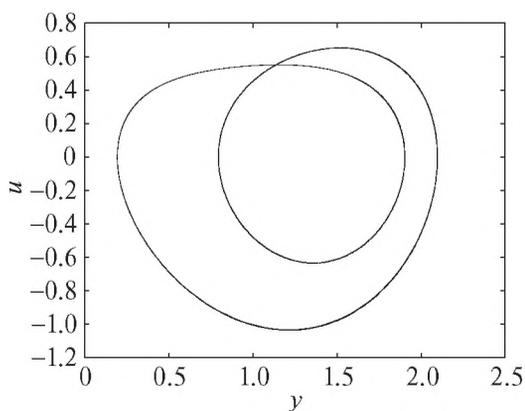


Рис. 14. Аттрактор периода 2  $\beta = 0.9, m = 2$ .

затель  $\lambda$  аттрактора положительный, то аттрактор является хаотическим, если  $\lambda = 0$ , то квазипериодическим или периодическим, если  $\lambda < 0$ , то притягивающее множество – стационарная точка.

Ляпуновские показатели качественно описывают степень расхождения близких траекторий

системы. Для обнаружения хаотического поведения достаточно рассчитать старший ляпуновский показатель. Алгоритм его вычисления следующий. После достаточного для выхождения системы на аттрактор времени выбирается начальная точка фазового пространства  $y_0$ . Затем рассмат-

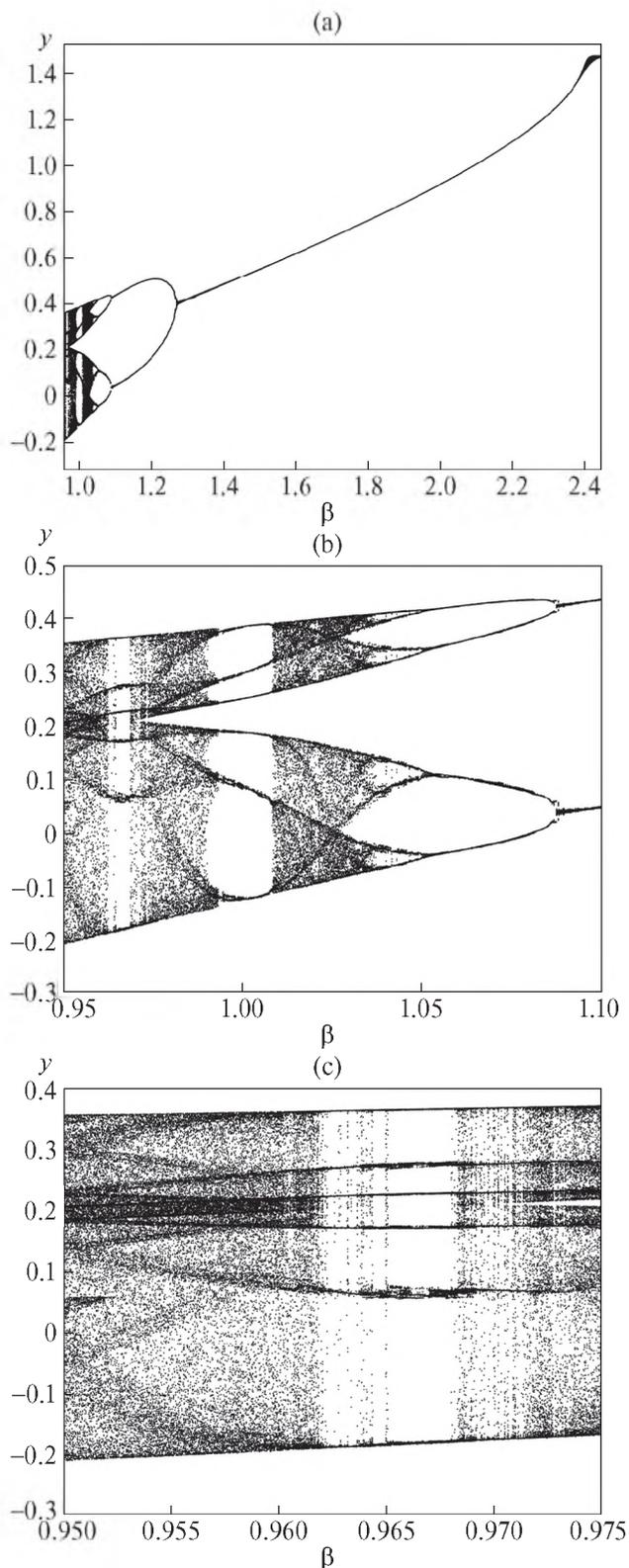


Рис. 15. Бифуркационная диаграмма системы уравнений (2.2) при  $V = 0.8, m = 3$  в плоскости  $\beta - y$ .

риваются выходящая из точки  $y_0$  невозмущенная траектория и выходящая из точки  $y_0 + \delta v_0$  возму-

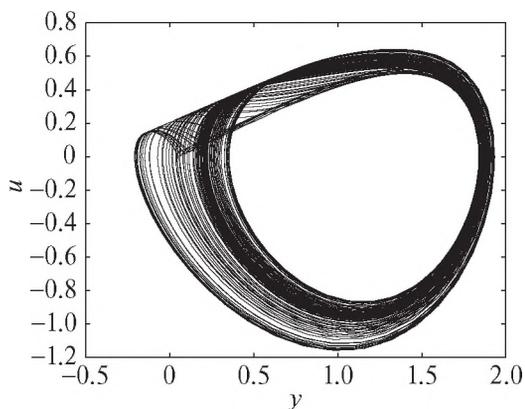


Рис. 16. Хаотический однополосный аттрактор  $\beta = 0.95, m = 3$ .

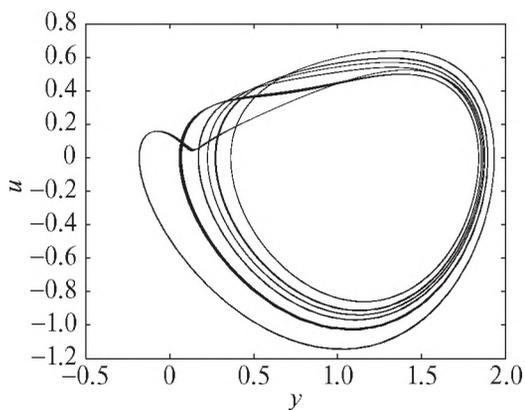


Рис. 17. Аттрактор периода 6  $\beta = 0.966, m = 3$ .

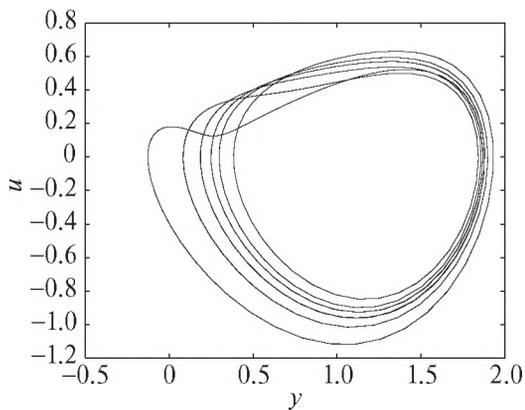


Рис. 18. Аттрактор периода 5  $\beta = 0.1, m = 3$ .

щенная траектория. В данной работе выбран вектор начального возмущения с единичной нормой  $\delta v_0 = (1, 0, 0)$ . Выбрав интервал времени  $T = 1$  и одновременно решая численно систему уравне-

ний (2.2) и систему уравнений, описывающую эволюцию малого возмущения  $\delta\mathbf{v} = (\delta y, \delta u, \delta r)$

$$\begin{pmatrix} \delta y_z \\ \delta u_z \\ \delta r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ V - y^m & -1 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta y \\ \delta u \\ \delta r \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

получаем вектор состояния и его возмущение в момент  $T$ :  $\mathbf{v}(T) = \mathbf{v}_1$ ,  $\delta\mathbf{v}(T) = \delta\tilde{\mathbf{v}}_1$ .  $\|\delta\tilde{\mathbf{v}}_1\|$  описывает изменение нормы вектора возмущения за время  $T$ . Переопределив вектор возмущения так, чтобы у него была единичная норма:  $\delta\mathbf{v}_1 = \delta\tilde{\mathbf{v}}_1/\|\delta\tilde{\mathbf{v}}_1\|$ , продолжим численно решать системы уравнений (2.2) и (4.1) с начальными условиями  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_1 + \delta\mathbf{v}_1$ . Затем снова переопределим вектор возмущения в момент времени  $2T$  и продолжим решать рассматриваемые системы уравнений с меняющимися на каждом шаге начальными условиями в течение  $M$  шагов. Эволюция амплитуды возмущения системы характеризуется старшим ляпуновским показателем, так как начальное условие  $\mathbf{v}_0$  взято на аттракторе, а начальное возмущение траектории выбрано наугад. Фактор изменения амплитуды за  $M$  шагов определяется как

$$P = \frac{1}{M} \prod_{n=1}^M \|\delta\tilde{\mathbf{v}}_n\|, \quad (4.2)$$

а старший ляпуновский показатель оценивается как

$$\Lambda = \frac{1}{M} \ln(P) = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \ln(\|\delta\tilde{\mathbf{v}}_n\|). \quad (4.3)$$

При проведении расчетов взято количество шагов  $M = 15000$ .

Старший ляпуновский показатель как функция бифуркационного параметра  $\beta$  для трех изображен на рис. 22–24. Из них отчетливо видно как при уменьшении параметра  $\beta$  происходит переход к хаотическому динамическому режиму. Полученный результат идет в согласии с бифуркационными диаграммами, обсуждаемыми в предыдущем разделе.

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ нелинейных динамических режимов обобщенного уравнения Курамото–Сивашинского в переменных бегущей волны. Для трех различных степеней нелинейности уравнения построены бифуркационные диаграммы и графики зависимости старшего ляпуновского показателя от дисперсионного параметра. Обнаружено, что увеличение бифуркационного парамет-

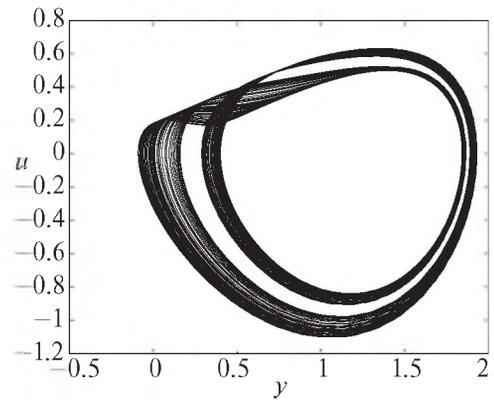


Рис. 19. Хаотический двуполосный аттрактор  $\beta = 1.025$ ,  $m = 3$ .

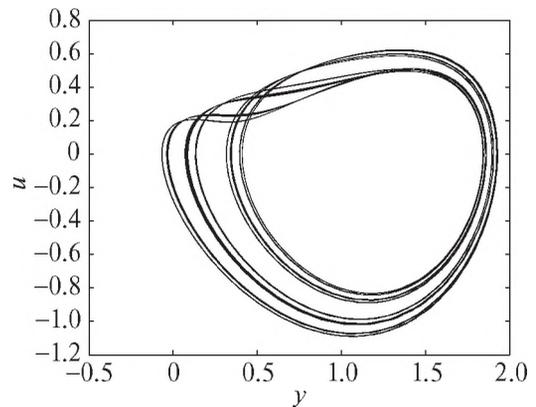


Рис. 20. Аттрактор периода 8  $\beta = 1.04$ ,  $m = 3$ .

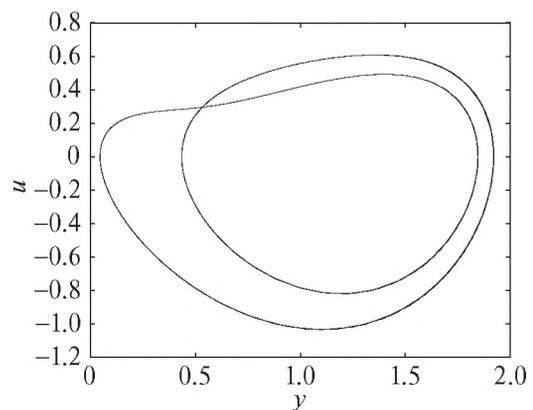


Рис. 21. Аттрактор периода 2  $\beta = 1.1$ ,  $m = 3$ .

ра ведет к подавлению хаотического поведения в системе. Описаны сценарии перехода к хаосу при уменьшении параметра  $\beta$ .

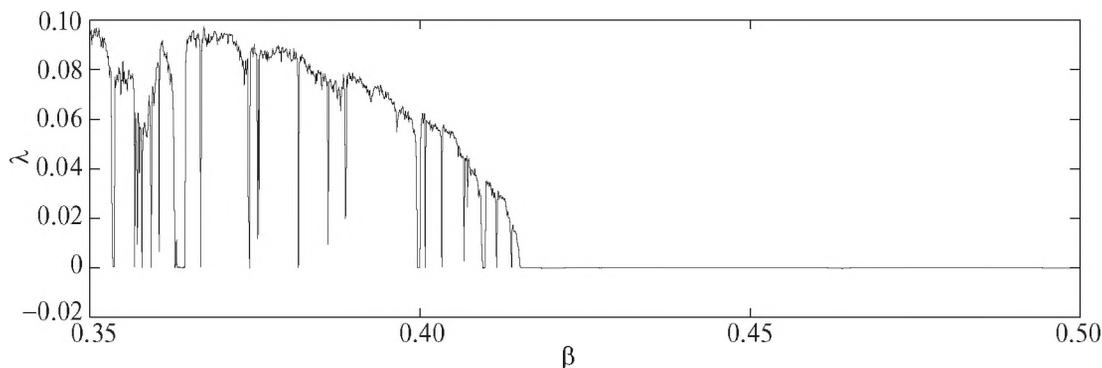


Рис. 22. Зависимость старшего ляпуновского показателя от параметра  $\beta$ ,  $V = 0.8$ ,  $m = 1$ .

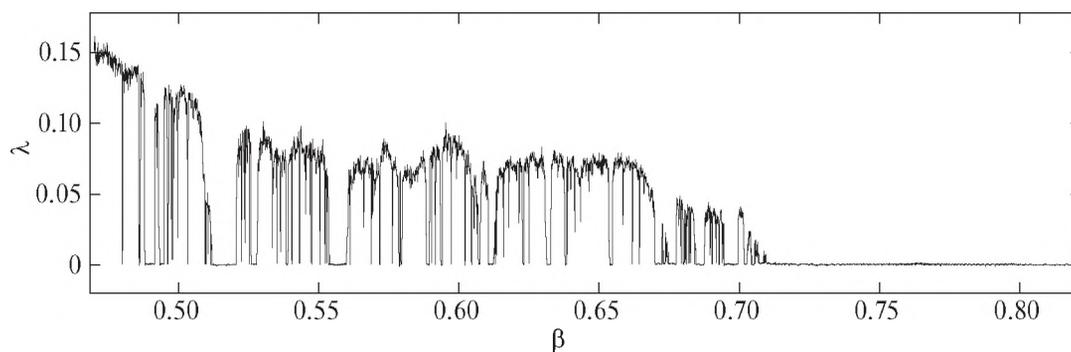


Рис. 23. Зависимость старшего ляпуновского показателя от параметра  $\beta$ ,  $V = 0.8$ ,  $m = 2$ .

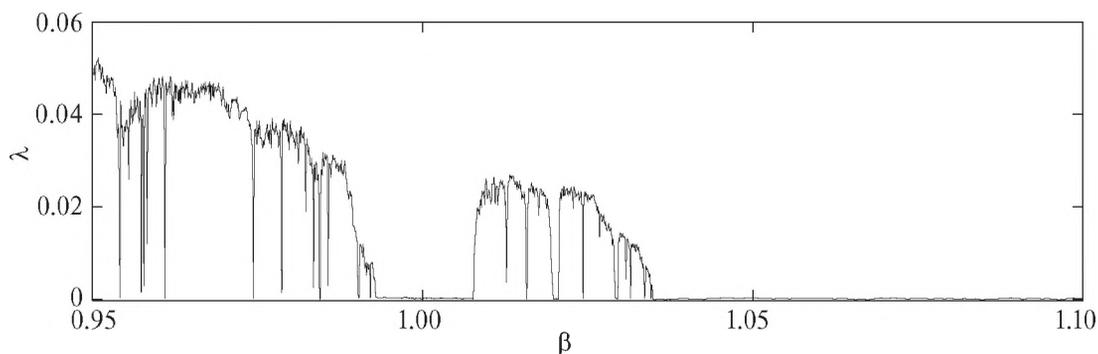


Рис. 24. Зависимость старшего ляпуновского показателя от параметра  $\beta$ ,  $V = 0.8$ ,  $m = 3$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kuramoto Yoshiki, Toshio Tsuzuki. Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium // Progress of theoretical physics. 1976. V. 55. № 2. P. 356–369.
2. Sivashinsky G.I. Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames – I. Derivation of basic equations // Acta astronautica. 1977. V. 4. P. 1177–1206.
3. Michelson D.M., Sivashinsky G.I. Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames – II. Numerical experiments // Acta astronautica. 1977. V. 4. № 11–12. P. 1207–1221.
4. Sivashinsky G.I. On flame propagation under conditions of stoichiometry // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1980. V. 39. № 1. P. 67–82.
5. Tsvlodub O.Yu. Stationary travelling waves on a film flowing down an inclined plane // Fluid Dynamics. 1980. V. 15. № 4. P. 591–594.
6. Shlang T., Sivashinsky G.I. Irregular flow of a liquid film down a vertical column // Journal de Physique. 1982. V. 43. № 3. P. 459–466.

7. *Kuramoto Yoshiki*. Diffusion-induced chaos in reaction systems // Progress of Theoretical Physics Supplement. 1978. V. 64. P. 346–367.
8. *Sivashinsky G.I.* Large cells in nonlinear Marangoni convection // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1982. V. 4. № 2. P. 227–235.
9. *Kudryashov N.A.* Exact solutions of the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation // Physics Letters A. 1990. V. 147. № 5–6. P. 287–291.
10. *Michelson D.* Steady solutions of the Kuramoto-Sivashinsky equation // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1986. V. 19. № 1. P. 89–111.
11. *Kudryashov N.A.* Solitary and periodic solutions of the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation. 2011. arXiv preprint arXiv:1112.5707.
12. *Conte R., Micheline M.* Painleve analysis and Backlund transformation in the Kuramoto-Sivashinsky equation // Journal of Physics A: Mathematical and General. 1989. V. 22. № 2. P. 169.
13. *Hyman J.M., Nicolaenko B.* The Kuramoto-Sivashinsky equation: a bridge between PDE's and dynamical systems // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1986. V. 18. № 1–3. P. 113–126.
14. *Nicolaenko B., Scheurer B., Temam R.* Some global dynamical properties of the Kuramoto-Sivashinsky equations: nonlinear stability and attractors // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1985. V. 16. № 2. P. 155–183.
15. *Manneville P.* Liapounov exponents for the Kuramoto-Sivashinsky model. Macroscopic Modelling of Turbulent Flows. Springer, Berlin, Heidelberg, 1985. P. 319–326.
16. *Brummitt Ch.D., Sprott J.C.* A search for the simplest chaotic partial differential equation // Physics Letters A. 2009. V. 373. № 31. P. 2717–2721.
17. *Kudryashov N.A., Sinel'shchikov D.I., Chernyavsky I.L.* Nonlinear evolution equations for description of perturbations in a viscoelastic tube // Nelineinaya Dinamika [Russian Journal of Nonlinear Dynamics]. 2008. V. 4. № 1. P. 69–86.
18. *Benettin G. et al.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory // Meccanica. 1980. V. 15. № 1. P. 9–20.
19. *Sprott J.C.* Elegant chaos: algebraically simple chaotic flows. World Scientific, 2010.
20. *Lakshmanan Muthusamy, Shanmuganathan Rajaseekar.* Nonlinear dynamics: integrability, chaos and patterns. Springer Science & Business Media, 2012.

---

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 2, pp. 129–138

---

## Nonlinear Dynamical Processes Described by the Traveling Wave Reduction of the Generalized Kuramoto–Sivashinsky Equation

S. F. Lavrova<sup>a,#</sup> and N. A. Kudryashov<sup>a,##</sup>

<sup>a</sup> National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

<sup>#</sup>e-mail: infuriatedot@gmail.com

<sup>##</sup>e-mail: nakudr@gmail.com

Received May 18, 2020; revised May 18, 2020; accepted June 9, 2020

**Abstract**—The generalized Kuramoto–Sivashinsky equation is used to describe a lot of nonlinear physical processes. In this work, dynamical regimes described by the traveling wave reduction of the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation are examined. The main goal of this work is to study how the dispersive term suppresses chaotic regimes in the system. The traveling wave reduction of the Kuramoto–Sivashinsky equation is written in the normal form. The divergence of the vector field this system has been calculated. The parameters for which the studied system is dissipative have been determined. The bifurcation diagram is plotted for three different nonlinearity degrees of the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation. The dispersion term coefficient is chosen as the bifurcation parameter. The largest Lyapunov exponent is plotted as a function of the dispersion parameter for the three studied cases. The Benettin algorithm is employed to compute largest Lyapunov exponents. It has been found that a chaotic regime is observed in the system at some values of the dispersion parameter. Routes to chaos are described. Phase portraits for some of the dynamical regimes are presented.

**Keywords:** bifurcation diagram, partial differential equations, Lyapunov exponents, chaos

DOI: 10.1134/S2304487X20020091

## REFERENCES

1. Kuramoto, Yoshiki, and Toshio Tsuzuki. "Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium." *Progress of theoretical physics* 55.2 (1976): 356–369.
2. Sivashinsky G.I. "Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames—I. Derivation of basic equations." *Acta astronautica* 4 (1977): 1177–1206.
3. Michelson Daniel M., and Gregory I. Sivashinsky. "Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames—II. Numerical experiments." *Acta astronautica* 4.11-12 (1977): 1207–1221.
4. Sivashinsky G.I. "On flame propagation under conditions of stoichiometry." *SIAM Journal on Applied Mathematics* 39.1 (1980): 67–82.
5. Tselodub O.Yu. "Stationary travelling waves on a film flowing down an inclined plane." *Fluid Dynamics* 15.4 (1980): 591–594.
6. Shlang T., and Sivashinsky G.I. "Irregular flow of a liquid film down a vertical column." *Journal de Physique* 43.3 (1982): 459–466.
7. Kuramoto Yoshiki. "Diffusion-induced chaos in reaction systems." *Progress of Theoretical Physics Supplement* 64 (1978): 346–367.
8. Sivashinsky G.I. Large cells in nonlinear Marangoni convection // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1982. V. 4. № 2. C. 227–235.
9. Kudryashov Nikolai A. "Exact solutions of the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation." *Physics Letters A* 147.5-6 (1990): 287–291.
10. Michelson Daniel. "Steady solutions of the Kuramoto-Sivashinsky equation." *Physica D: Nonlinear Phenomena* 19.1 (1986): 89–111.
11. Kudryashov Nikolai A. "Solitary and periodic solutions of the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation." *arXiv preprint arXiv:1112.5707* (2011).
12. Conte Robert, and Micheline Musette. "Painleve analysis and Backlund transformation in the Kuramoto-Sivashinsky equation." *Journal of Physics A: Mathematical and General* 22.2 (1989): 169.
13. Hyman James M., and Basil Nicolaenko. "The Kuramoto-Sivashinsky equation: a bridge between PDE's and dynamical systems." *Physica D: Nonlinear Phenomena* 18.1-3 (1986): 113–126.
14. Nicolaenko Basil, Bruno Scheurer, and Roger Temam. "Some global dynamical properties of the Kuramoto-Sivashinsky equations: nonlinear stability and attractors." *Physica D: Nonlinear Phenomena* 16.2 (1985): 155–183.
15. Manneville Paul. "Liapounov exponents for the Kuramoto-Sivashinsky model." *Macroscopic Modelling of Turbulent Flows*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1985. 319–326.
16. Brummitt Charles D., and Sprott J.C. "A search for the simplest chaotic partial differential equation." *Physics Letters A* 373.31 (2009): 2717–2721.
17. Kudryashov Nikolai Alekseevich, Dmitrii Igorevich Sinel'shchikov, and I. L. Chernyavsky. "Nonlinear evolution equations for description of perturbations in a viscoelastic tube." *Nelineinaya Dinamika [Russian Journal of Nonlinear Dynamics]* 4.1 (2008): 69–86.
18. Benettin Giancarlo, et al. "Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part I: Theory." *Meccanica* 15.1 (1980): 9–20.
19. Sprott Julien C. *Elegant chaos: algebraically simple chaotic flows*. World Scientific, 2010.
20. Lakshmanan Muthusamy, and Shanmuganathan Rajaseekar. *Nonlinear dynamics: integrability, chaos and patterns*. Springer Science & Business Media, 2012.