ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 2, с. 139–146

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.9

ЦИКЛИЧЕСКИЕ И НЕЦИКЛИЧЕСКИЕ ИТЕРАЦИИ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

© 2020 г. В. П. Чернявский

Саровский физико-технический институт – филиал Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ", Саров, 607190, Россия

Поступила в редакцию 24.02.2020 г.
После доработки 24.02.2020 г.
Принята к публикации 28.04.2020 г.

Рассматриваются функциональные итерационные процессы $f_k(x) = f(f_{k-1}(x))$, $k = 2,3,\ldots$, где начальная функция $f_1(x) = f(x)$ относится к классу невырожденных дробно-линейных функций. Целью работы является изучение всевозможных типов итерационных процессов, которые возникают при варьировании параметров $f(x)$. Для решения возникших рекуррентных соотношений используются матричные методы и комплексные числа. В работе в общем виде получены формулы для коэффициентов k-й итерации при любом k в зависимости от коэффициентов начальной функции. Определены два инварианта итерационных процессов. Показано, что циклы длины $n > 2$ могут существовать только для комплексно-сопряженных собственных значений матрицы коэффициентов дробно-линейной функции. Найдены все начальные функции, порождающие циклы произвольной заданной длины $n \geq 2$, и получены явные выражения, определяющие коэффициенты любого элемента цикла через коэффициенты начальной функции. Приведен пример цикла максимальной длины $n = 6$, у которого все коэффициенты каждой итерации являются целыми числами.
Для нециклических процессов исследовано поведение k-й итерации при $k \to \infty$ и в случаях сходимости определены предельные функции. Нециклические итерационные процессы подразделяются на сходящиеся (действительные собственные значения) и расходящиеся (комплексно-сопряженные значения, не удовлетворяющие условиям цикличности). Сходящиеся итерации имеют своей предельной функцией константу.

Ключевые слова: дробно-линейные функции, итерации, итерационные процессы, циклы, собственные значения

DOI: 10.1134/S2304487X20020029

ВВЕДЕНИЕ

Дробно-линейная функция

$$f(x) = \frac{Ax+B}{Cx+D}, \qquad (1)$$

где A, B, C, $D \in R$ и $AD - BC \neq 0$, имеет широкое распространение в математике. Если вычислить суперпозицию $f(f(x))$,то получится также дробно-линейная функция с другими коэффициентами. Возникает вопрос, можно ли, последовательно вычисляя итерации $f(f(x)), f(f(f(x))),\ldots$, на заданном шаге получить исходную функцию $f(x)$. Введем обозначения: $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(f(x))$, $f_k(x) = \underbrace{f(f(\ldots f(}_{k}x)\ldots))$. Назовем циклом длины n последовательность функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ такую, что $f_k(x) \neq x$ при $k < n$ и

$$f_n(x) = x. \qquad (2)$$

При этом функцию $f_1(x) = f(x)$ будем называть начальной функцией, порождающей цикл, а $f_k(x)$ – элементом цикла или k-й итерацией, $k = 1, 2, \ldots, n$.

На первом этапе решается следующая задача: *для произвольного заданного натурального n найти все начальные функции вида* (1), *порождающие цикл длины n.*[1]

В заключительной части работы рассматриваются нециклические итерационные процессы $f_{k+1}(x) = f(f_k(x))$, $k = 1,2,\ldots$, такие, что $f_k(x) \neq x$ при любом k.

Функция (1) вырождается в константу, если $AD = BC$, или в линейную функцию ($C = 0$, $D \neq 0$, $A \neq 0$). Обе эти возможности объединяются формулой: $f(x) = kx + b$. Для этого тривиального слу-

[1] Существование циклов произвольной длины n показано в [1], где также приведены формулы для циклов с $n \leq 4$ и $n = 6$.

чая легко находятся все возможные начальные функции, порождающие циклы: $f(x) = x$, $f(x) = b$, $n = 1$; $f(x) = -x + b$, $n = 2$. В дальнейшем будут рассматриваться только *невырожденные начальные функции*.

1. ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ k-й ИТЕРАЦИИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Обозначим

$$f_k(x) = \frac{A_k x + B_k}{C_k x + D_k}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Для коэффициентов начального элемента $f_1(x)$ имеем: $A_1 = A, \ldots, D_1 = D$. Вычисляя суперпозицию $f(f_k(x))$, находим $(k+1)$-й элемент

$$f_{k+1}(x) = f(f_k(x)) = \frac{(AA_k + BC_k)x + AB_k + BD_k}{(CA_k + DC_k)x + CB_k + DD_k},$$

что позволяет получить соотношения, связывающие коэффициенты последовательных итераций

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= AA_k + BC_k, \quad B_{k+1} = AB_k + BD_k, \\ C_{k+1} &= CA_k + DC_k, \quad D_{k+1} = CB_k + DD_k. \end{aligned} \tag{4}$$

Систему рекуррентных соотношений (4) можно решить в матричном виде. Каждой итерации (3) поставим в соответствие матрицу коэффициентов

$$F_k = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $F_1 = F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Сравнение результата умножения матриц

$$FF_k = \begin{pmatrix} AA_k + BC_k & AB_k + BD_k \\ CA_k + DC_k & CB_k + DD_k \end{pmatrix}$$

с формулами (4) показывает, что преобразование коэффициентов k-й итерации в точности соответствует правилу перемножения матриц. Следовательно, $F_{k+1} = FF_k = F^{k+1}$, и тогда условие (2) в матричной форме принимает вид

$$F^n = G, \tag{6}$$

где $G = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} = gE$, $g \neq 0$, и $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица.

Поскольку дробно-линейную функцию (1) берем невырожденной, то $C \neq 0$, и тогда можно уменьшить число начальных параметров функции, поделив в (1) числитель и знаменатель на C. В результате имеем начальную функцию

$$f(x) = \frac{ax + b}{x + c} \tag{7}$$

и соответствующую ей начальную матрицу

$$F_1 = F = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $a, b, c \in \mathrm{R}$ и $b \neq ac$.

Условие (6), при котором n-я итерация превращается в тождественное преобразование $id(x) = x$, определяет возможность существования цикла и его длину n. Для упрощения процедуры возведения в степень диагонализируем матрицу F в тех случаях, когда это возможно. Пусть $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ – соответствующая матрице F диагональная матрица из собственных значений. Характеристическое уравнение $\det(F - \lambda E) = 0$ имеет вид

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b = 0. \tag{9}$$

Его корни

$$\lambda_1 = \frac{a + c + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a + c - \sqrt{\Delta}}{2}, \tag{10}$$

где $\Delta = (a + c)^2 - 4(ac - b)$ – дискриминант уравнения.

Отметим, что корнем уравнения (9) не может быть $\lambda = 0$, так как это противоречило бы условию невырожденности $b - ac \neq 0$ функции (7). Координаты собственного вектора $X_\lambda = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, соответствующего собственному значению λ, определяются из системы

$$\begin{cases} (a - \lambda)x_1 + bx_2 = 0, \\ x_1 + (c - \lambda)x_2 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Рассмотрим решения в зависимости от корней характеристического уравнения.

1.1. Различные собственные значения $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Решая систему (11) последовательно для λ_1 и λ_2, находим базис из собственных векторов $E_1^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 - c \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2^* = \begin{pmatrix} \lambda_2 - c \\ 1 \end{pmatrix}$ и матрицу перехода $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 - c & \lambda_2 - c \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ от базиса $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ к базису E_1^*, E_2^*. Вычисляя обратную матрицу $T^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & c - \lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 - c \end{pmatrix}$ и используя формулу $F = T\Lambda T^{-1}$ [2], имеем

$$F_k = F^k = T\Lambda^k T^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} \lambda_1^k(\lambda_1 - c) - \lambda_2^k(\lambda_2 - c) & (\lambda_1^k - \lambda_2^k)(\lambda_1 - c)(c - \lambda_2) \\ \lambda_1^k - \lambda_2^k & \lambda_1^k(c - \lambda_2) + \lambda_2^k(\lambda_1 - c) \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что для корней λ_1 и λ_2 уравнения (9) выполняются соотношения: $\lambda_1 + \lambda_2 = a + c$, $\lambda_1\lambda_2 = ac - b$ и $(\lambda_1 - c)(c - \lambda_2) = b$, в результате преобразований находим матрицу коэффициентов k-й итерации

$$F_k = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}c & \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}b \\ \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2} & \frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}a \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

В итоге получаем явное выражение для итерации $f_k(x)$ в зависимости от λ_1 и λ_2, определяемых в (10) коэффициентами a, b, c начальной функции (7):

$$f_k(x) = \frac{(\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} - c(\lambda_1^k - \lambda_2^k))x + b(\lambda_1^k - \lambda_2^k)}{(\lambda_1^k - \lambda_2^k)x + \lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} - a(\lambda_1^k - \lambda_2^k)}, \qquad (13)$$
$$k = 1, 2, \ldots.$$

1.2. $\Delta = 0$, действительные кратные корни $\lambda_1 = \lambda_2$

Базис из собственных векторов в этом случае состоит из одного вектора. Матрица F недиагонализируема, т.к. геометрическая кратность корня не совпадает с алгебраической [3]. Выражение для F_k вначале формально находим предельным переходом из (12) при $\lambda_1 \to \lambda_2 = \lambda$:

$$F_k = \begin{pmatrix} (k+1)\lambda^k - kc\lambda^{k-1} & kb\lambda^{k-1} \\ k\lambda^{k-1} & (k+1)\lambda^k - ka\lambda^{k-1} \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Докажем справедливость полученной формулы методом математической индукции.

База индукции. При $k = 1$ матрица (14) равна

$$\begin{pmatrix} 2\lambda - c & b \\ 1 & 2\lambda - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}$$

и совпадает с начальной матрицей (8).

Далее, предположив, что равенство (14) верно при каком-нибудь натуральном k, вычисляем произведение матриц

$$F_{k+1} = FF_k =$$
$$= \begin{pmatrix} (k+2)\lambda^{k+1} - (k+1)c\lambda^k & (k+1)b\lambda^k \\ (k+1)\lambda^k & (k+2)\lambda^{k+1} - (k+1)a\lambda^k \end{pmatrix}.$$

Сравнение полученного результата с матрицей (14), показывает, что индуктивный переход $k \to k + 1$ завершен. Формула доказана.

Элементы матрицы (14) позволяют найти

$$f_k(x) = \frac{((k+1)\lambda - kc)x + kb}{kx + (k+1)\lambda - ka}.$$

Учитывая, что $\Delta = 0$ и, соответственно, $b = -\frac{(a-c)^2}{4}$ и $\lambda = \frac{a+c}{2}$, получаем формулу для k-й итерации в случае кратных корней:

$$f_k(x) = \frac{\left(\frac{(a+c)(k+1)}{2} - kc\right)x - k\frac{(a-c)^2}{4}}{kx + \frac{(a+c)(k+1)}{2} - ka}, \qquad (15)$$
$$k = 1, 2, \ldots.$$

1.3. $\Delta < 0$, комплексно-сопряженные корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + c \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

Так как $\Delta < 0$, то $ac - b > 0$. Представим комплексные величины λ_1 и λ_2 в показательной форме: $\lambda_1 = re^{i\alpha}$, $\lambda_2 = re^{-i\alpha}$, где $r = \sqrt{ac - b} = |\lambda_1| = |\lambda_2|$, а величина α определяется системой

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a+c}{2\sqrt{ac-b}}, \\ \sin\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{(a+c)^2}{4(ac-b)}}. \end{cases} \qquad (16)$$

Поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то для вычислений можно применить формулу (13). Используя равенство

$$\lambda_1^k - \lambda_2^k = r^k(e^{ik\alpha} - e^{-ik\alpha}) = 2i(\sqrt{ac-b})^k \sin k\alpha,$$

получаем формулу для $f_k(x)$ в случае комплексно-сопряженных корней

$$f_k(x) =$$
$$= \frac{(\sqrt{ac-b}\sin(k+1)\alpha - c\sin k\alpha)x + b\sin k\alpha}{x\sin k\alpha + \sqrt{ac-b}\sin(k+1)\alpha - a\sin k\alpha}, \qquad (17)$$
$$k = 1, 2, \ldots.$$

Стоящий в знаменателе дроби многочлен относительно x имеет степень, не выше первой, и не может тождественно равняться 0. Действительно, если предположить противное, тогда $\sin k\alpha = 0$ и $\sin(k+1)\alpha = 0$, отсюда следует, что $\sin\alpha = 0$. Последнее означает, что $\mathrm{Im}\,\lambda_{1,2} = 0$ – противоречие.

Каждую невырожденную итерацию (3) произвольного итерационного процесса можно представить в аналогичном (7) виде

$$f_k(x) = \frac{a_k x + b_k}{x + c_k}, \tag{18}$$

где $a_k c_k - b_k \neq 0$ – условие того, что $f_k(x)$ не вырождается в константу. Областью определения X итерационного процесса назовем пересечение областей определения всех функций $f_k(x)$:

$$X = R \setminus \bigcup_{k=1}^{M} \{-c_k\},$$

где множество точек разрыва $\bigcup_{k=1}^{M} \{-c_k\}$ является не более, чем счетным ($M = n - 1$ для цикла длины n и $M = +\infty$ для нецикличного процесса). Преобразуем (18), выделив целую часть дроби

$$f_k(x) = a_k + \frac{b_k - a_k c_k}{x + c_k}.$$

На плоскости Oxy графиком функции является гипербола с асимптотами $x = -c_k$ и $y = a_k$ и с центром в точке $(-c_k, a_k)$.

Лемма.

1. *Если начальная функция не вырождена, то любая последующая итерация не вырождается в константу.*

2. *Любой итерационный процесс с невырожденными итерациями* (18) *имеет инварианты:*

$$\begin{aligned} b_k &= b, \\ c_k - a_k &= c - a, \end{aligned} \tag{19}$$

где a, b, c – коэффициенты начальной функции (7).

Для доказательства первого утверждения леммы заметим, что $ac - b \neq 0$ в силу невырожденности функции (7). Тогда при любом k определитель матрицы (5) отличен от нуля:

$$\det F_k = \det(F^k) = (\det F)^k = (ac - b)^k \neq 0,$$

а это означает, что $f_k(x)$ не вырождается в константу.

Справедливость второго утверждения легко проверяется с помощью формул (13), (15) и (17), преобразованных вначале к виду (18).

В дополнение к п. 1 леммы заметим, что условие невырожденности $f(x)$ не запрещает, тем не менее, некоторой итерации превращаться в тождественное преобразование $id_X(x) = x$.

Инвариант (19) на плоскости Oxy имеет наглядный геометрический смысл: центры $(-c_k, a_k)$ гипербол (18) при изменении k двигаются по прямой $x + y = a - c$.

2. ЦИКЛЫ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ДЛИНЫ

Циклы длины $n = 1$ для невырожденных функций невозможны. Действительно, предположив, что $f(f(x)) = f(x)$, получим $f(x) = x$ или $f(x) = b$ – вырожденные функции. Рассмотрим возможность выполнения равенств (2), (6), определяющих завершение цикла на n-м шаге, в зависимости от корней характеристического уравнения (9).

2.1. Действительные различные корни $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Для выполнения условия (2) потребуем, чтобы в знаменателе дроби (13) коэффициент при x равнялся 0: $\lambda_1^n - \lambda_2^n = 0$. Так как корни действительны и различны, то последнее равенство может выполняться, только если $\lambda_1 = -\lambda_2$ при четном n. Но тогда по теореме Виета для уравнения (9) имеем: $a + c = 0$. Использование равенства $c = -a$ уже для второй итерации дает $f_2(x) = \dfrac{(a^2 + b)x}{a^2 + b} = x$ при $b \neq -a^2$. Это означает, что *в случае действительных различных корней*:

а) все циклы длины $n = 2$ имеют вид

$$\begin{gathered} f_1(x) = f(x) = \frac{ax + b}{x - a}, \\ f_2(x) = x, \quad (a, b \in R;\ b \neq -a^2); \end{gathered} \tag{20}$$

б) циклы длины $n > 2$ невозможны.

2.2. Кратные корни $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Условие (6) не может быть выполнено, т.к. из формулы (14) следует, что коэффициент $C_n = n\lambda^{n-1}$ матрицы F_n не обращается в 0 ($\lambda = 0$ не является корнем уравнения (9)). Циклы не существуют.

2.3. Комплексно-сопряженные корни

Для выполнения условия (2) необходимо, чтобы коэффициент при x в знаменателе дроби (17) равнялся 0: $\sin n\alpha = 0$ тогда $n\alpha = \pi m$ и, значит, величина α зависит от m и n:

$$\alpha_{mn} = \frac{\pi m}{n} \quad (m \in Z, n \in N). \tag{21}$$

Поскольку условие $a + c = 0$ приводит к циклу длины $n = 2$ и этот случай разобран в п. 2.1, то теперь $a + c \neq 0$. Поделим второе уравнение (16) на первое:

$$\tan\frac{\pi m}{n} = \frac{\sqrt{4(ac - b) - (a + c)^2}}{a + c} \tag{22}$$

и выразим отсюда b:

$$b = -\frac{(a - c)^2 + (a + c)^2 \tan^2\alpha_{mn}}{4}, \tag{23}$$

где α_{mn} определена в (21). Подставляя в (17) $\sqrt{ac-b} = \dfrac{a+c}{2\cos\alpha_{mn}}$ из (16) и b, в итоге получаем формулы для элементов $f_k(x)$ всех циклов длины $n > 2$:

$$f_1(x) = f(x) = \frac{ax - \dfrac{(a-c)^2 + (a+c)^2\tan^2\alpha_{mn}}{4}}{x+c},$$
$$f_k(x) = \frac{\left(\dfrac{(a+c)\sin(k+1)\alpha_{mn}}{2\cos\alpha_{mn}\sin k\alpha_{mn}} - c\right)x - \dfrac{(a-c)^2 + (a+c)^2\tan^2\alpha_{mn}}{4}}{x + \dfrac{(a+c)\sin(k+1)\alpha_{mn}}{2\cos\alpha_{mn}\sin k\alpha_{mn}} - a}, \quad k = 2,\dots,n-1, \quad f_n(x) = x, \tag{24}$$

где $a, c \in R$, $a+c \neq 0$, $\alpha_{mn} = \pi m/n$, $m = 1,2,\dots,[n/2]$ и НОД$(m, n) = 1$.

Ограничения на индекс m обусловлены требованием избежать повторений полученных результатов. В силу периодичности функции тангенс, входящей в (23), из множества целых значений для m достаточно брать лишь $m = 1, 2, \dots, n-1$. Далее, используя тригонометрические формулы приведения, нетрудно проверить, что при замене m на $n - m$ величины b и $f_k(x)$ не изменятся, поэтому достаточно оставить $m = 1, 2, \dots, [n/2]$, где $[n/2]$ – целая часть числа $n/2$. Наконец, если m и n имеют общий делитель, то после сокращения на него формулы (24) определят элементы $f_k(x)$ цикла, имеющего длину, меньшую чем n. Значит, m и n взаимно просты. Для циклов длины n число различных значений m, удовлетворяющих перечисленным условиям, равно $\varphi(n)/2$, где $\varphi(n)$ – функция Эйлера (определяется как количество чисел от 1 до n, взаимно простых с n).

Формулы (24) совместно с (20) дают полное решение задачи нахождения всех циклов длины $n \geq 2$. Полученные результаты показывают, что все возможные циклы произвольной фиксированной длины образуют двухпараметрические семейства трехпараметрического множества невырожденных функций (7).

Поставим задачу несколько иначе. Пусть задана функция $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$ и требуется определить, зная коэффициенты a, b, c, является ли $f(x)$ начальной функцией какого-либо цикла и чему равна его длина.

Если $a + c = 0$, то имеем цикл (21) с $n = 2$, где условие $b \neq -a^2$ обеспечивает невырожденность $f(x)$. Других циклов при $n = 2$ нет.

Пусть $a + c \neq 0$.

Поскольку циклы с $n > 2$ для действительных корней характеристического уравнения (9) отсутствуют, остается случай комплексно-сопряженных корней, а тогда итерации $f_k(x)$ в общем виде определены формулами (17).

Обозначим $\alpha = \pi\beta$ и, учитывая из (16), что угол $\pi\beta$ может принадлежать только первой или второй четверти, найдем β, опуская слагаемые, кратные 2π:

$$\beta = \frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}\frac{a+c}{\sqrt{4(ac-b)-(a+c)^2}}. \tag{25}$$

Здесь $\beta \in (0;1)\backslash\{1/2\}$, т.к. $a + c \neq 0$. Отметим, что формула (25) справедлива как для циклических, так и нециклических процессов.

Если процесс цикличен и $n > 2$, тогда из (23) имеем

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}\frac{a+c}{\sqrt{4(ac-b)-(a+c)^2}},$$

причем $\dfrac{m}{n} \in (0;1)\backslash\{1/2\}$. Правая часть равенства является рациональным числом, поэтому для циклических процессов величина β принимает только рациональные значения. Обратно, если коэффициенты функции $f(x)$ таковы, что величина β существует и рациональна, то ее можно записать в виде несократимой дроби m/n. При $\beta = 1/2$ имеем цикл длины 2. Если $\beta \neq 1/2$, тогда цикл с $n > 2$ существует и описывается формулами (24), причем знаменатель несократимой дроби m/n однозначно определяет длину цикла. Следовательно, для нециклических процессов величина β может принимать только иррациональные значения, $\beta \in (0;\ 1)\backslash Q$. Таким образом, справедливо утверждение:

Теорема 1. *Функция* $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$ *является начальной функцией цикла длины* $n > 2$ *только при выполнении условий:*

1. $a + c \neq 0$;
2. $\Delta < 0$;
3. $\beta \in (0;1) \cap Q$.

При этом длина цикла определяется однозначно.

Заметим, что выполнение второго условия обеспечивает также невырожденность начальной функции $f(x)$, т.к. из $\Delta < 0$ следует $ac - b > 0$.

Следует отметить, что множество элементов цикла длины n образует циклическую группу порядка n относительно операции суперпозиции функций, где в качестве единичного элемента берется функция $id_X(x) = x$, а образующим группу элементом является начальная функция $f(x)$. Поэтому на основании свойств циклических групп [4, 5] можно сразу привести некоторые свойства итерационных циклов длины n:

– в качестве начальной функции можно брать любой элемент $f_k(x)$, если только k и n взаимно просты. В частности, т.к. НОД$(n-1, n) = 1$, то, взяв начальную функцию $f_{n-1}(x) = f^{-1}(x)$, имеем цикл $f_{n-1}(x), f_{n-2}(x), ..., f_1(x)$, x – исходный цикл, проходимый в обратном порядке.

– Если n – простое число, то начальным элементом, порождающим цикл, кроме $f_1(x)$ может быть любой элемент $f_k(x)$, $k = 2, ..., n-1$.

– Если k является делителем n и $n/k = h$, то $f_k(x)$ является начальной функцией подцикла длины h: $f_k(x), f_{2k}(x), ..., f_{(h-1)k}(x)$, x и т.п.

Назовем целочисленным цикл, у которого все коэффициенты каждой итерации являются рациональными (целыми) числами, или становятся такими после умножения числителя и знаменателя итерации на некоторое ненулевое число (условие рациональности коэффициентов функции (3) равносильно условию целочисленности). Очевидно, что необходимым и достаточным условием целочисленности цикла является рациональность всех коэффициентов начальной невырожденной функции (7) (достаточность следует из формул (4)). Случай циклов с $n = 2$ тривиален, для циклов с $n > 2$ $(a + c \neq 0)$ из (23) следует, что $a, b, c \in Q \Leftrightarrow \tan^2(\pi m/n) \in Q$. Последнее условие в силу формулы $\cos 2\theta = (1 - \tan^2\theta)/(1 + \tan^2\theta)$ равносильно тому, что $\cos(2\pi m/n) \in Q$.

Теорема 2 [6, с. 168]. *Пусть* $0 < \alpha < 90°$. *Тогда, если угол* α *содержит рациональное число градусов и* $\alpha \neq 60°$, *то число* $\cos\alpha$ *иррационально.*

Применяя теорему и учитывая, что m и n взаимно просты, устанавливаем, что $n = 6$ – максимальное значение, при котором $\cos(2\pi m/n) \in Q$. Возьмем в (24) $a = 1$, $c = 2$, $n = 6$, $m = 1$. В результате получим цикл, у которого все коэффициенты каждой итерации являются целыми числами:

$$f_1(x) = \frac{x-1}{x+2}, \quad f_2(x) = -\frac{1}{x+1},$$
$$f_3(x) = -\frac{x+2}{2x+1}, \quad f_4(x) = -\frac{x+1}{x},$$
$$f_5(x) = -\frac{2x+1}{x-1}, \quad f_6(x) = x.$$

Это пример (не единственный) целочисленного цикла максимальной длины $n = 6$.

3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ НЕЦИКЛИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Выясним вопрос, что происходит с итерациями (18), если k неограниченно возрастает и при этом $f_k(x) \neq x$ при всех k. Введем обозначения

$$a_\infty = \lim_{k\to\infty} a_k, \quad c_\infty = \lim_{k\to\infty} c_k \qquad (26)$$

(в силу леммы $b_k = b$). Предел функциональной последовательности $\{f_k(x)\}$

$$f_\infty(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \frac{a_\infty x + b}{x + c_\infty},$$

вычисляемый при любом фиксированном значении $x \in X \backslash \{-c_\infty\}$, назовем предельной функцией нециклического итерационного процесса.

3.1. Комплексно-сопряженные корни

Преобразовав (17) к виду

$$f_k(x) = \frac{(\sqrt{ac-b}(\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \mathrm{ctg} k\alpha) - c)x + b}{x + \sqrt{ac-b}(\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \mathrm{ctg} k\alpha) - a},$$

заключаем, что существование предельной функции $f_\infty(x)$ равносильно существованию конечного или бесконечного предела

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{ctg} k\alpha = \lim_{k\to\infty} \mathrm{ctg}(k\pi\beta).$$

В силу иррациональности β последовательность $\{\mathrm{ctg}(k\pi\beta)\}$ определена при всех $k \in N$.

Теорема 3 [7, с. 121]. *Если* ξ *– любое иррациональное число, то бесконечная последовательность* $x_n = n\xi$, $n = 1, 2, ...$, *равномерно распределена по модулю* 1.

Следствие [7, с. 122]. *Если* ξ *– любое иррациональное число, то последовательность дробных частей* $\alpha_n = n\xi - [n\xi]$, $n = 1, 2, ...$ *всюду плотна в единичном интервале.*

Отсюда следует, что если взять произвольные $\xi', \xi'' \in (0; 1))\backslash Q$, $\xi' \neq \xi''$, то найдутся последовательности натуральных чисел $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$, такие что $n_k\beta = [n_k\beta] + \xi' + \delta_k$ и $m_k\beta = [m_k\beta] + \xi'' + \gamma_k$, где δ_k и γ_k – бесконечно малые при $k \to \infty$. Тогда $\lim_{k\to\infty} \mathrm{ctg}(n_k\pi\beta) = \mathrm{ctg}\pi\xi'$ и $\lim_{k\to\infty} \mathrm{ctg}(m_k\pi\beta) = \mathrm{ctg}\pi\xi'' \neq \mathrm{ctg}\pi\xi'$. Следовательно, $\lim_{k\to\infty} \mathrm{ctg}(k\pi\beta)$

не существует (ни число, ни бесконечность). Итерационный процесс расходится.

3.2. Действительные кратные корни

При вычислении пределов (26) берем коэффициенты a_k и c_k из (15).

Предельные значения коэффициентов: $a_\infty = \dfrac{a-c}{2}$, $c_\infty = \dfrac{c-a}{2}$; предельная функция: $f_\infty(x) = \dfrac{a-c}{2} = a_\infty$, $x \in X\backslash\{-c_\infty\}$.

При $k \to \infty$ центры $(-c_k, a_k)$ гипербол $f_k(x)$, двигаясь по прямой $x + y = a - c$, сходятся к точке $(-c_\infty, a_\infty)$, сама же функция $f_k(x)$ в пределе вырождается в константу (сходимость $f_k(x) \to f_\infty(x) = a_\infty$ на $X\backslash\{-c_\infty\}$ является неравномерной из-за точек бесконечного разрыва $x = -c_k$).

3.3. Действительные различные корни

Коэффициенты k-й итерации (18) находим из формулы (13)

$$a_k = \frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1^k - \lambda_2^k} - c, \quad c_k = \frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1^k - \lambda_2^k} - a,$$
$$b_k = b.$$

Для вычисления предела дроби $\dfrac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1^k - \lambda_2^k}$ поделим ее числитель и знаменатель на λ_2^k при $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ и, соответственно, на λ_1^k при $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ и воспользуемся пределом $\lim\limits_{k\to\infty} q^k = 0$, $|q| < 1$ (случаи $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ рассмотрены в пп. 3.1–2). Так как $|\lambda_1| > |\lambda_2| \Leftrightarrow a + c > 0$, то в зависимости от знака выражения $a + c$ получаются следующие результаты.

3.3.1. $a + c > 0$.

Предельные значения коэффициентов: $a_\infty = \dfrac{a - c + \sqrt{\Delta}}{2}$, $c_\infty = \dfrac{c - a + \sqrt{\Delta}}{2}$; предельная функция: $f_\infty(x) = \dfrac{a - c + \sqrt{\Delta}}{2} = a_\infty$, $x \in X\backslash\{-c_\infty\}$.

3.3.2. $a + c < 0$.

Предельные значения коэффициентов: $a_\infty = \dfrac{a - c - \sqrt{\Delta}}{2}$, $c_\infty = \dfrac{c - a - \sqrt{\Delta}}{2}$; предельная функция: $f_\infty(x) = \dfrac{a - c - \sqrt{\Delta}}{2} = a_\infty$, $x \in X\backslash\{-c_\infty\}$.

В каждом из случаев 3.3.1–2 при $k \to \infty$ центры $(-c_k, a_k)$ гипербол $f_k(x)$, двигаясь по прямой $x + y = a - c$, сходятся к точке $(-c_\infty, a_\infty)$, сама же последовательность $\{f_k(x)\}$ сходится неравномерно на $X\backslash\{-c_\infty\}$ к константе a_∞.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бродский Я.С., Слипенко А.К.* Функциональные уравнения. Киев.: Вища школа, 1983. 96 с.
2. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1999. 296 с.
3. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. М.: Наука, 1986. 400 с.
4. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968. 432 с.
5. *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре . М.: Наука, 1984. 416 с.
6. *Нивен А.* Числа рациональные и иррациональные. М.: Мир, 1966. 199 с.
7. *Чандрасекхаран К.* Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Мир, 1974. 188 с.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 2, pp. 139–146

Cyclic and Non-Cyclic Iterations of Linear-Fractional Functions

V. P. Cherniavsky

Sarov Physical Technical Institute, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Sarov, 607190, Russia

Received February 24, 2020; revised February 24, 2020; accepted April 28, 2020

Abstract—Functional iterative processes $f_k(x) = f(f_{k-1}(x))$, $k = 2,3,\ldots$, where the initial function $f_1(x) = f(x)$ belongs to the class of non-degenerate linear fractional functions are considered. The aim of this work is to study all types of iterative processes that arise when the parameters are varied. To solve the appearing recurrence relations, matrix methods and complex numbers are used. Formulas for the coefficients of the k_{th} iteration for any k depending on the coefficients of the initial function are obtained in the general form. Two invariants of iterative processes are defined. It is shown that cycles of the length $n > 2$ can exist only for complex conjugate eigenvalues of the coefficient matrix of a linear-fractional function. All initial functions that generate cycles of an arbitrary given length are found and explicit expressions are obtained for the coefficients of any element of the cycle in terms of the coefficients of the initial function. An example of a cycle of the maximum length $n = 6$, where all the coefficients of each iteration are integers, is given. For non-cyclic processes, the behavior of the k_{th} iteration is studied for $k \to \infty$ and limit functions are determined in the cases of convergence. Non-cyclic iterative processes are divided into converging (real eigenvalues) and diverging (complex conjugate values that do not satisfy cyclic conditions). Converging iterations have a constant function as their limit function.

Keywords: linear-fractional functions, iterations, iterative processes, cycles, eigenvalues

DOI: 10.1134/S2304487X20020029

REFERENCES

1. Brodsky J.S., Slipenko A.K. *Funktsional'nie uravnenia* [Functional equations]. Kiev, Visha Shkola Publ., 1983. 96 p. (in Russian).
2. Ilyin V.A., Poznyak E.G. *Lineinaya algebra* [Linear algebra]. Moscow, Nauka, 1999. 296 p. (in Russian).
3. Postnikov M.M. *Lektsii po geometrii* [Lectures on geometry]. Moscow, Nauka, 1986. 400 p. (in Russian).
4. Kurosh A.G. *Kurs vishei algebri* [Course in higher algebra]. Moscow, Nauka, 1968. 432p. (in Russian).
5. Faddeev D.K. *Lektsii po algebre* [Lectures on algebra]. Moscow, Nauka, 1984. 416 p. (in Russian).
6. Niven I. *Chisla ratsional'nie i irratsional'nie* [Numbers: rational and irrational]. Moscow, Mir, 1966. 199 p. (in Russian).
7. Chandrasekharan K. *Vvedenie v analiticheskuyu teoriyu chisel* [Introduction to analytic number theory]. Moscow, Mir, 1974. 188 p. (in Russian).