ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 2, с. 155–165

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 51-74

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И КОНЦЕНТРАЦИИ РАДИОНУКЛИДОВ В ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕМ ЭЛЕМЕНТЕ ЯДЕРНОГО РЕАКТОРА

© 2020 г. А. С. Салин[1,*], Н. А. Кудряшов[1,]**

[1] *Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия*

**e-mail: salin.alex01@gmail.com*

***e-mail: nakudr@gmail.com*

Поступила в редакцию 05.05.2020 г.
После доработки 05.05.2020 г.
Принята к публикации 09.06.2020 г.

В данной работе изучается распределение температуры в тепловыделяющем элементе ядерного реактора в радиальном направлении с учетом граничных условий третьего рода в пяти областях с разными характеристиками. Отдельно рассматривается задача с равенством нулю производной температуры на левой границе области решения как частный случай граничного условия третьего рода. В результате численного моделирования получено, что достаточно быстро вдоль радиального направления ТВЭЛа устанавливается постоянное распределение температуры. Поэтому рассматриваются стационарные уравнения теплопроводности в каждой из пяти областей, получено общее решение для каждой области. Для случая равенства нулю производной температуры на левой границе получен аналитический вид стационарного распределения температуры во всех областях. По результатам численного моделирования установлено, что достаточно быстро решение сходится к полученному в аналитическом виде. Кроме того, изучается распределение концентрации радионуклидов с учетом радиоактивных превращений. В качестве примера выбрана цепочка радиоактивного распада ^{131}Sn. Результаты численного моделирования представлены в виде графиков распределения концентрации вдоль радиуса ТВЭЛа. Основным результатом является программа, позволяющая проводить численное моделирование распределения температуры и концентрации радионуклидов при различных граничных условиях и для различных значений параметров тепловыделяющего элемента, которые может задавать пользователь программы.

Ключевые слова: температура, концентрация, распределение, ядерный реактор, тепловыделяющий элемент, численное моделирование

DOI: 10.1134/S2304487X2002011X

ВВЕДЕНИЕ

Результатом работы ядерного реактора является получение тепловой энергии от тепловыделяющего элемента, передача ее теплоносителю для последующего преобразования в электрическую. Поэтому важно контролировать и прогнозировать температурные поля внутри ТВЭЛа. Более того, распределение температуры в ТВЭЛе влияет на поведение продуктов деления диоксида урана в топливных таблетках, процессы диффузии и парообразования. Данная проблема широко изучалась на протяжении всего времени эксплуатации ядерных реакторов. В процессе работы реактора может меняться микроструктура топливной таблетки под действием протекающих в ней процессов. Одно из значительных изменений – формирование пористого рим-слоя по краю топливной таблетки. В [1, 2] приведены результаты численного моделирования распределения температуры в ТВЭЛе с учетом образования пористого рим-слоя и аналитическое решение стационарного уравнения теплопроводности. Также в процессе работы реактора топливный элемент может плавиться, если температура топливной таблетки превосходит по величине температуру плавления диоксида урана, что в свою очередь может привести к катастрофическим последствиям. В [3] рассматривается процесс плавления в топливном элементе ядерного реактора, приведены результаты численного моделирования. Также в [4] представлены результаты численного моделирования процесса плавления топливного элемента в критических состояниях реактора и представлена зависимость характеристик материала от температуры. В [5] изучается распределение температуры в топливном элементе ядерного реактора с

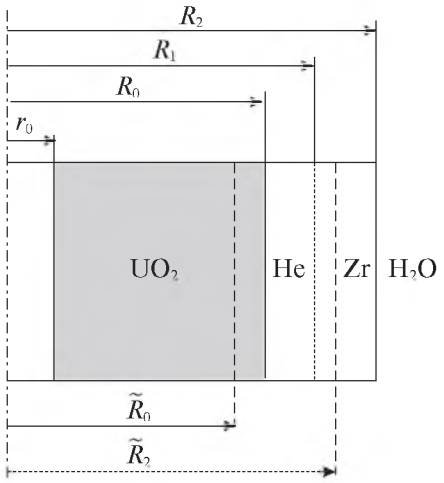

Рис. 1. Устройство тепловыделяющего элемента: r_0 — центральное отверстие, R_0 — радиус топливной таблетки, $\tilde{R}_0$ — радиус рим-слоя, R_1 — внешний радиус зазора между таблеткой и оболочкой ТВЭЛ, $\tilde{R}_2$ — радиус ZrO_2, R_2 — внешний радиус циркониевой оболочки.

оболочкой и без нее при непостоянном количестве выделяемого тепла. Также применялись и аналитические методы для моделирования поведения ядерного реактора [6]. Проблеме распространения, сорбции и диффузии радионуклидов в среде посвящены работы [7–12].

Так как проникновение радионуклидов в теплоноситель ядерного реактора является нежелательным эффектом, важно спрогнозировать их концентрацию и распределение внутри тепловыделяющего элемента в процессе работы. Процесс диффузии радионуклидов зависит от температурного поля внутри ТВЭЛа, поэтому в данной работе рассматривается распределение температуры и концентрации радионуклидов вдоль радиального направления тепловыделяющего элемента в процессе его работы. В разделе 1 приводится постановка задачи распределения температуры в ТВЭЛе с теплообменом на границах по закону Ньютона. Затем, в разделе 2 проводится обезразмеривание уравнения для удобства его исследования. В разделе 3 приведена разностная схема для численного моделирования процесса теплопроводности. Полученные результаты указывают на быстрое установление стационарного состояния в тепловыделяющем элементе. В разделе 4 получены общие решения для стационарного уравнения теплопроводности. Получена система из десяти алгебраических уравнений относительно произвольных коэффициентов, полученных при решении дифференциальных уравнений. В силу того, что оба граничных условия третьего рода, построить решения в аналитическом виде затруднительно. Так как практический интерес представляет случай равенства нулю производной температуры на левой границе, для этого случая были установлены произвольные постоянные и найден аналитический вид для решений стационарного уравнения теплопроводности в каждой области. В разделе 5 приводится постановка задачи распределения концентрации радионуклидов в ТВЭЛе с учетом радиоактивного распада. В разделе 6 приведена разностная схема для численного моделирования распределения концентрации радионуклидов и представлены результаты.

Таблица 1. Размеры тепловыделяющего элемента

r_0 (мм)	$\tilde{R}_0$ (мм)	R_0 (мм)	R_1 (мм)	$\tilde{R}_2$ (мм)	R_2 (мм)
0.75	3.770	3.775	3.865	4.150	4.550

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕМ ЭЛЕМЕНТЕ

Так как ТВЭЛ представляет собой длинный цилиндрический стержень, длина которого намного больше его толщины, задача рассматривается в цилиндрической системе координат с учетом симметрии вдоль оси стержня и по всем углам в плоскости, перпендикулярной ей. Элемент ТВЭЛа представлен на рис. 1.

Уравнение, описывающее процесс теплопереноса, запишется в виде

$$C(r,T)\rho(r,T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\chi(r,T)r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + q(r), \quad r_0 \le r \le R_2, \tag{1}$$

где $C(r,T)$ и $\rho(r,T)$ — удельная теплоемкость и плотность материала соответственно, $q(r)$ — мощность теплового источника, $\chi(r,T)$ — коэффициент теплопроводности.

Начальная температура считается постоянной и одинаковой во всех областях

$$T(r,t=0) = \psi_0. \tag{2}$$

Для рассмотрения более общего случая, полагается, что на границах происходит теплообмен по закону Ньютона

$$\chi(r=r_0,T)\frac{\partial T}{\partial r}(r=r_0,t) = \alpha_1(T(r_0,t)-\varphi_1), \tag{3}$$

$$\chi(r=R_2,T)\frac{\partial T}{\partial r}(r=R_2,t) = \alpha_2((\varphi_2 - T(R_2,t)). \tag{4}$$

Практический интерес представляет случай, когда на левой границе производная температуры равна нулю, то есть $\alpha_1 = 0$ в уравнении (3).

Задача решается в пяти областях:

1. Топливная таблетка ($r_0 \le r \le \tilde{R}_0$);
2. Рим-слой топливной таблетки ($\tilde{R}_0 \le r \le R_0$);

3. Зазор между таблеткой и оболочкой, заполненный гелием ($R_0 \le r \le R_1$);

4. Слой диоксида циркония в оболочке ($R_1 \le r \le \tilde{R}_2$);

5. Циркониевая оболочка ($\tilde{R}_2 \le r \le R_2$).

Так как в каждой области параметры материалов отличаются друг от друга, они задаются кусочно-непрерывными функциями.

Плотности и теплоемкости материалов полагаются постоянными для каждой области тепловыделяющего элемента

$$\rho(r,T)C(r,T) = \begin{cases} \rho_1 C_1, r_0 \le r < \tilde{R}_0, \\ \rho_2 C_2, \tilde{R}_0 \le r < R_0, \\ \rho_3 C_3, R_0 \le r < R_1, \\ \rho_4 C_4, R_1 \le r < \tilde{R}_2, \\ \rho_5 C_5, \tilde{R}_2 \le r \le R_2. \end{cases}$$

Коэффициент теплопроводности имеет вид [1, 2]

$$\chi(r,T) = \begin{cases} \frac{1}{A+BT}, & r_0 \le r < \tilde{R}_0, \\ \frac{1}{A_1+B_1T}, & \tilde{R}_0 \le r < R_0, \\ \chi_3, & R_0 \le r < R_1, \\ \chi_4, & R_1 \le r < \tilde{R}_2, \\ \chi_5, & \tilde{R}_2 \le r \le R_2, \end{cases}$$

где A, B, A_1, B_1, χ_3, χ_4, χ_5 – постоянные величины.

Так как тепло выделяется только в области топливной таблетки, $q(r)$ примет вид

$$q(r) = \begin{cases} q_0, & r_0 \le r < \tilde{R}_0, \\ q_1, & \tilde{R}_0 \le r < R_0, \\ 0, & R_0 \le r \le R_2, \end{cases}$$

где q_0, q_1 полагаются константами.

Численное решение задачи (1)–(4) приведено в разделе 3.

2. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕМ ЭЛЕМЕНТЕ С УЧЕТОМ БЕЗРАЗМЕРНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И ПАРАМЕТРОВ

Введем безразмерные параметры

$$T = T_0\tilde{T}, \quad t = t_0\tilde{t}, \quad r = R_2\tilde{r}. \tag{5}$$

Учитывая, что плотности и теплоемкости материалов постоянны, и переходя обратно к обозначениям, получим безразмерное уравнение, граничные и начальные условия в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\chi(r,T)r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + q(r), \quad \frac{r_0}{R_2} \le r \le 1,$$

Таблица 2. Параметры теплопроводности для тепловыделяющего элемента

A (мм К/В)	B (мм/В)	χ_3 (В/мм К)	χ_4 (В/мм К)	χ_5 (В/мм К)
43.8	0.2294	0.3×10^{-3}	1.8×10^{-3}	22.0×10^{-3}

Таблица 3. Постоянные распада радионуклидов

λ_1 (1/мин)	λ_2 (1/мин)	λ_3 (1/мин)	λ_4 (1/мин)	λ_5 (1/мин)
0.7427	0.0301	0.0277	6×10^{-5}	0

$$t \ge 0, \quad T(r,t=0) = \frac{\psi}{T_0},$$

$$\chi\left(\frac{r_0}{R_2},T\right)\frac{\partial T}{\partial r}\left(\frac{r_0}{R_2},t\right) = \alpha_1 T_0 R_2\left(T\left(\frac{r_0}{R_2},t\right) - \frac{\varphi_1}{T_0}\right),$$

$$\chi(1,T)\frac{\partial T}{\partial r}(1,t) = \alpha_2 T_0 R_2\left(\frac{\varphi_2}{T_0} - T(1,t)\right),$$

где

$$\chi(r,T) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+BT}, & \dfrac{r_0}{R_2} \le r < \dfrac{\tilde{R}_0}{R_2}, \\ \dfrac{1}{1+B_1T}, & \dfrac{\tilde{R}_0}{R_2} \le r < \dfrac{R_0}{R_2}, \\ 1, & \dfrac{R_0}{R_2} \le r < 1, \end{cases}$$

$$q(r) = \begin{cases} q_0R_2^2, & \dfrac{r_0}{R_2} \le r < \dfrac{\tilde{R}_0}{R_2}, \\ q_1R_2^2, & \dfrac{\tilde{R}_0}{R_2} \le r < \dfrac{R_0}{R_2}, \\ 0, & \dfrac{R_0}{R_2} \le r \le 1, \end{cases}$$

Размерная характеристика температуры

$$T_0(r) = \begin{cases} A, & \dfrac{r_0}{R_2} \le r < \dfrac{\tilde{R}_0}{R_2}, \\ A_1, & \dfrac{\tilde{R}_0}{R_2} \le r < \dfrac{R_0}{R_2}, \\ \frac{1}{\chi_3}, & \dfrac{R_0}{R_2} \le r < \dfrac{R_1}{R_2}, \\ \frac{1}{\chi_4}, & \dfrac{R_1}{R_2} \le r < \dfrac{\tilde{R}_2}{R_2}, \\ \frac{1}{\chi_5}, & \dfrac{\tilde{R}_2}{R_2} \le r \le 1. \end{cases}$$

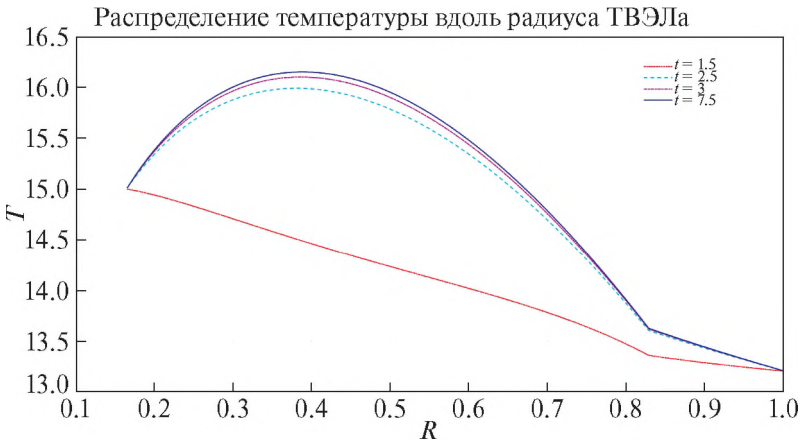

Рис. 2. Распределение температуры в ТВЭЛе с граничными условиями третьего рода.

Характерное время процесса

$$t_0 = R_2^2 T_0(r)\rho(r,T)C(r,T). \qquad (6)$$

Далее рассмотрим разностную схему для моделирования процесса теплопроводности.

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕМ ЭЛЕМЕНТЕ

Следуя [1, 2], введем равномерную прямоугольную сетку, зададим на ней сеточные функции и заменим дифференциальные операторы на разностные.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} = K_{i+\frac{1}{2}}^{j+1}\sqrt{\frac{r_{i+1}}{r_i}}\left(\frac{T_{i+1}^{j+1} - T_i^{j+1}}{h^2}\right) - K_{i-\frac{1}{2}}^{j+1}\sqrt{\frac{r_{i-1}}{r_i}}\left(\frac{T_i^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right) + f_i^{j+1}, \qquad (7)$$

где приняты обозначения

$$f_i^{j+1} = \frac{q_i^{j+1}}{C_i^{j+1}\rho_i^{j+1}},$$

$$K_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} = \frac{\chi_i^{j+1} + \chi_{i+1}^{j+1}}{2C_i^{j+1}\rho_i^{j+1}}.$$

Разностное уравнение (7) можно записать в виде

$$A_i^{j+1}T_{i-1}^{j+1} + B_i^{j+1}T_i^{j+1} + D_i^{j+1}T_{i+1}^{j+1} = F_i^{j+1}. \qquad (8)$$

Граничные условия представимы формулами

$$\chi_1^{j+1}\frac{T_2^{j+1} - T_1^{j+1}}{h} = \alpha_1(T_1^{j+1} - \varphi_1^{j+1}),$$
$$\chi_N^{j+1}\frac{T_N^{j+1} - T_{N-1}^{j+1}}{h} = \alpha_2(\varphi_2^{j+1} - T_N^{j+1}). \qquad (9)$$

Система алгебраических уравнений (8), (9) с учетом начальных условий (2) решается методом прогонки с использованием метода простых итераций на каждом временном слое для корректного определения коэффициентов, зависящих от температуры [13, 14]. За нулевое приближение берется значение температуры с предыдущего временного слоя. Результаты численного моделирования задачи для безразмерного уравнения теплопроводности представлены на рис. 2.

Из результатов численного моделирования видно, что в тепловыделяющем элементе устанавливается стационарное распределение температуры за достаточно малый промежуток времени.

4. ПОСТАНОВКА И АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ТОПЛИВНОМ ЭЛЕМЕНТЕ

В [1] рассмотрено аналитическое решение стационарных уравнений теплопроводности в каждой из пяти областей для случая теплоизоляции левой границы и поддержания постоянной температуры на правой. Здесь мы рассматриваем случай теплоизоляции левой границы и теплообмена по закону Ньютона на правой.

Запишем стационарное уравнение теплопроводности для каждой области

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{A + BT_1}\frac{dT_1}{dr}\right) + q = 0, \quad r_0 \le r \le \tilde{R}_0, \qquad (10)$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{A_1 + B_1T_2}\frac{dT_2}{dr}\right) + q_1 = 0, \quad \tilde{R}_0 \le r \le R_0, \qquad (11)$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\chi_3\frac{dT_3}{dr}\right) = 0, \quad R_0 \le r \le R_1, \qquad (12)$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\chi_4\frac{dT_4}{dr}\right) = 0, \quad R_1 \le r \le \tilde{R}_2, \tag{13}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\chi_5\frac{dT_5}{dr}\right) = 0, \quad \tilde{R}_2 \le r \le R_2. \tag{14}$$

Граничные условия

$$\frac{1}{A+BT_1}\frac{dT_1}{dr}(r_0) = \alpha_1(T_1(r_0) - \varphi_1), \tag{15}$$

$$\chi_5\frac{dT_5}{dr}(R_2) = \alpha_2(\varphi_2 - T_5(R_2)). \tag{16}$$

Исходя из физических соображений, температуры и тепловые потоки на границах между областями должны быть равны

$$\frac{1}{A+BT_1}\frac{dT_1}{dr}(\tilde{R}_0) = \frac{1}{A_1+B_1T_2}\frac{dT_2}{dr}(\tilde{R}_0), \quad T_1(\tilde{R}_0) = T_2(\tilde{R}_0), \tag{17}$$

$$\frac{1}{A_1+B_1T_2}\frac{dT_2}{dr}(R_0) = \chi_3\frac{dT_3}{dr}(R_0), \quad T_2(R_0) = T_3(R_0), \tag{18}$$

$$\chi_3\frac{dT_3}{dr}(R_1) = \chi_4\frac{dT_4}{dr}(R_1), \quad T_3(R_1) = T_4(R_1), \tag{19}$$

$$\chi_4\frac{dT_4}{dr}(\tilde{R}_2) = \chi_5\frac{dT_5}{dr}(\tilde{R}_2), \quad T_4(\tilde{R}_2) = T_5(\tilde{R}_2). \tag{20}$$

Решая уравнения (10)–(14), получим

$$T_1(r) = \frac{C_2}{B}r^{BC_1}e^{-\frac{Bqr^2}{4}} - \frac{A}{B}, \tag{21}$$

$$T_2(r) = \frac{\tilde{C}_2}{B_1}r^{B_1\tilde{C}_1}e^{-\frac{B_1qr^2}{4}} - \frac{A_1}{B_1}, \tag{22}$$

$$T_3(r) = \frac{C_3}{\chi_3}\ln(r) + C_4, \tag{23}$$

$$T_4(r) = \frac{\tilde{C}_5}{\chi_4}\ln(r) + \tilde{C}_6, \tag{24}$$

$$T_5(r) = \frac{C_5}{\chi_5}\ln(r) + C_6, \tag{25}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, $\tilde{C}_5$, $\tilde{C}_6$ – произвольные постоянные, которые находятся из граничных условий и условий сшивания функций на границах областей (15)–(20).

Для случая с граничными условиями третьего рода на обеих границах построить решение системы из десяти алгебраических уравнений относительно постояннных в аналитическом виде затруднительно, так как при решении возникают трансцендентные уравнения.

Поскольку практический интерес представляет случай равенства нулю производной температуры на левой границе и теплоообмена по закону Ньютона на правой, для него было найдено аналитическое решение. Для этого в уравнении (15) было положено $\alpha_1 = 0$. Решая систему алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных, получено

$$C_1 = \frac{qr_0^2}{2}, \tag{26}$$

$$\tilde{C}_1 = \frac{q(r_0^2 - \tilde{R}_0^2)}{2} + \frac{q_1\tilde{R}_0^2}{2}, \tag{27}$$

$$C_3 = \frac{q(r_0^2 - \tilde{R}_0^2)}{2} + \frac{q_1(\tilde{R}_0^2 - R_0^2)}{2}, \tag{28}$$

$$\tilde{C}_5 = C_3, \tag{29}$$

$$C_5 = \tilde{C}_5, \tag{30}$$

$$C_6 = \varphi_2 - C_3\left(\frac{1}{\alpha_2R_2} + \frac{\ln(R_2)}{\chi_5}\right), \tag{31}$$

$$\tilde{C}_6 = C_6 + C_3\ln(\tilde{R}_2)\left(\frac{1}{\chi_5} - \frac{1}{\chi_4}\right), \tag{32}$$

$$C_4 = \tilde{C}_6 + C_3\ln(R_1)\left(\frac{1}{\chi_4} - \frac{1}{\chi_3}\right), \tag{33}$$

$$\tilde{C}_2 = B_1e^{\frac{B_1q_1R_0^2}{4}}R_0^{-B_1\tilde{C}_1}\left(\frac{C_3}{\chi_3}\ln(R_0) + C_4 + \frac{A_1}{B_1}\right), \tag{34}$$

$$C_2 = Be^{\frac{Bq\tilde{R}_0^2}{4}}\tilde{R}_0^{-BC_1}\left(\frac{\tilde{C}_2}{B_1}\tilde{R}_0^{B_1\tilde{C}_1}e^{-\frac{B_1q_1\tilde{R}_0^2}{4}} - \frac{A_1}{B_1} + \frac{A}{B}\right). \tag{35}$$

Подставляя найденные значения постоянных (26)–(35) в уравнения (21)–(25), получим формулы для стационарного распределения температуры в каждой из пяти областей. Тогда стационарное распределение температуры в области решения можно описать кусочно-заданной функцией

$$T(r) = \begin{cases} T_1(r), & r_0 \le r < \tilde{R}_0, \\ T_2(r), & \tilde{R}_0 \le r < R_0, \\ T_3(r), & R_0 \le r < R_1, \\ T_4(r), & R_1 \le r < \tilde{R}_2, \\ T_5(r), & \tilde{R}_2 \le r \le R_2. \end{cases} \tag{36}$$

На рис. 3 представлены результаты численного моделирования с указанием аналитического решения.

Таким образом, численное решение за достаточно малый промежуток времени сходится к аналитическому.

Также для дополнительной проверки работы программы мы рассмотрели стационарное уравнение теплопроводности в одной области с различными граничными условиями, для которых построены аналитические решения.

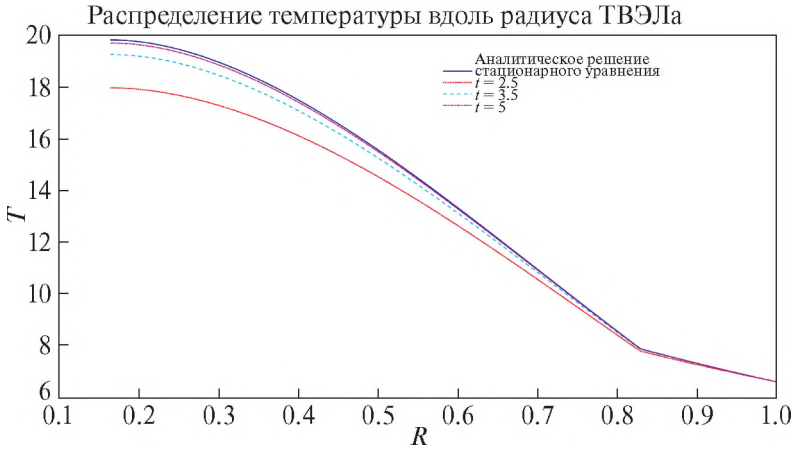

Рис. 3. Результаты численного моделирования распределения температуры с равенством нулю производной температуры на левой границе и теплообменом по закону Ньютона на правой границе.

Рассматривается область $r_0 \le r \le R_2$, где стационарное распределение температуры задается формулой

$$T_1(r) = \frac{C_2}{B} r^{BC_1} e^{-\frac{Bqr^2}{4}} - \frac{A}{B}. \tag{37}$$

В качестве примера рассмотрим следующие граничные условия

$$\frac{\partial T}{\partial r}(r_0, t) = 0, \quad T(R_2, t) = \varphi_2. \tag{38}$$

Тогда стационарное распределение температуры задается формулой

$$T_1(r) = \left(\varphi_2 + \frac{A}{B}\right)\left(\frac{r}{R_2}\right)^{\frac{Bqr_0^2}{2}} e^{\frac{Bq\left(R_2^2 - r^2\right)}{4}} - \frac{A}{B}. \tag{39}$$

Результаты численного моделирования представлены на рис. 4.

Аналогично были рассмотрены и другие вариации граничных условий, для которых строилось аналитическое решение стационарного уравнения. Для каждого рассмотренного случая установлено, что за достаточно короткий промежуток времени численное решение, найденное по схеме, предложенной в разделе 3, сходится к найденному аналитически стационарному распределению.

5. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ КОНЦЕНТРАЦИИ РАДИОНУКЛИДОВ В ТОПЛИВНОМ ЭЛЕМЕНТЕ

В рамках данной модели предполагаем, что радионуклиды накапливаются внутри ТВЭЛа. Система уравнений, описывающая процесс диффузии, запишется в виде

$$\frac{\partial C_i(r,t)}{\partial t} + u_i(r)\frac{\partial C_i(r,t)}{\partial r} - \lambda_{i-1}C_{i-1}(r,t) + \lambda_i C_i(r,t) = \\ = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(D_i(r) r \frac{\partial C_i(r,t)}{\partial r}\right) + \theta_i(r,t), \tag{40}$$
$$r_0 \le r \le R_2, \quad t \ge 0,$$

где $C_i(r,t)$ – концентрация, u_i – скорость миграции радионуклида, $D_i(r)$ – коэффициент диффузии, λ_i – постоянная распада, θ_i – мощность источника радионуклида. Индекс i показывает номер радионуклида в цепочке распада.

При этом полагается, что $i = 1, \ldots, K$, причем

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_K = 0.$$

То есть, распад последнего радионуклида не учитывается, он считается долгоживущим, а радионуклида с номером 0 нет.

Кроме того, источник задается кусочно-постоянной функцией и отличен от нуля только для первого радионуклида

$$\theta_1(r) = \begin{cases} \theta_0, & r_0 \le r < \tilde{R}_0, \\ \theta_1, & \tilde{R}_0 \le r < R_0, \\ 0, & R_0 \le r \le R_2, \end{cases}$$
$$\theta_i = 0, \quad i = 2, \ldots, K,$$

где θ_0, θ_1 – константы.

Также предполагается, что коэффициент диффузии зависит от температуры по закону Аррениуса

$$D_i(r) = D_0^{(i)} \exp\left(-\frac{k_i}{T(r)}\right), \quad i = 1, \ldots, K,$$

где $D_0^{(i)}$ – постоянные, k_i – постоянные, имеющие значения энергии активации, отнесенной к постоянной Больцмана.

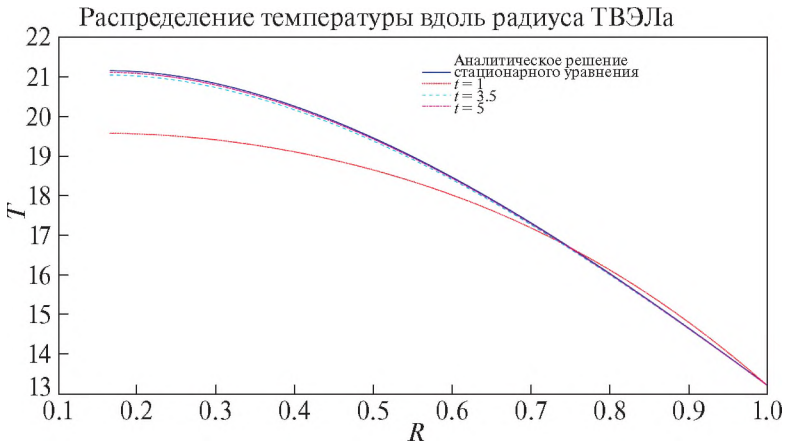

Рис. 4. Результаты численного моделирования распределения температуры с граничными условиями первого рода на правой границе и второго рода на левой.

В рамках данной модели мы рассматриваем процесс без учета конвекции

$$u_i(r) = 0, \quad i = 1, \ldots, K.$$

В начальный момент времени считаем, что концентрация первого радионуклида постоянна во всех областях, а остальные радионуклиды отсутствуют

$$\begin{gathered} C_1(r,0) = \psi_1(r), \\ C_i(r,0) = 0, \quad i = 2, \ldots, K. \end{gathered} \tag{41}$$

Полагаем, что на границе с теплоносителем диффузии не происходит

$$\frac{\partial C_i(R_2,t)}{\partial r} = 0, \quad i = 1, \ldots, K, \tag{42}$$

а внутрь малого отверстия в центре ТВЭЛа радионуклиды могут проникать

$$\frac{\partial C_i(R_2,t)}{\partial r} = \alpha_i \left(C_i(r_0,t) - \phi_i(t)\right), \quad i = 1, \ldots, K. \tag{43}$$

6. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ РАДИОНУКЛИДОВ В ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕМ ЭЛЕМЕНТЕ

Введем равномерную прямоугольную сетку

$$r_i \simeq jh, \quad j = 1, \ldots, N, \quad t^n \simeq n\tau, \quad n = 1, \ldots, M. \tag{44}$$

Зададим на ней сеточные функции и заменим дифференциальные операторы на разностные

$$\begin{gathered} C^n_{(i)j} \simeq C_i(r_i, t^n), \quad u^n_{(i)j} \simeq u(r_i), \\ D^n_{(i)j} \simeq D_i(r_i), \quad \theta^n_{(i)j} \simeq \theta_i(r_i, t^n), \end{gathered} \tag{45}$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} \simeq \frac{C^{n+1}_{(i)j} - C^n_{(i)j}}{\tau}, \quad \frac{\partial C_i}{\partial r} \simeq \frac{C^{n+1}_{(i)j+1/2} - C^{n+1}_{(i)j-1/2}}{h}. \tag{46}$$

Тогда, используя среднее геометрическое для определения значения координаты между соседними узлами, получаем, что система уравнений (40) примет вид

$$\begin{gathered} \frac{C^{n+1}_{(i)j} - C^n_{(i)j}}{\tau} + u_{(i)j}\frac{C^{n+1}_{(i)j+1} - C^{n+1}_{(i)j-1}}{2h} + \lambda_{(i)}C^{n+1}_{(i)j} - \\ - \lambda_{(i-1)}C^{n+1}_{(i-1)j} = D^{n+1}_{(i)j+\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{r_{j+1}}{r_j}}\left(\frac{C^{n+1}_{(i)j+1} - C^{n+1}_{(i)j}}{h^2}\right) - \\ - D^{n+1}_{(i)j-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{r_{j-1}}{r_j}}\left(\frac{C^{n+1}_{(i)j} - C^{n+1}_{(i)j-1}}{h^2}\right) + \theta^{n+1}_{(i)j}, \quad i = 1, \ldots, K, \end{gathered} \tag{47}$$

где

$$D^{n+1}_{(i)j+\frac{1}{2}} = \frac{D^{n+1}_{(i)j+1} + D^{n+1}_{(i)j}}{2}.$$

Каждое из K уравнений системы можно представить в виде

$$A^{n+1}_{(i)j}C^{n+1}_{(i)j-1} + B^{n+1}_{(i)j}C^{n+1}_{(i)j} + E^{n+1}_{(i)j}C^{n+1}_{(i)j+1} = F^{n+1}_{(i,i-1)j}. \tag{48}$$

Граничные условия запишутся в виде

$$\begin{gathered} \frac{C^{n+1}_{(i)2} - C^{n+1}_{(i)1}}{h} = \alpha_{(i)}(C^{(n+1)}_{(i)1} - \varphi^{n+1}_{(i)}), \\ \frac{C^{n+1}_{(i)N} - C^{n+1}_{(i)N-1}}{h} = 0. \end{gathered} \tag{49}$$

Начальные условия запишутся в виде

$$C^0_{(1)j} = \psi_{1j}, \quad C^0_{(i)} = 0, \quad i = 2, \ldots, K. \tag{50}$$

Таким образом, K систем алгебраических уравнений (47), (49) с учетом начальных условий (50) имеют трехдиагональную матрицу и решаются методом прогонки.

В разделе 4 было получено, что в ТВЭЛе достаточно быстро устанавливается стационарный ре-

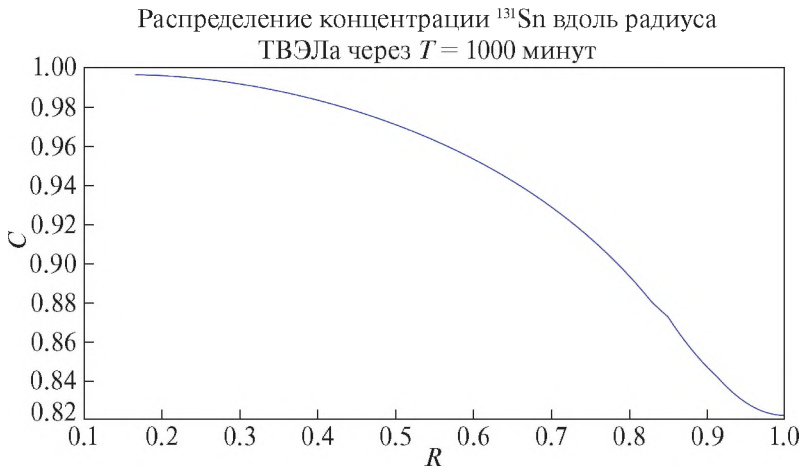

Рис. 5. Результаты численного моделирования распределения концентрации ^{131}Sn.

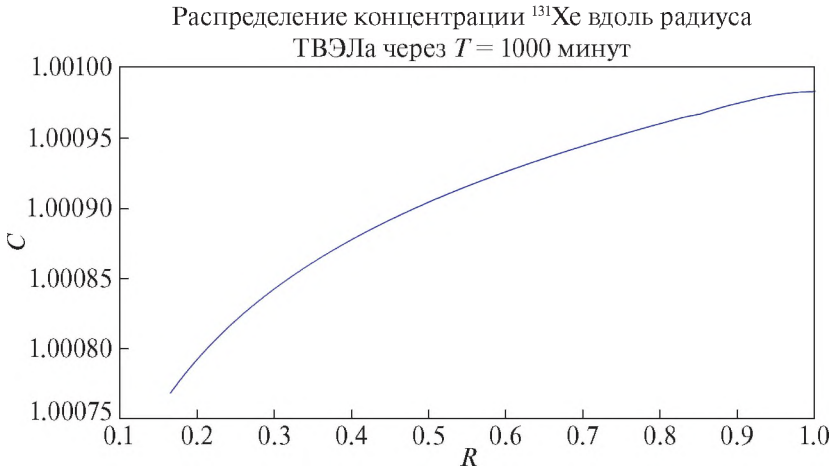

Рис. 6. Результаты численного моделирования распределения концентрации ^{131}Xe.

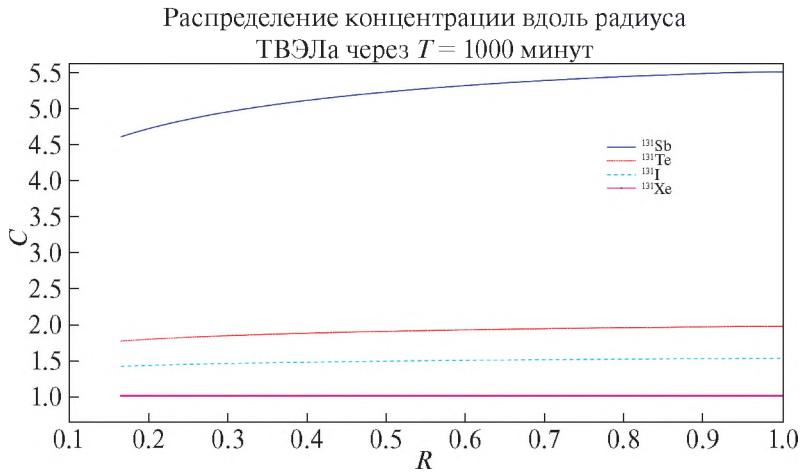

Рис. 7. Результаты численного моделирования распределения концентрации радионуклидов.

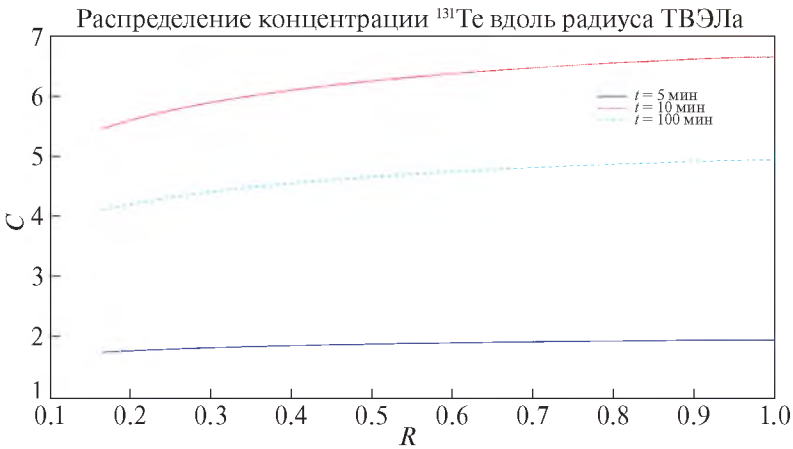

Рис. 8. Изменение распределения концентрации ^{131}Te со временем.

жим для температуры. Поэтому в моделировании распределения концентрации радионуклидов используются значения темепературы при установившемся стационарном распределении. Результаты численного моделирования распределения температуры представлены на рис. 3.

Результаты численного моделирования распределения концентраций радионуклидов при некоторых значениях параметров веществ через большой промежуток времени представлены на рис. 5–8. В качестве примера выбрана цепочка бета-распада ^{131}Sn–^{131}Sb–^{131}Te–^{131}I–^{131}Xe с использованием постоянных распада элементов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрено распределение температуры и концентрации радионуклидов в тепловыделяющем элементе ядерного реактора с учетом пяти областей: топливной таблетки, пористого рим-слоя топливной таблетки, зазора между таблеткой и оболочкой, пленки диоксида циркония на оболочке и самой циркониевой оболочки. Численно решая задачу распределения температуры, мы получили, что во всем тепловыделяющем элементе устанавливается стационарное распределение температуры за достаточно маленький промежуток времени.

Получено общее аналитическое решение стационарного уравнения теплопроводности в каждой области. Получено точное решение стационарной задачи теплопроводности для случая теплоизоляции на левой границе и теплообмена по закону Ньютона на правой границе с учетом условий сшивки на границах областей. Для дополнительной проверки работы программы использованы различные граничные условия, для которых возможно получить аналитическое решение. Результаты показали, что численное решение сходится к найденному аналитически стационарному распределению за достаточно малый промежуток времени.

Далее, с использованием полученного стационарного распределения температуры проведено численное моделирование распределения концентрации для цепочки из пяти радионуклидов. Вид графика распределения концентрации ^{131}Sn отличается от остальных, так как только для этого радионуклида существует источник. Концентрация этого радионуклида достаточно быстро уменьшается с момента начала моделирования, достигает некоторого значения и далее не меняется. Поведение графиков распределения остальных радионуклидов, кроме ^{131}Xe примерно одинаковое: сначала концентрация увеличивается, достигает максимума, затем уменьшается до некоего значения и почти не меняется далее. Так как ^{131}Xe является стабильным и не распадается, то его концентрация все время увеличивается, но не быстро, так как период полураспада ^{131}I составляет примерно восемь дней, в то время, как моделирование проводилось для T = 1000 минут.

Итогом данного исследования является программный код, позволяющий моделировать распределение температуры и концентрации радионуклидов в топливном элементе ядерного реактора с различными видами граничных условий и для различных значений параметров тепловыделяющего элемента, которые могут быть заданы пользователем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kudryashov N.A., Khlunov A.V., Chmykhov M.A.* Thermal regimes of high burn-up nuclear fuel rod // Com. in Nonlinear Sci. Numerical Simulation. 2009. V. 15. P. 1240–1252.

2. *Alyushin V.M., Baranov V.G., Kudryashov N.A., Khlunov A.V.* Numerical modeling of the temperature distribution in a VVER fuel element // Atomic Energy. 2010. V. 108. № 3.

3. *Chen An, Felippe Celestino Moreira, Jian Su.* Thermal analysis of the melting process in a nuclear fuel rod // Applied Thermal Engineering. 2014. V. 68. P. 133–143.

4. *Jiannan Tang, Mei Huang, Yuanyan Zhao, Saad Maqsood, Xiaoping Ouyang.* Numerical investigations on the melting process of the nuclear fuel rod in RIAs and LOCAs // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2018. V. 124. P. 990–1002.

5. *Abdul Razak R.K., Asif Afzal, Mohammed Samee A.D., Ramis M.K.* Effect of cladding on thermal behavior of nuclear fuel element with non-uniform heat generation // Progress in Nuclear Energy. 2019. V. 11. P. 1–14.

6. *Antarip Poddar, Rukmava Chatterjee, Aranyak Chakravarty, Koushik Ghosh, Swarnendu Sen, Achintya Mukhopadhyay* A thermal model to characterize the flattening effect of a nuclear fuel element in an anullar channel using simple analytical approach // Progress in Nuclear Energy. 2015. V. 85. P. 441–453.

7. *Басанский Е.Г., Колобашкин В.М., Кудряшов Н.А.* Расчет двумерного распространения примеси в пористой среде при нестационарной фильтрации газа // Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа. 1982. № 5.

8. *Бондаренко А.Г., Колобашкин В.М., Кудряшов Н.А.* Распространение радионуклидов в пористой среде с учетом сорбции и диффузии // Инженерно-физический журнал, том XXXI. 1976. № 6.

9. *Кудряшов Н.А., Мурзенко В.В.* Автомодельное решение задачи осесимметричного движения газа через пористую среду при квадратичном законе сопротивления // Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа. 1982. № 4.

10. *Басанский Р.Р., Колобашкин В.М., Кудряшов Н.А.* Распространение радионуклидов через раздробленную породу под действием избыточного давления продуктов взрыва // Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа. 1980. № 2.

11. *Бондаренко А.Г., Колобашкин В.М., Кудряшов Н.А.* Неравновесная адсорбция изобарной цепочки радионуклидов // Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа. 1976. № 3.

12. *Арсенин В.Я., Зябрев Н.Б., Кудряшов Н.А.* О решении обратных задач конвективной диффузии и адсорбции радиоактивного газа в пористой среде // Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа. 1978. № 3.

13. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. 1989. С. 413–427.

14. *Калиткин Н.Н., Корякин П.В.* Численные методы: в 2 кн. Кн. 2. Методы математической физики. 2013. С. 194–198.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 2, pp. 155–165

Numerical Simulation of the Temperature Distribution and the Radionuclide Concentration in a Fuel Element of a Nuclear Reactor

A. S. Salin[a,#] and N. A. Kudryashov[a,##]

[a] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

[#]*e-mail: salin.alex01@gmail.com*

[##]*e-mail: nakudr@gmail.com*

Received May 5, 2020; revised May 5, 2020; accepted June 9, 2020

Abstract—The radial distribution of the temperature in a fuel element of a nuclear reactor has been studied taking into account the boundary conditions of the third kind in five regions with different characteristics. The problem with zero derivative of the temperature on the left boundary of the solution domain has been considered separately as a special case of a boundary condition of the third kind. The numerical simulation has shown that a constant radial distribution of the temperature in the fuel element is established quite quickly. For this reason, stationary heat conduction equations are considered in each of the five regions, and a general solution is obtained for each region. For the case of zero derivative of the temperature on the left boundary, an analytical form of the stationary temperature distribution in all regions is obtained. It has been found that the numerical solution converges quite rapidly to the analytical solution. In addition, the distribution of the concentration of radionuclides is studied taking into account radioactive transformations. The radioactive decay chain of ^{131}Sn has been considered as an example. The results of the numerical simulation are presented in the form of plots of the concentration distribution along the radius of the fuel rod. The main result is a program that allows the numerical simulation of the temperature distribution and concentration of radionuclides under various boundary conditions and for different values of the parameters of the fuel element that can be set by the user of the program.

Keywords: temperature, concentration, distribution, nuclear reactor, fuel element, numerical modeling

DOI: 10.1134/S2304487X2002011X

REFERENCES

1. Kudryashov Nikolai A., Khlunov Aleksandr V., Chmykhov Mikhail A., Thermal regimes of high burn-up nuclear fuel rod, Com. in Nonlinear Sci. Numerical Simulation, 15, 1240–1252 (2009).
2. Alyushin V.M., Baranov V.G., Kudryashov N.A., Khlunov A.V., Numerical modeling of the temperature distribution in a VVER fuel element, Atomic Energy, Vol. 108, No. 3 (2010).
3. An Chen, Moreira Felippe Celestino, Su Jian, Thermal analysis of the melting process in a nuclear fuel rod, Applied Thermal Engineering, 68, 133–143 (2014).
4. Tang Jiannan, Huang Mei, Zhao Yuanyan, Maqsood Saad, Ouyang Xiaoping, Numerical investigations on the melting process of the nuclear fuel rod in RIAs and LOCAs, International Journal of Heat and Mass Transfer, 124, 990–1002 (2018).
5. Abdul Razak R.K., Afzal Asif, Mohammed Samee A.D., Ramis M.K., Effect of cladding on thermal behavior of nuclear fuel element with non-uniform heat generation, Progress in Nuclear Energy, 11, 1–14 (2019).
6. Poddar Antarip, Chatterjee Rukmava, Chakravarty Aranyak, Ghosh Koushik, Sen Swarnendu, Mukhopadhyay Achintya, A thermal model to characterize the flattening effect of a nuclear fuel element in an anullar channel using simple analytical approach, Progress in Nuclear Energy, 85, 441–453 (2015).
7. Basanskiy E.G., Kolobashkin V.M., Kudryashov N.A., *Raschet dvumernogo rasprostranenia primesi v poristoi srede pri nestacionarnoy fil'tracii gaza* [Calculation of the two-dimensional distribution of impurities in a porous medium during non-stationary gas filtration], Izv. AS USSR, Fluid and gas mechanics, № 5 (1982) (in Russian).
8. Bondarenko A.G., Kolobashkin V.M., Kudryashov N.A., *Rasprostranenie radionuklidov v poristoi srede s uchetom sorbcii i diffuzii* [Distribution of radionuclides in a porous medium taking into account sorption and diffusion], Physics Engineering Journal, vol. XXXI, № 6 (1976) (in Russian).
9. Kudryashov N.A., Murzenko V.V., *Avtomodel'noe reshenie zadachi osesimmetrichnogo dvizhenia gaza cherez poristuyu sredu pri kvadratichnom zakone soprotivlenia* [Self-similar solution to the problem of axisymmetric gas motion through a porous medium with a quadratic law of resistance], Izv. AS USSR, Fluid and gas mechanics, № 4 (1982) (in Russian).
10. Basanskiy E.G., Kolobashkin V.M., Kudryashov N.A., *Rasprostranenie radionuclidov cherez razdroblennuyu porodu pod deistviem izbitochnogo davlenia productov vzriva* [Propagation of radionuclides through crushed rock under the influence of overpressure of explosion products], Izv. AS USSR, Fluid and gas mechanics, № 2 (1980) (in Russian).
11. Bondarenko A.G., Kolobashkin V.M., Kudryashov N.A., *Neravnovesnaya adsorbciya izobarnoi cepochki radionuklidov* [Nonequilibrium adsorption of an isobaric chain of radionuclides], Izv. AS USSR, Fluid and gas mechanics, № 3 (1976) (in Russian).
12. Arsenin V.Y., Zyabrev N.B., Kudryashov N.A., *O reshenii obratnih zadach konvectivnoy diffuzii i adsorbcii radioactivnogo gaza v poristoi srede* [On solving inverse problems of convective diffusion and adsorption of a radioactive gas in a porous medium], Izv. AS USSR, Fluid and gas mechanics, № 3 (1978) (in Russian).
13. Samarskiy A.A., *Teoriya raznostnikh skhem* [Theory of difference schemes] – 1989, p. 413–427 (in Russian).
14. Kalitkin N.N., Koryakin P.V., *Chislennie metodi: v 2 kn. Kn. 2. Metodi matematicheskoy phisiki* [Numerical methods: in 2 books. Book 2. Methods of mathematical physics.] – 2013, p. 194–198 (in Russian).