

УДК 519.218

## СВОЙСТВО ТРАНЗИТИВНОСТИ ОТНОШЕНИЯ КОИНТЕГРАЦИИ И ТЕСТ ЭНГЛА–ГРЭНДЖЕРА

© 2020 г. К. С. Кузнецова\*

Липецкий государственный технический университет, Липецк, 398050, Россия

\*e-mail: xskuznetsova@gmail.com

Поступила в редакцию 06.10.2019 г.

После доработки 13.03.2020 г.

Принята к публикации 28.04.2020 г.

При попытке рассмотрения системы двух и более уравнений коинтеграции с одинаковыми переменными встал вопрос об исследовании свойств отношения коинтеграции, а именно о наличии у такого отношения стандартных свойств: рефлексивности, симметричности, транзитивности. В данной работе рассмотрено свойство транзитивности отношения коинтеграции. Приведено теоретическое обоснование транзитивности коинтеграции. Проведен вычислительный эксперимент с использованием теста Энгла–Грэнджера для проверки свойства транзитивности отношения коинтеграции. Было показано, что статистические тесты не всегда подтверждают теоретические выкладки: тест Энгла–Грэнджера отвергал нулевую гипотезу для пар  $(Z, Y)$  и  $(Y, X)$  в пользу коинтеграции, но не всегда отвергал ее для пары  $(Z, X)$ . Приведена возможная интерпретация данного результата: низкая мощность и высокая вероятность ошибки второго рода теста Дики–Фуллера, на котором основан тест Энгла–Грэнджера. Предложена новая методология выявления коинтегрированных пар активов: тестировать остатки от регрессии, полученные с помощью теста Энгла–Грэнджера, на стационарность с помощью теста KPSS, и объединять результаты данных тестов. Приведены результаты бэктестов предложенной методологии на данных Московской биржи 2017 года. По результатам бэктестов, среднегодовая доходность при использовании предложенной методологии идентификации коинтегрированных пар акций составила 19,67%. По сравнению с идентификацией коинтегрированных пар акций с помощью теста Энгла–Грэнджера, удалось увеличить среднегодовую доходность на 7,05%.

*Ключевые слова:* случайные процессы, стационарные процессы, коинтеграция, тест Энгла–Грэнджера, тест KPSS

DOI: 10.1134/S2304487X2002008X

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Актуальность данной работы определяется широким применением коинтегрированных пар активов для построения рыночно-нейтральной стратегии и алгоритмической торговли в хедж-фондах [1].

В работе [2] доказано, что если  $X$  и  $Y$  коинтегрированы и  $Y$  и  $W$  коинтегрированы, то должна существовать коинтеграция в рядах  $X$ ,  $Y$  и  $W$  и в рядах  $X$  и  $W$ .

Так как  $X$  и  $Y$  коинтегрированы, то существуют такие  $a$ ,  $b$  и  $c$ , что  $aX + bY + c$  является  $I(0)$ . Поскольку коинтегрированы  $Y$  и  $W$ , то существуют такие  $p$ ,  $q$  и  $r$ , что  $pY + qW + r$  является  $I(0)$ .

Сложение дает  $aX + (p + b)Y + qW + (c + r)$ , что является  $I(0)$ , отсюда существует коинтеграция  $X$ ,  $Y$  и  $W$ . Умножение на  $p$  и  $b$  соответственно и вычитание дают ряд  $apX - bqW + (cp - br)$ ,

который также является  $I(0)$ , а значит между  $X$  и  $W$  существует коинтеграция.

В работе [3] дается возможное объяснение, почему иногда каждая из двух переменных  $Y$  и  $Z$  коинтегрирована с другой переменной  $X$ , но  $Y$  и  $Z$  не коинтегрированы друг с другом (подробнее см. п. 4).

При попытке рассмотрения системы двух и более уравнений коинтеграции с одинаковыми переменными встал вопрос об исследовании свойств отношения коинтеграции, а именно о наличии у такого отношения стандартных свойств: рефлексивности, симметричности, транзитивности.

Целью данной работы является исследование свойства транзитивности отношения коинтеграции. Для достижения указанной цели были поставлены следующие задачи.

1. Теоретическое обоснование свойства транзитивности отношения коинтеграции.

2. Проведение вычислительного эксперимента с использованием теста Энгла–Грэнджера [4] для проверки свойства транзитивности отношения коинтеграции.

3. Интерпретация полученного результата.

4. Разработка новой методологии идентификации коинтегрированных пар активов.

5. Проведение бэк-тестов полученной методологии.

Тесты, описанные в данной статье, были проведены на данных Московской биржи за 2017 год. Всего в исследовании участвовало 295 акций, представленных временными рядами.

## 2. КОИНТЕГРАЦИЯ

Рассмотрим нестационарный ряд  $x_t$ . Возьмем его первые разности  $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$ . Если ряд  $\Delta x_t$  является стационарным, то  $x_t$  называется интегрируемым порядка 1,  $x_t \sim I(1)$ . Соответственно, стационарный ряд  $\Delta x_t$  называется  $I(0)$ . Вообще, ряд называется интегрируемым порядка  $k$ ,  $x_t \sim I(k)$ , если он и его разности до порядка  $k - 1$  включительно нестационарны, а  $k$ -я разность стационарна [5].

Пусть есть два  $I(1)$  ряда,  $x_t$  и  $y_t$ . Пусть, кроме того, их линейная комбинация  $y_t - \beta x_t$  является стационарной,  $I(0)$ . В этом случае ряды  $x_t$  и  $y_t$  называются коинтегрированными:

$$\begin{aligned} y_t &= \beta x_t + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t &\sim i.i.d.(0, \sigma^2), \quad t = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1)$$

Другими словами,  $x_t$ ,  $y_t$  коинтегрированы  $\Leftrightarrow \exists \beta$ , такое что

$$\varepsilon_t = y_t - \beta x_t \sim I(0). \quad (2)$$

Коинтеграция означает, что, хотя многие события могут вызывать необратимые изменения в  $x_t$  и  $y_t$ , существует некоторое долгосрочное динамическое равновесие, которое связывает  $x_t$  и  $y_t$  вместе и которое представлено их линейной комбинацией  $y_t - \beta x_t$  [5].

## 3. ТРАНЗИТИВНОСТЬ

Отношение  $A$  называется транзитивным, если  $A^2 \subseteq A$ , где  $A^2$  – его композиция с самим собой. Раскрывая алгебраическое условие, приходим к следующему: если  $xAy$  и  $yAz$ , то выполнено  $xAz$  [6].

Положим, что есть три  $I(1)$  ряда  $x_t$ ,  $y_t$  и  $z_t$ ,  $t = 0, \dots, T$ . Коинтеграция транзитивна, если  $z_t = \beta_1 y_t + \varepsilon_{1t}$  и  $y_t = \beta_2 x_t + \varepsilon_{2t}$  влечет  $z_t = \beta_3 x_t + \varepsilon_{3t}$ .

Рассмотрим уравнения:

$$z_t = \beta_1 y_t + \varepsilon_{1t}, \quad (3)$$

$$y_t = \beta_2 x_t + \varepsilon_{2t}. \quad (4)$$

Подставим уравнение 4 в уравнение 3:

$$z_t = \beta_1(\beta_2 x_t + \varepsilon_{2t}) + \varepsilon_{1t} = \beta_1 \beta_2 x_t + \beta_1 \varepsilon_{2t} + \varepsilon_{1t}. \quad (5)$$

Заменим  $\beta_1 \beta_2$  на  $\beta_3$ , а  $\beta_1 \varepsilon_{2t} + \varepsilon_{1t}$  на  $\varepsilon_{3t}$ , получим  $z_t = \beta_3 x_t + \varepsilon_{3t}$ . Следовательно, отношение коинтеграции является транзитивным.

Из теоретических выкладок можно ожидать, что если переменная  $Z$  коинтегрирована с переменной  $Y$ , а переменная  $Y$  коинтегрирована с переменной  $X$ , то переменная  $Z$  должна быть коинтегрирована с переменной  $X$ . Однако тест Энгла–Грэнджера для коинтеграции не всегда подтверждает это свойство транзитивности, поскольку иногда переменная  $Z$  не будет коинтегрирована с переменной  $X$  в соответствии с этим тестом.

Протестируем свойство транзитивности:

1. С помощью теста Дики–Фуллера [5] было выявлено 245 акций, которые представляют собой интегрируемый ряд 1-го порядка. Из исследования были исключены акции с нулевым объемом сделок и со структурными разрывами.

2. Из акций, выявленных в п. 1, было составлено 29890 пар.

3. С помощью теста Энгла–Грэнджера было выявлено 7253 коинтегрированные пары вида  $\langle z, y \rangle$ . Тест проводился без лагов при уровне значимости 0.05.

4. С помощью операции соединения (реляционная алгебра) было составлено 237692 тройки:  $\langle z, y \rangle \times \langle y, x \rangle = \langle z, y, x \rangle$ .

5. Было проверено, присутствует ли пара  $\langle z, x \rangle$  в исходном массиве из п. 3. Для 146124 из 237692 (62%) троек свойство транзитивности выполнялось, для 91568 из 237692 (38%) троек свойство транзитивности не выполнялось.

## 4. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

В [3] данный парадокс интерпретируется взаимодействием остатков регрессии между  $Z$  и  $Y$  с одной стороны и между  $Y$  и  $X$  с другой, что может объяснить различное поведение теста при анализе взаимосвязи между  $Z$  и  $X$ .

Мы предлагаем интерпретировать данный парадокс низкой мощностью и высокой вероятностью ошибки второго рода теста Дики–Фуллера, на котором основан тест Энгла–Грэнджера. Как описано в [7], тест Дики–Фуллера не способен различить нестационарные и около-нестационарные временные ряды.

Рассмотрим временной ряд  $x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$ . Стационарным временным рядом называется такой ряд, в котором  $0 < \phi < 1$ . Нестационарным временным рядом называется такой ряд, в котором  $\phi = 1$ . Около-нестационарным временным рядом называется такой ряд, в котором значение  $\phi$  близко к единице [8].

В случае около-нестационарных временных рядов мы часто не способны отклонить нулевую гипотезу нестационарности. Это означает, что у теста Дики–Фуллера высокий риск ошибки второго рода, то есть вероятность не отклонить ложную нулевую гипотезу.

Если с помощью тестов были выявлены коинтегрированные пары  $\langle z, y \rangle$  и  $\langle y, x \rangle$ , но не была выявлена коинтегрированная пара  $\langle z, x \rangle$ , то есть если мы не наблюдаем транзитивность отношения коинтеграции, мы можем заключить, что одна из пар  $\langle z, y \rangle$  или  $\langle y, x \rangle$  была ошибочно выявлена как коинтегрированная.

## 5. ТЕСТ KPSS

Возможным ответом на слабость теста Дики–Фуллера является тест KPSS, который обязан своим названием инициалам ученых Квятковского, Филлипса, Шмидта и Шина [9]. Хотя методический подход этого теста полностью отличается от подхода Дики–Фуллера, главное различие следует понимать в перестановке нулевой и альтернативной гипотез.

В тесте KPSS нулевая гипотеза утверждает, что временной ряд является стационарным, против альтернативной о наличии нестационарности. Около-нестационарные временные ряды, которые с помощью теста Дики–Фуллера часто выявлялись как нестационарные, с помощью теста KPSS могут быть корректно выявлены как стационарные.

Однако мы должны сознавать, что любые результаты статистического тестирования являются всего лишь теоретико-вероятностными, и их не следует путать с неким истинным суждением. Всегда существует ненулевая вероятность, что мы ошибаемся. По этой причине в [7] в качестве идеального тестирования на нестационарность предлагается объединение результатов тестов Дики–Фуллера и KPSS.

Из-за низкой мощности тест Дики–Фуллера часто ошибочно выявляет ряд как нестационарный, поэтому результирующее множество временных рядов, выявленных тестом Дики–Фуллера как нестационарные, оказывается больше по сравнению с множеством временных рядов, выявленных как нестационарные с помощью теста KPSS. Следовательно, порядок тестирования важен.

Если временной ряд выявлен как стационарный с помощью теста Дики–Фуллера, то он, скорее всего, будет также выявлен как стационарный и с помощью теста KPSS; в таком случае мы можем предполагать, что ряд и в самом деле стационарный.

Если временной ряд был выявлен как нестационарный с помощью теста KPSS, то он, скорее всего, будет также выявлен как нестационарный и с помощью теста Дики–Фуллера; в таком случае мы можем предполагать, что ряд и в самом деле нестационарный.

Однако, часто случается, что временной ряд, который был выявлен как нестационарный с помощью теста Дики–Фуллера, будет отмечен как стационарный с помощью теста KPSS. В таком случае мы должны быть очень осторожны с нашим окончательным заключением. Мы можем проверить, насколько сильно основание для стационарности в случае теста KPSS и для нестационарности в случае теста Дики–Фуллера и принять соответствующее решение. Конечно, мы также можем оставить вопрос о стационарности такого временного ряда нерешенным.

## 6. ОБЪЕДИНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕСТОВ

Уточним результаты тестирования, полученные ранее в разделе 3.

1. Количество интегрируемых рядов 1-го порядка, выявленных ранее с помощью теста Дики–Фуллера (245 акций), было уточнено с помощью теста KPSS. В результате было получено 244 интегрируемых ряда 1-го порядка.

2. Из интегрируемых рядов 1-го порядка, полученных в п. 1, было составлено 29646 пар.

3. Пары акций, составленные в п. 2, были протестированы на коинтеграцию с помощью теста Энгла–Грэнджера. В результате было выявлено 7128 коинтегрированных пар.

Мы предлагаем в качестве новой методологии выявления коинтегрированных пар активов тестировать остатки от регрессии, полученные с помощью теста Энгла–Грэнджера, на стационарность с помощью теста KPSS, и объединять результаты трех данных тестов [10, 11].

4. Остатки от регрессии, полученные в результате тестирования в п. 3, были протестированы на стационарность с помощью теста KPSS. Объединив результаты двух тестов, было получено 9 коинтегрированных пар.

Предложенная методология в автоматическом режиме из достаточно большого количества пар (29646 пар) очень аккуратно выбрала 9 коинтегрированных пар.

Таблица 1. Результаты бэк-тестов

Критерии	Тест Энгла–Грэнджера	+ тест KPSS
Количество пар	6034	173
Максимальная прибыль	287.35%	287.35%
Максимальный убыток	–53.28%	–37.29%
Пар торговалось в плюс	2701	89
Пар торговалось в ноль	259	2
Пар торговалось в минус	3074	82
Среднегодовая доходность	12.62%	19.67%

Таким образом, пары из раздела 3, для которых не подтвердилась транзитивность, были ошибочно выявлены как коинтегрированные.

## 7. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Предложенная нами новая методология может быть использована для построения рыночно-нейтральной стратегии и алгоритмической торговли в хедж-фондах. Мы провели так называемые бэк-тесты – имитационное моделирование прибыльности торговой стратегии на исторических данных.

Торговая стратегия, которая применялась в данных бэк-тестах, была взята из работ [12, 13]. Данные взяты с Московской биржи за 2017 год. Результаты бэк-тестов, основанных на применении двух методологий, представлены в таблице 1.

Как можно видеть из таблицы 1, благодаря более точной идентификации коинтегрированных пар акций, удалось увеличить среднегодовую доходность при торговле отдельной коинтегрированной парой на 7.05%. Таким образом, предложенная методология может увеличить прибыльность алгоритмической торговли при использовании рыночно-нейтральных стратегий.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье было приведено теоретическое обоснование свойства транзитивности отношения коинтеграции, а также проведен вычислительный эксперимент с использованием теста Энгла–Грэнджера и для проверки свойства транзитивности отношения коинтеграции.

Было показано, что хотя свойство транзитивности отношения коинтеграции, теоретически, должно выполняться, экспериментальные данные расходятся с теоретическими выкладками. Мы рассмотрели парадоксальный результат теста Энгла–Грэнджера: коинтеграция была выявлена для пар  $(X, Y)$  и  $(Y, Z)$ , но не всегда была выявлена для пары  $(X, Z)$ . Мы интерпретировали данный результат низкой мощностью теста Дики–Фуллера.

В качестве новой методологии выявления коинтегрированных пар активов было предложено тестировать остатки от регрессии, полученные с помощью теста Энгла–Грэнджера, на стационарность с помощью теста KPSS, и объединять результаты данных тестов.

Были проведены бэк-тесты на данных Московской биржи за 2017 год. По результатам бэк-тестов, среднегодовая доходность при использовании предложенной выше методологии идентификации коинтегрированных пар акций составила 19.67%. Таким образом, по сравнению с идентификацией коинтегрированных пар акций с помощью теста Энгла–Грэнджера, удалось увеличить среднегодовую доходность на 7.05%.

Полученные результаты могут быть использованы в инвестиционных компаниях и хедж-фондах для более корректного выявления коинтегрированных пар активов, построения более прибыльной рыночно-нейтральной стратегии и увеличения эффективности алгоритмической торговли на фондовых рынках.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vidyamurthy G.* Pairs trading: quantitative methods and analysis. Wiley, 2004.
2. *Уотшем Т., Паррамоу К.* Количественные методы в финансах / Пер. с англ. под ред. М.Р. Ефимовой. М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999.
3. *Ferre M.* The Johansen Test and the Transitivity Property // *Economics Bulletin*, 2004. V. 3 (27). P. 1–7.
4. *Энгл Р., Грэнджер К.* Коинтеграция и коррекция ошибок: представление, оценивание и тестирование // *Прикладная эконометрика*, 2015. № 39 (2). С. 107–135.
5. *Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А.* Эконометрика. Начальный курс: учебник. М.: Дело, 2004.
6. *Шрейдер Ю.А.* Равенство, сходство, порядок. М.: Наука, 1951.
7. *Kocenda E.* Elements of time series econometrics: an applied approach. Karolinum press, 2015. 220 p.
8. *Stock J.* Cointegration, Long-Run Comovements, and Long-Horizon Forecasting // *Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications*, 1997. V. 3. P. 34–60.
9. *Kwiatkowski D., Phillips P., Schmidt P., Shin Y.* Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root // *Journal of Econometrics*, 1992. V. 54 (1–3). P. 159–178.
10. *Блюмин С.Л., Кузнецова К.С.* Свойство симметричности отношения коинтеграции и тест Энгла–Грэнджера // *Вести высших учебных заведений Черного моря*, 2019. № 2 (56). С. 76–85.
11. *Кузнецова К.С.* Свойство симметричности отношения коинтеграции – URL: <https://habr.com/ru/post/457794/> (дата обр. 29.08.2019)
12. *Кузнецова К.С.* Анализ эффективности торговли коинтегрированными парами на фондовых рынках //

Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем: материалы конференции. Томск, 2017. С. 180–188.

13. Кузнецова К.С. Торговая стратегия для торговли коинтегрированными парами акций. URL: <https://habr.com/post/344674/> (дата обр. 29.08.2019)

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 2, pp. 184–188

## Transitivity Property of the Cointegration Relationship and the Engle–Granger Test

X. Kuznetsova<sup>#</sup>

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, 398050 Russia

<sup>#</sup>e-mail: [xkuznetsova@gmail.com](mailto:xkuznetsova@gmail.com)

Received October 6, 2019; revised March 13, 2020; accepted April 28, 2020

**Abstract**—To consider the system of two or more cointegration equations with the same variables, it appears necessary to reveal whether the cointegration relationship has the standard properties of reflexivity, symmetry, and transitivity. In this work, the transitivity property of the cointegration relationship is analyzed. The theoretical substantiation for the transitivity of cointegration is presented. The computational experiment with the use of the Engle–Granger test to check the transitivity property of the cointegration relationship is carried out. It has shown that statistical tests do not necessarily confirm the theoretical calculations: the Engle–Granger test rejects the null hypothesis for the  $(Z, Y)$  and  $(Y, X)$  pairs in favor of cointegration, but does not necessarily reject it for the  $(Z, X)$  pair. A possible interpretation of this result has been proposed: low power and high probability of type II error of the Dickey–Fuller test underlying the Engle–Granger test. A new methodology for identifying cointegrated asset pairs has been proposed: to test the regression residuals obtained with the Engle–Granger test for stationarity using the KPSS test and combine the results of these tests. The results of the backtests of the proposed methodology on the Moscow Exchange 2017 data are presented. According to the results of the backtests, the average annual return on the proposed methodology for identifying cointegrated pairs of shares was 19.67%. Compared to identifying cointegrated pairs of shares using the Engle–Granger test, the average annual return increased by 7.05%.

**Keywords:** stochastic processes, cointegration, Engle–Granger test, KPSS test

DOI: 10.1134/S2304487X2002008X

### REFERENCES

- Vidyamurthy G. Pairs trading: quantitative methods and analysis. Wiley, 2004.
- Watsham T., Parramore K. Quantitative Methods in Finance. Cengage Learning EMEA, 1996.
- Ferre M. The Johansen Test and the Transitivity Property. *Economics Bulletin*, 2004, vol. 3 (27), pp. 1–7.
- Engle R., Granger C. Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing. *Econometrica*, 1987, vol. 55, no. 2, pp. 251–276.
- Magnus Y.R., Katyshev P.K., Peresetski A.A. *Ekonometrika. Nachalnyj kurs: uchebnik* [Econometrics. Basic course: textbook]. Moscow: Delo, 2004 (in Russian).
- Shreider Y.A. *Ravenstvo, skhodstvo, poryadok* [Equality, similarity, order]. Moscow: Nauka, 1951 (in Russian).
- Kocenda E. Elements of time series econometrics: an applied approach. Karolinum press, 2015.
- Stock J. Cointegration, Long-Run Comovements, and Long-Horizon Forecasting. *Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications*, 1997, vol. 3, pp. 34–60.
- Kwiatkowski D., Phillips P., Schmidt P., Shin Y. Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. *Journal of Econometrics*, 1992, vol. 54 (1–3), pp. 159–178.
- Blyumin S., Kuznetsova X. Svoystvo simmetrichnosti otnosheniya kointegracii i test Engla–Grendzhera [The symmetry property of the cointegration relation and Engle–Granger test]. *News of Higher Educational Institutions of the Chernozem Region*, 2019, vol. 2 (56), pp. 76–85 (in Russian).
- Kuznetsova X. *Svoystvo simmetrichnosti otnosheniya kointegracii* [The symmetry property of the cointegration relation]. Available at: <https://habr.com/ru/post/457794/> (accessed 29.08.2019)
- Kuznetsova X. Analiz effektivnosti trgovli kointegririrovannymi parami na fondovyh rynkah [Analysis of the trade effectiveness of cointegrated pairs in stock markets]. *Matematicheskoe i programnoe obespechenie informacionnyh, tekhnicheskikh i ekonomicheskikh sistem: materialy konferencii* [Software of information, technical and economic systems: conference proceedings]. Tomsk, 2017, pp. 180–188 (in Russian).
- Kuznetsova X. *Torgovaya strategiya dlya trgovli kointegririrovannymi parami akciij* [Trading strategy for trading cointegrated stock pairs]. Available at: <https://habr.com/post/344674/> (accessed 29.08.2019)