

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ВЫСОКОДИСПЕРСНЫЕ СОЛИТОНЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ СИСТЕМОЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С УЧЕТОМ БРЭГГОВСКОЙ РЕШЕТКИ

© 2020 г. К. В. Кан^{1,*}, Н. А. Кудряшов^{1,**}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия

*e-mail: kan_13@mail.ru

**e-mail: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию 30.07.2020 г.

После доработки 30.07.2020 г.

Принята к публикации 08.09.2020 г.

В настоящее время при решении задач нелинейной оптики большое внимание уделяется анализу нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих распространение уединенных волн в оптических средах. В данной работе изучается система уравнений в частных производных шестого порядка, использующаяся для описания распространения двух волн в брэгговской решетке. В изучаемой системе уравнений присутствует нелинейность третьей, пятой и седьмой степени. Задачей, которая решается в данной работе, является применение варианта метода простейших уравнений для поиска решений в виде уединенных волн. На первом этапе метода осуществляется переход к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, записанных с учетом переменных бегущей волны. В результате подстановки исходная система уравнений приводится к переопределенной системе, состоящей из четырех уравнений, соответствующих действительной и мнимой частям исходных уравнений. Из уравнений, соответствующих мнимым частям, получены ограничения на параметры исходных уравнений в частных производных. Определен порядок полюса общих решений дифференциальных уравнений, соответствующих действительным частям. Найденный порядок полюса позволил перейти непосредственно к методу простейших уравнений построения решений в виде уединенных волн. В работе построены аналитические решения и проанализированы графики при различных значениях параметров математической модели.

Ключевые слова: брэгговская решетка, уединенные волны, нелинейные дифференциальные уравнения, распространение импульсов, оптическое волокно

DOI: 10.1134/S2304487X20030049

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время большой интерес представляет собой изучение такого явления, как распространение импульсов в нелинейных средах. Используя дифференциальные уравнения, описывающие математические модели, можно исследовать явление распространения импульсов в оптическом волокне.

Одним из важных уравнений, описывающих распространение импульсов в оптическом волокне, является следующее:

$$iq_t + ia_1q_x + a_2q_{xx} + ia_3q_{xxx} + a_4q_{xxxx} + ia_5q_{xxxxx} + a_6q_{xxxxx} + (b_1|q|^2 + b_2|q|^4 + b_3|q|^6)q = 0. \quad (1)$$

Ранее уравнение (1) рассматривалось в ряде работ (см., например, [6, 7]). Следует отметить, что при $a_2 \neq 0$, $a_i = 0$ ($i \neq 2$) и $b_2 = b_3 = 0$ уравне-

ние (1) является широко используемым нелинейным уравнением Шредингера:

$$iq_t + a_2q_{xx} + b_1|q|^2q = 0. \quad (2)$$

В работе [1] рассмотрена обобщенная модель распространения импульсов в оптической среде. В [2] представлены некоторые дифференциальные уравнения, которые могут быть использованы для описания данного явления. В статье [3] найдены решения в форме уединенных и периодических волн для иерархии уравнений рассматриваемого типа.

Помимо этого, следует отметить, что процесс распространения волн нередко наблюдается в рамках волоконной брэгговской решетки, представляющей собой участок оптического волокна, в сердцевине которого показатель преломления периодически изменяется в продольном направлении [4].

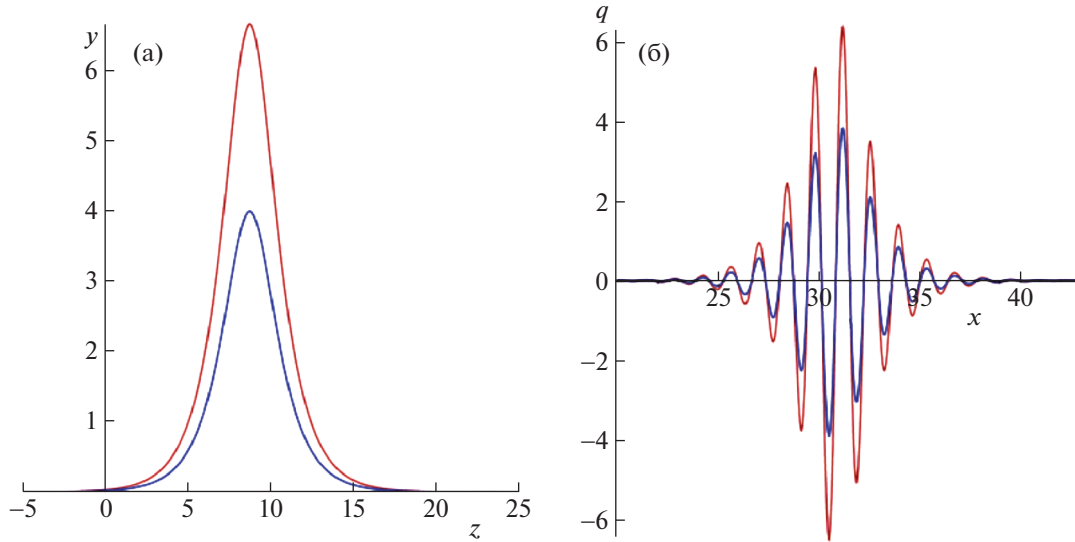


Рис. 1. Графики уединенных волн (40) (а) и вещественной части решения (41) (б) при $t = 10$, $a = 1.5$, $\alpha = 0.7$, $\chi = 0.1$, $k = 4.5$, $b_1 = 1.0$, $b_2 = 1.0$, $b_3 = 1.0$, $\theta_0 = 1.0$, $z_0 = 40.0$, $c_1 = 0.1$.

В [5] рассматриваются уравнения с третьей и пятой степенями нелинейности в виде систем из двух уравнений, каждое из которых описывает распространение волны в двулучепреломляющем волокне. Двойным лучепреломлением называется эффект, при котором луч света в анизотропной среде расщепляется на две составляющих.

По аналогии с этой работой уравнению (1) соответствует следующая система:

$$\begin{aligned} & iu_t + ic_1u_x + c_2u_{xx} + ic_3u_{xxx} + c_4u_{xxxx} + ic_5u_{xxxxx} + \\ & + c_6u_{xxxxxx} + (c_7|u|^2 + c_8|v|^2)u + (c_9|u|^4 + c_{10}|u|^2|v|^2 + \\ & + c_{11}|v|^4)u + (c_{12}|u|^6 + 3c_{13}|u|^4|v|^2 + 3c_{14}|u|^2|v|^4 + \\ & + c_{15}|v|^6)u + sv = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & iv_t + id_1v_x + d_2v_{xx} + id_3v_{xxx} + d_4v_{xxxx} + id_5v_{xxxxx} + \\ & + d_6v_{xxxxxx} + (d_7|u|^2 + d_8|v|^2)v + (d_9|u|^4 + d_{10}|u|^2|v|^2 + \\ & + d_{11}|v|^4)v + (d_{12}|u|^6 + 3d_{13}|u|^4|v|^2 + 3d_{14}|u|^2|v|^4 + \\ & + d_{15}|v|^6)v + ru = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

однако, в (3)–(4) учтены добавочные слагаемые ru и sv , отвечающие за отражательные свойства волн.

Уравнения, входящие в систему (3)–(4), являются нелинейными дифференциальными уравнениями 6-го порядка, учитывающими высокий уровень дисперсии. Уравнения с высокой дисперсией ранее также рассматривались в работах [7–12].

В данной работе ищутся точные решения системы (3)–(4) после ее первоначального перехода к переменным бегущей волны.

2. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ (3)–(4) ПРИ $b_3 \neq 0$

Используя переменные бегущей волны

$$u(x, t) = y_1(z)e^{i(kx - kx_0 - \omega t)}, \quad v(x, t) = y_2(z)e^{i(kx - kx_0 - \omega t)}, \quad (5)$$

$$z = x - C_0t,$$

преобразуем уравнения в частных производных системы (3)–(4) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Подставляя (5) в систему (3)–(4), получаем систему из четырех уравнений, представляющих собой действительную и мнимую части исходных уравнений:

$$\begin{aligned} & y_{1,zzzzzz}c_6 + (-15k^2c_6 - 5kc_5 + c_4)y_{1,zzzz} + (15k^4c_6 + \\ & + 10k^3c_5 - 6k^2c_4 - 3kc_3 + c_2)y_{1,zz} + y_1^7c_{12} + \\ & + (3c_{13}y_2^2 + c_9)y_1^5 + (3c_{14}y_2^4 + c_{10}y_2^2 + c_7)y_1^3 + \\ & + (-k^6c_6 + c_{15}y_2^6 - k^5c_5 + k^4c_4 + c_{11}y_2^4 + k^3c_3 - \\ & - k^2c_2 + c_8y_2^2 - kc_1 + \omega)y_1 + sy_2 = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & (6kc_6 + c_5)y_{1,zzzz} + (-20k^3c_6 - 10k^2c_5 + 4kc_4 + \\ & + c_3)y_{1,zz} + (6k^5c_6 + 5k^4c_5 - 4k^3c_4 - 3k^2c_3 + \\ & + 2kc_2 - C_0 + c_1)y_1 = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & y_{2,zzzzzz}d_6 + (-15k^2d_6 - 5kd_5 + d_4)y_{2,zzzz} + (15k^4d_6 + \\ & + 10k^3d_5 - 6k^2d_4 - 3kd_3 + d_2)y_{2,zz} + y_2^7d_{15} + \\ & + (3d_{14}y_1^2 + d_{11})y_2^5 + (3d_{13}y_1^4 + d_{10}y_1^2 + d_8)y_2^3 + \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
& + (-k^6 d_6 + d_{12} y_1^6 - k^5 d_5 + k^4 d_4 + d_9 y_1^4 + k^3 d_3 - \\
& - k^2 d_2 + d_7 y_1^2 - k d_1 + \omega) y_2 + r y_1 = 0, \\
& (6k d_6 + d_5) y_{2,zzzz} + (-20k^3 d_6 - 10k^2 d_5 + 4k d_4 + \\
& + d_3) y_{2,zz} + (6k^5 d_6 + 5k^4 d_5 - 4k^3 d_4 - 3k^2 d_3 + \\
& + 2k d_2 - C_0 + d_1) y_2 = 0.
\end{aligned} \quad (9)$$

Система уравнений (6)–(9) является переопределенной для функций $y_1(z)$ и $y_2(z)$, при этом уравнения (6)–(7) получены из первого уравнения исходной системы (3)–(4), а (8)–(9) – из второго. Полагая коэффициенты мономов уравнений (7) и (9) равными нулю, получим, что любые функции $y_1(z)$ и $y_2(z)$ будут удовлетворять уравнениям (7) и (9) соответственно. Далее рассматриваем уравнения (6) и (8), с учетом ограничений, полученных из уравнения (7), которые имеют вид:

$$\begin{aligned}
c_5 &= -6c_6 k, \\
c_3 &= -40c_6 k^3 - 4c_4 k, \\
c_1 &= -96c_6 k^5 - 8c_4 k^3 - 2c_2 k + C_0,
\end{aligned} \quad (10)$$

и ограничений, полученных аналогично из равенства нулю коэффициентов мономов уравнения (9):

$$\begin{aligned}
d_5 &= -6d_6 k, \\
d_3 &= -40d_6 k^3 - 4d_4 k, \\
d_1 &= -96d_6 k^5 - 8d_4 k^3 - 2d_2 k + C_0.
\end{aligned} \quad (11)$$

Тогда, с учетом (10) и (11), уравнения (6) и (8) принимают вид:

$$\begin{aligned}
& y_{1,zzzzzz} c_6 + (15k^2 c_6 + c_4) y_{1,zzzz} + (75k^4 c_6 + 6k^2 c_4 + \\
& + c_2) y_{1,zz} + y_1^7 c_{12} + 3y_1^5 y_2^2 c_{13} + y_1^5 c_9 + 3y_1^3 y_2^4 c_{14} + \\
& + y_1^3 y_2^2 c_{10} + y_1^3 c_7 + 61y_1 k^6 c_6 + y_1 y_2^6 c_{15} + 5y_1 k^4 c_4 + \\
& + y_1 y_2^4 c_{11} + y_1 y_2^2 c_8 + (k^2 c_2 - C_0 k + \omega) y_1 + s y_2 = 0, \\
& y_{2,zzzzzz} d_6 + (15k^2 d_6 + d_4) y_{2,zzzz} + (75k^4 d_6 + 6k^2 d_4 + \\
& + d_2) y_{2,zz} + y_2^7 d_{15} + 3y_2^5 y_1^2 d_{14} + y_2^5 d_{11} + \\
& + 3y_2^3 y_1^4 d_{13} + y_2^3 y_1^2 d_{10} + y_2^3 d_8 + 61y_2 k^6 d_6 + \\
& + y_2 y_1^6 d_{12} + 5y_2 k^4 d_4 + y_2 y_1^4 d_9 + y_2 y_1^2 d_7 + \\
& + (k^2 d_2 - C_0 k + \omega) y_1 + r y_1 = 0.
\end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения в системе (12)–(13) также являются нелинейными дифференциальными уравнениями 6-го порядка. В полученной системе (12)–(13) воспользуемся заменой:

$$y_1(z) = A_0 + A_1 R(z), y_2(z) = B_0 + B_1 R(z). \quad (14)$$

Далее, без ограничения общности полагаем, что $A_0 = B_0 = 0$.

Тогда после подстановки (14) в (12)–(13) получаем переопределенную систему уравнений относительно функции $R(z)$

$$\begin{aligned}
& A_1 R_{zzzzzz} c_6 + A_1 (15k^2 c_6 + c_4) R_{zzzz} + A_1 (75k^4 c_6 + \\
& + 6k^2 c_4 + c_2) R_{zz} + A_1 (A_1^6 c_{12} + 3A_1^4 B_1^2 c_{13} + \\
& + 3A_1^2 B_1^4 c_{14} + B_1^6 c_{15}) R^7 + A_1 (A_1^4 c_9 + A_1^2 B_1^2 c_{10} + \\
& + B_1^4 c_{11}) R^5 + A_1 (A_1^2 c_7 + B_1^2 c_8) R^3 + ((61k^6 c_6 + \\
& + 5k^4 c_4 + k^2 c_2 - k C_0 + \omega) A_1 + B_1 s) R = 0,
\end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
& B_1 R_{zzzzzz} d_6 + B_1 (15k^2 d_6 + d_4) R_{zzzz} + B_1 (75k^4 d_6 + \\
& + 6k^2 d_4 + d_2) R_{zz} + B_1 (A_1^6 d_{12} + 3A_1^4 B_1^2 d_{13} + \\
& + 3A_1^2 B_1^4 d_{14} + B_1^6 d_{15}) R^7 + B_1 (A_1^4 d_9 + A_1^2 B_1^2 d_{10} + \\
& + B_1^4 d_{11}) R^5 + B_1 (A_1^2 d_7 + B_1^2 d_8) R^3 + ((61k^6 d_6 + \\
& + 5k^4 d_4 + k^2 d_2 - k C_0 + \omega) B_1 + A_1 r) R = 0.
\end{aligned} \quad (16)$$

В полученной системе (15)–(16) умножим первое уравнение на $d_6 B_1$, второе – на $c_6 A_1$, и вычтем из первого уравнения (15) второе (16):

$$P_1 R_{zzzz} + P_2 R_{zz} + P_3 R^7 + P_4 R^5 + P_5 R^3 + P_6 R = 0, \quad (17)$$

где

$$P_1 = A_1 B_1 (c_4 d_6 - c_6 d_4), \quad (18)$$

$$P_2 k_1 A_1 \left(\left(-k^2 d_4 - \frac{d_2}{6} \right) c_6 + d_6 \left(k^2 c_4 + \frac{c_2}{6} \right) \right), \quad (19)$$

$$P_3 = A_1 B_1 ((c_{12} d_6 - c_6 d_{12}) A_1^6 + 3B_1^2 (c_{13} d_6 - c_6 d_{13}) A_1^4 + 3B_1^4 (c_{14} d_6 - c_6 d_{14}) A_1^2 + B_1^6 (c_{15} d_6 - c_6 d_{15})), \quad (20)$$

$$P_4 = A_1 B_1 ((c_9 d_6 - c_6 d_9) A_1^4 + B_1^2 (c_{10} d_6 - c_6 d_{10}) A_1^2 + B_1^4 (c_{11} d_6 - c_6 d_{11})), \quad (21)$$

$$P_5 = A_1 B_1 ((c_7 d_6 - c_6 d_7) A_1^2 + B_1^2 (c_8 d_6 - c_6 d_8)), \quad (22)$$

$$P_6 = B_1^2 d_6 s - A_1^2 c_6 r + A_1 B_1 ((k C_0 - 5k^4 d_4 - k^2 d_2 - \omega) c_6 + (5k^4 d_4 + k^2 c_2 - k C_0 + \omega) d_6). \quad (23)$$

Решая уравнения $P_i = 0, i = \overline{1, 6}$, находим искомые условия совместности для системы уравнений (15)–(16):

$$\frac{c_2}{d_2} = \frac{c_4}{d_4} = \frac{c_6}{d_6} = h, \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
c_7 &= \frac{1}{A_1^2 (A_1^6 d_{12} + 3A_1^4 B_1^2 d_{13} + 3A_1^2 B_1^4 d_{14} + B_1^6 d_{15})} \times \\
& \times (A_1^8 c_{12} d_7 - B_1^2 (c_8 d_{12} - c_{12} d_8 - 3c_{13} d_7) A_1^6 - \\
& - 3B_1^4 (c_8 d_{13} - c_{13} d_8 - c_{14} d_7) A_1^4 - (3d_{14} c_8 - d_7 c_{15} -
\end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
 & -3d_8c_{14})B_1^6A_1^2 - B_1^8(c_8d_{15} - c_{15}d_8)), \\
 c_9 = & \frac{1}{A_1^2(A_1^6d_{12} + 3A_1^4B_1^2d_{13} + 3A_1^2B_1^4d_{14} + B_1^6d_{15})} \times \\
 & \times (A_1^{10}c_{12}d_9 + B_1^2(-c_{10}d_{12} + c_{12}d_{10} + 3c_{13}d_9)A_1^8 + \\
 & + (3c_{13}d_{10} + c_{12}d_{11} - c_{11}d_{12} - 3c_{10}d_{13} + \\
 & + 3c_{14}d_9)B_1^4A_1^6 + (3c_{14}d_{10} + 3d_{11}c_{13} - 3d_{13}c_{11} - \\
 & - 3d_{14}c_{10} + c_{15}d_9)B_1^6A_1^4 + B_1^8(-d_{15}c_{10} - 3d_{14}c_{11} + \\
 & + 3c_{14}d_{11} + c_{15}d_{10})A_1^2 + B_1^{10}(c_{15}d_{11} - c_{11}d_{15})),
 \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 \omega = & \frac{-rc_{12}A_1^8 - kC_0B_1(d_{12} - c_{12})A_1^7 + B_1^2(sd_{12} - 3rc_{13})A_1^6 -}{A_1B_1((c_{12} - d_{12})A_1^6 - 3B_1^2(d_{13} - c_{13})A_1^4 -} \\
 & - 3kC_0B_1^3(d_{13} - c_{13})A_1^5 + 3B_1^4(sd_{13} - rc_{14})A_1^4 - 3kC_0B_1^5(d_{14} - c_{14})A_1^3 - \\
 & - 3B_1^4(d_{14} - c_{14})A_1^2 + \\
 & - \frac{B_1^6(rc_{15} - 3sd_{14})A_1^2 + kC_0B_1^7(c_{15} - d_{15})A_1 - sB_1^8d_{15}}{+B_1^6(c_{15} - d_{15}))},
 \end{aligned} \tag{27}$$

где

$$h = \frac{A_1^6c_{12} + 3A_1^4B_1^2c_{13} + 3A_1^2B_1^4c_{14} + B_1^6c_{15}}{A_1^6d_{12} + 3A_1^4B_1^2d_{13} + 3A_1^2B_1^4d_{14} + B_1^6d_{15}}.$$

С учетом найденных условий, далее можно рассматривать любое уравнение из системы (15)–(16). Ниже приводится решение уравнения (15).

Решение будем искать в виде:

$$R(z) = \gamma_0 + \gamma_1 F(z), \tag{28}$$

где $F(z)$ – решение уравнения $F_z^2 = F^2(1 - \chi F^2)$ и имеет вид:

$$F(z) = \frac{4ae^{\alpha(z-z_0)}}{4a^2e^{2\alpha(z-z_0)} + \chi}. \tag{29}$$

Без ограничения общности полагаем $\gamma_0 = 0$.

Тогда, подставляя (28) в уравнение (15), имеем:

$$Q_1 F^7 + Q_2 F^5 + Q_3 F^3 + Q_4 F = 0, \tag{30}$$

где

$$\begin{aligned}
 Q_1 = & d_{12}\gamma_1^6A_1^6 + 3d_{13}\gamma_1^6A_1^4B_1^2 + 3d_{14}\gamma_1^6A_1^2B_1^4 + \\
 & + d_{15}\gamma_1^6B_1^6 - d_6\chi^3,
 \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
 Q_2 = & d_{11}\gamma_1^4B_1^4 + d_{10}\gamma_1^4B_1^2A_1^2 + d_9\gamma_1^4A_1^4 + \\
 & + ((360k^2 + 840)d_6 + 24d_4)\chi^2,
 \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
 Q_3 = & d_8\gamma_1^2B_1^2 + d_7\gamma_1^2A_1^2 - \\
 & - 150\chi \left(\left(k^4 + 2k^2 + \frac{91}{75} \right) d_6 + \frac{2k^2d_4}{25} + \frac{2d_4}{15} + \frac{d_2}{75} \right),
 \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
 Q_4 = & \frac{d_{15}sB_1^8 + \eta A_1(c_{15} - d_{15})B_1^7 - A_1^2(rd_{15} - 3sd_{14})B_1^6 +}{B_1((c_{15} - d_{15})B_1^6 + 3A_1^2(c_{14} - d_{14})B_1^4 +} \\
 & + 3\eta A_1^3(c_{14} - d_{14})B_1^5 - 3A_1^4(rd_{14} - sd_{13})B_1^4 + 3\eta(c_{13} - d_{13})a_1^5B_1^3 - \\
 & + 3A_1^4(c_{13} - d_{13})B_1^2 + \\
 & - \frac{(3rd_{13} - sd_{12})A_1^6B_1^2 + \eta(c_{12} - d_{12})A_1^7B_1 - rd_{12}A_1^8)}{+A_1^6(c_{12} - d_{12})},
 \end{aligned} \tag{34}$$

где

$$\eta = ((61k^4 + 14k^2 + 1)d_6 + 5k^2d_4 + d_4 + d_2)(k^2 + 1).$$

Из уравнений вида $Q_i = 0$, $i = \overline{1,4}$ найдем дополнительные ограничения на параметры d_2, d_4, d_6, d_9 :

$$\begin{aligned}
 d_2 = & \frac{1}{G} (9(c_{12} - d_{12})\gamma_1^6B_1d_{12}A_1^{13}f_1(k) + 27((c_{13} - 2d_{13}) \times d_{12} + c_{12}d_{13})\gamma_1^6B_1^3A_1^{11}f_1(k) + 27(((c_{14} - 2d_{14})d_{12} + \\
 & + c_{12}d_{14} + 3c_{13}d_{13} - 3d_{13}^2)\gamma_1^4B_1^4f_1(k) - \frac{200}{3}d_7(c_{12} - d_{12})\chi^2 \left(k^2 + \frac{1}{5} \right) (k^2 + 1)) \gamma_1^2B_1A_1^9 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4320 \left(k^2 + \frac{5}{3} \right) r \chi^3 d_{12} A_1^8 + \left(((c_{15} - 2d_{15})d_{12} + (9c_{14} - 18d_{14}) \times \right. \\
& \times d_{13} + c_{12}d_{15} + 9c_{13}d_{14}) \gamma_1^4 B_1^4 f_1(k) - 200(c_{12}d_8 + 3c_{13}d_7 - 3d_7d_{13} - d_8d_{12}) \chi^2 \left(k^2 + \frac{1}{5} \right) (k^2 + 1) \Big) \times \\
& \times \gamma_1^2 B_1^3 A_1^7 - 4320(sd_{12} - 3rd_{13}) \times \left(k^2 + \frac{5}{3} \right) \chi^3 B_1^2 A_1^6 + 27\gamma_1^2 (((c_{15} - 2d_{15})d_{13} + c_{13}d_{15} + \\
& + 3c_{14}d_{14} - 3d_{14}^2) \gamma_1^4 B_1^4 f_1(k) - 200\chi^2(c_{13}d_8 + \\
& + c_{14}d_7 - d_7d_{14} - d_8d_{13}) \left(k^2 + \frac{1}{5} \right) (k^2 + 1) \Big) B_1^5 A_1^5 - 12960(sd_{13} - rd_{14}) \left(k^2 + \frac{5}{3} \right) \chi^3 \left(sd_{14} - \frac{rd_{15}}{3} \right) B_1^6 A_1^2 + \\
& + 9 \left(d_{15} \gamma_1^4 B_1^4 f_1(k) - 200d_8 \chi^2 \left(k^2 + \frac{1}{5} \right) (k^2 + 1) \right) (c_{15} - d_{15} \gamma_1^2 B_1^9 A_1) - 4320d_{15} s \left(k^2 + \frac{5}{3} \right) \chi^3 B_1^8,
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
d_4 = \frac{1}{G} & \left(-7(c_{12} - d_{12}) \gamma_1^6 B_1 d_{12} A_1^{13} f_2(k) - 21((c_{13} - 2d_{13})d_{12} + c_{12}d_{13}) \gamma_1^6 B_1^3 A_1^{11} f_2(k) - 21 \left(((c_{14} - 2d_{14})d_{12} + \right. \right. \\
& + c_{12}d_{14} + 3c_{13}d_{13} - 3d_{13}^2) \gamma_1^4 B_1^4 f_2(k) - \frac{60}{7} d_7 (c_{12} - d_{12}) \chi^2 (k^2 + 1) \Big) \gamma_1^2 B_1 A_1^9 - 360rd_{12} A_1^8 \chi^3 - \\
& - 7 \left(((c_{15} - 2d_{15})d_{12} + (9c_{14} - 18d_{14})d_{13} + c_{12}d_{15} + 9c_{13}d_{14}) \gamma_1^4 B_1^4 f_2(k) - \frac{180}{7} (c_{12}d_8 + 3c_{13}d_7 - 3d_7d_{13} - \right. \\
& - d_8d_{12}) \chi^2 (k^2 + 1) \Big) \gamma_1^2 B_1^3 A_1^7 + 360(sd_{12} - 3rd_{13}) \chi^3 B_1^2 A_1^6 - 21\gamma_1^2 \left(((c_{15} - 2d_{15})d_{13} + c_{13}d_{15} + 3c_{14}d_{14} - \right. \\
& - 3d_{14}^2) \gamma_1^4 B_1^4 f_2(k) - \frac{180}{7} \chi^2 (c_{13}d_8 + c_{14}d_7 - d_7d_{14} - d_8d_{13}) (k^2 + 1) \Big) B_1^5 A_1^5 + 1080\chi^3 B_1^4 (sd_{13} - rd_{14}) A_1^4 - \\
& - 21 \left(((c_{15} - 2d_{15})d_{14} + c_{14}d_{15}) \gamma_1^4 B_1^4 f_2(k) - \frac{180}{7} \chi^2 \left(c_{14}d_8 + \frac{1}{3} c_{15}d_7 - d_{14}d_8 - \frac{1}{3} d_{15}d_7 \right) (k^2 + 1) \right) \gamma_1^2 B_1^7 A_1^3 + \\
& + 1080 \left(sd_{14} - \frac{rd_{15}}{3} \right) \chi^3 B_1^6 A_1^2 - (7d_{15} \gamma_1^4 B_1^4 f_2(k) - 180\chi^2 d_8 (k^2 + 1)) (c_{15} - d_{15}) \gamma_1^2 B_1^9 A_1 + 360d_{15} s B_1^8 \chi^3 \Big)
\end{aligned} \tag{36}$$

$$d_6 = \frac{\gamma_1^6 (A_1^6 d_{12} + 3A_1^4 B_1^2 d_{13} + 3A_1^2 B_1^4 d_{14} + B_1^6 d_{15})}{720\chi^3}, \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
d_9 = & (- (c_{12} - d_{12}) \gamma_1^6 B_1 d_{12} A_1^{13} f_3(k) - 3((c_{13} - 2d_{13})d_{12} + c_{12}d_{13}) \gamma_1^6 B_1^3 A_1^{11} f_3(k) - 3\gamma_1^2 (((c_{14} - 2d_{14})d_{12} + \\
& + c_{12}d_{14} + 3c_{13}d_{13} - 3d_{13}^2) \gamma_1^4 B_1^4 f_3(k) + 10d_{10} \gamma_1^2 \chi (k^2 + 9) (c_{12} - d_{12}) (k^2 + 1) B_1^2 + \\
& + 12d_7 (c_{12} - d_{12}) \chi^2 (k^2 + 1) B_1 A_1^9 + 720rd_{12} A_1^8 \chi^3 - (((c_{15} - 2d_{15})d_{12} + (9c_{14} - 18d_{14})d_{13} + \\
& + c_{12}d_{15} + 9c_{13}d_{14}) \gamma_1^4 B_1^4 f_3(k) + 30\gamma_1^2 \chi (k^2 + 9) (c_{12}d_{11} + 3c_{13}d_{10} - 3d_{10}d_{13} - d_{11}d_{12}) B_1^2 (k^2 + 1) + \\
& + 360(c_{12}d_8 + 3c_{13}d_7 - 3d_7d_{13} - d_8d_{12}) \chi^2 (k^2 + 1) \gamma_1^2 B_1^3 A_1^7 - 720\chi^3 B_1^2 (sd_{12} - 3rd_{13}) A_1^6 - \\
& - 3(((c_{15} - 2d_{15})d_{13} + c_{13}d_{15} + 3c_{14}d_{14} - 3d_{14}^2) \gamma_1^4 B_1^4 f_3(k) + 30\gamma_1^2 \chi (k^2 + 9) (c_{13}d_{11} + c_{14}d_{10} - d_{10}d_{14} - \\
& - d_{11}d_{13}) B_1^2 (k^2 + 1) + 360\chi^2 (c_{13}d_8 + c_{14}d_7 - d_7d_{14} - d_8d_{13}) \gamma_1^2 B_1^5 A_1^5 - 2160\chi^3 B_1^4 (sd_{13} - rd_{14}) - \\
& - 3 \left(((c_{15} - 2d_{15})d_{14} + c_{14}d_{15}) \gamma_1^4 B_1^4 f_3(k) + 30(k^2 + 9) \gamma_1^2 \chi \left(c_{14}d_{11} + \frac{1}{3} c_{15}d_{10} - \frac{1}{3} d_{10}d_{15} - d_{11}d_{14} \right) \times \right. \\
& \times B_1^2 (k^2 + 1) + 360\chi^2 \left(c_{14}d_8 + \frac{1}{3} c_{15}d_7 - d_{14}d_8 - \frac{1}{3} d_{15}d_7 \right) (k^2 + 1) \Big) \gamma_1^2 B_1^7 A_1^3 - \\
& - 2160 \left(sd_{14} - \frac{rd_{15}}{3} \right) \chi^3 B_1^6 A_1^2 - (c_{15} - d_{15}) (d_{15} \gamma_1^4 B_1^4 f_3(k) + 30d_{11} \gamma_1^2 \chi (k^2 + 9) B_1^2 (k^2 + 1) + \\
& + 360\chi^2 d_8 (k^2 + 1) \gamma_1^2 B_1^9 A_1 - 720d_{15} s B_1^8 \chi^3) / (30((c_{15} - d_{15}) B_1^6 + 3A_1^2 (c_{14} - d_{14}) B_1^4 + \\
& + 3A_1^4 (c_{13} - d_{13}) B_1^2 + A_1^6 (c_{12} - d_{12})) A_1^5 (k^2 + 9) \gamma_1^4 \chi (k^2 + 1) B_1),
\end{aligned} \tag{38}$$

где

$$f_1(k) = (k^2 + 9)(k^2 + 1) \left(k^4 + \frac{50}{9}k^2 + 1 \right),$$

$$f_2(k) = (k^2 + 9)(k^2 + 1) \left(k^2 + \frac{5}{7} \right),$$

$$f_3(k) = (k^2 + 9)(k^2 + 1)(k^2 + 25),$$

$$G = 720A_1(k^2 + 9)((c_{15} - d_{15})B_1^6 + 3A_1^2(c_{14} - d_{14})B_1^4 + 3A_1^4(c_{13} - d_{13})B_1^2 + A_1^6(c_{12} - d_{12}))\chi^3(k^2 + 1)B_1.$$

Таким образом, решение первого уравнения из системы уравнений (15)–(16) в форме уединенной волны имеет вид:

$$R(z) = \pm \frac{4a\gamma_1}{4a^2e^{\alpha z} + \chi e^{-\alpha z}}, \quad (39)$$

соответственно,

$$y_1(z) = \pm \frac{4aA_1\gamma_1}{4a^2e^{\alpha z} + \chi e^{-\alpha z}}, y_2(z) = \pm \frac{4aB_1\gamma_1}{4a^2e^{\alpha z} + \chi e^{-\alpha z}}. \quad (40)$$

Тогда решение исходной системы уравнений (3)–(4) можем записать в форме:

$$u(x, t) = \pm \frac{4a\gamma_1A_1e^{i(-kx + \omega t + \theta_0)}}{4a^2e^{\alpha(x-vt-z_0)} + \chi e^{-\alpha(x-vt-z_0)}}, \quad (41)$$

$$v(x, t) = \pm \frac{4a\gamma_1B_1e^{i(-kx + \omega t + \theta_0)}}{4a^2e^{\alpha(x-vt-z_0)} + \chi e^{-\alpha(x-vt-z_0)}}.$$

Ниже представлены графики уединенных волн $y_1(z)$ и $y_2(z)$ и вещественной части $u(x, t)$ и $v(x, t)$.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривается система двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных 6-го порядка, описывающая распространение двух волн с учетом брэгговской решетки. Показано существование высокодисперсных оптических солитонов, являющихся решением системы (3)–(4). Определены условия совместности исследуемой системы уравнений и, с учетом найденных ограничений получены точные решения системы дифференциальных уравнений (3)–(4) при условии, что $b_3 \neq 0$.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 18-29-10025.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kudryashov N.A. A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber // *Optik*. 2019. V. 189. P. 42–52.
2. Kudryashov N.A. Construction of nonlinear differential equations for description of propagation pulses in optical fiber // *Optik*. 2019. V. 192. P. 162964.
3. Kudryashov N.A. Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber // *Optik*. 2019. V. 194. P. 163060.
4. Варжель С.В. Волоконные брэгговские решетки. СПб.: Университет ИТМО, 2015. 65 с.
5. Yildirim Yakup et al. Cubic–quartic optical solitons in birefringent fibers with four forms of nonlinear refractive index by exp–function expansion // *Results in Physics*. 2020. 102913.
6. Biswas, Anjan et al. Highly dispersive optical solitons with cubic–quintic–septic law by F-expansion // *Optik*. V. 182. P. 897–906.
7. Kudryashov N.A. Highly dispersive optical solitons of the generalized nonlinear eighth-order Schrödinger equation // *Optik*. 2020. V. 206. P. 164335.
8. Kudryashov N.A. Highly dispersive solitary wave solutions of perturbed nonlinear Schrödinger equations // *Applied Mathematics and Computation*. 2020. V. 371. P. 124972.
9. Biswas, Anjan et al. Highly dispersive optical solitons with undetermined coefficients // *Optik*. 2019. V. 182. P. 890–896.
10. Biswas, Anjan et al. Highly Dispersive Optical Solitons With Kerr Law Nonlinearity by F-Expansion // *Optik*. 2019. V. 181. P. 1028–1038.
11. Biswas, Anjan et al. Highly dispersive optical solitons with quadratic–cubic law by F-expansion // *Optik*. 2019. V. 182. P. 930–943.
12. Кудряшов Н.А., Сафонова Д.В. // “Точные решения нелинейного дифференциального уравнения для описания оптических импульсов с нелинейностью третьей и пятой степени” // *Вестник Национального исследовательского ядерного университета МИФИ*. 2020. Т. 9. № 1. С. 25–31.

Highly Dispersive Solitons Described by the System of Nonlinear Differential Equations Including a Bragg Grating

K. V. Kan^{a, #} and N. A. Kudryashov^{a, ##}

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: kan_13@mail.ru

^{##}e-mail: nakudr@gmail.com

Received July 30, 2020; revised July 30, 2020; accepted September 8, 2020

Abstract—In nonlinear optics, great attention is currently paid to the analysis of nonlinear differential equations describing the propagation of solitary waves in optical media. In this work, the system of partial differential equations of the sixth order is studied to describe the propagation of two waves in a Bragg grating. This system includes nonlinearities of the third, fifth, and seventh degrees. To solve the problem, we apply the simplest equation method variance for finding solitary wave solutions. At the first step, the system is transformed to a system of ordinary differential equations by using the traveling wave variables. The resulting system is an overdetermined system consisting of four equations corresponding to the real and imaginary parts of the initial equations. From the equations corresponding to the imaginary parts, some restrictions for the parameters of initial partial differential equations are obtained. The pole order of the general solutions for the differential equations corresponding to the real parts is determined. This pole order allows us to use the simplest equations method to construct solutions in the form of solitary waves. Thus, the analytical solutions are constructed and graphs with different values of the mathematical model parameters are analyzed.

Keywords: Bragg grating, solitary waves, nonlinear differential equations, pulse propagation, optical fiber

DOI: 10.1134/S2304487X20030049

REFERENCES

1. *Kudryashov N.A.* A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber // *Optik* 189 (2019): 42–52.
2. *Kudryashov N.A.* Construction of nonlinear differential equations for description of propagation pulses in optical fiber // *Optik* 192 (2019): 162964.
3. *Kudryashov N.A.* Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber // *Optik* 194 (2019): 163060.
4. *S.V. Varzhel'.* Volokonnye breggovskie reshetki. — SPb: Universitet ITMO, 2015. — 65 p.
5. *Yildirim, Yakup et al.* Cubic–quartic optical solitons in birefringent fibers with four forms of nonlinear refractive index by exp–function expansion // *Results in Physics* (2020): 102913.
6. *Biswas, Anjan et al.* Highly dispersive optical solitons with cubic–quintic–septic law by F-expansion // *Optik*. Vol. 182. pp. 897–906.
7. *Kudryashov N.A.* Highly dispersive optical solitons of the generalized nonlinear eighth-order Schrödinger equation // *Optik* 206 (2020): 164335.
8. *Kudryashov N.A.* Highly dispersive solitary wave solutions of perturbed nonlinear Schrödinger equations // *Applied Mathematics and Computation* 371 (2020): 124972.
9. *Biswas, Anjan et al.* Highly dispersive optical solitons with undetermined coefficients // *Optik* 182 (2019): 890–896.
10. *Biswas, Anjan et al.* Highly Dispersive Optical Solitons With Kerr Law Nonlinearity by F-Expansion // *Optik* 181 (2019) 1028–1038.
11. *Biswas, Anjan et al.* Highly dispersive optical solitons with quadratic–cubic law by F-expansion // *Optik* 182 (2019): 930–943.
12. *Kudryashov N.A., Safonova D.V.* // “Tochnye resheniya nelinejnogo differencial'nogo uravneniya dlya opisaniya opticheskikh impul'sov s nelinejnost'yu tret'ej i pyatoj stepeni” // *Vestnik Nacional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta MIFI* T. 9. № 1 (2020): p. 25–31.