

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ТИПА ПАНТОГРАФА

© 2020 г. А. Д. Полянин^{1,*}, В. Г. Сорокин^{1,**}

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

*e-mail: polyanin@ipmnet.ru

**e-mail: vsesor@gmail.com

Поступила в редакцию 14.09.2020 г.

После доработки 14.09.2020 г.

Принята к публикации 12.10.2020 г.

Исследуются нелинейные уравнения в частных производных с переменным запаздыванием типа пантографа, которые помимо искомой функции $u = u(x, t)$ содержат также функции с растяжением одной или нескольких независимых переменных вида $u(px, t)$, $u(x, qt)$ или $u(px, qt)$, где p и q – параметры масштабирования ($0 < p < 1$, $0 < q < 1$). Впервые описаны точные решения различных классов таких уравнений. Приведены примеры нелинейных уравнений в частных производных с переменным запаздыванием типа пантографа, которые допускают автомодельные решения (отметим, что уравнения в частных производных с постоянным запаздыванием не имеют автомодельных решений). Получены точные решения с аддитивным, мультипликативным и обобщенным разделением переменных, а также решения более сложного вида. Особое внимание уделяется нелинейным уравнениям в частных производных типа пантографа достаточно общего вида, которые содержат произвольные функции. В целом рассмотрено более сорока нелинейных уравнений с переменным запаздыванием типа пантографа, допускающих точные решения. Показано, что некоторые уравнения допускают обобщение на случай запаздывания, которое произвольным образом зависит от времени. Описанные уравнения и их точные решения могут быть использованы для формулировки тестовых задач, предназначенных для проверки адекватности и оценки точности численных и приближенных аналитических методов решения соответствующих нелинейных начально-краевых задач для уравнений в частных производных с переменным запаздыванием типа пантографа.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения типа пантографа, уравнения в частных производных с переменным запаздыванием, реакционно-диффузионные уравнения, волновые уравнения, точные решения, автомодельные решения

DOI: 10.1134/S2304487X20040069

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения с постоянным запаздыванием. В естествознании важную роль играет изучение наследственных свойств нелинейных систем различной природы, скорость изменения искоемых величин которых зависит не только от состояния в данный момент времени, но и от предыдущей эволюции процесса. В частном случае состояние системы может определяться не всей ее историей, а только каким-то моментом в прошлом. Такие системы называют системами с запаздыванием. При математическом моделировании подобных систем в простейшем случае в дифференциальные уравнения помимо искомой функции $u(t)$ входит также функция $u(t - \tau)$, где t – время, $\tau > 0$ – время запаздывания [1–3]. Обычно считается, что время запаздывания постоянно.

При моделировании нелинейных систем с постоянным запаздыванием и двумя независимыми переменными x, t , где x – пространственная координата, чаще всего встречаются реакционно-диффузионные уравнения вида [4]:

$$u_t = au_{xx} + F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (1)$$

Наличие запаздывания значительно затрудняет анализ уравнений вида (1). Такие уравнения допускают решения типа бегущей волны $u = u(z)$, где $z = x + \lambda t$ (см., например, [4–7]), но не допускают автомодельных решений вида $u = t^\beta \varphi(xt^\lambda)$, которые часто имеют уравнения с частными производными без запаздывания.

Более сложные, чем решения типа бегущей волны, точные решения нелинейных уравнений с запаздыванием реакционно-диффузионного ти-

па были получены в работах [8–19]. Точные решения нелинейных уравнений типа Клейна–Гордона с запаздыванием и других нелинейных уравнений гиперболического типа приведены в [20–28]. Некоторые точные решения дифференциально-разностных уравнений вязкой несжимаемой жидкости (которые обобщают уравнения Навье–Стокса) описаны в [29].

Важно отметить, что дифференциальные уравнения с запаздыванием обладают рядом специфических качественных особенностей [4, 21, 23, 30], которые не присущи уравнениям без запаздывания.

Уравнение пантографа и родственные уравнения. В некоторых случаях запаздывание может зависеть от времени, т.е. $\tau = \tau(t)$, где $\tau(t) > 0$ – заданная функция [2].

Для иллюстрации сказанного рассмотрим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с переменным запаздыванием, пропорциональным независимой переменной:

$$u'_t = au + bw, \quad w = u(pt), \quad (2)$$

которое при $0 < p < 1$ называется *уравнением пантографа*. Это уравнение описывает динамику контактного токоприемника (пантографа) электроваза [31] и является частным случаем ОДУ с переменным запаздыванием при $\tau(t) = (1 - p)t$. Функция $u(pt)$, входящая в уравнение пантографа (2), отличается от функции $u(t)$ растяжением вдоль оси t в $1/p$ раз.

Уравнение пантографа и более сложные родственные дифференциальные уравнения, которые содержат искомые функции с растяжением аргумента, используются для математического моделирования различных процессов в биологии [32, 33], астрофизике [34], электродинамике [35], теории популяций [36], теории чисел [37], стохастических играх [38], теории графов [39], теории риска и очередей [40]. Анализ и решению таких уравнений посвящены также, например, работы [31, 41–47].

Нам неизвестны публикации, в которых были бы приведены точные решения нелинейных уравнений с частными производными типа пантографа. В [9, 11, 15] были описаны несколько классов точных решений нелинейных уравнений с частными производными с произвольным запаздыванием. Эти результаты использованы в данной статье для получения точных решений соответствующих уравнений типа пантографа. Кроме того, рассмотрено много других нелинейных уравнений с частными производными типа пантографа второго и более высоких порядков, которые допускают точные решения, включая и автомодельные решения. Некоторые точные решения

были получены с помощью различных модификаций метода функциональных связей [10, 15].

В данной статье термин “точное решение” для нелинейных уравнений в частных производных типа пантографа (с растяжением одного или нескольких независимых переменных) и других уравнений с переменным запаздыванием будем применять в случаях, когда решение выражается:

(i) через элементарные функции, функции, входящие в уравнение (это необходимо, когда уравнение содержит произвольные функции), и неопределенные или/и определенные интегралы;

(ii) через решения обыкновенных дифференциальных уравнений без запаздывания или систем таких уравнений;

(iii) через решения обыкновенных дифференциальных уравнений типа пантографа и других уравнений с переменным запаздыванием или систем таких уравнений.

Допустимы комбинации решений из пп. (i)–(iii). В случае (i) точное решение может быть представлено в явной, неявной или параметрической форме. Данное определение обобщает термин “точное решение”, который использовался в [10, 12] для нелинейных уравнений в частных производных с постоянным запаздыванием и в [48] – для уравнений без запаздывания.

Далее, если специально не оговаривается, в нелинейных уравнениях с частными производными типа пантографа считается, что $0 < p < 1$ и $0 < q < 1$, $f(z)$ и $g(z)$ – произвольные функции. Искомая функция обозначается u , а искомая функция с растяжением одного или нескольких аргументов – w .

2. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕАКЦИОННО-ДИФFUЗИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ПАНТОГРАФА

2.1. Уравнения, линейные по производным, содержащие свободные параметры

Уравнение 1. Уравнение со степенной нелинейностью

$$u_t = au_{xx} + bw^k, \quad w = u(px, qt) \quad (3)$$

при $k \neq 1$ допускает автомодельное решение

$$u(x, t) = t^{\frac{1}{1-k}} U(z), \quad z = xt^{-1/2}, \quad (4)$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ типа пантографа

$$aU''_{zz} + \frac{1}{2}zU'_z - \frac{1}{1-k}U + bq^{\frac{k}{1-k}}W^k = 0, \quad (5)$$

$$W = U(sz), \quad s = pq^{-1/2}.$$

Замечание 1. Интересно отметить, что нелинейное уравнение (3) с переменным запаздыванием при $0 < p, q < 1$ в частном случае $p = q^{1/2}$ имеет точное решение, которое выражается через решение ОДУ без запаздывания (5) при $s = 1$, при $p < q^{1/2}$ уравнение (3) сводится к ОДУ с запаздыванием при $s < 1$, а при $p > q^{1/2}$ — к ОДУ с опережением при $s > 1$. Более того, решение уравнения (3) с опережением при $p, q > 1$ при подходящих значениях параметров p и q также может выражаться через решение ОДУ с запаздыванием ($s < 1$), без запаздывания ($s = 1$) и с опережением ($s > 1$).

Уравнение 2. Уравнение со степенной нелинейностью

$$u_t = au_{xx} + bu^m w^k, \quad w = u(px, qt),$$

при $k \neq 1 - m$ допускает автомодельное решение

$$u(x, t) = t^{\frac{1}{1-m-k}} U(z), \quad z = xt^{-1/2},$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ типа пантографа

$$aU''_{zz} + \frac{1}{2}zU'_z - \frac{1}{1-m-k}U + bq^{\frac{k}{1-m-k}}U^m W^k = 0, \\ W = U(sz), \quad s = pq^{-1/2} \leq 1.$$

Уравнение 3. Уравнение с логарифмической нелинейностью

$$u_t = au_{xx} + u(b \ln u + c \ln w), \quad w = u(px, qt),$$

допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются нелинейными ОДУ типа пантографа

$$a\varphi''_{xx} + \varphi(b \ln \varphi + c \ln \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px);$$

$$\psi'_t = \psi(b \ln \psi + c \ln \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 4. Уравнение с логарифмической нелинейностью

$$u_t = au_{xx} + u(b \ln u + c \ln w + d), \quad w = u(x, qt), \quad (6)$$

допускает точное решение вида

$$u(x, t) = \exp[\psi_2(t)x^2 + \psi_1(t)x + \psi_0(t)],$$

где функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ типа пантографа

$$\psi'_2 = 4a\psi_2^2 + b\psi_2 + c\bar{\psi}_2, \quad \bar{\psi}_2 = \psi_2(qt),$$

$$\psi'_1 = 4a\psi_1\psi_2 + b\psi_1 + c\bar{\psi}_1, \quad \bar{\psi}_1 = \psi_1(qt),$$

$$\psi'_0 = a[\psi_1^2 + 2\psi_2] + b\psi_0 + c\bar{\psi}_0 + d, \quad \bar{\psi}_0 = \psi_0(qt).$$

Уравнение 5. Уравнение с логарифмической нелинейностью

$$u_t = au_{xx} + u(b \ln^2 u + c \ln u + d \ln w + s), \quad (7) \\ w = u(x, qt),$$

в зависимости от знака произведения ab допускает два точных решения, приведенных ниже.

1°. Решение при $ab > 0$:

$$u(x, t) = \exp[\psi_1(t)\varphi(x) + \psi_2(t)],$$

$$\varphi(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x), \quad \lambda = \sqrt{b/a},$$

где A и B — произвольные постоянные, а функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ типа пантографа

$$\psi'_1 = 2b\psi_1\psi_2 + (c - b)\psi_1 + d\bar{\psi}_1, \quad \bar{\psi}_1 = \psi_1(qt),$$

$$\psi'_2 = b(A^2 + B^2)\psi_1^2 + b\psi_2^2 + c\psi_2 + d\bar{\psi}_2 + s,$$

$$\bar{\psi}_2 = \psi_2(qt).$$

2°. Решение при $ab < 0$:

$$u(x, t) = \exp[\psi_1(t)\varphi(x) + \psi_2(t)],$$

$$\varphi(x) = A \operatorname{ch}(\lambda x) + B \operatorname{sh}(\lambda x), \quad \lambda = \sqrt{-b/a},$$

где A и B — произвольные постоянные, а функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ типа пантографа

$$\psi'_1 = 2b\psi_1\psi_2 + (c - b)\psi_1 + d\bar{\psi}_1, \quad \bar{\psi}_1 = \psi_1(qt),$$

$$\psi'_2 = b(A^2 - B^2)\psi_1^2 + b\psi_2^2 + c\psi_2 + d\bar{\psi}_2 + s,$$

$$\bar{\psi}_2 = \psi_2(qt).$$

При $A = \pm B$ имеем $\varphi(x) = Ae^{\pm \lambda x}$. В этом случае второе уравнение системы становится независимым, а первое — линейным для ψ_1 .

Замечание 2. Уравнения (6) и (7) и их решения допускают обобщения на случай переменного запаздывания общего вида, когда $w = u(x, t - \tau(t))$, где $\tau(t)$ — произвольная функция [9].

2.2. Уравнения, линейные по производным, содержащие произвольные функции вида $f(u - w)$

Уравнение 6. Уравнение, содержащее произвольную функцию,

$$u_t = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(x, qt),$$

допускает точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u(x, t) = C_1 x^2 + C_2 x + \psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка типа пантографа

$$\psi'_t = 2aC_1 + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 7. Уравнение, содержащее произвольную функцию,

$$u_t = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(px, t),$$

допускает точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u(x, t) = Ct + \varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка типа пантографа

$$a\varphi''_{xx} - C + f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

Уравнение 8. Уравнение, содержащее произвольную функцию,

$$u_t = au_{xx} + bu + f(u - w), \quad w = u(x, qt), \quad (8)$$

в зависимости от знака произведения ab допускает два точных решения, приведенных ниже.

1°. Решение при $ab < 0$:

$$u(x, t) = A \operatorname{ch}(\lambda x) + B \operatorname{sh}(\lambda x) + \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{-b/a},$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка типа пантографа

$$\psi'_t = b\psi + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (9)$$

2°. Решение при $ab > 0$:

$$u(x, t) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) + \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{b/a},$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка типа пантографа (9).

Отметим, что уравнение (8) и его решения допускают обобщение на случай переменного запаздывания общего вида, когда $w = u(x, t - \tau(t))$, где $\tau(t)$ — произвольная функция [9, 11].

Уравнение 9. Уравнение, содержащее произвольную функцию,

$$u_t = au_{xx} + bu + f(u - w), \quad w = u(px, t),$$

допускает точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u(x, t) = Ce^{bt} + \varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка типа пантографа

$$a\varphi''_{xx} + b\varphi + f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

2.3. Уравнения, линейные по производным, содержащие произвольные функции вида $f(w/u)$

Уравнение 10. Уравнение, содержащее произвольную функцию,

$$u_t = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(px, t),$$

допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = e^{\lambda t} \varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка типа пантографа

$$a\varphi''_{xx} + \varphi[f(\bar{\varphi}/\varphi) - \lambda] = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

Уравнение 11. Уравнение, содержащее произвольную функцию,

$$u_t = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(x, qt),$$

допускает несколько точных решений с мультипликативным разделением переменных, приведенных ниже.

1°. Решение

$$u(x, t) = [A \operatorname{ch}(\lambda x) + B \operatorname{sh}(\lambda x)]\psi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка типа пантографа

$$\psi'_t = a\lambda^2\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

2°. Решение

$$u(x, t) = [A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)]\psi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка типа пантографа

$$\psi'_t = -a\lambda^2\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

3°. Вырожденное решение

$$u(x, t) = (Ax + B)\psi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка типа пантографа

$$\psi'_t = \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 12. Уравнение, содержащее произвольную функцию,

$$u_t = au_{xx} + bu \ln u + uf(w/u), \quad w = u(x, qt), \quad (10)$$

допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются нелинейным ОДУ второго порядка и ОДУ первого порядка типа пантографа

$$a\varphi''_{xx} = C_1\varphi - b\varphi \ln \varphi, \quad (11)$$

$$\psi'_t = C_1\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi) + b\psi \ln \psi, \quad \bar{\psi} = \psi(qt),$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Первое уравнение (11) является автономным, его общее решение может быть получено в неяв-

ной форме. Частное однопараметрическое решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = \exp \left[-\frac{b}{4a} (x + C_2)^2 + \frac{C_1}{b} + \frac{1}{2} \right],$$

где C_2 — произвольная постоянная.

Отметим, что уравнение (10) и его решение допускают обобщение на случай переменного запаздывания общего вида, когда $w = u(x, t - \tau(t))$, где $\tau(t)$ — произвольная функция [9, 11].

Уравнение 13. Уравнение, содержащее произвольную функцию,

$$u_t = au_{xx} + bu \ln u + uf(w/u), \quad w = u(px, t),$$

допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = \exp(Ce^{bt})\varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ типа пантографа

$$a\varphi''_{xx} + b\varphi \ln \varphi + \varphi f(\bar{\varphi}/\varphi) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

2.4. Нелинейные уравнения более сложного вида

Уравнение 14. Уравнение с переменным коэффициентом переноса степенного вида

$$u_t = a(u^k u_x)_x + uf(w/u), \quad w = u(x, qt), \quad (12)$$

допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ определяются из ОДУ и ОДУ типа пантографа

$$a(\varphi^k \varphi'_x)'_x = b\varphi,$$

$$\psi'_t = b\psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt),$$

b — произвольная постоянная.

Уравнение 15. Уравнение с переменным коэффициентом переноса степенного вида

$$u_t = a(u^k u_x)_x + uf(w/u) + bu^{k+1}, \quad w = u(x, qt), \quad (13)$$

допускает три решения с мультипликативным разделением переменных, которые приведены ниже.

1°. Решение при $b(k+1) > 0$:

$$u(x, t) = [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]^{1/(k+1)} \psi(t),$$

$$\beta = \sqrt{b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа

$$\psi'_t = \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (14)$$

2°. Решение при $b(k+1) < 0$:

$$u(x, t) = [C_1 \exp(-\beta x) + C_2 \exp(\beta x)]^{1/(k+1)} \psi(t),$$

$$\beta = \sqrt{-b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа (14).

3°. Решение при $k = -1$:

$$u(x, t) = C_1 \exp\left(-\frac{b}{2a} x^2 + C_2 x\right) \psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа (14).

Уравнение 16. Уравнение с переменным коэффициентом переноса степенного вида

$$u_t = a(u^k u_x)_x + u^{k+1} f(w/u), \quad w = u(x, qt),$$

допускает точное решение

$$u(x, t) = t^{-1/k} \varphi(z), \quad z = x + \lambda \ln t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(z)$ удовлетворяет ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием

$$a(\varphi^k \varphi'_z)'_z - \lambda \varphi'_z + \frac{1}{k} \varphi + \varphi^{k+1} f(\varphi^{-1/k} \bar{\varphi}/\varphi) = 0,$$

$$\bar{\varphi} = \varphi(z + \lambda \ln q).$$

Уравнение 17. Уравнение с переменным коэффициентом переноса степенного вида

$$u_t = a(u^k u_x)_x + b + u^{-k} f(u^{k+1} - w^{k+1}), \quad (15)$$

$$w = u(x, qt),$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u(x, t) = \left[\psi(t) - \frac{b(k+1)}{2a} x^2 + C_1 x + C_2 \right]^{1/(k+1)},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа

$$\psi'_t = (k+1)f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 18. Уравнение с переменным коэффициентом переноса экспоненциального вида

$$u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w), \quad w = u(x, qt), \quad (16)$$

допускает решение с аддитивным разделением переменных

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln(Ax^2 + Bx + C) + \psi(t),$$

где A , B и C — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа

$$\psi'_t = 2a(A/\lambda)e^{\lambda \psi} + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 19. Уравнение с переменным коэффициентом переноса экспоненциального вида

$$u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w) + be^{\lambda u}, \quad w = u(x, qt), \quad (17)$$

допускает два решения с аддитивным разделением переменных.

1°. Решение при $b\lambda > 0$:

$$u(x, t) = \frac{1}{\lambda} \ln[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)] + \psi(t),$$

$$\beta = \sqrt{b\lambda/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа

$$\psi'_t = f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (18)$$

2°. Решение при $b\lambda < 0$:

$$u(x, t) = \frac{1}{\lambda} \ln[C_1 \exp(-\beta x) + C_2 \exp(\beta x)] + \psi(t),$$

$$\beta = \sqrt{-b\lambda/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа (18).

Уравнение 20. Уравнение с переменным коэффициентом переноса экспоненциального вида

$$u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + b + e^{-\lambda u} f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}), \quad w = u(x, qt), \quad (19)$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u(x, t) = \frac{1}{\lambda} \ln \left[\psi(t) - \frac{b\lambda}{2a} x^2 + C_1 x + C_2 \right],$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа

$$\psi'_t = \lambda f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 21. Уравнение с переменным коэффициентом переноса логарифмического вида

$$u_t = [(a \ln u + b)u_x]_x - cu \ln u + uf(w/u), \quad w = u(x, qt), \quad (20)$$

допускает решения

$$u(x, t) = \exp(\pm \sqrt{c/ax}) \psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа

$$\psi'_t = c(1 + b/a)\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 22. Уравнение с переменным коэффициентом переноса общего вида

$$u_t = [uf'_u(u)u_x]_x + \frac{1}{f'_u(u)}[af(u) + bf(w) + c], \quad w = u(x, qt), \quad (21)$$

допускает решение в неявной форме

$$f(u) = \phi(t)x + \psi(t),$$

где функции $\phi = \phi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ удовлетворяют ОДУ типа пантографа

$$\phi'_t = a\phi + b\bar{\phi}, \quad \bar{\phi} = \phi(qt),$$

$$\psi'_t = a\psi + b\bar{\psi} + c + \phi^2, \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 23. Уравнение с переменным коэффициентом переноса общего вида

$$u_t = a[g'_u(u)u_x]_x + b + \frac{1}{g'_u(u)} f(g(u) - g(w)), \quad w = u(x, qt), \quad (22)$$

допускает решение в неявной форме

$$g(u) = \psi(t) - \frac{b}{2a} x^2 + C_1 x + C_2,$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа (18).

Уравнение 24. Уравнение с переменным коэффициентом переноса общего вида

$$u_t = a[g'_u(u)u_x]_x + bg(u) + \frac{g(u)}{g'_u(u)} f(g(w)/g(u)), \quad w = u(x, qt), \quad (23)$$

допускает два решения с разделением переменных в неявной форме.

1°. Решение при $ab > 0$:

$$g(u) = [C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x)]\psi(t), \quad \lambda = \sqrt{b/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа (14).

2°. Решение при $ab < 0$:

$$g(u) = [C_1 \exp(-\lambda x) + C_2 \exp(\lambda x)]\psi(t),$$

$$\lambda = \sqrt{-b/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа (14).

Замечание 3. Уравнения (12), (13), (15), (16), (17), (19), (20), (21), (22), (23) и их решения допускают обобщения на случай переменного запаздывания общего вида, когда $w = u(x, t - \tau(t))$, где $\tau(t)$ — произвольная функция [15].

Уравнение 25. Уравнение с переменным коэффициентом переноса общего вида

$$u_t = [f(w)u_x]_x, \quad w = u(px, qt),$$

допускает автомодельное решение

$$u(x, t) = U(z), \quad z = xt^{-1/2},$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ типа пантографа

$$[f(W)U'_z]_z + \frac{1}{2}zU'_z = 0,$$

$$W = U(sz), \quad s = pq^{-1/2} \leq 1.$$

Уравнение 26. Эволюционное уравнение второго порядка общего вида

$$u_t = F(u, w, u_{xx}, u_{xx}), \quad w = u(px, pt),$$

допускает решение типа бегущей волны

$$u(x, t) = U(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ типа пантографа

$$F(U, W, kU'_z, k^2U''_{zz}) + \lambda U'_z = 0, \quad W = U(pz).$$

3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ПАНТОГРАФА

3.1. Уравнения, линейные по производным

Уравнение 27. Уравнение типа Клейна—Гордона со степенной нелинейностью

$$u_{tt} = au_{xx} + bw^k, \quad w = u(px, qt),$$

при $k \neq 1$ допускает автомодельное решение

$$u(x, t) = t^{\frac{2}{1-k}}U(z), \quad z = x/t,$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ типа пантографа

$$\frac{2(1+k)}{(1-k)^2}U - \frac{2(1+k)}{1-k}zU'_z + z^2U''_{zz} = aU''_{zz} + bq^{\frac{2k}{1-k}}W^k,$$

$$W = U(sz), \quad s = p/q \leq 1.$$

Уравнение 28. Уравнение с логарифмической нелинейностью

$$u_{tt} = au_{xx} + u(b \ln u + c \ln w), \quad w = u(px, qt),$$

допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются нелинейными ОДУ второго порядка типа пантографа

$$a\varphi''_{xx} + \varphi(b \ln \varphi + c \ln \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px);$$

$$\psi''_{tt} = \psi(b \ln \psi + c \ln \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 29. Уравнение, содержащее произвольную функцию

$$u_{tt} = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(x, qt),$$

допускает точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u(x, t) = C_1x^2 + C_2x + \psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка типа пантографа

$$\psi''_{tt} = 2aC_1 + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 30. Уравнение, содержащее произвольную функцию

$$u_{tt} = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(px, t), \quad (24)$$

допускает точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u(x, t) = C_1t^2 + C_2t + \varphi(x),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка типа пантографа

$$a\varphi''_{xx} - 2C_1 + f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

Уравнение 31. Уравнение, содержащее произвольную функцию

$$u_{tt} = au_{xx} + bu + f(u - w), \quad w = u(x, qt), \quad (25)$$

в зависимости от знака произведения ab допускает два точных решения, приведенных ниже.

1°. Решение при $ab < 0$:

$$u(x, t) = A \operatorname{Ach}(\lambda x) + B \operatorname{Sh}(\lambda x) + \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{-b/a},$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка типа пантографа

$$\psi''_{tt} = b\psi + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (26)$$

2°. Решение при $ab > 0$:

$$u(x, t) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) + \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{b/a},$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка типа пантографа (26).

Отметим, что уравнение (25) и его решение допускают обобщение на случай переменного запаздывания общего вида, когда $w = u(x, t - \tau(t))$, где $\tau(t)$ — произвольная функция.

Уравнение 32. Нелинейное волновое уравнение типа пантографа

$$u_{tt} = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(px, t), \quad (27)$$

допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = e^{\lambda t} \varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка типа пантографа

$$a\varphi''_{xx} + \varphi[f(\bar{\varphi}/\varphi) - \lambda^2] = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

Замечание 4. Уравнения (24) и (27) и их решения допускают обобщения на случай переменного запаздывания общего вида, когда $w = u(x - \tau(x), t)$, где $\tau(x)$ — произвольная функция.

3.2. Нелинейные уравнения более сложного вида

Уравнение 33. Нелинейное волновое уравнение типа пантографа

$$u_{tt} = a(u^k u_x)_x + uf(w/u), \quad w = u(x, qt), \quad (28)$$

допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ определяются из ОДУ и ОДУ типа пантографа

$$a(\varphi^k \varphi'_x)'_x = b\varphi,$$

$$\psi''_{tt} = b\psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt),$$

b — произвольная постоянная.

Уравнение 34. Нелинейное волновое уравнение типа пантографа

$$u_{tt} = a(u^k u_x)_x + uf(w/u) + bu^{k+1}, \quad (29)$$

$$w = u(x, qt),$$

допускает три решения с мультипликативным разделением переменных, которые приведены ниже.

1°. Решение при $b(k+1) > 0$:

$$u(x, t) = [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]^{1/(k+1)} \psi(t),$$

$$\beta = \sqrt{b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа

$$\psi''_{tt} = \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (30)$$

2°. Решение при $b(k+1) < 0$:

$$u(x, t) = [C_1 \exp(-\beta x) + C_2 \exp(\beta x)]^{1/(k+1)} \psi(t),$$

$$\beta = \sqrt{-b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (30).

3°. Решение при $k = -1$:

$$u(x, t) = C_1 \exp\left(-\frac{b}{2a}x^2 + C_2 x\right) \psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа (30).

Замечание 5. Уравнения (28) и (29) и их решения допускают обобщения на случай переменного запаздывания общего вида, когда $w = u(x, t - \tau(t))$, где $\tau(t)$ — произвольная функция.

Уравнение 35. Нелинейное волновое уравнение типа пантографа

$$u_{tt} = a(u^k u_x)_x + u^{k+1} f(w/u), \quad w = u(x, qt),$$

допускает точное решение вида

$$u(x, t) = t^{-2/k} \varphi(z), \quad z = x + \lambda \ln t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(z)$ удовлетворяет ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием

$$\frac{2(k+2)}{k^2} \varphi - \lambda \frac{k+4}{k} \varphi'_z + \lambda^2 \varphi''_{zz} =$$

$$= a(\varphi^k \varphi'_z)'_z + \varphi^{k+1} f(q^{-2/k} \bar{\varphi}/\varphi),$$

$$\bar{\varphi} = \varphi(z + \lambda \ln q).$$

Уравнение 36. Нелинейное волновое уравнение типа пантографа

$$u_{tt} = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w), \quad w = u(x, qt),$$

допускает решение с аддитивным разделением переменных

$$u(x, t) = \frac{1}{\lambda} \ln(Ax^2 + Bx + C) + \psi(t),$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа

$$\psi''_{tt} = 2a(A/\lambda) e^{\lambda \psi} + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 37. Нелинейное волновое уравнение

$$u_{tt} = [f(w)u_x]_x, \quad w = u(px, qt), \quad (31)$$

допускает автомодельное решение

$$u(x, t) = U(z), \quad z = x/t,$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ типа пантографа

$$(z^2 U'_z)'_z = [f(W)U'_z]'_z, \quad W = U(sz), \quad s = p/q.$$

Это уравнение допускает первый интеграл

$$z^2 U'_z = f(W)U'_z + C, \quad (32)$$

где C — произвольная постоянная. В специальном случае $C = 0$ уравнение (32) вырождается в трансцендентное уравнение и приводит к решению $z^2 = f(W)$, которое порождает точное решение исходного уравнения (31), заданное в неявной форме:

$$u(x, t) = U(z), \quad z^2 = f(U(sz)), \\ z = x/t, \quad s = p/q.$$

Это решение можно представить в виде $u = f^{-1}(x^2/(st)^2)$, где f^{-1} – функция, обратная к f .

Уравнение 38. Уравнение второго порядка, содержащее u_{tt} , общего вида

$$u_{tt} = F(u, w, u_x, u_{xx}), \quad w = u(px, pt),$$

допускает решение типа бегущей волны

$$u(x, t) = U(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ типа пантографа

$$F(U, W, kU'_z, k^2U''_{zz}) - \lambda^2 U''_{zz} = 0, \quad W = U(pz).$$

4. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СТАРШИХ ПОРЯДКОВ

4.1. Уравнения, линейные по производным

Уравнение 39. Уравнение типа пантографа

$$\sum_{i=1}^k b_i(t) u_t^{(i)} = \sum_{i=1}^m a_i(x) u_x^{(i)} + uf(t, w/u), \quad w = u(x, qt),$$

допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t).$$

Здесь функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ определяются из ОДУ и ОДУ типа пантографа

$$\sum_{i=1}^m a_i(x) \varphi_x^{(i)} = c\varphi,$$

$$\sum_{i=1}^k b_i(t) \psi_t^{(i)} = c\psi(t) + \psi(t)f(t, \bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt),$$

где c – произвольная постоянная.

Уравнение 40. Уравнение типа пантографа

$$\sum_{i=1}^k b_i(t) u_t^{(i)} = \sum_{i=1}^m a_i(x) u_x^{(i)} + bu + f(t, u - w), \\ w = u(x, qt),$$

допускает решение с аддитивным разделением переменных

$$u(x, t) = \varphi(x) + \psi(t).$$

Здесь функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ определяются из ОДУ и ОДУ типа пантографа

$$\sum_{i=1}^m a_i(x) \varphi_x^{(i)} = c - b\varphi,$$

$$\sum_{i=1}^k b_i(t) \psi_t^{(i)} = c + b\psi(t) + f(t, \psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt),$$

где c – произвольная постоянная.

Уравнение 41. Уравнение типа пантографа

$$\sum_{i=1}^k b_i(t) u_t^{(i)} = \sum_{i=1}^m a_i(x) u_x^{(i)} + bu \ln u + uf(t, w/u), \\ w = u(x, qt),$$

допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t).$$

Здесь функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ определяются из ОДУ и ОДУ типа пантографа

$$\sum_{i=1}^m a_i(x) \varphi_x^{(i)} = c\varphi - b\varphi \ln \varphi,$$

$$\sum_{i=1}^k b_i(t) \psi_t^{(i)} = c\psi(t) + b\psi(t) \ln \psi(t) + \psi f(t, \bar{\psi}/\psi),$$

$$\bar{\psi} = \psi(qt),$$

где c – произвольная постоянная.

4.2. Нелинейные уравнения более сложного вида

Уравнение 42. Уравнение типа пантографа

$$u_t = u^k F\left(\frac{u_x}{u}, \frac{u_{xx}}{u}, \dots, \frac{u_x^{(n)}}{u}, \frac{w}{u}\right), \quad w = u(x, qt),$$

допускает точное решение вида

$$u(x, t) = t^{\frac{1}{1-k}} \varphi(z), \quad z = x + \lambda \ln t,$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается ОДУ с постоянным запаздыванием

$$\frac{1}{1-k} \varphi + \lambda \varphi'_z = \varphi^k F\left(\frac{\varphi'_z}{\varphi}, \frac{\varphi''_{zz}}{\varphi}, \dots, \frac{\varphi_z^{(n)}}{\varphi}, q^{\frac{1}{1-k}} \frac{\bar{\varphi}}{\varphi}\right),$$

$$\bar{\varphi} = \varphi(z + \lambda \ln q).$$

Уравнение 43. Уравнение типа пантографа

$$F(u, w, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}, u_{ttt}, \dots), \quad w = u(px, pt),$$

допускает решение типа бегущей волны

$$u(x, t) = U(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ типа пантографа

$$F(U, W, -\lambda U'_z, kU'_z, \lambda^2 U''_{zz}, -k\lambda U''_{zz}, k^2 U''_{zz}, -\lambda^3 U'''_{zzz}, \dots) = 0, \\ W = U(pz).$$

Уравнение 44. Уравнение типа пантографа

$$G(t, u, \dots, u_t^{(k)}, u - w) = au + F(x, u_x, \dots, u_x^{(n)}), \quad (33) \\ w = u(x, qt),$$

допускает точное решение в виде суммы функций разных аргументов

$$u(x, t) = \varphi(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ определяются из ОДУ и ОДУ типа пантографа

$$F(x, \varphi'_x, \dots, \varphi_x^{(n)}) + a\varphi = C,$$

$$G(t, \psi'_t, \dots, \psi_t^{(n)}, \psi - \bar{\psi}) - a\psi = C, \quad \bar{\psi} = \psi(qt),$$

C – произвольная постоянная. Без ограничения общности можно положить $C = 0$ (соответствует замене $\varphi = \varphi_1 + C/a$ и $\psi = \psi_1 - C/a$).

Уравнение 45. Уравнение типа пантографа

$$G(t, u_t/u, \dots, u_t^{(k)}/u, w/u) = a \ln u + F(x, u_x/u, \dots, u_x^{(n)}/u), \quad w = u(x, qt), \quad (34)$$

допускает точное решение в виде произведения функций разных аргументов

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ определяются из ОДУ и ОДУ типа пантографа

$$F(x, \varphi'_x/\varphi, \dots, \varphi_x^{(n)}/\varphi) + a \ln \varphi = C,$$

$$G(t, \psi'_t/\psi, \dots, \psi_t^{(n)}/\psi, \bar{\psi}/\psi) - a \ln \psi = C, \quad \bar{\psi} = \psi(qt),$$

C – произвольная постоянная. Без ограничения общности можно положить $C = 0$.

Замечание 6. Уравнения (33) и (34) и их решения допускают обобщения на случай переменного запаздывания общего вида, когда $w = u(x, t - \tau(t))$, где $\tau(t)$ – произвольная функция.

5. КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Впервые представлены точные решения различных классов нелинейных уравнений в частных производных с переменным запаздыванием типа пантографа, которые помимо искомой функции $u = u(x, t)$ содержат также функции с растяжением одной или нескольких независимых переменных вида $u(px, t)$, $u(x, qt)$ или $u(px, qt)$. Приведены примеры нелинейных уравнений в частных производных типа пантографа, которые допускают автомодельные решения, решения с аддитивным, мультипликативным и обобщенным разделением переменных, а также решения более сложного вида. Особое внимание уделяется нелинейным уравнениям типа пантографа достаточно общего вида, которые содержат произвольные функции. Рассмотренные уравнения и их точные решения могут быть использованы для формулировки тестовых задач, предназначенных для оценки точности численных и приближенных аналитических методов решения соответствующих нелинейных начально-краевых задач для уравнений в частных производных с переменным запаздыванием типа пантографа.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690135-5)

и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10025).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
2. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
3. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.
4. Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer, 1996.
5. Mei M. et al. Traveling wavefronts for time-delayed reaction–diffusion equation: (I) Local nonlinearity // J. Dif. Equations. 2009. V. 247. № 2. P. 495–510.
6. Lv G., Wang Z. Stability of traveling wave solutions to delayed evolution equation // J. Dyn. Control Syst. 2015. V. 21. № 2. P. 173–187.
7. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nonlinear delay reaction–diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions // Appl. Math. Lett. 2015. V. 46. P. 38–43.
8. Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 338. P. 448–466.
9. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time // Int. J. Non-Linear Mech. 2013. V. 54. P. 115–126.
10. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction–diffusion equations and more complex nonlinear equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2014. V. 19. № 3. P. 417–430.
11. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2014. V. 19. P. 409–416.
12. Polyanin A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction–diffusion equations // Int. J. Non-Linear Mech. 2014. V. 59. P. 16–22.
13. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nonlinear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions // Appl. Math. Lett. 2014. V. 37. P. 43–48.
14. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Non-linear instability and exact solutions to some delay reaction–diffusion systems // Int. J. Non-Linear Mech. 2014. V. 62. P. 33–40.
15. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients // Int. J. Non-Linear Mech. 2014. V. 67. P. 267–277.
16. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The generating equations method: Constructing exact solutions to delay reaction–diffusion systems and other non-linear coupled

- delay PDEs // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2015. V. 71. P. 104–115.
17. Сорокин В.Г. Точные решения некоторых нелинейных уравнений и систем уравнений в частных производных с запаздыванием // *Вестник НИЯУ “МИФИ”*. 2016. Т. 5. № 3. С. 199–219.
 18. Polyanin A.D. Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay and variable coefficients // *Appl. Math. Lett.* 2019. V. 90. P. 49–53.
 19. Sorokin V.G., Polyanin A.D. Nonlinear partial differential equations with delay: Linear stability/instability of solutions, numerical integration // *J. Physics: Conf. Series*. 2019. V. 1205. 012053.
 20. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Generalized and functional separable solutions to non-linear delay Klein–Gordon equations // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2014. V. 19. № 8. P. 2676–2689.
 21. Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Вязьмин А.В. Точные решения и качественные особенности гиперболических реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием // *Теор. основы хим. технологии*. 2015. Т. 49. № 5. С. 527–541.
 22. Long F.-S., Meleshko S.V. On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein – Gordon equation with a delay // *Math. Methods Appl. Sci.* 2016. V. 39. № 12. P. 3255–3270.
 23. Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: Математические модели и качественные особенности // *Вестник НИЯУ МИФИ*. 2017. Т. 6. № 1. С. 41–55.
 24. Long F.-S., Meleshko S.V. Symmetry analysis of the nonlinear two-dimensional Klein – Gordon equation with a time-varying delay // *Math. Methods Appl. Sci.* 2017. V. 40. № 13. P. 4658–4673.
 25. Сорокин В.Г. Точные решения нелинейных телеграфных уравнений с запаздыванием // *Вестник НИЯУ МИФИ*. 2019. Т. 8. № 5. С. 453–464.
 26. Polyanin A.D., Sorokin V.G. New exact solutions of nonlinear wave type PDEs with delay // *Appl. Math. Lett.* 2020. Vol. 108, 106512.
 27. Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Построение точных решений нелинейных уравнений математической физики с запаздыванием с помощью решений более простых уравнений без запаздывания // *Вестник НИЯУ МИФИ*. 2020. Т. 9. № 2. С. 115–128.
 28. Polyanin A.D., Sorokin V.G. A method for constructing exact solutions of nonlinear delay PDEs. *J. Math. Anal. Appl.* 2021. V. 494. № 2. 124619.
 29. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of non-linear differential-difference equations of a viscous fluid with finite relaxation time // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2013. V. 57. P. 116–122.
 30. Jordan P.M., Dai W., Mickens R.E. A note on the delayed heat equation: Instability with respect to initial data // *Mech. Research Comm.* 2008. V. 35. P. 414–420.
 31. Ockendon J.R., Tayler A.B. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1971. V. 332. P. 447–468.
 32. Derfel G., van Brunt B., Wake G.C. A cell growth model revisited // *Functional Differential Equations*. 2012. V. 19. № 1–2. P. 71–81.
 33. Zaidi A.A., van Brunt B., Wake G.C. Solutions to an advanced functional partial differential equation of the pantograph type // *Proc. R. Soc. A*. 2015. V. 471. 20140947.
 34. Ambartsumyan V.A. On the fluctuation of the brightness of the Milky Way // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1944. V. 44. P. 223–226.
 35. Dehghan M., Shakeri F. The use of the decomposition procedure of Adomian for solving a delay differential equation arising in electrodynamics // *Phys. Scripta*. 2008. V. 78. № 6. 065004.
 36. Ajello W.G., Freedman H.I., Wu J. A model of stage structured population growth with density depended time delay // *SIAM J. Appl. Math.* 1992. V. 52. P. 855–869.
 37. Mahler K. On a special functional equation // *J. London Math. Soc.* 1940. V. 1. № 2. P. 115–123.
 38. Ferguson T.S. Lose a dollar or double your fortune. In: *Proceedings of the 6th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, vol. III (eds. L.M. Le Cam et al.), pp. 657–666. Berkeley: Univ. California Press, 1972.
 39. Robinson R.W. Counting labeled acyclic digraphs. In: *New Directions in the Theory of Graphs* (ed. F. Harari), pp. 239–273. New York: Academic Press, 1973.
 40. Gaver D.P. An absorption probability problem // *J. Math. Anal. Appl.* 1964. V. 9. P. 384–393.
 41. Fox L. et al. On a functional differential equation // *IMA J. Appl. Math.* 1971. V. 8. P. 271–307.
 42. Iserles A. On the generalized pantograph functional differential equation // *Eur. J. Appl. Math.* 1993. V. 4. № 1. P. 1–38.
 43. Kato T., McLeod J.B. Functional-differential equation $y' = ay(\lambda t) + by(t)$ // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1971. V. 77. № 6. P. 891–937.
 44. Liu M.Z., Li D. Properties of analytic solution and numerical solution of multi-pantograph equation // *Appl. Math. Comput.* 2004. V. 155. № 3. P. 853–871.
 45. Yüzbaşı S., Sezer M. An exponential approximation for solutions of generalized pantograph-delay differential equations // *Appl. Math. Modelling*. 2013. V. 37. № 22. P. 9160–9173.
 46. Doha E.H. et al. A new Jacobi rational-Gauss collocation method for numerical solution of generalized pantograph equations // *Appl. Numer. Math.* 2014. V. 77. P. 43–54.
 47. Patade J., Bhalekar S. Analytical solution of pantograph equation with incommensurate delay // *Phys. Sci. Rev.* 2017. V. 2. № 9. 20165103.
 48. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition. Boca Raton: CRC Press, 2012.

Exact Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations with Pantograph Type Variable Delay

A. D. Polyani^{a,*} and V. G. Sorokin^{a,**}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia*

^{*}*e-mail: polyanin@ipmnet.ru*

^{**}*e-mail: vsesor@gmail.com*

Received September 14, 2020; revised September 14, 2020; accepted October 12, 2020

Abstract—Nonlinear partial differential equations with variable delay of pantograph type are studied. These equations, in addition to the unknown function $u = u(x, t)$, also contain functions with stretching of one or several independent variables of the form $u(px, t)$, $u(x, qt)$, or $u(px, qt)$, where p and q are the scaling parameters ($0 < p < 1$, $0 < q < 1$). Exact solutions of various classes of such equations are described for the first time. Examples of nonlinear partial differential equations with variable delay of pantograph type that allow self-similar solutions are given (note that partial differential equations with constant delay do not have self-similar solutions). Additive, multiplicative, and generalized separable solutions, as well as solutions of a more complex form, are obtained. Special attention is paid to nonlinear partial differential equations of pantograph type of a fairly general form that contain arbitrary functions. In total, more than 40 nonlinear equations with variable delay of pantograph type, admitting exact solutions, are considered. It is shown that some equations can be generalized to the case of delay, which arbitrarily depends on time. The described equations and their exact solutions can be used to formulate test problems designed to check the adequacy and assess the accuracy of numerical and approximate analytical methods for solving the corresponding nonlinear initial-boundary value problems for partial differential equations with variable delay of pantograph type.

Keywords: nonlinear pantograph-type differential equations, partial differential equations with variable delay, reaction-diffusion equations, wave equations, exact solutions, self-similar solutions

DOI: 10.1134/S2304487X20040069

REFERENCES

1. Bellman R., Cooke K.L. *Differential-difference equations*. New York, Academic Press, 1963.
2. Elsgolt's L.E., Norkin S.B. *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations With Deviating Arguments*. New York, Academic Press, 1973.
3. Myshkis A.D. *Linear Delay Differential Equations*. Moscow, Nauka, 1972 (in Russian).
4. Wu J. *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*. New York, Springer, 1996.
5. Mei M. et al. Traveling wavefronts for time-delayed reaction–diffusion equation: (I) Local nonlinearity. *J. Dif. Equations*, 2009, vol. 247, no. 2, pp. 495–510.
6. Lv G., Wang Z. Stability of traveling wave solutions to delayed evolution equation. *J. Dyn. Control Syst.*, 2015, vol. 21, no. 2., pp. 173–187.
7. Polyani A.D., Sorokin V.G. Nonlinear delay reaction–diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions. *Appl. Math. Lett.*, 2015, vol. 46, pp. 38–43.
8. Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction-diffusion equation with a delay. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 338, pp. 448–466.
9. Polyani A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2013, vol. 54, pp. 115–126.
10. Polyani A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction–diffusion equations and more complex nonlinear equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 417–430.
11. Polyani A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, pp. 409–416.
12. Polyani A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction–diffusion equations. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 59, pp. 16–22.
13. Polyani A.D., Zhurov A.I. Nonlinear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients:

- Exact methods and new solutions. *Appl. Math. Lett.*, 2014, vol. 37, pp. 43–48.
14. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Non-linear instability and exact solutions to some delay reaction-diffusion systems. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 62, pp. 33–40.
 15. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 67, pp. 267–277.
 16. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The generating equations method: Constructing exact solutions to delay reaction-diffusion systems and other non-linear coupled delay PDEs. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2015, vol. 71, pp. 104–115.
 17. Sorokin V.G. Tochnye resheniya nekotorykh nelinejnykh uravnenij i sistem uravnenij v chastnykh proizvodnykh s zapazdyvanijem [Exact solutions of some nonlinear partial differential equations with delay and systems of such equations]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2016, vol. 5, no. 3, pp. 199–219 (in Russian).
 18. Polyanin A.D. Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction-diffusion equations with delay and variable coefficients. *Appl. Math. Lett.*, 2019, vol. 90, pp. 49–53.
 19. Sorokin V.G., Polyanin A.D. Nonlinear partial differential equations with delay: Linear stability/instability of solutions, numerical integration. *J. Physics: Conf. Series*. 2019, vol. 1205, 012053.
 20. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Generalized and functional separable solutions to non-linear delay Klein – Gordon equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 8, pp. 2676–2689.
 21. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Vyazmin A.V. Exact solutions and qualitative features of nonlinear hyperbolic reaction-diffusion equations with delay. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2015, vol. 49, no. 5, pp. 622–635.
 22. Long F.-S., Meleshko S.V. On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein – Gordon equation with a delay. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2016, vol. 39, no. 12, pp. 3255–3270.
 23. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Reakcionno-diffuzionnye uravneniya s zapazdyvanijem: Matematicheskie modeli i kachestvennye osobennosti [Reaction-diffusion equations with delay: Mathematical models and qualitative features]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2017, vol. 6, no. 1, pp. 41–55 (in Russian).
 24. Long F.-S., Meleshko S.V. Symmetry analysis of the nonlinear two-dimensional Klein – Gordon equation with a time-varying delay. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2017, vol. 40, no. 13, pp. 4658–4673.
 25. Sorokin V.G. Tochnye reshenija nelinejnykh telegrafnykh uravnenij s zapazdyvanijem [Exact solutions of nonlinear telegraph equations with delay]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2019, vol. 8, no. 5, pp. 453–464 (in Russian).
 26. Polyanin A.D., Sorokin V.G. New exact solutions of nonlinear wave type PDEs with delay. *Appl. Math. Lett.*, 2020, vol. 108, 106512.
 27. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Postroenie tochnykh reshenij nelinejnykh uravnenij matematicheskoj fiziki s zapazdyvanijem s pomoshh'ju reshenij bolee prostykh uravnenij bez zapazdyvanija [Construction of exact solutions for nonlinear equations of mathematical physics with delay using solutions of simpler equations without delay]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2020, vol. 9, no. 2, pp. 115–128 (in Russian).
 28. Polyanin A.D., Sorokin V.G. A method for constructing exact solutions of nonlinear delay PDEs. *J. Math. Anal. Appl.*, 2021, vol. 494, no. 2, 124619.
 29. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of non-linear differential-difference equations of a viscous fluid with finite relaxation time. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2013, vol. 57, pp. 116–122.
 30. Jordan P.M., Dai W., Mickens R.E. A note on the delayed heat equation: Instability with respect to initial data. *Mech. Research Comm.* 2008, vol. 35, pp. 414–420.
 31. Ockendon J.R., Tayler A.B. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 1971, vol. 332, pp. 447–468.
 32. Derfel G., van Brunt B., Wake G.C. A cell growth model revisited. *Functional Differential Equations.*, 2012, vol. 19, nos. 1–2, pp. 71–81.
 33. Zaidi A.A., van Brunt B., Wake G.C. Solutions to an advanced functional partial differential equation of the pantograph type. *Proc. R. Soc. A.*, 2015, vol. 471, 20140947.
 34. Ambartsumyan V.A. On the fluctuation of the brightness of the Milky Way. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1944, vol. 44, pp. 223–226.
 35. Dehghan M., Shakeri F. The use of the decomposition procedure of Adomian for solving a delay differential equation arising in electrodynamics. *Phys. Scripta.*, 2008, vol. 78, no. 6, 065004.
 36. Ajello W.G., Freedman H.I., Wu J. A model of stage structured population growth with density depended time delay. *SIAM J. Appl. Math.*, 1992, vol. 52, pp. 855–869.
 37. Mahler K. On a special functional equation. *J. London Math. Soc.*, 1940, vol. 1, no. 2, pp. 115–123.
 38. Ferguson T.S. Lose a dollar or double your fortune. In: *Proceedings of the 6th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, vol. III (eds. L.M. Le Cam et al.), pp. 657–666. Berkeley, Univ. California Press, 1972.
 39. Robinson R.W. Counting labeled acyclic digraphs. In: *New Directions in the Theory of Graphs* (ed. F. Harari), pp. 239–273. New York, Academic Press, 1973.
 40. Gaver D.P. An absorption probability problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 1964, vol. 9, pp. 384–393.
 41. Fox L. et al. On a functional differential equation. *IMA J. Appl. Math.*, 1971, vol. 8, pp. 271–307.
 42. Iserles A. On the generalized pantograph functional differential equation. *Eur. J. Appl. Math.*, 1993, vol. 4, no. 1, pp. 1–38.

43. Kato T., McLeod J.B. Functional-differential equation $y' = ay(\lambda t) + by(t)$. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1971, vol. 77, no. 6, pp. 891–937.
44. Liu M.Z., Li D. Properties of analytic solution and numerical solution of multi-pantograph equation. *Appl. Math. Comput.*, 2004, vol. 155, no. 3, pp. 853–871.
45. Yüzbaşı S., Sezer M. An exponential approximation for solutions of generalized pantograph-delay differential equations. *Appl. Math. Modelling*, 2013, vol. 37, no. 22, pp. 9160–9173.
46. Doha E.H. et al. A new Jacobi rational-Gauss collocation method for numerical solution of generalized pantograph equations. *Appl. Numer. Math.*, 2014, vol. 77, pp. 43–54.
47. Patade J., Bhalekar S. Analytical solution of pantograph equation with incommensurate delay. *Phys. Sci. Rev.*, 2017, vol. 2, no. 9, 20165103.
48. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition*. Boca Raton, CRC Press, 2012.