

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ОБОБЩЕННЫЙ ВАРИАНТ ВАРИАЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ

© 2020 г. Д. А. Куликов*

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, 150003, Россия

*e-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Поступила в редакцию 10.09.2020 г.

После доработки 10.09.2020 г.

Принята к публикации 12.10.2020 г.

Рассматривается вариационное уравнение Гинзбурга–Ландау, возникающее в теории конденсированных сред. В работе изучается вариант этого уравнения, который называют ψ^6 – модель. Как и в случае ψ^4 – модели соответствующее уравнение изучается вместе с периодическими краевыми условиями. Для периодической краевой задачи получены условия существования одномодовых состояний равновесия. Дан ответ об их устойчивости в смысле определения А.М. Ляпунова. В случае смены устойчивости одномодовыми состояниями равновесия изучены локальные бифуркации в окрестности этих решений. Показано, что в рассматриваемой задаче характерны докритические (жесткие) бифуркации. Бифуркационный анализ использует методы теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством и в первую очередь метод интегральных многообразий и метод нормальных форм Пуанкаре. Показано, что от одномодовых состояний равновесия бифурцируют двумерные инвариантные многообразия, сформированные пространственно неоднородными решениями, отличными от одномодовых. Для таких решений получены асимптотические формулы.

Ключевые слова: вариационное уравнение Гинзбурга–Ландау, одномодовые состояния равновесия, устойчивость, бифуркации, пространственно неоднородные решения

DOI: 10.1134/S2304487X20040045

ВВЕДЕНИЕ

Среди нелинейных моделей физики можно отметить несколько уравнений и систем, которые занимают особое положение. Такой феномен частично быть может объяснен обширными приложениями не только в физике, но и химии, биологии. Вторая причина состоит в том, что эти уравнения демонстрируют сложную динамику решений. К таким уравнениям можно отнести такие уравнения как нелинейное уравнение Шредингера, Кортевега де Вриза, Курамото–Сивашинского и т.д. В данной работе речь пойдет об одном из вариантов уравнения, которое принято называть комплексным уравнением Гинзбурга–Ландау (УГЛ) (см., например, [1–3])

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^2 + (a + ib)u_{xx}, \quad (1)$$

где $u = u(t, x) = u_1(t, x) + iu_2(t, x)$, $c, a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$. В случае, если $c = b = 0$, получаем частный вариант такого уравнения. Этот вариант заслужил собственное название вариационного уравнения Гинзбурга–Ландау [2]. В этой работе указаны области физики, где используется уравнение (1) и

его частные варианты. Например, вариационное уравнение Гинзбурга–Ландау было использовано в теории конденсированных сред, где получило название ψ^4 – модель (см., например, [4]). Достаточно часто уравнение (1) и вариационный его вариант дополняют периодическими краевыми условиями, которые после соответствующих перенормировок можно записать в следующем виде

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \quad (2)$$

Уравнение (1) – это классический вариант УГЛ. Рассматривались его обобщения и варианты. Например,

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^2 + (a + ib)\Delta u, \quad (3)$$

где $u = u(t, x) = u_1(t, x) + iu_2(t, x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $n = 1, 2, \dots$. В работах [5, 6] уравнение (3) рассматривалось вместе с периодическими краевыми условиями по каждой из пространственных переменных x_j , $j = 1, 2, \dots, n$. Так, например, в работе [5] сочетание аналитических и численных методов показало, что начиная с размерности 2 ($n = 2$) и

выше при достаточно больших c, b возможна жесткая турбулентность — динамика с редкими, но исключительно высокими выбросами. По мнению многих исследователей такую динамику предваряет наличие “жестких” (докритических) локальных бифуркаций. В работе [6] было показано, что начиная с $n = 3$ такие бифуркации характерны для уравнения (3), если $a = 0$.

В случае одной пространственной переменной в ряде работ (см., например, [7]) высказывалось мнение, подкрепленное численным анализом, что аналогичные эффекты возможны, если рассмотреть краевую задачу

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^4 + (a + ib)u_{xx}, \quad (4)$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad (5)$$

даже если $x \in \mathbb{R}$ (“одномерный” случай). Как уже отмечалось, наличие “жесткой” турбулентности связано с реализацией жестких бифуркаций. В данной работе будет показано, что при $c = b = 0$ реализуются жесткие бифуркации в окрестности одномерных состояний равновесия, т.е. решений вида

$$u(t, x) = \eta_k \exp(ikx), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k_0,$$

при соответствующем выборе k и основных параметров задачи.

Отметим, что более классический вариант вариационного УГЛ

$$u_t = u - u|u|^2 + du_{xx} (d > 0),$$

дополненный периодическими краевыми условиями был рассмотрен в работе [8].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОДНОМЕРНЫЕ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Далее будем изучать динамику решений краевой задачи

$$u_t = u - u|u|^4 + du_{xx}, \quad (6)$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad (7)$$

где действительная постоянная $d > 0$. Краевая задача (6), (7) имеет решения вида

$$u(t, x) = u_k(x) = \eta_k \exp(ikx), \quad \eta_k = (1 - dk^2)^{1/4}, \quad (8)$$

если $1 - dk^2 > 0$. Такие решения можно квалифицировать как одномерные состояния равновесия. Они существуют, если $1 - dk^2 > 0$, т.е. однородное состояние равновесия $u_0(x) = 1$ существует всегда. Отметим, что $k < 1/\sqrt{d}$. Следовательно, $|k| \leq k_0$,

где $k_0 = [1/\sqrt{d}]$, если $1/\sqrt{d} \in \mathbb{N}$ и $k_0 = [1/\sqrt{d}] - 1$, если $1/\sqrt{d}$ — целое. Здесь через $[x]$ обозначена целая часть числа $x \in \mathbb{R}$. Вместе с решением (8) краевая задача (6), (7), очевидно, имеет решения вида $u_k(x + h)$, $h \in \mathbb{R}$, т.е. решения вида $u_k(x + h) = \eta_k \exp(ikx + ikh)$, где h — любое действительное число. Решения $u_k(x + h)$ порождают однопараметрическое семейство состояний равновесия $S_k(h)$, если, конечно, $|k| \leq k_0$ (k_0 было выбрано ранее).

В работе будет рассмотрен вопрос о структуре окрестности состояний равновесия $S_k(h)$. Окрестность следует понимать в смысле нормы фазового пространства решений соответствующей краевой задачи, т.е. в смысле нормы гильбертова пространства $\mathbb{H}_2$. Подчеркнем, что если дополнить краевую задачу (6), (7) начальным условием

$$u(0, x) = f(x), \quad (9)$$

то из результатов работ [9, 10] вытекает, что начально-краевая (смешанная) задача (5), (6), (7) локально корректна разрешима, если $f(x) \in \mathbb{H}_2$, т.е. $f(x)$ имеет период 2π , а также $f(x) \in \mathbb{W}_2^2[-\pi, \pi]$ — пространство Соболева [11], состоящее из тех функций $f(x)$, для которых $f(x), f'(x), f''(x) \in \mathbb{L}_2(-\pi, \pi)$. Уместно подчеркнуть, что из теорем вложения Соболева вытекает включение $f(x) \in \mathbb{C}^1[-\pi, \pi]$ — пространству непрерывно дифференцируемых функций, а также, что $f(x) \in \mathbb{L}_p(-\pi, \pi)$ при любом $p \geq 1$. Нормы в $\mathbb{H}_2$ определяют равенством

$$\|f\|_{\mathbb{H}_2} = \|f\|_{\mathbb{L}_2(-\pi, \pi)} + \|f'\|_{\mathbb{L}_2(-\pi, \pi)} + \|f''\|_{\mathbb{L}_2(-\pi, \pi)},$$

$$\|\phi\|_{\mathbb{L}_2(-\pi, \pi)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \phi^2(x) dx}.$$

Далее будут изучены следующие вопросы:

- 1) об устойчивости одномерных инвариантных многообразий $S_k(h)$;
- 2) о существовании и устойчивости инвариантных многообразий из окрестности отличных от $S_k(h)$;
- 3) об асимптотическом представлении решений, принадлежащих таким инвариантным многообразиям.

Для анализа первого из поставленных вопросов, в частности, для анализа устойчивости состояний равновесия, формирующих $S_k(h)$ выполним замену

$$u(t, x) = \eta_k \exp(ikx)(1 + v(t, x)), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, k_0.$$

В новых переменных краевая задача (5), (6) перепишется в следующем виде

$$v_t = -2\eta_k^4(v + \bar{v}) - \eta_k^4[3v^2 + 6v\bar{v} + \bar{v}^2 + 6v^2\bar{v} + 3v\bar{v}^2 + v^3 + 3v^2\bar{v}^2 + 2v^3\bar{v} + v^3\bar{v}^2] + 2ikdv_x + dv_{xx}, \quad (10)$$

$$v(t, x + 2\pi) = v(t, x), \quad (11)$$

для которой следует исследовать вопрос об устойчивости состояния равновесия $v = 0$.

В свою очередь, при анализе этого вопроса следует обратиться к изучению линеаризованной в нуле краевой задачи (10), (11)

$$v_t = A_k v, \quad (12)$$

$$v(t, x + 2\pi) = v(t, x). \quad (13)$$

В краевой задаче (12), (13) через A_k обозначен дифференциальный оператор, определенный на достаточно гладких функциях, имеющих период 2π , следующим образом

$$A_k f = df'' + 2ikdf' - 2\eta_k^4(f + \bar{f}),$$

где $f = f(x)$.

Пусть $v = v_1(t, x) + iv_2(t, x)$. Перепишем краевую задачу (12), (13) в действительной форме записи

$$w_t = B_k w,$$

$$w(t, x + 2\pi) = w(t, x),$$

где использованы следующие обозначения

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad w_1 = v_1 = \operatorname{Re} v, \quad w_2 = v_2 = \operatorname{Im} v,$$

$$B_k w = \begin{pmatrix} -4\eta_k^4 w_1 + dw_{1xx} - 2dkw_{2x} \\ 2dkw_{1x} + dw_{2xx} \end{pmatrix}$$

или в “матричной” форме

$$B_k w = \begin{pmatrix} -4\eta_k^4 + d\partial_{xx}^2 & -2dk\partial_x \\ 2dk\partial_x & d\partial_{xx}^2 \end{pmatrix} w.$$

Вопрос об устойчивости решений (и в том числе нулевого) после замены

$$w(t, x) = \exp(\lambda t)y(x)$$

сводится к анализу спектра линейного дифференциального оператора B_k . Его собственные функции следует искать в виде

$$E_m(x) = \exp(imx)h_m, \quad h_m = \operatorname{colon}(h_{1m}, h_{2m}), \\ h_{j,m} \in \mathbb{C} \quad (\text{или } \mathbb{R}).$$

После элементарных преобразований вопрос о нахождении λ сводится к анализу спектра счетного семейства матриц второго порядка

$$B_{m,k} = \begin{pmatrix} -4\eta_k^4 - dm^2 & -2dkmi \\ 2dkmi & -dm^2 \end{pmatrix},$$

т.е. соответствующие $\lambda_{k,m}$ можно найти как корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + p_{k,m}\lambda + q_{k,m} = 0, \quad (14)$$

где $p_{k,m} = 2(dm^2 + 2\eta_k^4) > 0$ при всех $m \in Z$ и рассматриваемых k . Наконец,

$$q_{k,m} = dm^2(dm^2 + 4\eta_k^4 - 4dk^2) = \\ = dm^2(dm^2 + 4 - 8dk^2).$$

Ясно, что $q_{k,0} = 0$. Пусть далее $m \neq 0$. Тогда $q_{k,m}$ может менять знак при изменении параметров (коэффициентов). Сразу отметим, что $q_{0,m} > 0$ при всех m и, кроме того, $\lim_{|m| \rightarrow \infty} q_{0,m} = \infty$. Следовательно, однородные состояния равновесия, $u(t, x) = \exp(ih)(h \in \mathbb{R})$ устойчивы при любом выборе коэффициентов.

Пусть теперь $k \neq 0$ ($k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm k_0$). Тогда $q_{k,m} > 0$ при всех $m \neq 0$, если $q_{k,\pm 1} > 0$. Последние условия приводят к неравенству

$$d + 4 - 8dk^2 > 0. \quad (15)$$

Неравенство (15) – достаточное условие устойчивости решений, формирующих $S_k(h)$, так как при выполнении неравенства (15) все корни характеристического уравнения (14) лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости. Если же $d + 4 - 8dk^2 < 0$, то характеристическое уравнение (14) имеет корни в правой полуплоскости и поэтому семейство решений $S_k(h)$ состоит из неустойчивых состояний равновесия. Наконец, если

$$d + 4 - 8dk^2 = 0,$$

то реализуется критический случай в задаче об устойчивости соответствующих решений. Ясно, что соответствующее значение

$$d = d_k = \frac{4}{8k^2 - 1} > 0$$

при любом $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k_0$.

Итак, справедливо утверждение.

Теорема 1. Семейство $S_k(h)$ с номером k ($k = \pm 1, \dots, \pm k_0$) состоит из устойчивых решений в смысле определения Ляпунова, если $d \in (0, d_k)$ и они неустойчивы, если $d \in (d_k, \infty)$.

При $d = d_k$ в задаче об устойчивости решений $S_k(h)$ реализуется критический случай, когда спектру устойчивости принадлежит нулевое собственное значение кратности 3. Собственному

значению $\lambda = 0$ отвечают в нашем случае ($k \neq 0$) собственные элементы (вектор-функции)

$$E_{k,0}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_{k,1}(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ -2k \sin x \end{pmatrix},$$

$$E_{k,2}(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ 2k \cos x \end{pmatrix}.$$

Собственные элементы следует выбирать как нетривиальные решения системы дифференциальных уравнений

$$-4\eta_k^4 f_1 - 2d_k k f_2' + d_k f_1'' = 0, \quad d_k f_2'' + 2d_k k f_1' = 0.$$

Сделаем несколько простых замечаний.

Семейства состояний равновесия $S_k(h)$ и $S_{-k}(h)$ одновременно устойчивы или неустойчивы.

Пусть $S_{k_1}(h)$, $S_{k_2}(h)$ два семейства состояний равновесия, где $k_1, k_2 \geq 1$ (в силу предыдущего замечания вполне приемлемо ограничиться положительными “номерами”). Будем считать, что $k_1 < k_2$. Тогда $d_{k_1} > d_{k_2}$, т.е. если семейство с номером $p = 1, 2, \dots, k_0$ потеряло устойчивость, то неустойчивы будут все семейства с “большими” номерами. Иначе, если состояние равновесия с большим номером k_2 асимптотически устойчиво, то и состояние равновесия с номером k_1 также будет асимптотически устойчивым.

Нетривиальные состояния равновесия с номером k существуют при $d < \frac{1}{k^2}$, а устойчиво, если

$$d < d_k = \frac{4}{8k^2 - 1} < \frac{1}{k^2}, \text{ т.е. каждое состояние равновесия } S_k(h) \text{ в зависимости от } d \text{ может существовать и быть устойчивым, существовать как неустойчивое состояние равновесия.}$$

2. БИФУРКАЦИИ ВО ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

Рассмотрим краевую задачу (6), (7) в случае близком к критическому, т.е. при

$$d = d_k(1 + \gamma\epsilon), \quad (16)$$

где $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, $0 < \epsilon_0 \ll 1$ (ϵ — малый положительный параметр), $\gamma = \pm 1$ и соответствующее значение будет выбрано позднее, в ходе анализа соответствующего варианта краевой задачи. В частности, при $\gamma = -1$ нулевое решение краевой задачи (6), (7) асимптотически устойчиво и неустойчиво, если $\gamma = 1$.

Перепишем краевую задачу (6), (7) в действительной форме записи

$$w_t = B_k(\epsilon)w + F_2(w, \epsilon) + F_3(w, \epsilon) + F_4(w, \epsilon) + F_5(w, \epsilon), \quad (17)$$

$$w(t, x + 2\pi) = w(t, x). \quad (18)$$

Здесь дифференциальные операторы $B_k(\epsilon)$ определены равенствами

$$B_k(\epsilon) = B_k + \gamma\epsilon C_k,$$

$$B_k = \begin{pmatrix} -4 + 4d_k k^2 + d_k \partial_{xx}^2 & -2kd_k \partial_x \\ 2kd_k \partial_x & d_k \partial_{xx}^2 \end{pmatrix},$$

$$C_k = \begin{pmatrix} 4d_k k^2 + d_k \partial_{xx}^2 & -2kd_k \partial_x \\ 2kd_k \partial_x & d_k \partial_{xx}^2 \end{pmatrix},$$

$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_{xx}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ — операторы дифференцирования, $d_k = \frac{4}{8k^2 - 1}$, $k = \pm 1, \dots, \pm k_0$.

В дифференциальном уравнении (17) также использованы обозначения

$$F_2(w, \epsilon) = -2\eta_k^4(\epsilon) \begin{pmatrix} 5w_1^2 + w_2^2 \\ 2w_1 w_2 \end{pmatrix},$$

$$F_3(w, \epsilon) = -2\eta_k^4(\epsilon) \begin{pmatrix} 5w_1^3 + 3w_1 w_2^2 \\ w_2^3 + 3w_1^2 w_2 \end{pmatrix},$$

$$F_4(w, \epsilon) = -\eta_k^4(\epsilon) \begin{pmatrix} 5w_1^4 + 6w_1^2 w_2^2 + w_2^4 \\ 4w_1 w_2 (w_1^2 + w_2^2) \end{pmatrix},$$

$$F_5(w, \epsilon) = -\eta_k^4(\epsilon) \begin{pmatrix} w_1 (w_1^2 + w_2^2)^2 \\ w_2 (w_1^2 + w_2^2)^2 \end{pmatrix},$$

$$\eta_k^4(\epsilon) = (1 - d_k k^2) - \epsilon \gamma d_k k^2 = \eta_k^4 - \epsilon \gamma k^2 d_k.$$

Далее, как правило, будут использоваться постоянная $\eta_k^4 = \eta_k^4(0)$, а также вектор-функции $F_j(w) = F_j(w, 0)$, $j = 2, 3, 4, 5$.

Линейный дифференциальный оператор $B_k(\epsilon)$ при всех рассматриваемых ϵ будет симметричным, т.е. таким, для которого выполнены равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} (B_k(\epsilon)f(x), g(x))dx = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x), B_k(\epsilon)g(x))dx,$$

где обе двумерные вектор-функции $f(x), g(x)$ имеют период 2π и являются достаточно гладкими, $(*, **)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$. Следовательно, линейный дифференциальный оператор $B_k(\epsilon)$ имеет только действительные собственные значения. При этом собственные элементы, формируют полную ортогональную систему в $\mathbb{L}_2((-\pi, \pi); \mathbb{R}_2)$, т.е. пространстве двумерных вектор-функций, где их компоненты интегрируемы с

квадратом. При этом линейный дифференциальный оператор $B_k(\varepsilon)$ имеет собственные числа

$$\lambda_0(\varepsilon) = 0, \quad \lambda_{1,2} = \gamma \frac{4}{4k^2 + 1} \varepsilon + o(\varepsilon),$$

т.е. при $\varepsilon = 0$ у него есть трехмерное нулевое собственное число. Остальные его собственные числа $\lambda_n(\varepsilon)$ таковы, что $\lambda_n(\varepsilon) \leq -\gamma_0 < 0$, где постоянная γ_0 — не зависит от ε . Следовательно, для краевой задачи (17), (18) анализ окрестности нулевого состояния равновесия приводит к необходимости изучения локальных бифуркаций в случае близком к критическому трехкратного нулевого собственного значения, т.е. к задаче, которая не решена к настоящему времени в полном объеме даже для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Вместе с тем, это не означает, что такую задачу нельзя изучать для конкретной краевой задачи, в нашем случае это краевая задача (17), (18). Она, как легко показать, имеет ряд свойств, облегчающих анализ бифуркаций.

Отметим, что краевая задача (17), (18) такова, что для ее решений выполнены следующие свойства. Дополним краевую задачу (17), (18) начальным условием

$$w(0, x) = g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Пусть $g_1(x), g_2(x) \in \mathbb{H}_2$ и, кроме того, $g_1(x)$ — четная функция x , а $g_2(x)$ — нечетная. Тогда при всех t , когда решение начально-краевой задачи (17), (18), (19) существует, справедливы тождества

$$w_1(t, -x) = w_1(t, x), \quad w_2(t, -x) = -w_2(t, x), \quad (20)$$

т.е. первая компонента четная, а вторая нечетная функции переменного x . В данном разделе ограничимся рассмотрением вспомогательной краевой задачи (17), (18), (20). Перенесение результатов анализа краевой задачи (17), (18), (20) на основную краевую задачу (17), (18) будет сделано в следующем разделе. Основным моментом перенесения полученных результатов на основную краевую задачу будет то обстоятельство, что краевая задача (17), (18) инвариантна относительно замены $x \rightarrow x + h$, т.е. одного из преобразований Галилея.

Итак, приступим к анализу вспомогательной краевой задачи (17), (18), (20). В таком случае, линейный дифференциальный оператор $B_k(\varepsilon)$ имеет уже однократное собственное число $\lambda_1(\varepsilon) = \gamma \varepsilon \frac{4}{4k^2 + 1}$, а для остальных его собственных значений справедливо неравенство $\lambda_n(\varepsilon) \leq -\gamma < 0$.

Собственное значение $\lambda_1(\varepsilon)$ отвечает собственному элементу

$$E_{k,1}(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ -2k \sin x \end{pmatrix}.$$

Отметим, что собственные функции $E_{k,0}, E_{k,2}$ в рассматриваемый класс функций явно не входят.

В таком случае анализ бифуркационной задачи может быть сведен к изучению скалярного уравнения (см, например, [8, 12])

$$z' = \varphi(z, \varepsilon), \quad (21)$$

которую называют нормальной формой (НФ–Пуанкаре). Здесь $z = z(s)$, $s = \varepsilon t$ — “медленное” время, $\varphi(z, \varepsilon)$ — достаточно гладкая функция, для которой $\varphi(0, \varepsilon) = 0$, а также

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = \gamma \frac{4}{4k^2 + 1} + O(\varepsilon).$$

Далее, основную роль будет играть функция $\psi(z) = \varphi(z, 0)$, т.е. уравнение

$$z' = \psi(z), \quad (22)$$

которое принято называть укороченной нормальной формой. В ситуации общего положения именно уравнение (22) играет основную роль при анализе локальных бифуркаций (т.е. бифуркаций в окрестности $w = 0$).

Нормальная форма (22) — это дифференциальное уравнение, решая которое, можно восстановить решения начально-краевой задачи (17), (18), (20), принадлежащие одномерному инвариантному многообразию $M_1(\varepsilon)$ в окрестности нулевого решения. При этом решения принадлежащие $M_1(\varepsilon)$ можно и удобно искать в следующей форме [8]

$$w(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} q_1(x, z) + \varepsilon q_2(x, z) + \varepsilon^{3/2} q_3(x, z) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (23)$$

где $q_j(x, z) = \text{colon}(q_{j1}(x, z), q_{j2}(x, z))$, $q_1 = z E_{k,1}(x)$, $j = 1, 2, 3$. Решения, принадлежащие $M_1(\varepsilon)$ ищем в форме, которая индуцирована применением метода Крылова–Боголюбова, адаптированного к данной краевой задаче. Здесь достаточно гладкие вектор-функции $q_j(x, z)$ обладают априори следующими свойствами:

1) при фиксированном z они удовлетворяют краевым условиям (18), (20);

2) $q_j(x, 0) = 0$;

3) $\int_{-\pi}^{\pi} (q_j, E_{k,1}(x)) dx = 0$, $j = 2, 3, \dots$

Подстановка суммы (23) в краевую задачу (17), (18), (20) приводит к линейным неоднородным

краевым задачам, сформированным после приравнивания выражений при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$. При $\varepsilon^{1/2}$ сразу получаем однородную краевую задачу, для которой $E_{k,1}(x)$ будет решением. Содержательные задачи получаем, на втором и третьем шагах. Приравняв члены при ε , получаем краевую задачу

$$B_k q_2 + F_2(q_1) = 0, \quad (24)$$

$$q_2(x + 2\pi, z) = q_2(x, z), \quad (25)$$

$$q_{21}(-x, z) = q_{21}(x, z), \quad q_{22}(-x, z) = -q_{22}(x, z). \quad (26)$$

Если же собрать члены пропорциональные $\varepsilon^{3/2}$, то получим краевую задачу для определения q_3

$$z'E_{k,1}(x) = B_k q_3 + \gamma C_k z E_k + F_3(q_1) + G(q_1, q_2), \quad (27)$$

$$q_3(x + 2\pi, z) = q_3(x, z), \quad (28)$$

$$q_{31}(-x, z) = q_{31}, \quad q_{32}(-x, z) = -q_{32}(x, z). \quad (29)$$

Здесь $G(q_1, q_2) = -4\eta_k^4 \begin{pmatrix} 5q_{11}q_{21} + q_{12}q_{22} \\ q_{11}q_{22} + q_{21}q_{12} \end{pmatrix}$, вектор-функции $q_1(x, z) = zE_{k,1}(x)$, а вектор-функция $q_2(x, z)$ определяется после анализа краевой задачи (24), (25), (26).

$$F_3(q_1) = -2\eta_k^4 \begin{pmatrix} 5q_{11}^3 + 3q_{11}q_{12}^2 \\ q_{12}^3 + 3q_{11}^2q_{12} \end{pmatrix},$$

где $q_{11} = z \cos x$, $q_{12} = -2zk \sin x$.

Вектор-функцию $q_2(x, z)$ находим в виде

$$q_2(x, z) = z^2 Q_2(x, k) = z^2 \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \cos 2x \\ a_2 \sin 2x \end{pmatrix},$$

$$a_0 = -\frac{5 + 4k^2}{4}, \quad a_1 = -\frac{5(4k^2 - 1)}{12},$$

$$a_2 = \frac{2k(4k^2 - 1)}{3}.$$

Перейдем теперь к анализу неоднородной краевой задачи (27), (28), (29).

Замечание. Рассмотрим неоднородную краевую задачу

$$B_k g = f(x), \quad g(x + 2\pi) = g(x),$$

$$g_1(-x) = g_2(x), \quad g_2(-x) = -g_2(x),$$

$$f(x) = \text{colon}(f_1, f_2), \quad g(x) = \text{colon}(g_1, g_2).$$

Она имеет решение, если выполнены условия разрешимости

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x), E_{k,1}(x)) dx = 0.$$

Решение, для которого справедливо равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} (g(x), E_{k,1}(x)) dx = 0,$$

единственно.

Подчеркнем, содержательность замечания: линейный оператор B_k не имеет обратного (у него есть нулевое собственное число). Данное замечание — утверждение, входят в серию утверждений, которые принято называть альтернативой Фредгольма.

Итак, используя условия разрешимости неоднородной краевой задачи (27), (28), (29) получаем, что с необходимостью

$$z' = \varphi(z) = \alpha_k z + l_k z^3, \quad (30)$$

где $\alpha_k = \gamma \frac{4}{4k^2 + 1}$, $l_k = \frac{8(4k^2 - 1)(16k^2 + 5)}{3(8k^2 - 1)(4k^2 + 1)} > 0$, т.е. уравнение (30) это вариант укороченной нормальной формы (22), соответствующей вспомогательной краевой задаче (17), (18), (20).

Лемма 1. Обыкновенное дифференциальное уравнение (30) имеет три состояния, если $\alpha_k l_k < 0$:

$$S_0 : z = 0, \quad S_+ : z = \sqrt{-\frac{\alpha_k}{l_k}}, \quad S_- : z = -\sqrt{-\frac{\alpha_k}{l_k}}.$$

Состояние равновесия S_0 асимптотически устойчиво, если $\alpha_k < 0$ и неустойчиво, если $\alpha_k > 0$. Состояния равновесия S_+, S_- асимптотически устойчивы, если $\alpha_k > 0$ и неустойчивы, если $\alpha_k < 0$.

В нашем случае $l_k > 0$. Таким образом с необходимостью $\alpha_k < 0$, т.е. следует выбирать $\gamma < 0$ ($\gamma = -1$).

Из результатов работ [13–15] и леммы 1 вытекает справедливость утверждения.

Теорема 2. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ нетривиальным состояниям равновесия S_+, S_- нормальной формы (30) соответствуют состояния равновесия краевой задачи (17), (18), (20) с сохранением свойств устойчивости, т.е. в данном случае состояниям равновесия S_+, S_- соответствуют два ненулевых состояния равновесия краевой задачи (17), (18), (20).

Для соответствующих состояний равновесия краевой задачи справедливы асимптотические формулы

$$w_{\pm}(x, \varepsilon) = \pm \varepsilon^{1/2} \rho_k E_{k,1}(x) + \varepsilon \rho_k^2 Q_2(x, k) + o(\varepsilon), \quad (31)$$

где $\rho_k = \sqrt{-\frac{\alpha_k}{l_k}}$, $q_2(x, z) = \rho_k^2 Q_2(x, k)$. Оба решения (31) неустойчивы.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В предыдущем разделе были найдены состояния равновесия краевой задачи (17), (18), (20). Ясно, что эти решения удовлетворяют и краевой задаче (17), (18). Вместе с тем наряду с решениями (31) краевая задача (17), (18) имеет решения вида

$$w_{\pm}(x + h, \varepsilon) = \pm \varepsilon^{1/2} \rho_k E_{k,1}(x + h) + \varepsilon \rho_k^2 Q_2(x + h, k) + o(\varepsilon), \quad (32)$$

где $h \in \mathbb{R}$ и произвольно.

Наконец, если возвратиться к исходной краевой задаче (6), (7), то для нее справедливо утверждение.

Теорема 3. Пусть $d = d_k(1 - \varepsilon)$. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ краевая задача (6), (7) имеет двухпараметрическое семейство состояний равновесия

$$u(t, x, \varepsilon) = u(x, \varepsilon) = \eta_k \exp(ikx + ih_0)(1 + v(x + h, \varepsilon)),$$

где $h_0, h \in \mathbb{R}$ и произвольны, а

$$v(x + h, \varepsilon) = w_1(x + h, \varepsilon) + iw_2(x + h, \varepsilon).$$

Здесь w_1, w_2 компоненты решения (32). Эти состояния равновесия неустойчивы.

Наличие множителя $\exp(ih_0)$ вытекает из вида замены $u(t, x) = \eta_k \exp(ikx)(1 + v(t, x))$. Действительно, положим

$$u(t, x) = \eta_k \exp(ikx + ih_0)(1 + v(t, x)).$$

Тогда для $v(t, x)$ получим, ту же краевую задачу, как и при $h_0 = 0$.

Отметим, что

$$\begin{aligned} u(x + h, \varepsilon) &= \\ &= \eta_k \exp(ikx + ih_0) [1 \pm \varepsilon^{1/2} \rho_k (\cos(x + h) - \\ &\quad - 2ik \sin(x + h)) + O(\varepsilon)], \end{aligned}$$

если ограничиться первым членом асимптотических формул.

В заключении уместно акцентировать внимание на то обстоятельство, что для бифуркаций в окрестности состояний равновесия характерны докритические (жесткие) бифуркации. Аналогичный вариант, т.е. жесткие бифуркации, имели

место для стандартного варианта вариационного УГЛ [8], т.е. уравнения вида

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^2 + du_{xx}.$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00672.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin: Springer-Verlag. 1984. 156 p.
2. Aronson I.S., Kramer L. The world of the complex Ginzburg-Landau equation // Reviews of modern physics. 2002. V. 74. P. 99–143.
3. Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. New-York: Springer-Verlag, 1997. 650 p.
4. Kulikov A.N., Rudy A.S. States of equilibrium of condensed matter within Ginzburg-Landau ψ^4 -model // Chaos, Solitons and Fractals. 2003. V. 15. P. 75–85.
5. Bartuccelli M., Constantin P., Doering Ch.R., Gibbon J.D., Gisseloft M. On the possibility of soft and hard turbulence in the complex Ginzburg-Landau equation // Physica D. 1990. V. 44. P. 421–444.
6. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Локальные бифуркации плоских бегущих волн обобщенного кубического уравнения Шредингера // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 9. С. 1290–1299.
7. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Подлазов А.В. Нелинейная динамика. Подходы, результаты, надежды. М.: Комкнига, 2006. 280 с.
8. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Состояния равновесия вариационного уравнения Гинзбурга–Ландау // Вестник национального исследовательского ядерного ун-та “МИФИ”. 2017. Т. 3. № 4. С. 408–415.
9. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
10. Соболевский П.Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Тр. Москов. мат. об-ва. 1961. Т. 10. С. 297–350.
11. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград: Изд-во ЛГУ. 1950.
12. Guckenheimer J., Holmes P.J. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Berlin.: Springer-Verlag, 1983. 462 p.
13. Колесов А.Ю., Куликов А.Н., Розов Н.Х. Инвариантные торы одного класса отображений: сохранение тора при возмущениях // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 6. С. 738–753.
14. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Журнал

- вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. № 5. С. 930–945.
15. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Локальные бифуркации в уравнения Кана–Хиллиарда, Курамото–Сива-

шинского и их обобщениях // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59. № 4. С. 670–683.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 4, pp. 329–337

Generalized Variant of the Variational Ginzburg–Landau Equation

D. A. Kulikov[#]

Yaroslavl State University named after P.G. Demidov, Yaroslavl, 150003 Russia

[#]*e-mail: kulikov_d_a@mail.ru*

Received September 10, 2020; revised September 10, 2020; accepted October 12, 2020

Abstract—The version of the Ginzburg–Landau variational equation occurring in condensed matter physics which is called the ψ^6 -model is studied. As in the case of the ψ^4 -model, the corresponding equation is studied together with periodic boundary conditions. Conditions for the existence of single-mode equilibrium states are obtained for a periodic boundary value problem. An answer is given to the question of their stability in the sense of Lyapunov's definition. In the case of a change in stability by single-mode equilibrium states, local bifurcations near these solutions are studied. It is shown that subcritical (rigid) bifurcations are characteristic of the problem under consideration. Bifurcation analysis involves the methods of the theory of dynamical systems with infinite-dimensional phase space and, first of all, the method of integral manifolds and the method of Poincaré normal forms. It is shown that two-dimensional invariant manifolds formed by spatially inhomogeneous solutions other than single-mode ones bifurcate from single-mode equilibrium states. For such solutions, asymptotic formulas are obtained.

Keywords: variational Ginzburg–Landau equation, single-mode equilibrium states, stability, bifurcations, spatial inhomogeneous solutions

DOI: 10.1134/S2304487X20040045

REFERENCES

1. Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin: Springer-Verlag, 1984. 156 p.
2. Aronson I.S., Kramer L. The world of the complex Ginzburg–Landau equation // Reviews of modern physics. 2002. V. 74. P. 99–143.
3. Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. New-York: Springer-Verlag, 1997. 650 p.
4. Kulikov A.N., Rudy A.S. States of equilibrium of condensed matter within Ginzburg–Landau ψ^4 -model // Chaos, Solitons and Fractals. 2003. V. 15. P. 75–85.
5. Bartuccelli M., Constantin P., Doering Ch.R., Gibbon J.D., Gisselalt M. On the possibility of soft and hard turbulence in the complex Ginzburg–Landau equation // Physica D. 1990. V. 44. P. 421–444.
6. Kulikov A.N., Kulikov D.A. Local bifurcations of plane running waves for the generalized cubic Schrodinger equation // Differential equations. 2010. V. 46. № 9. P. 1299–1308.
7. Malinetskiy G.G., Potapov A.B., Podlazov A.V. Nelineynaya dinamika. Podhody, rezultaty, nadeshdy [Nonlinear dynamics. Approaches, results, hopes]. M.: Komkniga. 2006. 280 p. (in Russian).
8. Kulikov A.N., Kulikov D.A. Equilibrium states of the variational Ginzburg–Landau equation // Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI". 2017. V. 6. № 6. P. 496–502.
9. Krein S.G. Lineynie differentsialnye uravnenia v banachovom prostranstve [Krein G. Linear differential equations in a Banach space]. M.: Nauka, 1977. 464 p. (in Russian).
10. Sobolevskiy P.E. Ob uravneniyach parabolicheskogo tipa v Banachovom prostranstve [On equations of parabolic type in a Banach space]. Tr. MMO. 1967. V. 10. P. 297–350.
11. Sobolev S.L. Nekotorye primeneniya funktsionalnogo analiza v matematicheskoy fizike [Some applications of

- functional analysis in mathematical physics]. Ленинград. Изд-во LGU. 1950. 256 p. (in Russian).
12. Guckenheimer J., Holmes P. J. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Berlin.: Springer-Verlag. 1983. 462 p.
 13. Kolesov A.Yu, Kulikov A.N., Rozov N.Kh. Invariant Tori of a class of point transformations: preservation of an invariant torus under perturbations // Differential equations. V. 39. № 6. P. 775–790.
 14. Kulikov A.N., Kulikov D.A. Formation of wavy nanostructures on the surface of flat substrates by ion bombardment // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2012. V. 52. № 5. P. 800–814.
 15. Kulikov A.N., Kulikov D.A. Local bifurcations in the Cahn-Hilliard and Kuramoto–Sivashinsky equations and in their generalizations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2019. V. 59. № 4. P. 630–643.