СОДЕРЖАНИЕ

Том 9, номер 5, 2020

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Contents

Volume 9, Number 5, 2020

Applied Mathematics and Informatics

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2020, том 9, № 5, с. 389–395

УДК 544.723

ПОЛИЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ИЗОТЕРМА АДСОРБЦИИ ПРИ ЛИНЕЙНОЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОВЕРХНОСТИ

© 2020 г. М. В. Вигдорович[1,3,4,*], Л. Е. Цыганкова[2], Н. В. Шель[3]

[1] *Angara GmbH, Дюссельдорф, 40599, Германия*

[2] *Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, Тамбов, 392000, Россия*

[3] *Тамбовский государственный технический университет, Тамбов, 392000, Россия*

[4] *Всероссийский научно-исследовательский институт использования техники и нефтепродуктов в сельском хозяйстве, Тамбов, 392022, Россия*

**e-mail: dr.vigdorowitsch@angara-gmbh.de*

Поступила в редакцию 01.10.2020 г.
После доработки 07.11.2020 г.
Принята к публикации 24.11.2020 г.

Получено точное решение для изотермы мономолекулярной адсорбции при линейной энергетической неоднородности поверхности. Показано, что интерпретация многочисленных экспериментальных результатов, ранее ассоциируемых с равномерной энергетической неоднородностью поверхности (адсорбционная модель Тёмкина) на основании наличия у изотермы протяженных линейных участков в полулогарифмических координатах, может потребовать основательного пересмотра. Изучены свойства новой изотермы, рассмотрены асимптотические и физически предельные случаи. Показано, что в случае полилогарифмической адсорбционной модели неоднородность поверхности представлена двумя параметрами, энергетической дисперсией (идентичен параметру неоднородности адсорбционной модели Тёмкина) и энергетическим градиентом. В зависимости от знака последнего, различаются адсорбционно-агрессивные и адсорбционно-умеренные поверхности. Для первых чем больше теплота адсорбции участка поверхности, тем большее количество таких участков поверхности имеется, тогда как для вторых бóльшая теплота адсорбции присуща меньшему количеству участков поверхности. Физически, больший энергетический градиент “толкает” систему в том же направлении, что и бóльшая энергетическая дисперсия, однако делает это менее динамично. Аналогично адсорбционной модели Тёмкина, выделен случай “средних заполнений” (термин Тёмкина), для него выведена упрощенная форма полилогарифмической изотермы.

Ключевые слова: адсорбция, изотерма, Тёмкин

DOI: 10.1134/S2304487X20050156

ВВЕДЕНИЕ

Вопрос, связанный с типом изотерм на энергетически неоднородных поверхностях, исторически восходит к работам И. Ленгмюра [1]. При заданной неоднородности a (ε), интегрирование с ядром L производится по теплоте адсорбции ε по всей поверхности S, на каждом из бесконечно малых участков которой реализуется изотерма Ленгмюра:

$$\theta = \int_S L(\varepsilon)d\varepsilon, \tag{1}$$

где θ – степень покрытия поверхности.

Интегрирование по степени покрытия в уравнении (1) с ленгмюровским ядром

$$L(\varepsilon) = \frac{a_0 \exp(\varepsilon/kT)p}{1 + a_0 \exp(\varepsilon/kT)p}, \tag{2}$$

где p – давление в газовой фазе, ионная активность в жидкой фазе или концентрация при условии, что раствор имеет постоянную ионную силу, по теплоте адсорбции от $\left(\varepsilon_0 - c\dfrac{kT}{2}\right)$ до $\left(\varepsilon_0 + c\dfrac{kT}{2}\right)$ вдоль параметрически задаваемой линии (параметр $t \in [0;1]$)

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + kT\frac{c}{2} - kTct, \tag{3}$$

приводит к хорошо известной изотерме Тёмкина [2]:

$$\theta = \frac{1}{c}\ln\frac{1 + a_+ p}{1 + a_- p}, \tag{4}$$

где коэффициенты $a_+ = a_0 \exp\left(\dfrac{c}{2}\right)\exp\left(\dfrac{\varepsilon_0}{kT}\right)$ и $a_- = a_0 \exp\left(-\dfrac{c}{2}\right)\exp\left(\dfrac{\varepsilon_0}{kT}\right)$ соответствуют слабо и

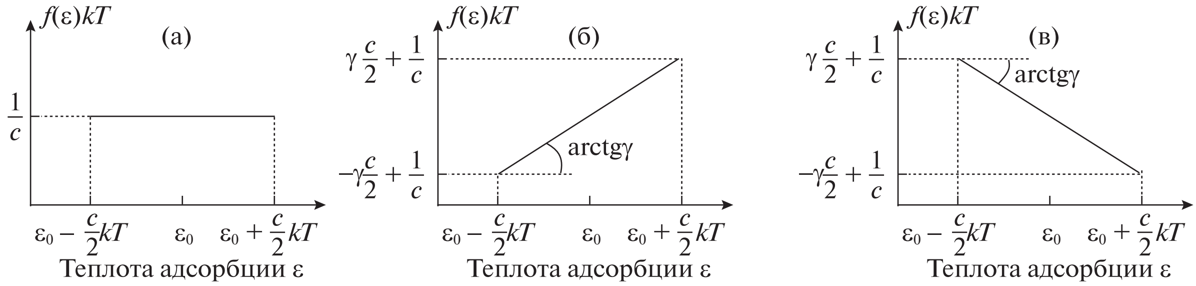


Рис. 1. Функции распределения для: (а) энергетически равномерно неоднородной поверхности (адсорбционная модель Тёмкина), (б) линейно неоднородной поверхности – адсорбционно агрессивной, (в) линейно неоднородной поверхности – умеренной.

сильно адсорбирующим участкам поверхности, $c = \ln\left(\frac{a_+}{a_-}\right)$ – параметр энергетической неоднородности поверхности (константа), $a_0 p$ – безразмерное давление (активность или концентрация сообразно вышесказанному). В случае $a_+ \gg a_-$ существует диапазон так называемых “средних покрытий”, определенный таким образом непосредственно Тёмкиным, где имеют место следующие неравенства:

$$a_+ p \gg 1, \tag{5a}$$

т.е. сильно адсорбирующие участки поверхности, главным образом, заняты, и

$$a_- p \ll 1, \tag{5b}$$

что соответствует, главным образом, незанятости слабо адсорбирующих участков поверхности. Упрощенная форма уравнения (4)

$$\theta = \frac{1}{c}\ln a_+ p \tag{6}$$

происходит именно из такого условия Тёмкина и весьма ценится в экспериментальных работах вследствие удобной в обработке линейной зависимости в полулогарифмических координатах [3].

Хорошо известно, что результат, аналогичный уравнению (4), можно также получить интегрированием

$$\theta = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} L(x) f(x) dx \tag{7}$$

с дифференциальной функцией распределения адсорбирующих участков поверхности по теплоте адсорбции вида [4]

$$f(x) = \frac{1}{kT}\begin{cases}\frac{1}{c}, & -\frac{c}{2} \le x \le \frac{c}{2};\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{8}$$

Следует обратить внимание, что при формулировке исходных условий иногда имеет место следующее недоразумение. Об изотерме Тёмкина часто говорят как о линейном распределении, хотя такая характеристика связана с упорядочением адсорбирующих участков поверхности по теплоте адсорбции *при интегрировании по степени покрытия*. Функция распределения же участков поверхности является *константой*, т.е. вероятность того, что случайно выбранный адсорбирующий участок поверхности характеризуется теплотой адсорбции ε, не зависит от ε (рис. 1а). В свою очередь, ε линейно возрастает или убывает при переходе от одной группы адсорбирующих участков поверхности к другой. Энергетически такой тип поверхности характеризуется как равномерно неоднородный.

В отличие от равномерно неоднородных поверхностей, тип линейно неоднородной поверхности не упоминается в монографиях по адсорбции [5, 6], а какой-либо его детальный анализ, возможно, выполненный ранее, авторам неизвестен. По всей видимости, дефицит внимания к линейной неоднородности связан с тем, что точное аналитическое выражение для интеграла в уравнении (7) связано со специальной функцией, так называемой *полилогарифмической функцией 2-го рода*, или *дилогарифмом*, которая упоминается в традиционных справочниках по специальным функциям отнюдь не детально (см., например, [7]). Лишь в относительно недавнее время она вызвала интерес, а ее свойства были подробно изучены [8–10]. Вкратце охарактеризуем ее в целом. Некоторые из возможных представлений дилогарифма связаны с интегралом

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^z \frac{\ln(1-t)}{t} dt,$$

а при $|z| < 1$ также рядом

$$\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

В соответствии с определением, полилогарифмическая функция 2-го рода – аналитическая в $\mathbb{C}$ всюду, кроме $z = 1$, где она имеет логарифмическую точку ветвления. Для действительных значений $z = x$ имеет место разрез вдоль действительной оси от 1 до $+\infty$. Данная особенность не существенна в контексте настоящего сообщения, поскольку далее пойдет речь о существенно отрицательных действительных аргументах $x = -a_{\pm}p$ полилогарифмической функции 2-го рода, которая при этом непрерывна, отрицательна и квазилогарифмически убывает при возрастании $|x|$.

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ИЗОТЕРМА АДСОРБЦИИ ПРИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИ ЛИНЕЙНО НЕОДНОРОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Линейной энергетической неоднородности поверхности соответствует следующая функция распределения адсорбирующих участков поверхности по теплоте адсорбции (рис. 1б, 1в):

$$f(x) = \frac{1}{kT}\begin{cases}\gamma\dfrac{x-\varepsilon_0}{kt}+\dfrac{1}{c}, & -\dfrac{c}{2}\le x\le\dfrac{c}{2},\\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases} \quad (9)$$

где γ – фактор линейной неоднородности, причем неравенство $|\gamma| < 2/c^2$ неизбежно следует из условия неотрицательности функции распределения, которая не может пересекать ось абсцисс на рис. 1б, в.

В отличие от функции распределения (8), количество адсорбирующих участков поверхности с теплотой адсорбции ε прямо пропорционально ε. Для адсорбционно агрессивных поверхностей с $\gamma > 0$ носителями большей теплоты адсорбции ε является большее количество адсорбирующих участков поверхности, для адсорбционно умеренных поверхностей с $\gamma < 0$ – наоборот, меньшее. При $\gamma = 0$ возникает случай адсорбционной модели Тёмкина на энергетически равномерно неоднородной поверхности с уравнением (8).

Энергетическая неоднородность поверхности с функцией распределения (9) характеризуется двумя параметрами, c и γ. Первый “унаследован” из адсорбционной модели Тёмкина и отвечает за ширину диапазона возможных значений теплоты адсорбции (“энергетическая дисперсия” адсорбирующих участков поверхности). Второй отсутствует в адсорбционной модели Тёмкина и отвечает за то, сколь сильно адсорбционные участки поверхности различаются по количеству в зависимости от теплоты адсорбции ε (“энергетический градиент”). Оба параметра суть характеристики энергетической неоднородности поверхности.

Интегрирование функции распределения (9) с ленгмюровским ядром (2) может быть осуществлено аналитически. Рассмотрим соответствующее выражение для степени покрытия поверхности

$$\theta = \frac{1}{kT}\int_{-kT\frac{c}{2}}^{kT\frac{c}{2}} L(\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{kt}+\frac{1}{c}\right)d\varepsilon = I_1 + I_2, \quad (10)$$

где I_1 принимает “квази-тёмкинскую” форму

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{kT}\int_{-kT\frac{c}{2}}^{kT\frac{c}{2}} L(\varepsilon)\left(-\frac{\varepsilon_0}{kt}+\frac{1}{c}\right)d\varepsilon = \\ &= \frac{1-c\varepsilon_0/kT}{c}\ln\frac{1+a_+p}{1+a_-p}. \end{aligned} \quad (11)$$

I_2 имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\gamma}{(kT)^2}\int_{-kT\frac{c}{2}}^{kT\frac{c}{2}} L(\varepsilon)\varepsilon d\varepsilon = \\ &= \gamma\left\{\mathrm{Li}_2(-a_+p) - \mathrm{Li}_2(-a_-p) + \frac{\varepsilon_0}{kT}\times\right. \\ &\left.\times\ln\frac{1+a_+p}{1+a_-p} + \frac{c}{2}\ln[(1+a_+p)(1+a_-p)]\right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где Li_2 – полилогарифмическая функция 2-го рода, или дилогарифм.

Подставляя уравнения (11) и (12) в (10), получаем окончательную форму полилогарифмической изотермы:

$$\begin{aligned} \theta &= \gamma[\mathrm{Li}_2(-a_+p) - \mathrm{Li}_2(-a_-p)] + \\ &+ \frac{1}{c}\ln\frac{1+a_+p}{1+a_-p} + \gamma\frac{c}{2}\ln[(1+a_+p)(1+a_-p)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Как следует из уравнения (13), предельным случаем полилогарифмической изотермы при $\gamma = 0$ является изотерма Тёмкина (4).

ОБСУЖДЕНИЕ

Некоторые типичные графики полилогарифмической изотермы адсорбции (13) приведены на рис. 2.

Рассмотрим асимптотическое поведение полилогарифмической изотермы в сравнении с изотермой Тёмкина.

При $p \to 0$ асимптотика $\theta \to 0$ следует из разложения в ряд функции $\mathrm{Li}_2(-x)$ вдоль отрицательной части оси абсцисс

$$\mathrm{Li}_2(-x) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-x)^i}{i^2} \quad (14)$$

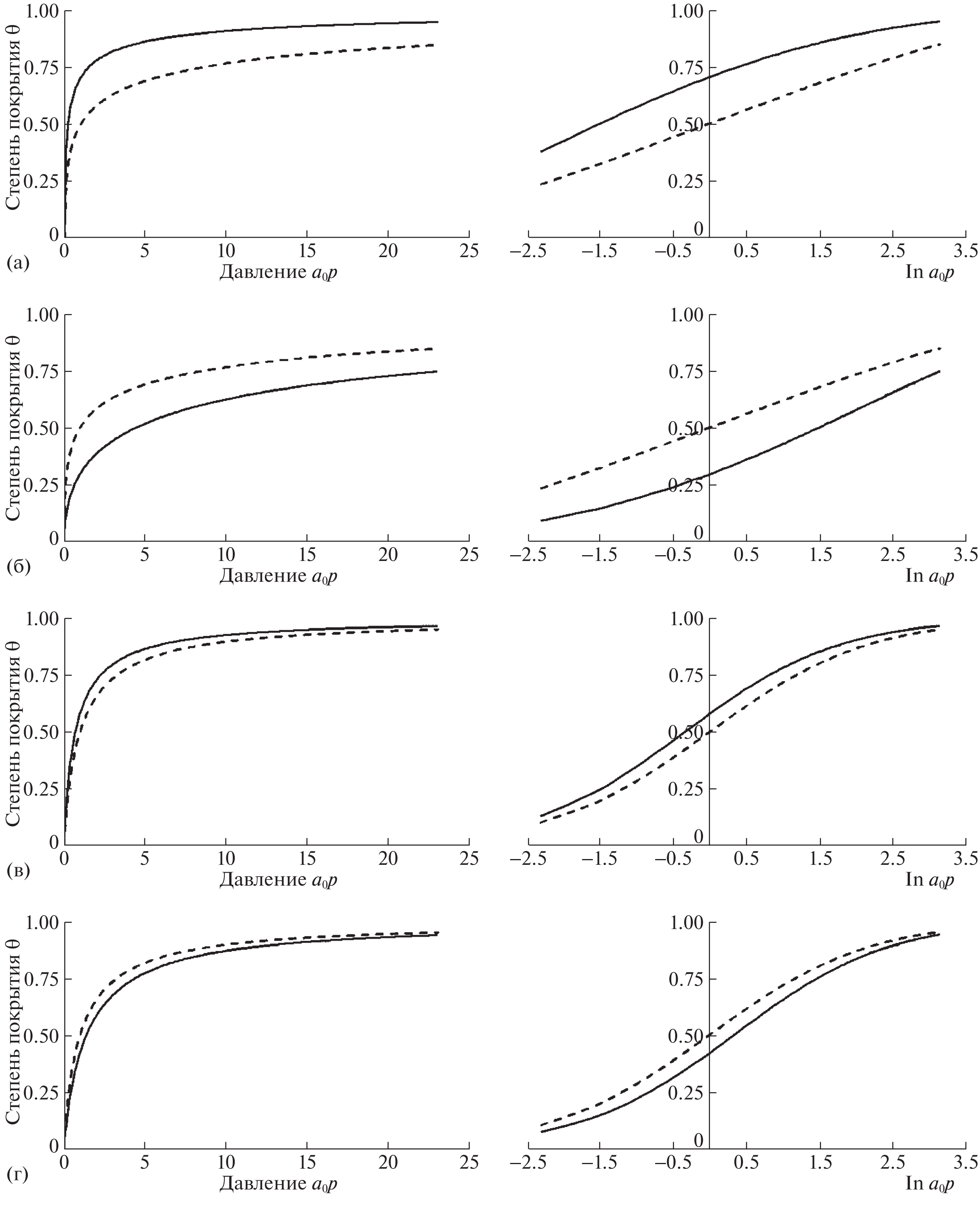


Рис. 2. Факторы энергетической неоднородности: а. Энергетическая дисперсия $c = 8$, энергетический градиент $\gamma = 0.03125$ (*адсорбционно агрессивная* поверхность); б. $c = 8$, $\gamma = -0.03125$ (*адсорбционно умеренная* поверхность); в. $c = 2$, $\gamma = 0.5$ (*адсорбционно агрессивная* поверхность); г. $c = 2$, $\gamma = -0.5$ (*адсорбционно умеренная* поверхность). Сплошные кривые: полная изотерма; штриховые кривые: “тёмкинская” компонента в ее составе.

и принимает вид

$$\theta(p \to 0) = \left[\left(\frac{1}{c} - \gamma\right)(a_+ - a_-) + \gamma\frac{c}{2}(a_+ + a_-)\right]p - \\ -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{c} + \frac{\gamma}{2}(c-1)\right](a_+^2 - a_-^2)p^2 + O(p^3). \quad (15)$$

При $p \to \infty$ асимптотику можно получить из свойств дилогарифма для комплексной переменной z:

$$\mathrm{Li}_2\left(-\frac{1}{z}\right) = -\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\ln^2 z + \mathrm{Li}_2(-z), \quad (16)$$

которая справедлива для действительных $x < 0$, посредством последовательной замены z на $1/x$:

$$\theta(p \to \infty) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{c} - \gamma\right)(a_+ - a_-) + \gamma\frac{c}{2}[a_+ + a_-]}{a_+ a_-} \times \\ \times \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right). \quad (17)$$

При $\gamma = 0$ уравнения (15) и (17) позволяют получить асимптотическое поведение, соответствующее адсорбционной модели Тёмкина.

Как следует из рис. 2а, полилогарифмической изотерме в целом присущ существенно более динамичный рост на адсорбционно агрессивных поверхностях, по сравнению с ее "тёмкинской" компонентой, начиная с области низких давлений. В пределе высоких давлений полилогарифмическая изотерма выходит на асимптотику $\theta = 1$ быстрее. Совершенно противоположная картина имеет место на адсорбционно умеренной поверхности (рис. 2б). Рисунки 2в и 2г отражают ситуацию малой энергетической дисперсии, не представляющую интереса в рамках адсорбционной модели Тёмкина. Чем у́же диапазон возможных значений теплоты адсорбции, тем ближе "тёмкинская" компонента к полилогарифмической изотерме. Благодаря этому, имеется возможность изучить "чистый" эффект энергетического градиента. Он "толкает" систему в том же направлении, что и энергетическая дисперсия, но менее интенсивно.

Рассмотрим область "средних покрытий" (ср. с уравнением (6)). Учитывая разложения (14) и (16) и неравенства (5), легко получить для 1-го слагаемого в уравнении (13)

$$\gamma[\mathrm{Li}_2(-a_+p) - \mathrm{Li}_2(-a_-p)] \approx \gamma\left[-\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\ln^2(a_+p)\right],$$

для третьего слагаемого

$$\gamma\frac{c}{2}\ln[(1 + a_+p)(1 + a_-p)] \approx \frac{\gamma c}{2}\ln(a_+p),$$

а второе слагаемое принимает ту же форму, что в уравнении (6). В итоге получаем:

$$\theta = \frac{1}{c}\ln(a_+p) + \gamma\left[-\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\ln^2(a_+p) + \frac{c}{2}\ln(a_+p)\right]. \quad (18)$$

Это — упрощенная форма полилогарифмической изотермы для области "средних покрытий", являющаяся аналогом уравнения (6) в адсорбционной модели Тёмкина. Первое слагаемое $\theta_\text{Т} = \frac{1}{c}\ln(a_+p)$ в уравнении (18) представляет вклад линеаризованной "квази-тёмкинской" компоненты (см. уравнение (6)) в этой области. Вторая компонента представляет собой отклонение полилогарифмической изотермы от "квази-тёмкинского" вклада. Заметим, что в полулогарифмических координатах зависимость будет носить квадратичный характер ($\cup$-образный для адсорбционно агрессивных и $\cap$-образный для адсорбционно умеренных поверхностей).

Ранее было отмечено (см. уравнение (9)), что имеется естественное ограничение, накладываемое на величину энергетического градиента γ. Присваивая ему предельно возможное значение $\gamma_{\text{lim}} = -2/c^2$ (адсорбционно умеренная поверхность) в уравнении (18), для области "средних покрытий" получаем следующее выражение:

$$\theta = \frac{1}{c^2}\left[\frac{\pi^2}{3} + \ln^2(a_+p)\right]. \quad (19)$$

Противоположное предельно возможное значение энергетического градиента $\gamma = 2/c^2$ в случае адсорбционно агрессивных поверхностей приводит к следующему уравнению для "средних покрытий":

$$\theta(x) = -\left[\frac{1}{c}\ln(a_+x) - 1\right]^2 + 1 - \frac{\pi^2}{3c^2}. \quad (20)$$

Уравнения (19) и (20) представляют собой упрощенную полилогарифмическую изотерму в области "средних покрытий" при наиболее выраженном эффекте энергетического градиента адсорбирующих участков поверхности.

Практическая применимость полилогарифмической изотермы для интерпретации экспериментальных данных рассмотрена в работах авторов [11, 12].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Реализацию полилогарифмической изотермы следует ожидать на поверхностях с линейным распределением адсорбирующих участков по теплоте адсорбции. Проанализировано функциональное поведение изотермы, ее предельные случаи при предельном значении энергетического градиента для адсорбционно агрессивных и умеренных поверхностей, в также асимптотическое поведение в области высоких и низких давлений (или активностей, а в случае растворов с постоянной ионной силой — и концентраций). Проведено сравнение полилогарифмической изотермы с логарифмической изотермой Тёмкина.

Протяженные прямолинейные участки "квази-тёмкинской" компоненты в высокой степени воспроизводятся и полилогарифмической изотермой в целом. Таким образом, наличие протяженных прямолинейных участков на зависимостях степени покрытия поверхности от давления (ионной активности или концентрации в соответствующих случаях) необязательно указывает на равномерную энергетическую неоднородность поверхности, что де-факто считалось очевидным прежде.

Представленные результаты важны и в контексте решения обратной задачи, то есть реконструкции функции распределения на основе экспериментально определенной изотермы $\theta(p)$ путем решения интегрального уравнения типа (7). При этом $\theta(p)$ получает аппроксимацию на основе экспериментальных данных в качестве отправной точки. В такой ситуации, будучи нацеленными на энергетическую неоднородность поверхности, удовлетворяющую более слабому закону, нежели экспоненциальный, весьма вероятно и естественно искать (и найти, с учетом приближенных исходных данных!) решение скорее в виде линейной функции, нежели в виде сложной полилогарифмической функциональной формы, особенно если экспериментальные данные напрашиваются на прямолинейную аппроксимацию в полулогарифмических координатах. Все это делает энергетически равномерную и линейную неоднородности поверхности трудноразличимыми. Тем не менее, практически все ранее полученные результаты, ассоциируемые с равномерной энергетической неоднородностью поверхности в результате анализа прямолинейных участков экспериментально определенной изотермы адсорбции, могут требовать пересмотра и иной интерпретации.

Данная работа была частично (Л.Ц., Н.Ш.) поддержана Российским научным фондом, проект № 18-16-00006.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Langmuir I.J.* The Adsorption of Gases on Plane Surfaces of Glass, Mica and Platinum. Am. Chem. Soc. 1918. V. 40. P. 1361–1403.
2. *Тёмкин М.И.* Адсорбционное равновесие и кинетика процессов на неоднородных поверхностях со взаимодействием между адсорбированными молекулами // Журнал физической химии. 1941. Т. 15. С. 296–307.
3. *Šlygin A., Frumkin A.* Über die Platinelektrode. Acta Physicochimica URSS. 1935. V. 3. P. 791–818.
4. *Borówko M.* Adsorption on Heterogeneous Surfaces. In Adsorption. Theory, Modeling, and Analysis, p. 105–174 / Ed. by *J. Tóth*. Marcel Dekker, Inc. New York, Basel, 2002.
5. Adsorption. Theory, Modeling, and Analysis / Ed. by *J. Tóth*. Marcel Dekker, Inc. New York, Basel, 2002.
6. *Rudzinski W., Everett D.H.* Adsorption of Gases on Heterogeneous Surfaces. Academic Press: London, 1992. 578 p.
7. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
8. *Maximon L.C.* The dilogarithm function for complex argument // Proc. R. Soc. Lond. A. 2003. V. 459. P. 2807–2819 (open access rspa.royalsocietypublishing.org). https://doi.org/10.1098/rspa.2003.1156
9. *Hassani M.* Approximation of the dilogarithm function // J. Inequal. Pure and Appl. Math. 2007. V. 8. P. 1–3.
10. *Cvijović D.* New integral representations of the polylogarithm function // Proc. R. Soc. A. 2007. V. 463. P. 897–905. https://doi.org/10.1098/rspa.2006.1794
11. *Vigdorowitsch M.V., Tsygankova L.E., Prokhorenkov V.D.* // J. Math. Chem. 2020. https://doi.org/10.1007/s10910-020-01133-2
12. *Цыганкова Л.Е., Альшика Н., Вигдорович М.В., Зарапина И.В.* Анализ адсорбции ингибитора коррозии углеродистой стали в модельных пластовых водах посредством полилогарифмической изотермы. Коррозия: материалы, защита. № 1. 2021. В печати.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 5, pp. 389–395

Polylogarithmic Adsorption Isotherm at Surface Linear Energetic Heterogeneity

M. V. Vigdorowitsch[a,c,d,#], L. E. Tsygankova[b], and N. V. Shel[c]

[a] *Angara GmbH, Düsseldorf, 40599 Germany*

[b] *Derzhavin Tambov State University, Tambov, 392000 Russia*

[c] *Tambov State Technical University, Tambov, 392000 Russia*

[d] *All-Russian Scientific Research Institute for the Use of Machinery and Oil Products in Agriculture, Tambov, 392022 Russia*

[#] *e-mail: dr.vigdorowitsch@angara-gmbh.de*

Received October 1, 2020; revised November 7, 2020; accepted November 24, 2020

Abstract—An exact solution for the monomolecular adsorption isotherm on the surface with linear energetic heterogeneity has been obtained. It is shown that the interpretation of numerous experimental data that were earlier associated with a surface energy heterogeneity (the Temkin adsorption model) may require an extensive revision because of the existence of lengthy linear segments of an isotherm in semilogarithmic coordinates. The new properties of the isotherm are studied and the asymptotic and physical limiting cases have been considered. It has been shown that the surface energetic heterogeneity in the case of the polylogarithmic adsorption model is represented by two parameters: the energy dispersion, which is identical to the Temkin model heterogeneity parameter, and energy gradient. Depending on the sign of the latter, predatory surfaces and are distinguished. For predatory surfaces, the greater the adsorption heat of the surface area, the larger the number of such surface domains. For temperate surfaces, the greater adsorption heat is inherent in fewer surface domains. Physically, the greater adsorption gradient "pushes" the system in the same direction as the greater energy dispersion but less pronouncedly. Similar to the Temkin adsorption model, a simplified form of the polylogarithmic isotherm is obtained for the case of "medium coverage" (the term by Temkin).

Keywords: adsorption, isotherm, Temkin

DOI: 10.1134/S2304487X20050156

REFERENCES

1. Langmuir I.J., The Adsorption of Gases on Plane Surfaces of Glass, Mica and Platinum, *Am. Chem. Soc.*, 1918, vol. 40, pp. 1361–1403.
2. Temkin M.I., Adsorption Equilibrium und Kinetics of Processes on Heterogeneous Surfaces with Interaction between Adsorbed Molecules, *Zhurnal Fizicheskoj Khimii*, 1941, vol. 15, pp. 296–307.
3. Šlygin A., Frumkin A., Über die Platinelektrode, *Acta Physicochimica URSS*, 1935, vol. 3, pp. 791–818.
4. Borówko M., Adsorption on Heterogeneous Surfaces, in *Adsorption. Theory, Modeling, and Analysis,* J. Tóth, Ed., New York, Basel: Marcel Dekker, Inc., 2002, pp. 105–174.
5. *Adsorption. Theory, Modeling, and Analysis*, Ed. J. Tóth. New York, Basel: Marcel Dekker, Inc., 2002.
6. Rudzinski W., Everett, D.H., *Adsorption of Gases on Heterogeneous Surfaces,* London: Academic Press, 1992. 578 p.
7. *Handbook of Mathematical Functionsm* Ed. Abramowitz M., Stegun T.A., Washington, DC: National Bureau of Standards, 1964.
8. Maximon L.C., The dilogarithm function for complex argument, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 2003, vol. 459, pp. 2807–2819 (open access rspa.royalsocietypublishing.org), DOI 10.1098/rspa.2003.1156.
9. Hassani M., Approximation of the dilogarithm function, *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, 2007, vol. 8, pp. 1–3.
10. Cvijović D., New integral representations of the polylogarithm function, *Proc. R. Soc. A*, 2007, vol. 463, pp. 897–905ю DOI:10.1098/rspa.2006.1794.
11. Vigdorowitsch M.V., Tsygankova L.E., Prokhorenkov V.D., *J. Math. Chem.*, 2020. DOI: 10.1007/s10910-020-01133-2
12. Tsygankova L.E., Alshikha N., Vigdorowitsch M., Zarapina I.V., Analysis of adsorption of a carbon steel corrosion inhibitor in model stratum waters by means of a polylogarithmic isotherm, *Int. J. Corros. Scale Inhib.*, 2021, vol. 10, no. 1 (in print).

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 5, с. 396–403

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 539.1

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕАКТИВНОСТИ РЕАКТОРА БОР-60 С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЕГО ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ

© 2020 г. И. Ю. Жемков[1], А. Е. Дьяченко[1,2,*], В. Ю. Анисимов[1]

[1] Государственный научный центр – Научно-исследовательский институт атомных реакторов, Димитровград, 433510, Россия

[2] Димитровградский инженерно-технологический институт – филиал НИЯУ МИФИ, Димитровград, 433510, Россия

**e-mail: d.lexus@yandex.ru*

Поступила в редакцию 25.10.2020 г.
После доработки 25.10.2020 г.
Принята к публикации 24.11.2020 г.

В статье представлены результаты экспериментального определения коэффициентов реактивности исследовательского реактора на быстрых нейтронах БОР-60 с использованием его эксплуатационных параметров. На реакторе БОР-60 ведется облучение конструкционных материалов и топливных композиций по отечественным и зарубежным договорам, а также наработка радионуклидной продукции. Из-за большой загруженности реактора по облучательным программам проведение отдельных экспериментов по определению коэффициентов реактивности затруднительно, поэтому необходимо иное решение этой задачи. Преимуществом использования эксплуатационных данных реактора, по сравнению с проведением специальных экспериментов, является возможность проведения оперативного исследования с использованием имеющихся данных, без остановок рабочего процесса на реакторе и изменений графиков проведения реакторных испытаний. Экспериментальные данные получены с помощью информационной измерительной системы реактора БОР-60, которая позволяет комплексно вести мониторинг параметров реактора и внереакторного оборудования установки в реальном времени, а также сохраняет эти данные в электронный архив. Определение коэффициентов реактивности, выполнено для нескольких микрокампаний (МК) (13 шт.), характеризующих современное состояние загрузок активной зоны реактора. Для определения коэффициентов реактивности использовались эксплуатационные данные во время стационарных режимов работы реактора и периодов изменения его основных параметров: тепловой мощности, входной температуры теплоносителя, расхода теплоносителя. В результате были найдены значения температурного, мощностного коэффициента реактивности и темпа изменения реактивности с выгоранием ядерного топлива. Эти коэффициенты в большей степени определяют изменение реактивности исследовательского реактора БОР-60. При исследовании температурного коэффициента реактивности выбирались критические состояния во время равномерного разогрева реактора электронагревателями. Положения рабочих органов СУЗ и их градуировочные характеристики использовались для определения изменений реактивности. Определение мощностного коэффициента реактивности проводилось по данным критических состояний реактора в периоды подъема мощности при постоянном расходе теплоносителя. Темп изменения реактивности от выгорания ядерного топлива был найден с использованием параметров в периоды максимальной энерговыработки реактора. На основании результатов исследования проведен предварительный анализ влияния загрузки активной зоны и режимов эксплуатации, характерных для исследовательского реактора на быстрых нейтронах, на коэффициенты реактивности.

Ключевые слова: реактор, коэффициент реактивности, эффект реактивности, активная зона, реактивность, экспериментальное исследование, выгорание ядерного топлива

DOI: 10.1134/S2304487X20050168

ВВЕДЕНИЕ

Реактивность является наиболее универсальной характеристикой реактора, связанной с основными физическими и теплофизическими параметрами. Она отражает большую часть изменений происходящих в реакторе. По этой причине одними из важнейших параметров, определяющих безопасную эксплуатацию реактора, являются эффекты (ЭР) и коэффициенты (КР) реактивности.

Коэффициенты реактивности используются при моделировании переходных процессов и анализе безопасности реактора [1].

Значения КР и ЭР реактора могут быть определены расчетным и экспериментальным способом. Для реактора БОР-60 используются оба метода, причем расчетные исследования позволяют получить все составляющие КР для любой микрокампании (МК) реактора. Однако неопределенности, которые могут быть вызваны упрощениями, вносимыми в расчетные модели, применяемыми методами решения уравнения переноса нейтронов и т.д., могут приводить к существенным погрешностям расчетных значений КР и ЭР. На точность расчета КР существенное влияние может оказывать недостаточное знание моделируемых процессов, а также неопределенности исходных данных.

Большим преимуществом экспериментального метода определения КР является то, что полученные результаты отражают реальную картину поведения реактора. В свою очередь, использование эксплуатационных данных позволяет получать результаты характеризующие, работу реактора во время микрокампании, с учетом особенностей загрузки активной зоны, и выбора режима работы реактора. Таким образом, метод экспериментального определения всегда будет более надежным, нежели любой другой.

В дальнейшем результаты экспериментального определения КР могут быть использованы для верификации расчетных программ и моделей. Новые данные КР позволят точнее определять основные характеристики состояния реактора при планировании перегрузок и его экспериментальном сопровождении (запас реактивности, подкритичность и остаточное время работы).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕАКТИВНОСТИ РЕАКТОРА БОР-60

Методика экспериментального исследования КР подразумевает изменение одного из параметров (тепловая мощность, входная температура теплоносителя, расход теплоносителя) реактора, а величина коэффициента определяется изменением запаса реактивности на рабочих органах (РО) СУЗ. В случае изменения параметров, не связанных с исследуемым эффектом, в результатах учитываются соответствующие поправки. Это особенно важно, когда речь идет о температурном (ТКР) и мощностном (МКР) коэффициентах реактивности, так как они имеют общую природу и на высоких уровнях мощности взаимосвязаны.

Для определения КР были проведены динамические и статистические исследования с использованием эксплуатационных данных реактора во время стационарных режимов работы и периодов изменения его основных параметров: тепловой мощности, входной температуры теплоносителя, расхода теплоносителя. В результате были найдены значения ТКР, МКР и темпа изменения реактивности с выгоранием ядерного топлива. Данные КР определяют изменение реактивности исследовательского реактора БОР-60 во время его эксплуатации, учитываются при моделировании переходных процессов, анализе безопасности и планировании перегрузок реактора.

Важно отметить, что особенностями реактора БОР-60 являются малые размеры активной зоны, высокая плотность нейтронного потока и значительная утечка нейтронов. Преобладающее влияние утечки нейтронов приводит к тому, что практически все КР, а также их составляющие, имеют отрицательные значения. Большинство составляющих КР обусловлены процессами, происходящими в реакторе (изменения температур и мощности, выгорание и распухание топлива, удлинение и расширение конструкционных материалов) и определить их возможно только расчетным путем.

Параметры реактора БОР-60 представлены в табл. 1.

ТЕМПЕРАТУРНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ РЕАКТИВНОСТИ

Изотермический ТКР (K_T) необходим для определения запаса реактивности во время пуска, останова и переходных режимов работы реактора, выбора настроек систем регулирования и защиты, обеспечения оптимального режима расхолаживания реактора. ТКР обусловлен изменением плотности и размеров компонентов реактора под действием изотермического расширения, а также изменением сечений взаимодействия нейтронов с ядрами материалов [2].

Для определения ТКР были проанализированы критические состояния реактора, соответствующие минимально допустимому автоматическому уровню мощности, при которых наблюдались значительные отличия во входных температурах теплоносителя, при этом отличия между входной и выходной температурой теплоносителя незначительны (менее 2°С). Минимальное значение тепловой мощности реактора ($N < 100$ кВт) позволяет пренебречь влиянием мощностного ЭР и изменением реактивности реактора за счет выгорания ядерного топлива. Для определения ТКР выбирались критические состояния, при которых проводился равномерный разогрев реактора с помощью электронагревателей на трубопроводах с принудительной циркуляцией натриевого теплоносителя. Были использованы положения рабочих органов (РО) СУЗ автоматического (АР-1 и АР-2) и ручного (РР-1 и РР-2) регулирования и соответствующих экспериментальных градуировочных характеристик. Мощность реактора ($N \sim 100$ кВт)

Таблица 1. Характеристики реактора БОР-60 и погрешности определения их экспериментальных значений

Характеристика	Значение	Погрешность, %*
Тепловая мощность, МВт	До 60	7 (0.05–0.1 МВт) 2.2 (1–55 МВт)
Температура теплоносителя на входе в реактор, °C	До 360	1.2
Температура теплоносителя на выходе из реактора, °C	До 515	1.2
Расход теплоносителя через реактор, $м^3/ч$	До 1100	3
Эффективность РО СУЗ, % $\Delta K/K$: АР-1 АР-2 РР-1 РР-2	 0.17–0.49 0.17–0.49 1.05–1.68 1.89–2.8	7
Температурный КР, $10^{-5}\Delta k/k/°C$	–(3.8–4.5)	6–9
Мощностной КР, $10^{-5}\ \Delta k/k/МВт$	–(5–8)	

* Указана экспериментальная погрешность при проведении отдельного эксперимента.

поддерживалась системой автоматического регулирования. Параметры критических состояний реактора БОР-60, аксиальное положение РО СУЗ и полученные значения $К_Т$ представлены в табл. 2.

Температурный КР для каждой МК был определен с использованием формулы:

$$K_T = (\Delta\rho + \Delta\rho(K_N) + \Delta\rho(K_B))/\Delta T, \qquad (1)$$

где K_T – температурный коэффициент реактивности, $\Delta k/k/°C$;

$\Delta\rho$ – изменение эффективности, соответствующее изменению положения РО СУЗ в активной зоне, $\Delta k/k$;

$\Delta\rho$ (K_N) – изменение запаса реактивности, обусловленное мощностным ЭР, $\Delta k/k$;

$\Delta\rho$ (K_B) – изменение запаса реактивности, обусловленное ЭР от выгорания ядерного топлива, $\Delta k/k$;

ΔT – изменение входной температуры теплоносителя, °C.

Погрешность экспериментального определения значений K_T составляет 11%.

Среднее значение K_T по данным МК составило $-(4.1 \pm 0.4) \times 10^{-5}\ \Delta k/k/°$.

МОЩНОСТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТ РЕАКТИВНОСТИ

Мощностной КР (K_N) представляет собой отношение изменения реактивности реактора к соответствующему изменению тепловой мощности. Он проявляется при изменении тепловой мощности и связан с существенной неоднородностью температурного поля в активной зоне и боковом экране реактора при значительных уровнях мощности [3].

Для определения МКР были выбраны критические состояния реактора в периоды подъема мощности при постоянном расходе натриевого теплоносителя. Это позволило исключить влияние расхода на МКР, которое было экспериментально обнаружено на ранних этапах работы реактора. Увеличение температуры учитывалось температурным КР.

Экспериментально МКР определяется аналогично температурному по формуле:

$$K_N = (\Delta\rho + \Delta\rho(K_T) + \Delta\rho(K_B))/\Delta N, \qquad (2)$$

где K_N – мощностной коэффициент реактивности, $\Delta k/k/МВт$;

$\Delta\rho$ – изменение эффективности, соответствующее изменению положения РО СУЗ в активной зоне, $\Delta k/k$;

$\Delta\rho$ (K_T) – изменение запаса реактивности, обусловленное температурным ЭР, $\Delta k/k$;

$\Delta\rho$ (K_B) – изменение запаса реактивности, обусловленное ЭР от выгорания ядерного топлива, $\Delta k/k$;

ΔN – изменение тепловой мощности реактора, МВт.

Погрешность экспериментального определения значений K_N составляет 12%.

Параметры критических состояний реактора БОР-60 для определения МКР и полученные зна-

Таблица 2. Параметры реактора БОР-60 и результаты определения ТКР

Номер МК	Масса экв. U^{235}, кг	АР-1, мм	АР-2, мм	РР-1, мм	РР-2, мм	$T_{ВХ}$, °C	K_T, 10^{-5} $\Delta k/k$/°C
102А	228	234	200	95	450	191	–4.4
		200	200	0	435	255	
103	222	200	353	99	446	201	–4.5
		200	242	55	446	248	
104	223	295	241	111	450	213	–4.3
		189	200	75	450	260	
104А	225	267	200	0	424	211	–3.9
		200	200	0	387	256	
105	221	275	204	185	450	207	–4.2
		194	204	149	450	261	
105А	221	260	200	40	450	213	–4.0
		200	200	0	425	257	
106	220	314	200	0	443	211	–3.8
		200	200	0	413	252	
106А	222	260	200	0	410	197	–4.0
		199	200	0	363	262	
107	223	210	200	130	442	213	–4.4
		200	200	66	442	260	
108	223	196	236	0	363	198	–4.2
		192	204	3	325	253	
108А	237	201	348	104	438	198	–4.0
		201	227	53	438	256	
109	225	231	0	65	438	208	–4.1
		254	0	5	404	257	
109А	225	275	205	33	439	206	–3.9
		221	205	3	411	250	

чения K_N приведены в табл. 3. Мощностной КР определялся в начале МК, причем пары критических состояний реактора для каждой МК выбирались с одинаковыми значениями расхода теплоносителя.

ТЕМП ИЗМЕНЕНИЯ РЕАКТИВНОСТИ С ВЫГОРАНИЕМ ЯДЕРНОГО ТОПЛИВА

Для определения темпа изменения реактивности от выгорания ядерного топлива (K_B) из данных по каждой МК были выбраны критические состояния соответствующие началу и окончанию МК. Критерием выбора критических состояний для каждой МК было максимальное значение энерговыработки реактора между критическими состояниями и минимальное отличие по тепловой мощности реактора, входным температурам и расходам теплоносителя. Изменение реактивности определялось с использованием положения РО СУЗ и их градуировочных характеристик. Используя определенные ранее температурные и мощностные КР, были внесены поправки в КР от выгорания ядерного топлива для выбранных критических состояний.

Темп изменения реактивности был найден по формуле:

$$K_B = (\Delta\rho + \Delta\rho(K_N) + \Delta\rho(K_T)) / \int_{t_1}^{t_2} N(t)dt, \qquad (3)$$

где K_B – темп изменения реактивности с выгоранием ядерного топлива, $\times 10^{-8}$ $\Delta k/k$/МВт сут;

$\Delta\rho$ – изменение эффективности, соответствующее изменению положения рабочих органов системы управления и защиты в активной зоне, $\Delta k/k$;

$\Delta\rho$ (K_N) – изменение запаса реактивности, обусловленное мощностным ЭР, $\Delta k/k$;

Таблица 3. Параметры реактора БОР-60 и результаты определения МКР

№ МК	Масса экв. U^{235}, кг	АР-1, мм	АР-2, мм	РР-1, мм	РР-2, мм	G, м^3/ч	N, МВт	K_N, 10^{-5} $\Delta k/k$/МВт
102А	228	192	200	0	365	620	12	–6.5
		250	200	0	340	620	21	
103	222	200	155	66	446	600	7,5	–5.9
		200	194	0	391	600	15	
104	223	300	220	0	400	600	10	–6.3
		300	174	0	350	600	27	
104А	225	185	200	0	410	600	3	–6.5
		225	200	0	335	600	10	
105	221	180	204	105	450	615	10	–7.1
		200	204	0	450	615	21	
105А	221	209	200	0	420	600	8	–6.4
		224	200	0	345	600	17	
106	220	228	200	0	345	600	10	–7.3
		144	200	0	345	600	17	
106А	222	275	200	0	315	620	9	–7.3
		187	200	0	315	620	17	
107	223	148	178	13	442	620	7.9	–6.1
		224	197	0	365	620	20	
108	223	210	200	0	320	610	7	–6.3
		255	200	0	265	610	25	
108А	236.6	221	195	0	340	620	15	–6.7
		210	195	0	310	620	26	
109	224.8	180	200	0	390	610	8	–6.3
		144	200	0	340	610	29	
109А	225.3	177	200	32	450	605	6	–6.0
		197	200	0	360	605	16	

Среднее значение K_N по данным МК составило $-(6.5 \pm 0.7) \times 10^{-5}$ $\Delta k/k$/МВт.

$\Delta\rho$ (K_T) – изменение запаса реактивности, обусловленное температурным ЭР, $\Delta k/k$; N – тепловая мощность реактора, МВт;

t_1 – начало анализируемого периода;

t_2 – завершение анализируемого периода.

Погрешность экспериментального определения значений K_B составляет 11%.

Параметры критических состояний реактора БОР-60 для определения темпа изменения реактивности от выгорания ядерного топлива и полученные значения K_B приведены в табл. 4.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАНЕЕ ПРОВЕДЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕАКТИВНОСТИ

Отдельные экспериментальные и расчетные исследования КР проводились на реакторе БОР-60 при его пуске и в периоды, когда происходили существенные изменения в реакторе (обогащение ЯТ, тип и состав ЯТ, размеры активной части и число ТВС, экспериментальных устройств, сборок бокового экрана).

Выполненные исследования показали хорошее (в пределах экспериментальной погрешности) совпадение расчетных и экспериментальных значений. В табл. 5 приведены результаты этих исследований.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Многолетняя эксплуатация реактора БОР-60 и проводимые ранее исследования эффектов и коэффициентов реактивности выявили, что K_T практически не зависит от режима работы реактора и составляет $K_T = -(3.8–4.5) \times 10^{-5}$ $\Delta k/k$/МВт. Для современного состояния реактора БОР-60

Таблица 4. Параметры реактора БОР-60 и результаты определения темпа изменения реактивности от выгорания ЯТ

№ МК	Масса экв. U^{235}, кг	АР-1, мм	АР-2, мм	РР-1, мм	РР-2, мм	G, м^3/ч	$T_{ВХ}$, °С	N, МВт	K_B, 10^{-5} $\Delta k/k/$(МВт сут)
102А	228	214	200	0	315	1015	318	50	0.30
		200	175	0	255	1005	317		
103	222	200	220	0	305	1010	317	50	0.29
		196	201	0	234	995	315		
104	223	200	209	0	315	1015	318	50	0.30
		200	194	0	215	1010	317		
104А	225	197	200	0	288	1015	318	50	0.31
		154	200	0	170	1020	317		
105	221	184	204	0	415	1015	207	50	0.27
		163	200	0	290	1010	261		
105А	221	200	164	0	315	1020	318	50	0.33
		214	185	0	205	1005	315		
106	220	186	200	0	305	1005	319	50	0.33
		200	177	0	175	945	317		
106А	222	198	200	0	285	1015	319	50	0.33
		253	200	0	215	1020	317		
107	223	170	195	0	400	925	304	45	0.28
		211	200	0	350	900	316		
108	223	153	205	0	255	1020	319	50	0.30
		151	199	0	95	1010	318		
108А	237	144	195	0	300	1010	317	50	0.29
		200	172	0	248	1015	315		
109	225	209	200	0	312	915	315	45	0.27
		200	200	0	267	920	318		
109А	225	195	192	0	270	940	319	47	0.28
		190	200	0	209	940	317		

Среднее значение K_B по МК составило – 0.29 ± 0.03 × $10^{-5}\Delta k/k/$(МВт сут).

Таблица 5. Результаты расчетно-экспериментальных исследований КР, ранее выполненных на реакторе БОР-60

Период работы реактора	K_T, ($10^{-5}\Delta k/k/$°С)		K_N, 10^{-5} $\Delta k/k/$МВт		K_B, 10^{-5} $\Delta k/k/$МВт сут	
	Эксперимент	Расчет	Эксперимент	Расчет	Эксперимент	Расчет
1969–1980	–(4.1–4.3) ± 0.3	–(4.1–4.5)	–(6.5–11.4) ± 0.3	–(6.7–12.1)	0.36 ± 0.03	0.38
1980–1988	–(4.2 ± 0.3)	–3.8	(–6.4 ± 0.4)	–6.3	–	0.34
После 1988	–(3.9–4.4) ± 0.3	–(3.6–3.9)	–(5.9–7.6) ± 0.4	–(6.1–6.6)	–	0.34

* Указана экспериментальная погрешность при проведении отдельного эксперимента.

экспериментальные значения K_T находятся в диапазоне определенных ранее значений, а среднее значение $K_T = -(4.1 \pm 0.4) \times 10^{-5}\,\Delta k/k/$°С.

Последние экспериментально полученные значения K_N (в среднем, $K_N = -(6.5 \pm 0.7) \times 10^{-5}\,\Delta k/k/$МВт) также хорошо согласуются с определенными ранее значениями $K_N = -(5–8) \times 10^{-5}\,\Delta k/k/$МВт [4].

Средний темп изменения реактивности от выгорания ядерного топлива составляет $K_B = (0.29 \pm \pm\, 0.03) \times 10^{-5}\,\Delta k/k/$МВт сут, что меньше ранее полученного среднего значения ($0.34 \times 10^{-5} \Delta k/k$/МВт сут) [5]. Снижение $K_в$ обусловлено существенным увеличением загрузки ядерного топлива (ТВС) в реактор, произошедшего в основном из-за увеличения числа нетопливных сборок в активной зоне.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты экспериментального исследования КР реактора БОР-60 с использованием его эксплуатационных характеристик хорошо согласуются с результатами раннее проведенных на реакторе исследований.

По старым и новым данным, полученным в ходе выполнения исследовательских работ, можно отметить, что на мощностной КР влияет, в основном, тепловая мощность реактора и расход теплоносителя, объем топливной загрузки влияет меньше. Значение мощностного КР уменьшается по мере выгорания ядерного топлива.

Температурный КР, как составляющая мощностного КР (возникающий при неравномерном разогреве топлива и подъеме мощности), слабо зависит от режима работы реактора.

Температурный КР, возникающий при равномерном разогреве а.з., зависит от входной температуры теплоносителя в реактор. Последние экспериментальные исследования показали, что температурный КР находится в диапазоне определенных ранее значений.

КР от выгорания ядерного топлива зависит от загрузки топлива в реактор и его изотопного состава. Последние исследования показали, что значение КР от выгорания ядерного топлива снизилось. На это повлияло увеличение загрузки топлива (увеличение числа ТВС в активной зоне).

Увеличение за последние годы числа экспериментальных сборок и топливной загрузки активной зоны, существенно не повлияло на ТКР и МКР. Изменился КР от выгорания ядерного топлива, он учитывается при прогнозировании количества отработанных эффективных суток и энерговыработки реактора. Полученные данные будут учтены при планировании перегрузок и сопровождении экспериментов по облучению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уолтер А., Рейнольдс А.* Реакторы-размножители на быстрых нейтронах. М.: Энергоатомиздат, 1986. 624 с.
2. *Усынин Г.Б., Кусмарцев Е.В.* Реакторы на быстрых нейтронах. М.: Энергоатомиздат, 1985. 288 с.
3. *Ефимов В.Н., Жемков И.Ю., Ишунина О.В., Набойщиков Ю.В.* Критические состояния и эффективности сборок реактора БОР-60 / Сб. научных трудов. Димитровград: ГНЦ НИИАР, 2003. Вып. 4. С. 79–87.
4. *Гаджиев Г.И., Жемков И.Ю.* Обзор исследований нейтронно-физических характеристик, выполненных при пуске реактора БОР-60: обзор. Димитровград: ОАО "ГНЦ НИИАР", 2011.
5. *Жемков И.Ю., Яковлева И.В., Ишунина О.В.* Сборник нейтронно-физических характеристик реактора БОР-60. Димитровград: ГНЦ РФ НИИАР, 2000.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 5, pp. 396–403

Experimental Determination of BOR-60 Reactivity Coefficients Using Its Operational Parameters

I. Yu. Zhemkov[a], A. E. Diachenko[a,b,#], and V. Yu. Anisimov[a,b]

[a] *Research Institute of Atomic Reactors, Dimitrovgrad, 433510 Russia*

[b] *Dimitrovgrad Engineering and Technological Institute, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Dimitrovgrad, 433510 Russia*

[#] *e-mail: d.lexus@yandex.ru*

Received October 25, 2020; revised October 25, 2020; accepted November 24, 2020

Abstract—The reactivity coefficient of the BOR-60 fast test reactor has been experimentally determined using its operational parameters. The BOR-60 reactor is used to irradiate structural materials and fuels both under domestic and foreign contracts, as well as to accumulate radionuclides. It is hardly possible to conduct separate experiments to determine the reactivity coefficients because of multiple irradiation programs performed in the reactor. Therefore, a different solution to this problem is needed. An advantage of using the reactor operational parameters, as compared to separate experiments, is to perform an experiment using the data available and thus there is no need to stop the on-going irradiation and change the experimental schedule. The experimental data are obtained by means of the BOR-60 data acquisition and measurement system, which allow us to monitor the on-line parameters of the reactor and out-reactor equipment and to store them in the archive. The reactivity coefficients have been determined for 13 micro-runs that typify the current reactor core arrangement. To determine the reactivity coefficients, operational data obtained during the reactor stationary operation as well as during changes in its key parameters, namely, thermal power, coolant inlet temperature, and flow rate have been used. As a result, temperature and power reactivity coefficients, as well as the reactivity change rate in the process of fuel burnup, have been found. These coefficients determine to a great extent a change in the BOR-60 reactivity. The temperature coefficient of the reactivity has been determined for the reactor critical state during its uniform heating with electrical heaters. The position of control rods and their calibration characteristics have been used to determine the reactivity change. The power coefficient has been determined using data on the reactor critical state during power ups at a constant coolant flow rate. The reactivity change rate as a function of the fuel burnup has been determined using parameters during the maximum energy output. Using the experimental results, the influence of the core arrangement and operating conditions typical of a fast test reactor on the reactivity coefficients has been preliminarily analyzed.

Keywords: reactor, reactivity coefficient, reactivity effect, core, reactivity, experimental research, fuel burnup

DOI: 10.1134/S2304487X20050168

REFERENCES

1. Walter A., Reynolds A., *Fast Breeder Reactors*, M.: Energoatomizdat, 1986, 624 p.
2. Usynin G.B., Kusmartsev E.V., *Fast Neutron Reactors,* M.: Energoatomizdat, 1985, 288 p.
3. Efimov V.N., Zhemkov I.Yu., Ishunina O.V., Naboyshchikov Yu.V., *Critical States and Efficiency of BOR-60 Reactor Assemblies – Proc.*, Dimitrovgrad: SSC RIAR, 2003, no. 4, pp. 79–87.
4. Gadzhiev G.I., Zhemkov I.Yu., *Review of Studies in Neutronic-Characteristics Carried out during the BOR-60 Reactor Start-up: Review,* Dimitrovgrad: JSC “SSC RIAR”, 2011.
5. Zhemkov I.Yu., Yakovleva O.V., Ishunin I.V., Collection of neutronic characteristics of the BOR-60 reactor, Dimitrovgrad: SSC RF RIAR, 2000.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 5, с. 404–411

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ SIR-МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ КОРОНАВИРУСА

Н. А. Кудряшов[1,*], М. А. Чмыхов[1]

[1] Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия

**e-mail: nakudryashov@mephi.ru*

Поступила в редакцию 15.07.2020 г.
После доработки 31.07.2020 г.
Принята к публикации 06.10.2020 г.

Рассмотрена популярная математическая модель, известная как SIR-model (susceptible – infectives – recovered), для описания распространения коронавируса. Показано, что, используя два первых интеграла исходной нелинейной системы трех дифференциальных уравнений, ее можно преобразовать к одному автономному дифференциальному уравнению первого порядка с разделяющимися переменными и двум алгебраическим уравнениям для вычисления количества инфицированных и выздоровевших людей от коронавируса. Особенностью редуцированной математической модели является то, что она является однопараметрической и поведение ее решений определяется одним безразмерным параметром $\delta = \beta/(\alpha N)$, зависящим от коэффициента передачи инфекции α, от коэффициента выздоровления β и от количества контактного сообщества N. Демонстрируется, что общее решение SIR-модели может быть представлено в виде квадратуры. Исследуется влияние безразмерного параметра δ и влияние количества инфицированных людей в начальный момент времени на характеристики, описывающие распространение коронавируса. Даны асимптотические зависимости количества $S(t)$, $I(t)$ и $R(t)$ в зависимости от начального количества инфицированных людей μ и безразмерного параметра математической модели δ. Результаты могут быть полезны при анализе распространения COVID-19.

Ключевые слова: коронавирус, SIR-модель, модифицированная математическая модель, нелинейное дифференциальное уравнение, первый интеграл, решение

DOI: 10.1134/S2304487X20050089

1. ВЕДЕНИЕ

Одной из самых популярных математических моделей для описания распространения коронавируса и ряда других инфекций является так называемая SIR-модель (susceptible – infectious – recovered). Ее популярность объясняется достоинствами этой математической модели, к которым, прежде всего, относится простота ее формулировки и ясная ее интерпретация.

Математическая модель описывается системой из трех обыкновенных дифференциальных уравнений и двух самых важных параметров: коэффициентом передачи инфекции от одной группы людей к другой и коэффициентом выздоровления, характеризующим скорость выздоровления инфицированных людей. При этом количество выздоровевших людей и количество умерших в этой математической модели не разделяются.

Таким образом, в математической модели присутствуют только три основные характеристики, зависящие от времени: $S(t)$ – количество людей, которые могут заболеть в результате контактов с инфицированными больными, $I(t)$ – больные и $R(t)$ – количество выздоровевших людей или умерших.

Система уравнений для описания изменения трех выше указанных характеристик была предложена в 1927 году в работе [1] и в настоящее время, как правило, записывается в виде:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI, \tag{1}$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I, \tag{2}$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta I. \tag{3}$$

Система уравнений (1), (2) и (3) написана на основе разумных предположений и закона сохранения количества людей [2–6]. В частности, при выводе уравнения (2) сделано предположение, что скорость изменения числа инфицированных людей изменяется из-за контактов здоровой, но склонной к заболеваниям популяции людей $S(t)$ и инфицированных больных $I(t)$, и это изменение характеризуется коэффициентом инфицирования α. Эта скорость уменьшения здоровых людей естественно учитывается в первом уравнении (1).

Кроме того, в уравнении (2) учитывается скорость уменьшения инфицированных людей за счет выздоровления или смерти. Эта скорость предполагается линейно зависящей от количества заболевших людей. В качестве коэффициента пропорциональности используется параметр математической модели β.

Недостатком математической модели (1), (2) и (3) для описания распространения эпидемий является продолжение ее достоинства. Все параметры α, β и N математической модели зависят, вообще говоря от времени и эти зависимости, как правило, заранее не известны.

Очевидно, складывая все три уравнения мы получаем, что выполняется закон сохранения

$$\frac{dS}{dt}+\frac{dI}{dt}+\frac{dR}{dt}=0. \quad (4)$$

Из уравнения (4) мы получаем первый интеграл в виде

$$S(t)+I(t)+R(t)=\mathrm{const}=N. \quad (5)$$

Ясно, что в реальной жизни общее количество сообщества N может значительно изменяться и, вообще говоря, число N зависит от соблюдения условий карантина в обществе [7, 8]. Отсюда следует, что SIR-модель может вполне удовлетворительно описывать распространение эпидемий для небольшого количества сообщества N, в котором все субъекты имеют возможность контактировать.

В этой связи то, что применение SIR-модели для описания распространения коронавируса в ряде случаев приводит к совпадению расчетных характеристик с данными наблюдений для авторов является скорее удивительной особенностью математической модели, чем реальным положением дел.

2. БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ДЛЯ SIR-МОДЕЛИ

Использование удачных безразмерных переменных часто существенно помогает при интерпретации результатов решения задачи и помогает понять особенности математической модели, поэтому ниже используем безразмерные переменные в приведенной выше системе уравнений (1), (2) и (3). Безразмерные переменные и параметры в данной работе используем в виде

$$S' = \frac{S(t)}{N}, \quad I' = \frac{I(t)}{N}, \quad R' = \frac{R(t)}{N}, \quad \tau=\alpha N t, \quad \delta=\frac{\beta}{\alpha N}. \quad (6)$$

Далее штрихи опускаются, полагая

$$S'(\tau)\to S(\tau), \quad I'(\tau)\to I(\tau), \quad R'(\tau)\to R(\tau). \quad (7)$$

Учитывая новые переменные и параметры система уравнений (1), (2) и (3) запишется в виде

$$\frac{dS}{d\tau}=-SI, \quad (8)$$

$$\frac{dI}{d\tau}=SI-\delta I, \quad (9)$$

$$\frac{dR}{d\tau}=\delta I. \quad (10)$$

Заметим, что после введения безразмерных переменных (6) система дифференциальных уравнений (1), (2) и (3) для описания распространения коронавируса становится однопараметрической и зависит только от одного параметра δ.

3. РЕДУКЦИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (1), (2) И (3) К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Заметим, что в безразмерных переменных (6), первый интеграл (5) принимает вид:

$$S(\tau)+I(\tau)+R(\tau)=1 \quad (11)$$

и можно видеть, что функции $S(\tau)$, $I(\tau)$ and $R(\tau)$ удовлетворяют следующим неравенствам

$$0\le S(\tau)\le 1, \quad 0\le I(\tau)\le 1, \quad 0\le R(\tau)\le 1. \quad (12)$$

Из уравнения (8) следует

$$I=-\frac{S_\tau}{S}. \quad (13)$$

Подставляя (13) в уравнение (9) и интегрируя один раз по времени τ, мы получаем обыкновенно дифференциальное уравнение первого порядка в виде

$$S_\tau = C_1 S + S^2 - \delta S\ln(S), \quad (14)$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

Решение уравнения (14) можно записать в виде квадратуры

$$\int\frac{dS}{C_1 S + S^2 - \delta S\ln(S)} = \tau + C_2. \quad (15)$$

Неопределенный интеграл (15) не вычисляется точно и решение $S(\tau)$ не удается выразить через элементарные или специальные функции. Ниже

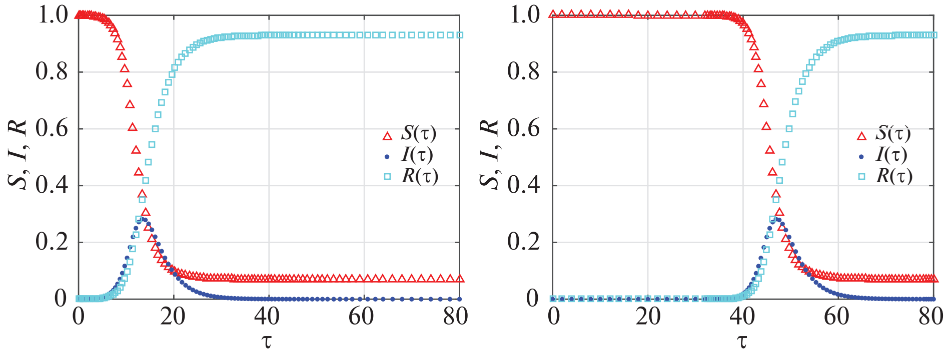


Рис. 1. Зависимость $S(\tau)$, $I(\tau)$, $R(\tau)$ от безразмерного времени τ при $\delta = 0.35$ и $\mu = 0.0003$ (слева), $\mu = 0.3\times10^{-12}$ (справа).

мы дадим асимптотические решения уравнения (14). Используя инварианты системы уравнений (8), (9) и (10) в виде:

$$-\frac{dS}{SI} = \frac{dI}{SI-\delta I} = \frac{dR}{\delta I}. \qquad (16)$$

дополнительно к дифференциальному уравнению (14) для SIR-модели получаем, что зависимости $I(\tau)$ и $R(\tau)$ находятся по известной функции $S(\tau)$ используя алгебраические формулы [2]

$$I(\tau) = \delta\ln(S) - C_1 - S, \qquad (17)$$

и

$$R(\tau) = 1 + C_1 - \delta\ln(S). \qquad (18)$$

Используя начальные условия соответствующие SIR-модели, мы можем определить постоянную интегрирования C_1. Она определяется принимая во внимание начальные условия для функций $S(\tau)$, $I(\tau)$ и $R(\tau)$. Начальные условия естественно определить в виде:

$$R(\tau = 0) = 0, \quad I(\tau = 0) = \mu, \quad S(\tau = 0) = 1 - \mu. \qquad (19)$$

Заметим, что начальная доля инфицированных больных μ не может быть равна $\mu = 1$. Это условие соответствует экзотическому случаю при котором $R(\tau) = 0$, $S(\tau) = 0$. Кроме того, доля $\mu \neq 0$. В этом случае больных нет и инфекция не передается к еще не заболевшим. Таким образом, доля μ удовлетворяет неравенству $0 < \mu < 1$. Подставляя (19) в уравнение (18), мы получаем C_1 в виде

$$C_1 = \delta\ln(1-\mu) - 1. \qquad (20)$$

С использованием выражения постоянной C_1 через постоянную начального количества больных μ и параметр математической модели δ нелинейное дифференциальное уравнение для уменьшения числа незаболевших людей $S(\tau)$ принимает вид:

$$S_\tau = \delta S\ln\left(\frac{1-\mu}{S}\right) - S(1-S). \qquad (21)$$

Зависимости $I(\tau)$ и $R(\tau)$ с учетом постоянной C_1 находятся по формулам

$$I(\tau) = 1 - S - \delta\ln\left(\frac{1-\mu}{S}\right) \qquad (22)$$

и

$$R(\tau) = \delta\ln\left(\frac{1-\mu}{S}\right). \qquad (23)$$

Дифференциальное уравнение первого порядка (21) и зависимости (22), (23) могут быть использованы для оценки распространения коронавируса. Изучим влияние параметров математической модели μ и δ на поведение зависимостей характеристик коронавируса.

4. ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ δ И μ НА ЗАВИСИМОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК КОРОНАВИРУСА

На рис. 1 и 3 представлены результаты вычисления характеристик при изменении параметров δ и μ модернизированной SIR-модели, описываемой системой (21), (22) и (23) распространения коронавируса. Из рис. 1 видно, что при фиксированном значении параметра $\delta = 0.35$, уменьшение доли инфицированных больных μ приводит к замедлению процесса заболевания. В частности, при $\mu = 0.0003$ наблюдается существенное увеличение инфицированных, которое начинается достаточно быстро и достигает максимума при $\tau = 12$. При $\mu = 0.3\times10^{-12}$ максимум заболевших достигается при $\tau = 47.0$. Однако общая картина

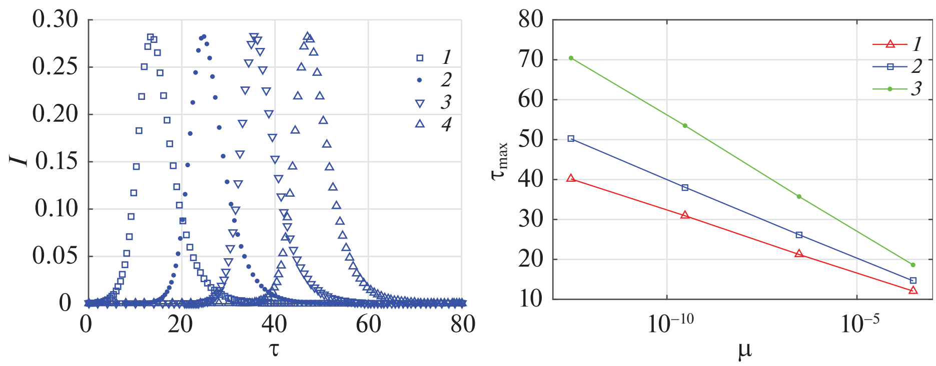


Рис. 2. Зависимость $I(\tau)$ от безразмерного времени τ при $\delta = 0.4$ и *1* – $\mu = 0.3\times10^{-3}$, *2* – $\mu = 0.3\times10^{-6}$, *3* – $\mu = 0.3\times10^{-9}$, *4* – $\mu = 0.3\times10^{-12}$ (слева). Зависимость положения максимума $I(\tau)$ от μ при *1* – $\delta = 0.2$, *2* – $\delta = 0.4$, *3* – $\delta = 0.6$ (справа).

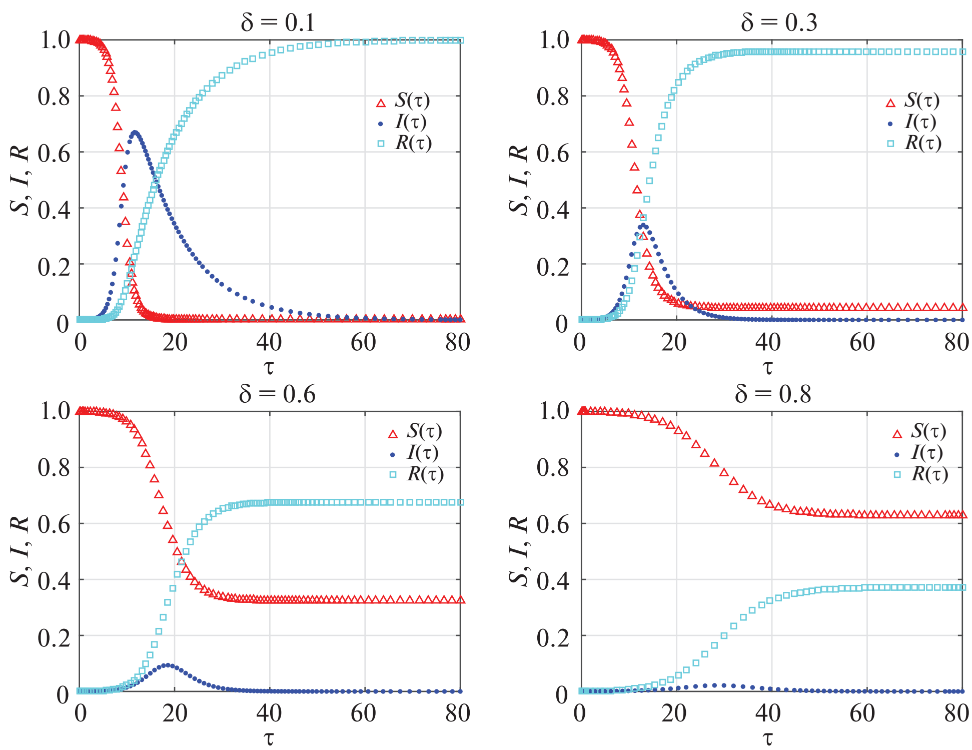


Рис. 3. Зависимость $S(\tau)$, $I(\tau)$, $R(\tau)$ от безразмерного времени τ при $\mu = 0.0003$ и $\delta = 0.1$, 0.3, 0.6, 0.8 (подписано на графиках).

заболеваемости остается неизменной, но смещается на более поздний момент времени (см. рис. 2).

Характеристики распространения коронавируса существенно изменяются при изменении параметра δ, что иллюстрируется на рис. 3. Для иллюстрации влияния параметра δ при распространении коронавируса нами фиксировались значения начальной доли инфицированных $\mu = 0.0003$ и изменялось значение безразмерного параметра δ.

При вычислениях использованы следующие значения: $\delta = 0.1$; $\delta = 0.2$; $\delta = 0.3$; $\delta = 0.5$; $\delta = 0.6$ и $\delta = 0.8$. Как следует из рисунка, при увеличении параметра δ количество инфицированных больных постоянно уменьшается.

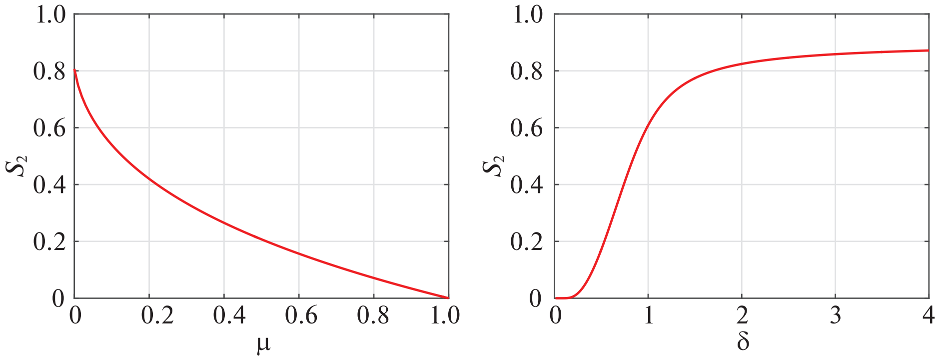


Рис. 4. Зависимость значения S_2 от параметра μ при $\delta = 0.9$ (слева) и параметра δ при фиксированном значении $\mu = 0.1$ (справа).

Это объясняется увеличением коэффициента β, характеризующего выздоровление или под влиянием медицины, или под влиянием иммунной системы. Кроме того, при одном и том же значении коэффициента α и β увеличение значения количества членов контактирующего сообщества N также приводит к увеличению числа инфицированных. Поэтому предпринимые меры по уменьшению числа N, что достигается усилением карантина, также положительно влияют на общее количество заболевших при коронавирусе.

Следует отметить, что при больших значениях параметра δ существенно увеличивается количество $S(\tau) \to \infty$, что соответствует доле сообщества которая могла бы заболеть, но не заболела, что можно наблюдать из рисунка (2) при значении $\delta = 0.9$.

Полагая $\dfrac{dS}{d\tau} = 0$ в уравнении (21), мы находим две стационарные точки, которые являются корнями правой части уравнения. Один из корней равен $S = S_1 = 0$ соответствует отсутствию тех, кто может заболеть. Второй корень уравнения равен

$$S_2 = (1-\mu)\exp\left\{-\frac{1}{\delta} - W\left[\frac{(\mu-1)}{\delta}\exp\left(-\frac{1}{\delta}\right)\right]\right\}, \tag{24}$$

где $W(x)$ — функция Ламберта. Значение S_2 соответствует доле стационарного количества не заболевших после пандемии. Естественно, что величина $1 - S_2$ соответствует доле выздоровевших и умерших людей в результате пандемии. Как следует из формулы (24), это значение зависит от доли инфицированных людей в начальный момент времени μ и от безразмерного значения коэффициента δ.

На рис. 4 представлены зависимости значений корня S_2 от параметра μ при фиксированном значении $\delta = 0.9$ (рисунок слева) и от параметра δ при фиксированном значении параметра $\mu = 0.1$ (рисунок слева).

Дифференциальное уравнение (21) не имеет общего решения в общем случае. Однако оно имеет асимптотическое решение при $S(t) \sim 1$. В этом случае в этом уравнении можно использовать приближение для логарифмической функции в виде $\ln S(t) = S(t) - 1$. Уравнение (21) принимает вид

$$S_\tau = BS^2 - AS, \quad A = 1 - \delta - \delta\ln(1-\mu), \quad B = 1 - \delta. \tag{25}$$

Общее решение уравнения (25) хорошо известно [9—11]

$$S(\tau) = \frac{A}{B + AC_3\exp\{A\tau\}}, \tag{26}$$

где C_3 — постоянная интегрирования. Однако решение (26), как указано выше, справедливо лишь при $S(\tau) \sim 1$. Кроме того, постоянная C_3 должна соответствовать начальному условию.

Используя (26), можно написать формулу для оценки уменьшения количества здоровой популяции из-за пандемии в виде обобщенной приближенной формулы, построенной на основе формул (24) и (26):

$$\begin{gathered} S(\tau) \cong S_2 + \frac{(1-S_2)A}{B + AC_3\exp\{A\tau\}}, \\ A = 1 - \delta - \delta\ln(1-\mu), \\ B = 1 - \delta, \quad S_2 = (1-\mu)\times \\ \times\exp\left\{-\frac{1}{\delta} - W\left[\frac{(\mu-1)}{\delta}\exp\left(-\frac{1}{\delta}\right)\right]\right\}. \end{gathered} \tag{27}$$

Формула (27) учитывает сращивание двух асимптотических решений (24) и (26). Постоянная C_3 находится из начального условия $S(\tau = 0) = 1 - \mu$.

$$C_3 = \delta - 1 + \frac{(1-S_2)(1-\delta-\delta\ln(1-\mu))}{1-\mu-S_2}. \tag{28}$$

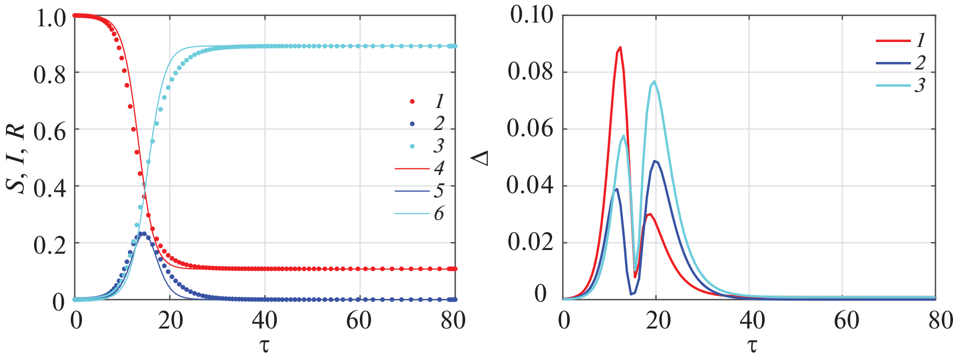


Рис. 5. Зависимость численного решения *1* – $S(\tau)$, *2* – $I(\tau)$, *3* – $R(\tau)$ и приближенных решений полученных по формулам (27), (22), (23) от безразмерного времени τ при $\delta = 0.4$ и $\mu = 0.3 \times 10^{-3}$ (слева). Зависимость погрешности приближенного решения от безразмерного времени τ для *1* – S, *2* – I, *3* – R (справа).

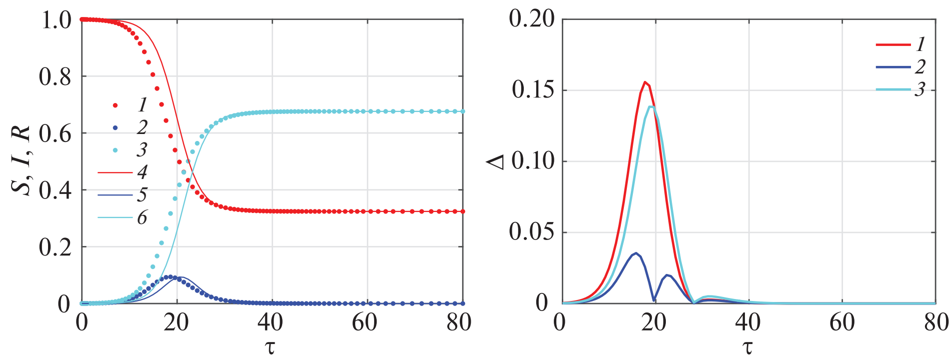


Рис. 6. Зависимость численного решения *1* – $S(\tau)$, *2* – $I(\tau)$, *3* – $R(\tau)$ и приближенных решений полученных по формулам (27), (22), (23) от безразмерного времени τ при $\delta = 0.6$ и $\mu = 0.3 \times 10^{-3}$ (слева). Зависимость погрешности приближенного решения от безразмерного времени τ для *1* – S, *2* – I, *3* – R (справа).

Приближенное решение (27) использовано для вычисления $I(\tau)$ и $R(\tau)$ по формулам (22) и (23). Как следует из сравнения приближенных формул с численными решениями, аналитические выражения дают хорошее приближение для SIR-модели (см. рис. 5 и 6) при описании распространения коронавируса для некоторых значений параметров математической модели.

БЛАГОДАРНОСТИ

Эта работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 18-29-10025) и государственным заданием министерства высшей школы и науки Российской Федерации № 0723-2020-0036.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kermack W.O., McKendrick A.G.* A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 1927. V. 115. P. 700–721.
2. *Kudryashov N.A., Chmykhov M.A., Vigdorowitsch M.V.* Analytical features of the SIR model and theier application to COVID-19 // Applied Mathematical Modeling. 2021. V. 90. P. 466–473.
3. *Chladni Z., Kopfov J., Rachinskii D., Rouf S.C.* Global dynamics of SIR model with switched transmission rate // J. Math. Biol. 2020. V. 80. P. 1209–1233. https://doi.org/10.1007/s00285-019-01460-2
4. *Barlow N.S., Weinstein S.J.* Accurate closed-form solution of the SIR epidemic model // Physica D. 2020. V. 408. P. 132540. www.doi.org/10.1016/j.physd.2020.132540
5. *Harko T., Lobo F.S.N., Mak M.K.* Exact analytical solutions of the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) epidemic model and of the SIR model with equal death and birth rates // Applied Mathematics and Computation. 2014. V. 236. P. 184–194. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.03.030
6. *Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jefrey D.J., Knuth D.E.* On the Lambert W Function // Advances in Computational Mathematics. 1996. V. 5. P. 329–359.

7. a) COVID-19 Data Repository by the Center for Systems Science and Engineering (CSSE) at Johns Hopkins University, 2020. [Online]. Available: https://github.com/CSSEGISandData/COVID-19, folder COVID-19/csse-covid-19-data/csse-covid-19-time-series/. [Accessed: 22-May-2020]; b) Dong E., Du H., Gardner L. An interactive web-based dashboard to track COVID-19 in real time. Lancet Inf Dis. 20(5): 533–534. https://doi.org/10.1016/S1473-3099(20)30120-1.
8. CORONAVIRUS today Monitoring the spread of COVID-19 in the world, 2020. [Online]. Available: https://xn--7sbgffetn1ahcahtfqb7a0v.xn--p1ai/. [Accessed: 29-May-2020] (in Russian).
9. *Kudryashov N.A.* One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2012. P. 2248–2253.
10. *Kudryashov N.A.* Polynomials in logistics function and solitary waves of nonlinear differential equations // Appl. Math. Comput. 2013. P. 9245–9253.
11. *Kudryashov N.A.* Logistic function as solution of many nonlinear differential equations // Appl. Math. Model. 2015. V. 18. P. 5733–5742.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 5, pp. 404–411

Approximate Solutions of the SIR-Model for Describing the Coronavirus

N. A. Kudryashov[a,#] and M.A. Chmykhov[a]

[a] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

[#] *e-mail: nakudryashov@mephi.ru*

Received July 15, 2020; revised July 31, 2020; accepted October 6, 2020

Abstract—A popular mathematical susceptible–infectious–recovered (SIR) model is used to describe the spread of the coronavirus. It is shown that using the first two integrals of the nonlinear system of three differential equations transforms it to one autonomous first-order differential equation with separable variables and two algebraic equations for calculating infected and recovered people with coronavirus. A feature of the reduced differential equation is that it is one-parameter model and its behavior is determined by a dimensionless parameter $\delta = \beta/(\alpha N)$ depending on the transmission coefficient α, on the coefficient for the characterization of recovery β, and on the amount of contacting community N. It is demonstrated that the general solution of the SIR model can be represented in the form of quadrature. The influence of the dimensionless parameter δ and the influence of the infected patients on the characteristics describing the spread of coronavirus are investigated. Asymptotic dependences are given for the number of people that can become ill after contacts with infected people $S(t)$, the number of ill peoples $I(t)$, and the number of recovered an dead peoples $R(t)$ depending on the initial number of infected people and the dimensionless parameter of the mathematical model. The results can be useful for considering the spread of COVID-19.

Keywords: coronavirus, SIR-model, modified mathematical model, nonlinear differential equation, first integral, solution

DOI: 10.1134/S2304487X20050089

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kermack W.O., McKendrick A.G., A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 1927, vol. 115, pp. 700–721.
2. Kudryashov N.A., Chmykhov M.A., Vigdorowitsch M.V., Analytical features of the SIR model and theier application to COVID-19, *Applied Mathematical Modeling,* 2021, vol. 90, pp. 466–473.
3. Chladni Z., Kopfov J., Rachinskii D., Rouf S.C., Global dynamics of SIR model with switched transmission rate, *J. Math. Biol.*, 2020, vol. 80, pp. 1209–1233. https://doi.org/10.1007/s00285-019-01460-2.
4. Barlow N.S., Weinstein S.J., Accurate closed-form solution of the SIR epidemic model, *Physica D*, 2020, vol. 408, p. 132540. www.doi.org/10.1016/j.physd.2020.132540
5. Harko T., Lobo F.S.N., Mak M.K., Exact analytical solutions of the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) epidemic model and of the SIR model with equal death and birth rates, *Applied Mathematics and Computation*, 2014, vol. 236, pp. 184–194. dx.doi.org/10.1016/j.amc.2014.03.030
6. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jefrey D.J., Knuth D.E., On the Lambert W Function, *Advances in Computational Mathematics*, 1996, vol. 5, pp. 329–359.

7. a) COVID-19 Data Repository by the Center for Systems Science and Engineering (CSSE) at Johns Hopkins University, 2020. [Online]. Available: https://github.com/CSSEGISandData/COVID-19, folder COVID-19/csse-covid-19-data/csse-covid-19-time-series/. (Accessed 22-May-2020); b) Dong, E., Du, H., Gardner, L., An interactive web-based dashboard to track COVID-19 in real time, *Lancet Inf. Dis.*, vol. 20, no. 5, pp. 533–534.
doi: 10.1016/S1473-3099(20)30120-1
8. CORONAVIRUS today Monitoring the spread of COVID-19 in the world, 2020. [Online]. Available https://xn–7sbgffetn1ahcahtfqb7a0v.xn–p1ai/. (Accessed 29-May-2020) (in Russian).
9. Kudryashov N.A., One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2012, pp. 2248–2253.
10. Kudryashov N.A., Polynomials in logistics function and solitary waves of nonlinear differential equations, *Appl. Math. Comput.*, 2013, pp. 9245–9253.
11. Kudryashov N.A., Logistic function as solution of many nonlinear differential equations, *Appl. Math. Model.*, 2015, vol. 18, pp. 5733–5742.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2020, том 9, № 5, с. 412–419

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ

© 2020 г. Д. В. Сафонова[1,*], Н. А. Кудряшов[1,]**

[1] Национальный исследовательский ядерный университет ”МИФИ”, Москва, 115409, Россия

**e-mail: safonovadashav@gmail.com*

***e-mail: nakudr@gmail.com*

Поступила в редакцию 20.10.2020 г.
После доработки 20.10.2020 г.
Принята к публикации 24.11.2020 г.

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка со степенными и нелокальными нелинейностями. Уравнение используется для описания распространения импульсов в оптическом волокне. Задача Коши для исследуемого уравнения не решается методом обратной задачи рассеяния, поэтому рассматривается редукция этого уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ). Для построения редукции используются переменные бегущей волны. Принимая во внимание переменные бегущей волны, получена система ОДУ для мнимой и действительной части. Для проверки интегрируемости системы ОДУ проведен тест Пенлеве. Установлено, что система ОДУ не проходит тест Пенлеве. Однако используя индексы Фукса, полученные при выполнении второго шага теста Пенлеве, определена скорость бегущей волны, при которой исследуемая модель упрощается. При этом условии система ОДУ является совместной, и остается одно уравнение четвертого порядка. Для поиска точных решений применяется метод простейших уравнений. В результате построены решения, выраженные через эллиптическую функцию Якоби и экспоненциальную функцию. Найденные точные решения содержат две произвольные постоянные и имеют вид периодических и уединенных волн.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, точное решение, тест Пенлеве, оптические импульсы

DOI: 10.1134/S2304487X20050120

1. ВВЕДЕНИЕ

Для описания распространения импульсов в оптических волокнах используются различные модели. Одной из самых популярных моделей является уравнение Радхакришнана–Кунду–Лаксманана [1, 2]. Кроме того используют следующие уравнения: уравнение Чена-Ли-Лу [3, 4], уравнение Кунду–Мекури–Наскара [5, 6] и другие [7–9]. Несмотря на большое колличество используемых уравнений, представляет интерес поиск новых моделей для описания распространения импульсов в оптических волокнах. В статье [10] предложен метод построения уравнений высокого порядка, которые могут использоваться для описания оптических импульсов.

Для многих известных в оптике моделей ищутся решения в виде уединенных импульсов [11–15]. Однако более важной задачей является построение общих решений [16–19]. В связи с этим возникает задача проверки интегрируемости изучаемых уравнений, для чего можно использовать тест Пенлеве [20–22].

В данной работе рассматривается одно из уравнений построенных в статье [10]

$$iu_t + \alpha u_{xx} + i\beta u_{xxx} + u_{xxxx} + \mu |u|^2 u + \nu |u|^4 u + \varkappa |u|^2 u_{xx} + i\frac{\beta\varkappa}{2}|u|^2 u_x = 0, \tag{1}$$

где i – мнимая единица ($i^2 = -1$), $u(x,t)$ – комплекснозначная функция, соответствующая профилю волны, α, β, δ, $\varkappa$, μ, ν, ρ, χ – параметры уравнения (1). Уравнение (1) при параметре $\varkappa = 0$ ранее рассматривалось в работе [23]. Задача Коши для (1) не решается методом обратной задачи рассеяния, поэтому для поиска его решений (1) используем переменные бегущей волны (2).

$$u(x,t) = y(z)\exp(i(\psi(z) - \omega t)), \quad z = x - C_0 t. \tag{2}$$

Подставляя решение в виде (2) в уравнение, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую мнимой и действительной частям уравнения (1)

$$\begin{gathered}2\alpha y_z\phi - y_z C_0 + 3\beta y_z\phi^2 - 6y\phi^2\phi_z + \alpha y\phi_z + \\ + 4y_z\phi_{zz} + \beta y_{zzz} + 6y_{zz}\phi_z + 4y_{zzz}\phi + y\phi_{zzz} - \\ - 3\beta y\phi_z\phi - 4y_z\varphi^3 + \varkappa y^3\phi_z + 2\varkappa y^2 y_z\phi + \frac{1}{2}\beta\varkappa y^2 y_z = 0,\end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\mu y^3 + \nu y^5 - \varkappa y^3\phi^2 - \frac{1}{2}\beta\varkappa y^3\phi + \varkappa y^2 y_{zz} + \alpha y_{zz} - 6y_{zz}\phi^2 - \\ - 3y\phi_z^2 + y\phi^4 + y\omega - 3\beta y_z\phi_z - 3\beta y_{zz}\phi - 12y_z\phi_z\phi - \\ - \beta y\phi_{zz} + y\phi C_0 - \alpha y\phi^2 + \beta y\phi^3 - 4y\varphi_{zz}\phi + y_{zzzz} = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Целью данной работы является исследование интегрируемости уравнения (1) и построение его точных решений в переменных бегущей волны.

Статья состоит из трех разделов. В разделе 2 использован тест Пенлеве для проверки интегрируемости системы уравнений (3)–(4). В разделе 3 найдены точные решения уравнения (1) в переменных бегущей водны.

2. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕСТА ПЕНЛЕВЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (3)–(4)

Тест Пенлеве один из эффективных методов исследования аналитических свойств обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Прохождение теста Пенлеве является необходимым условием интегрируемости ОДУ. То есть если уравнение не проходит тест Пенлеве, то, как правило, общего решения у этого уравнения нет.

Для проверки свойства Пенлеве будем использовать модифицированный алгоритм Ковалевской [20–22]. Этот алгоритм проверяет колличество произвольных постоянных в разложении решения в ряд Лорана. Если число произвольных постоянных, полученных в результате проведения теста, совпадает с порядком уравнения, то имеет смысл искать общее решение уравнения.

Модифицированный алгоритм Ковалевской состоит из трех шагов. Рассмотрим эти шаги для исследования аналитических свойств обыкновенного дифференциального уравнения.

Пусть имеем ОДУ n-го порядка

$$E(w_{n,x}, w_{n-1,x}, \ldots, w, x) = 0, \quad w_{k,x} = \frac{d^k w}{dx^k}.$$

Вначале из этого уравнения находятся ведущие члены, подставляя $w = w_0(x - x_0)^{-p}$ и выбирая слагаемые, в которых показатель степени $(x - x_0)$ наименьший.

Шаг 1. Определение порядка полюса решения. Используем $w(x)$ в виде

$$w(x) = w_0\xi^{-p}, \quad \xi = x - x_0, \tag{5}$$

x_0 – произвольная постоянная, w_0 и p – неизвестные постоянные.

Подставляя (5) в ведущие члены уравнения, находим значения p, приравнивая показатели степеней ξ, а из равенства коэффициентов при степени ξ находим постоянную w_0. Найденные значения p соответствуют полюсам решения. Если значения p целые, то переходим ко второму шагу.

Шаг 2. Определение индексов Фукса. Для каждой пары значений p и w_0 используем $w(x)$ в виде

$$w(x) = \frac{w_0}{\xi^p} + a_j\xi^{j-p}, \quad \xi = x - x_0, \tag{6}$$

w_0 и p – постоянные, полученные на первом шаге, j – индексы Фукса, a_j – коэффициенты ряда Лорана для решения $w(x)$, которые не определяются. Подставляем (6) в ведущие члены и собираем коэффициенты при a_j. Приравнивая нулю коэффициент при первой степени a_j, получаем уравнение для определения индексов Фукса $j_1, \ldots j_n$. Если все индексы Фукса целые, то переходим к следующему шагу.

Шаг 3. Определение произвольных постоянных. Расположим индексы Фукса в порядке возрастания. Тогда $j_1 = -1$, что соответствует произвольной постоянной x_0, и $j_n = \max(j_1, \ldots, j_n)$. Используем $w(x)$ в виде

$$w(x) = \sum_{k=0}^{j_n} w_k\xi^{k-p}, \quad \xi = x - x_0. \tag{7}$$

Подставляем (7) в исходное уравнение и собираем коэффициенты при различных степенях ξ. Приравнивая выражения при ξ нулю, находим коэффициенты w_k. Если k равно индексу Фукса, то невозможно найти w_k. И если коэффициент при ξ^{k-p-n} равен нулю, то w_k произвольная постоянная, иначе тест Пенлеве не выполнен. Однако если коэффициент при ξ^{k-p-n} зависит от параметров уравнения, то можно найти условия на эти параметры, при которых w_k будет произвольным. Если все w_k при $k = j_2, \ldots, j_n$ будут произвольными, то исходное уравнение проходит тест Пенлеве.

Тест Пенлеве для системы ОДУ выполняется аналогично. Далее в этом разделе проведем тест Пенлеве для системы уравнений (3)–(4).

Шаг 1. Находим ведущие члены для системы уравнений (3), (4), используя подстановки: $y(z) = y_0(z - z_0)^{-p}$ и $\phi(z) = \phi_0(z - z_0)^{-q}$. Получаем два возможных варианта значений p и q.

В первом случае $p = 1$, $q = 0$, а коэффициенты y_0 и ϕ_0 принимают следующий вид

$$y_0 = \pm\frac{\sqrt{-\nu(\varkappa \pm \sqrt{\varkappa^2 - 24\nu})}}{\nu}, \quad \phi_0 = -\frac{\beta}{4}. \tag{8}$$

Системы с ведущими членами (3), (4) записываются следующим образом

$$\begin{cases} \beta y_{zzz} + 4y_{zzz}\phi + 2\varkappa y^2 y_z \phi + \frac{1}{2}\beta\varkappa y^2 y_z = 0, \\ y_{zzzz} + \nu y^5 + \varkappa y^2 y_{zz} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Во втором случае $p = 1$, $q = 1$, при этом y_0 и φ_0 имеют вид

$$y_0 = \pm\frac{\sqrt{30\varkappa(\phi_0^2 - 5)}}{3\nu},$$
$$\varphi_0^2 = \frac{-105\varkappa^2 - 1000\nu \pm 9\sqrt{7\varkappa^2(7\varkappa^2 + 800\nu)}}{42\varkappa^2 - 200\nu}. \tag{10}$$

Получаем следующую систему с ведущими членами

$$\begin{cases} 4y_z\phi_{zz} + 6y_{zz}\phi_z + 4y_{zzz}\phi + y\phi_{zzz} - 6y\phi^2\phi_z - \\ - 4y_z\phi^3 + \varkappa y^3\phi_z + 2\varkappa y^2 y_z\phi = 0, \\ y_{zzzz} - 6y_{zz}\phi^2 - 3y\phi_z^2 + y\phi^4 - 12y_z\phi_z\phi - \\ - 4y\phi_{zz}\phi + \nu y^5 - \varkappa y^3\phi^2 + \phi y^2 y_{zz} = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Шаг 2. Рассмотри первый случай, когда $p = 1$, $q = 0$. Используем $y(z)$ и $\phi(z)$ в следующем виде

$$y(z) = \frac{y_0}{\xi} + a_1\xi^{j-1}, \ \phi(z) = \phi_0 + a_2\xi^j, \ \xi = z - z_0. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (9) и собирая коэффициенты при a_1 и a_2, составляем матрицу из выражений при первых степенях a_1 и a_2

$$\begin{pmatrix} 0 & -2y_0 z^{j-4}\left(\varkappa y_0^2 + 12\right) \\ \dfrac{z^{j-5}(j^2\varkappa y_0^2 + 5\nu y_0^4 + j^4 - 3j\varkappa y_0^2 - 10j^3 + 6\varkappa y_0^2 + 35j^2 - 50j + 24)}{24} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Приравнивая нулю определитель этой матрицы, получаем уравнение для поиска индексов Фукса. Таким образом, находим, что индексы Фукса зависят от параметров системы. Аналогичные результаты получаем для второго случая при $p = 1$, $q = 1$.

Рассмотрим частный случай: $\varkappa = 5\sqrt{\nu}$.

В этом случае получаем четыре целых индекса Фукса для двух значений y_0 из (8)

$$j_1 = -1, \quad j_2 = 1, \quad j_3 = 2, \quad j_4 = 8, \tag{13}$$

но для двух других значений y_0 из (8) получаем два целых и два нецелых индекса Фукса

$$j_1 = -1, \quad j_2 = 3, \quad j_{3,4} = 4 \pm 2\sqrt{6}. \tag{14}$$

Это означает, что рассматриваемая система уравнений не проходит тест Пенлеве, и нет необходимости выполнять третий шаг. Однако, выполняя третий шаг теста, часто удается найти условия на параметры, при которых модель упрощается.

Шаг 3. Используем $y(z)$ и $\phi(z)$ в виде

$$\begin{gathered} y(z) = \frac{y_0}{\xi} + y_1 + y_2\xi + y_3\xi^2 + \\ + y_4\xi^3 + y_5\xi^4 + y_6\xi^5 + y_7\xi^6 + y_8\xi^7, \\ \phi(z) = \phi_0 + \phi_1\xi + \phi_2\xi^2 + \phi_3\xi^3 + \phi_4\xi^4 + \\ + \phi_5\xi^5 + \phi_6\xi^6 + \phi_7\xi^7 + \phi_8\xi^8, \\ \xi = z - z_0. \end{gathered} \tag{15}$$

Подставляем (15) в систему (3), (4) и собираем коэффициенты при различных степенях ξ. Затем, приравнивая выражения при степенях ξ нулю, находим коэффициенты разложения (15). Таким образом, получаем, что все $\phi_i = 0$ для $i \neq 0$, $i \neq 2$. Из чего получаем, что при некотором значении скорости бегущей волны, можно положить коэффициент ϕ_2 равным нулю. Для этого выбираем следующую скорость

$$C_0 = -\frac{1}{2}\alpha\beta - \frac{1}{8}\beta^3. \tag{16}$$

При условии (16) получаем, что $\phi(z) = \phi_0 = -\beta/4$, в этом случае уравнение (3) тождественно выполняется. И задача сводится к нахождению решений уравнения (4), которое принимает вид

$$\begin{gathered} y_{zzzz} + \left(\alpha + \frac{3}{8}\beta^2\right)y_{zz} + \left(\omega + \frac{\alpha\beta^2}{16} + \frac{5}{256}\beta^4\right)y + \\ + \left(\mu + \frac{1}{16}\varkappa\beta^2\right)y^3 + \nu y^5 + \varkappa y^2 y_{zz} = 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Уравнение (17) так же не проходит тест Пенлеве, поэтому не имеет общего решения. Однако используя специальные методы будем искать точные решения (17).

3. ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ (17)

В разделе 2 получено, что система (3)–(4) не проходит тест Пенлеве, следовательно, уравнение (17) не обладает свойством Пенлеве и не имеет общего решения с четырьмя произвольными постоянными. Поэтому будем искать решение уравнения с меньшим числом постоянных. Точные решения ищем, используя метод простейших уравнений [24, 25]. При применении этого метода искомое решение выражается через решение другого уравнения, которое называют простейшим. При этом следует принимать во внимание условие соответствия порядков полюсов решения уравнения (17) и выражения составленного из решения простейшего уравнения.

В качестве простейшего будем использовать следующее уравнение

$$Y_z^2(z) - aY^4(z) - cY^2(z) - d = 0. \qquad (18)$$

Решение уравнения (18) в общем случае выражается через эллиптическую функцию Вейерштрасса или одну из эллиптических функций Якоби. Покажем, как решение уравнения (18) выражается через эллиптическую функцию Якоби. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 корни уравнения $aY^4 + cY^2 + d = 0$. И также имеем, что $x_3 = -x_1$, $x_4 = -x_2$. Тогда уравнение (18) можно переписать следующим образом

$$\begin{gathered} Y_z^2 = aY^4 + cY^2 + d = a(Y - x_1)(Y + x_1)\times \\ \times (Y - x_2)(Y + x_2) = a(Y^2 - x_1^2)(Y^2 - x_2^2) = \\ = ax_1^2x_2^2\left(1 - \left(\frac{Y}{x_1}\right)^2\right)\left(1 - \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2\left(\frac{Y}{x_1}\right)^2\right). \end{gathered} \qquad (19)$$

Из (19) получаем, что решение уравнения (18) выражается через эллиптический синус

$$\begin{gathered} Y(z) = \pm x_1 sn\left(\sqrt{a}x_2(z - z_0), \frac{x_1}{x_2}\right), \\ x_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{c^2 - 4ad} - c}{2a}}, \quad x_1 = \sqrt{\frac{-\sqrt{c^2 - 4ad} - c}{2a}}. \end{gathered} \qquad (20)$$

Теперь применим метод простейших уравнений для (17). Порядок полюса решения уравнения (17) совпадает с порядком полюса решения уравнения (18) и равен единице. Поэтому будем искать решение уравнения (17) в виде

$$y(z) = AY(z) + B, \qquad (21)$$

где $Y(z)$ – решение уравнения (18), A и B – неизвестные постоянные.

Дифференцируя (18) по z, получаем, что решение уравнения (18) также удовлетворяет следующим уравнениям

$$\begin{gathered} Y_{zz} = 2aY^3 + cY, \\ Y_{zzz} = 6aY^2Y_z + cY_z, \\ Y_{zzzz} = 6aY^2Y_{zz} + 12aYY_z^2 + cY_{zz}. \end{gathered} \qquad (22)$$

Дифференцируя (21) и используя (22), получаем выражения для производных функции $y(z)$

$$\begin{gathered} y_{zz} = 2aAY^3 + cAY, \\ y_{zzzz} = 24a^2AY^5 + 20acAY^3 + 12aAdY + c^2AY. \end{gathered} \qquad (23)$$

Подставляем (21), (23) в (17) и собираем коэффициенты при различных степенях $Y(z)$. Таким образом, получаем алгебраическое уравнение

$$\begin{gathered} (\nu A^5 + 2\varkappa A^3a + 24Aa^2)Y^5 + (5\nu A^4B + 4\varkappa A^2Ba)Y^4 + \\ + \left(\varkappa A^3c + 2\alpha Aa + \frac{1}{16}\varkappa\beta^2A^3 + 2\varkappa AB^2a + \right. \\ \left. + \mu A^3 + \frac{3}{4}\beta^2Aa + 20Aac + 10\nu A^3B^2\right)Y^3 + \\ + \left(\frac{3}{16}\varkappa\beta^2A^2B + 10\nu A^2B^3 + 2\varkappa A^2Bc + 3\mu A^2B\right)Y^2 + \\ + \left(\alpha Ac + 12Ada + 5\nu AB^4 + \frac{5}{256}\beta^4A + \right. \\ \frac{3}{8}\beta^2Ac + 3\mu AB^2 + \frac{1}{16}\alpha\beta^2A + Ac^2 + \\ \left. + \varkappa AB^2c + \frac{3}{16}\varkappa\beta^2AB^2 + \omega A\right)Y + \frac{5}{256}\beta^4B + \omega B + \\ + \nu B^5 + \mu B^3 + \frac{1}{16}\varkappa\beta^2B^3 + \frac{1}{16}\alpha\beta^2B = 0. \end{gathered} \qquad (24)$$

Приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях $Y(z)$, получаем следующие условия на параметры

$$\begin{gathered} A = \pm\frac{\sqrt{-a\nu(\varkappa \pm \sqrt{\varkappa^2 - 24\nu})}}{\nu}, \quad B = 0, \\ c = -\frac{1}{16}\frac{\varkappa\beta^2A^2}{A^2\varkappa + 20a} - \frac{\mu A^2}{A^2\varkappa + 20a} - \\ - \frac{3}{4}\frac{\beta^2a}{A^2\varkappa + 20a} - 2\frac{\alpha a}{A^2\varkappa + 20a}, \\ d = -\frac{5}{3072}\frac{\beta^4}{a} - \frac{1}{192}\frac{\alpha\beta^2}{a} - \frac{1}{32}\frac{\beta^2c}{a} - \\ - \frac{1}{12}\frac{\alpha c}{a} - \frac{1}{12}\frac{c^2}{a} - \frac{1}{12}\frac{\omega}{a}. \end{gathered} \qquad (25)$$

При этих условиях выражение (21) является решением уравнения (17) и имеет вид

$$\begin{gathered} y(z) = \pm A\frac{\sqrt{-a(\chi + 4c)}}{2a}sn\left(\frac{\sqrt{\chi}}{2}(z - z_0), K\right), \\ \chi = 2\sqrt{c^2 - 4ad} - 2c, \quad K = \frac{4\sqrt{ad}}{\chi}, \end{gathered} \qquad (26)$$

z_0 и a – произвольные постоянные, A, c, d из (25).

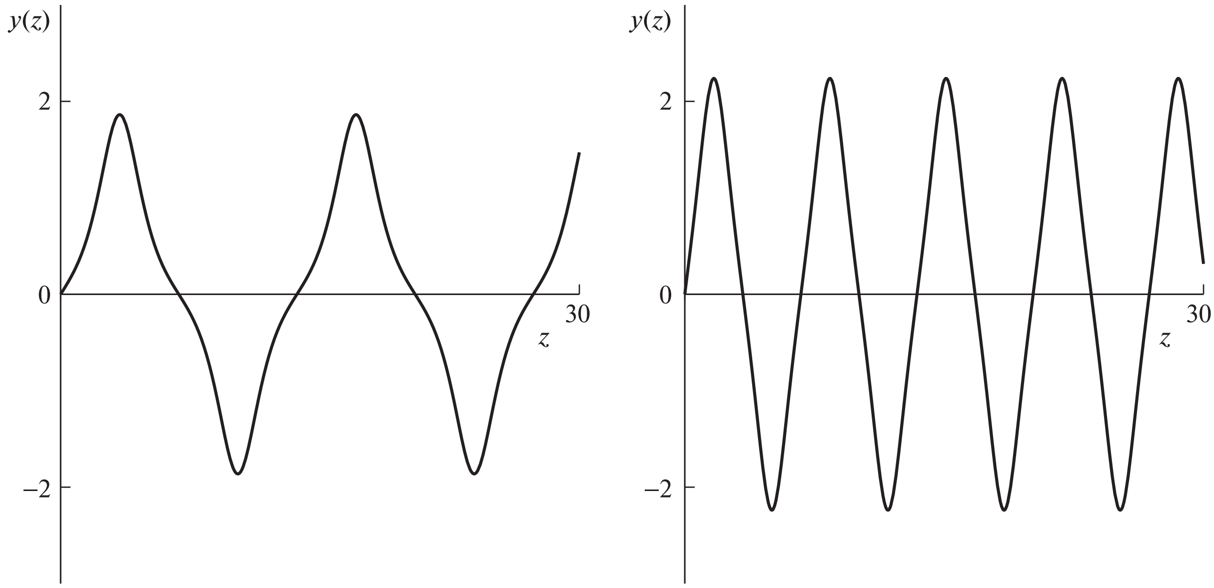


Рис. 1. Решение (26) при параметрах $a = 1$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\nu = -1$, $\mu = 3$, $\omega = 0.1$, $\varkappa = 1$, $z_0 = 0$ (слева), при параметрах $a = 1$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\nu = -1$, $\mu = 3$, $\omega = 6$, $\varkappa = 1$, $z_0 = 0$ (справа).

Решения (26) при условиях (25) и значениях параметров $a = 1$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\nu = -1$, $\mu = 3$, $\omega = 0.1$, $\varkappa = 1$, $z_0 = 0$, а также при значениях параметров $a = 1$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\nu = -1$, $\mu = 3$, $\omega = 6$, $\varkappa = 1$, $z_0 = 0$ представлены на рис. 1.

Рассмотрим частный случай. Пусть в уравнении (18) $d = 0$, тогда решение уравнения (18) принимает вид уединенной волны

$$Y(z) = \pm\frac{4ce^{\sqrt{c}(z-z_0)}}{e^{2\sqrt{c}(z-z_0)} - 4ac}. \tag{27}$$

Тогда из уравнения (24) при условии $d = 0$, получаем следующие условия

$$\begin{gathered}
A = \pm\frac{\sqrt{-a\nu(\varkappa \pm \sqrt{\varkappa^2 - 24\nu})}}{\nu}, \quad B = 0, \\
c = -\frac{1}{16}\frac{\varkappa\beta^2 A^2}{A^2\varkappa + 20a} - \frac{\mu A^2}{A^2\varkappa + 20a} - \\
-\frac{3}{4}\frac{\beta^2 a}{A^2\varkappa + 20a} - 2\frac{\alpha a}{A^2\varkappa + 20a}, \\
\omega = -\frac{5}{256}\beta^4 - \frac{1}{16}\alpha\beta^2 - \frac{3}{8}\beta^2 c - \alpha c - c^2.
\end{gathered} \tag{28}$$

Таким образом, получаем решение в виде уединенной волны

$$y(z) = \pm A\frac{4ce^{\sqrt{c}(z-z_0)}}{e^{2\sqrt{c}(z-z_0)} - 4ac}, \tag{29}$$

z_0 и a – произвольные постоянные, A, c, ω из (28).

Решения (29) при условиях (28) и значениях параметров $a = -1$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\nu = -2$, $\mu = 2$, $z_0 = 10$, $\varkappa = 1, 10, 100$, а также при значениях параметров $a = -10, -1, -0.1$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\nu = -2$, $\mu = 2$, $z_0 = 10$, $\varkappa = 1$ построены на рис. 2.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка со степенными и нелокальными нелинейностями, используемое для описания оптических импульсов. С помощью переменных бегущей волны получена редукция исходного уравнения, которая является системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Установлено, что построенная система ОДУ не проходит тест Пенлеве. В результате применения теста Пенлеве получены индексы Фукса, с помощью которых найдено условие на скорость бегущей волны, упрощающее исследуемую систему. При найденном значении скорости система ОДУ становится совместной, и остается только одно уравнение, решения которого были построены при помощи метода простейших уравнений. Найденные точные решения имеют две произвольные постоянные. Полученные решения выражаются через эллиптическую функцию Якоби и экспоненциальную функцию и имеют соответственно форму периодических и уединенных волн. Построенные точные решения в переменных бегущей волны иллюстрируются при некоторых значениях параметров.

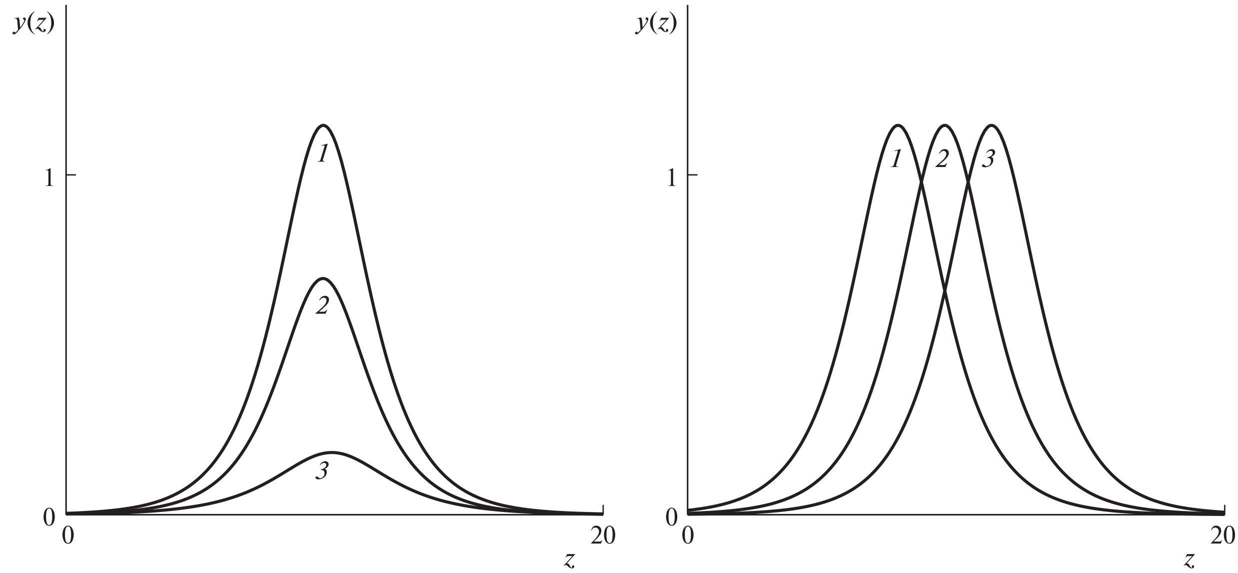


Рис. 2. Решение (29) при параметрах $a = -1$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\nu = -2$, $\mu = 2$, $z_0 = 10$, $\varkappa = 1$ (1), 10 (2), 100 (3) (слева), при параметрах $a = -10$ (1), -1 (2), -0.1 (3), $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\nu = -2$, $\mu = 2$, $z_0 = 10$, $\varkappa = 1$ (справа).

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10039) и Министерства науки и высшего образования РФ (проект государственного задания № 0723-2020-0036).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Biswas A.* 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan–Kundu–Laksmanan equation // Physics Letters A. 2009. V. 373. P. 2546–2548.
2. *Kudryashov N.A., Safonova D.V., Biswas A.* Painlevé analysis and solution to the traveling wave reduction of Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation // Regular and Chaotic Dynamics. 2019. V. 24. № 6. P. 607–614.
3. *Biswas A.* Chirp-free bright optical soliton perturbation with Chen–Lee–Liu equation by traveling wave hypothesis and semi-inverse variational principle // Optik. 2018. V. 172. P. 772–776.
4. *Kudryashov N.A.* General solution of the traveling wave reduction for the perturbed Chen–Lee–Liu equation // Optik. 2019. V. 186. P. 339–349.
5. *Kundu A., Mukherjee A.* Novel integrable higher-dimensional nonlinear Schrödinger equation: properties, solutions, applications, 2013.
6. *Kudryashov N.A.* General solution of traveling wave reduction for the Kundu–Mukherjee–Naskar equation // Optik. 2019. V. 186. P. 22–27.
7. *Kudryashov N.A.* Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with cubic-quintic nonlinearity // Optik. 2019. V. 188. P. 27–35.
8. *Kudryashov N.A.* First integral and general solution of traveling wave reduction for the Triki–Biswas equation // Optik. 2019. V. 185. P. 275–281.
9. *Kudryashov N.A.* Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with antyi-cubic nonlinearity // Optik. 2019. V. 185. P. 665–671.
10. *Kudryashov N.A.* Construction of nonlinear equations for description of propagation pulses in optical fiber // Optik. 2019. V. 192. P. 162964.
11. *Bansal A., Biswas A., Zhou Q., Arshed S., Alzahrani A.K., Belic M.R.* Optical solitons with Chen–Lee–Liu equation by Lie symmetry // Optik. 2020. V. 384. P. 126202.
12. *Yıldırım Y., Biswas A., Ekici M., Triki H., Gonzalez-Gaxiola O., Alzahrani A.K., Belic M.R.* Optical solitons in birefringent fibers for Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation with five prolific integration norms // Optik. 2020. V. 208. P. 164550.
13. *Kohl R.W., Biswas A., Zhou Q., Ekici M., Alzahrani A.K., Belic M.R.* Optical soliton perturbation with polynomial and triple-power laws of refractive index by semi-inverse variational principle // Optik. 2020. V. 135. P. 109765.
14. *Kudryashov N.A.* Method for finding highly dispersive optical solitons of nonlinear differential equations // Optik. 2020. V. 206. P. 163550.
15. *Kudryashov N.A.* Optical solitons of mathematical model with arbitrary refractive index // Optik. 2020. V. 224. P. 165391.
16. *Kudryashov N.A.* First integrals and general solutions of the Biswas–Milovic equation // Optik. 2020. P. 164490.
17. *Kudryashov N.A.* First integrals and general solution of the Fokas–Lenells equation // Optik. 2019. V. 195. P. 163135.
18. *Kudryashov N.A., Safonova D.V.* Nonautonomous first integrals and general solutions of the KdV–Burgers and

mKdV–Burgers equations with the source // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2019. V. 42. № 13. P. 4627–4636.

19. *Кудряшов Н.А., Сафонова Д.В.* Точные решения уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргерса с источником // Вестник НИЯУ МИФИ. 2019. Т. 8. № 2. С. 124–131.

20. *Ablowitz M.J., Clarkson P.A.* Solitons nonlinear evolution equations and inverse scattering. Cambridge University Press, 1991.

21. *Ablowitz M.J., Segur H.* Exact linearization of a painleve transcendent // Phys. Rev. Lett. 1977. V. 38. P. 1103-1106.

22. *Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H.* A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of p-type. I // J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 715–721.

23. *Кудряшов Н.А., Сафонова Д.В.* Точные решения нелинейного дифференциального уравнения для описания оптических импульсов с нелинейностью третьей и пятой степени // Вестник НИЯУ МИФИ. 2020. Т. 9. № 1. С. 25–31.

24. *Kudryashov N.A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // Chaos Soliton Fractals. 2005. V. 24. P. 1217–1231.

25. *Kudryashov N.A.* Exact solitary waves of the Fisher equations // Physics Letters A. 2005. V. 342. P. 99–106.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 5, pp. 412–419

Exact Solution of Fourth Order Differential Equations for Description of Optical Pulses

D. V. Safonova[a,#] and N. A. Kudryashov[a,##]

[a] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

[#]*e-mail: safonovadashav@gmail.com*

[##]*e-mail: nakudr@gmail.com*

Received October 20, 2020; revised October 20, 2020; accepted November 24, 2020

Abstract—The nonlinear fourth-order partial differential equation is considered with power and nonlocal nonlinearities. This equation is used to describe the propagation of pulses in an optical fiber. Since the Cauchy problem for this equation cannot be solved by the inverse scattering transform method, the reduction of this partial differential equation to an ordinary differential equation (ODE) is considered. To construct the reduction, the traveling wave variables are used. Using a traveling wave solution, a system of ODEs is obtained composed of the imaginary and real parts of the equation. The Painlevé test is performed to check the integrability of this reduction. It is established that the constructed system of ODEs does not have the Painlevé property. Using the Fuchs indices obtained during the second step of the Painlevé test, the values of traveling wave velocity is found at which the model is simplified. In this case, only one four-order equation remains in the system of ODEs, and the simplest equation method is used to find exact solutions of it. As a result, solutions expressed in terms of the Jacobi elliptic function and the exponential function are constructed. The found exact solutions have two arbitrary constants and have the form of periodic and solitary waves.

Keywords: nonlinear differential equation, exact solution, Painlevé test, optical pulses

DOI: 10.1134/S2304487X20050120

REFERENCES

1. Biswas A., 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan–Kundu–Laksmanan equation, *Physics Letters A*, 2009, vol. 373, pp. 2546–2548.
2. Kudryashov N.A., Safonova D.V., Biswas A., Painlevé analysis and solution to the traveling wave reduction of Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019, vol. 24, no. 6, pp. 607–614.
3. Biswas A., Chirp-free bright optical soliton perturbation with Chen–Lee–Liu equation by traveling wave hypothesis and semi-inverse variational principle, *Optik*, 2018, vol. 172, pp. 772–776.
4. Kudryashov N.A., General solution of the traveling wave reduction for the perturbed Chen–Lee–Liu equation, *Optik*, 2019, vol. 186, pp. 339–349.
5. Kundu A., Mukherjee A., *Novel integrable higher-dimensional nonlinear Schrödinger equation: properties, solutions, applications,* 2013.
6. Kudryashov N.A., General solution of traveling wave reduction for the Kundu–Mukherjee–Naskar equation, *Optik*, 2019, vol. 186, pp. 22–27.

7. Kudryashov N.A., Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with cubic-quintic nonlinearity, *Optik*, 2019, vol. 188, pp. 27–35.
8. Kudryashov N.A., First integral and general solution of traveling wave reduction for the Triki–Biswas equation, *Optik*, 2019, vol. 185, pp. 275–281.
9. Kudryashov N.A., Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with antyi-cubic nonlinearity, *Optik*, 2019, vol. 185, pp. 665–671.
10. Kudryashov N.A., Construction of nonlinear equations for description of propagation pulses in optical fiber, *Optik*, 2019, vol. 192, p. 162964.
11. Bansal A., Biswas A., Zhou Q., Arshed S., Alzahrani A.K., Belic M.R., Optical solitons with Chen–Lee–Liu equation by Lie symmetry, *Optik*, 2020, vol. 384, p. 126202.
12. Yıldırım Y., Biswas A., Ekici M., Triki H., Gonzalez-Gaxiola O., Alzahrani A.K., Belic M.R., Optical solitons in birefringent fibers for Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation with five prolific integration norms, *Optik*, 2020, vol. 208, p. 164550.
13. Kohl R.W., Biswas A., Zhou Q., Ekici M., Alzahrani A.K., Belic M.R., Optical soliton perturbation with polynomial and triple-power laws of refractive index by semi-inverse variational principle, *Optik*, 2020, vol. 135, p. 109765.
14. Kudryashov N.A., Method for finding highly dispersive optical solitons of nonlinear differential equations, *Optik*, 2020, vol. 206, p. 163550.
15. Kudryashov N.A., Optical solitons of mathematical model with arbitrary refractive index, *Optik*, 2020, vol. 224, p. 165391.
16. Kudryashov N.A., First integrals and general solutions of the Biswas–Milovic equation, *Optik*, 2020, p. 164490.
17. Kudryashov N.A., First integrals and general solution of the Fokas–Lenells equation, *Optik*, 2019. vol. 195, p. 163135.
18. Kudryashov N.A., Safonova D.V., Nonautonomous first integrals and general solutions of the KdV–Burgers and mKdV–Burgers equations with the source, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2019, vol. 42, no. 13, pp. 4627–4636.
19. Kudryashov N.A., Safonova D.V., *Tochniye resheniya uravneniya Kortewega–de Vriesa–Burgersa istochnikom.* (Exact Solutions of the Korteweg–de Vries–Burgers Equation with a Source), Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2019, vol. 8, no. 2, pp. 124–131 (in Russian).
20. Ablowitz M.J., Clarkson P.A., Solitons nonlinear evolution equations and inverse scattering, *Cambridge University Press*, 1991.
21. Ablowitz M.J., Segur H., Exact linearization of a painleve transcendent, *Phys Rev Lett.*, 1977, vol. 38, pp. 1103–1106.
22. Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H., A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of p-type. I, *J. Math. Phys.*, 1980, vol. 21, pp. 715–21.
23. Kudryashov N.A., Safonova D.V., *Tochniye resheniya nelineynogo differencialnogo uravneniya dlya opisaniya opticheskih impulsov s nelineynostyu tretey i pyatoy stepeni* (Exact Solutions of a Nonlinear Differential Equation with Third and Fifth Degree Nonlinearities for Description of Optical Pulses), Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 1, pp. 25–31 (in Russian).
24. Kudryashov N.A., Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations, *Chaos Soliton Fractals*, 2005, vol. 24, pp. 1217–1231.
25. Kudryashov N.A., Exact solitary waves of the Fisher equations, *Physics Letters A*, 2005, vol. 342, pp. 99–106.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2020, том 9, № 5, с. 420–437

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОСТЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ РЕШЕНИЙ

© 2020 г. А. Д. Полянин[1,*], А. В. Аксенов[2,3,4,]**

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия*

[2] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, 119992, Россия*

[3] *Научно-исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия*

[4] *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 125047, Россия*

**e-mail: polyanin@ipmnet.ru*

***e-mail: aksenov@mech.math.msu.su*

Поступила в редакцию 25.10.2020 г.
После доработки 25.10.2020 г.
Принята к публикации 24.11.2020 г.

Описан ряд простых, но достаточно эффективных методов построения точных решений нелинейных уравнений с частными производными, которые не требуют специальной подготовки и приводят к небольшому объему промежуточных вычислений. Эти методы базируются на следующих двух основных идеях: (i) простые точные решения могут служить основой для построения более сложных решений рассматриваемых уравнений; (ii) точные решения одних уравнений могут служить основой для построения решений более сложных уравнений. В частности, предложен метод построения сложных решений, исходя из простых решений, с помощью преобразований сдвига и масштабирования; показано, что в некоторых случаях можно получать достаточно сложные решения путем добавления слагаемых к более простым решениям; рассматриваются ситуации, когда с помощью однотипных простых решений можно построить более сложное составное решение (нелинейная суперпозиция решений); описан метод построения сложных точных решений линейных уравнений путем введения комплексного параметра в более простые решения. Эффективность предложенных методов иллюстрируется большим числом конкретных примеров. Рассматриваются нелинейные уравнения теплопроводности, реакционно-диффузионные уравнения, нелинейные волновые уравнения, уравнения движения в пористых средах, уравнения гидродинамического пограничного слоя, уравнения движения жидкой пленки, уравнения газовой динамики, уравнения Навье–Стокса и др. Помимо точных решений обычных уравнений с частными производными описаны также некоторые точные решения нелинейных функционально-дифференциальных уравнений типа пантографа с частными производными, которые кроме искомой функции содержат также функции с растяжением или сжатием независимых переменных. Сформулирован принцип аналогии, позволяющий эффективно строить точные решения таких функционально-дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: точные решения, нелинейные уравнения с частными производными, реакционно-диффузионные уравнения, нелинейные волновые уравнения, функционально-дифференциальные уравнения типа пантографа, решения с обобщенным разделением переменных

DOI: 10.1134/S2304487X20050119

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Предварительные замечания

Исследование свойств и методы построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений необходимы для разработки, анализа и тестирования различных математических моделей, используемых в естествознании и технике. Существует несколько основных методов поиска точных решений и построения редукций нелинейных уравнений с частными производными: метод группового анализа дифференциальных уравнений (метод поиска классических симметрий) [1–5], методы поиска неклассических симметрий [6–9], прямой метод Кларксона–Крускала [10–14], методы обобщенного разделения переменных [12–15], методы функционального разделения переменных [14, 16–18], метод дифференциальных связей [12–14, 19], метод усеченных разложений Пенлеве [20–22]. Применение этих методов требует специальной подготовки и, как правило, сопровождается трудоемким анализом и большим объемом аналитических преобразований и промежуточных вычислений.

В данной работе описан ряд простых, но достаточно эффективных методов построения точных решений нелинейных уравнений с частными производными, которые не требуют специальной подготовки и проводят к небольшому объему промежуточных вычислений. Эти методы базируются на следующих двух основных идеях:

• простые точные решения могут служить основой для построения более сложных решений рассматриваемых уравнений,

• точные решения одних уравнений могут служить основой для построения решений других более сложных уравнений.

Эффективность предложенных методов иллюстрируется большим числом конкретных примеров. Рассматриваются нелинейные уравнения теплопроводности, реакционно-диффузионные уравнения, нелинейные волновые уравнения, уравнения движения в пористых средах, уравнения гидродинамического пограничного слоя, уравнения движения жидкой пленки, уравнения газовой динамики, уравнения Навье–Стокса и др. Помимо точных решений обычных уравнений с частными производными описаны также некоторые точные решения нелинейных функционально-дифференциальных уравнений типа пантографа и уравнений с постоянным запаздыванием.

1.2. Точные решения нелинейных уравнений с частными производными (используемая терминология)

В данной статье термин *точное решение* для нелинейных уравнений в частных производных будем применять в случаях, когда решение выражается:

(i) через элементарные функции, функции, входящие в уравнение (это необходимо, когда уравнение содержит произвольные функции), и неопределенные или/и определенные интегралы;

(ii) через решения обыкновенных дифференциальных уравнений или систем таких уравнений.

Допустимы комбинации решений из пп. (i)–(ii). В случае (i) точное решение может быть представлено в явной, неявной или параметрической форме. Более детально терминология по данному вопросу обсуждается в книге [14].

2. ПОСТРОЕНИЕ СЛОЖНЫХ РЕШЕНИЙ, ИСХОДЯ ИЗ ПРОСТЫХ РЕШЕНИЙ, С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СДВИГА И МАСШТАБИРОВАНИЯ

2.1. Некоторые определения. Простейшие преобразования

Будем говорить, что уравнение с частными производными

$$F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\,\ldots)=0 \qquad (1)$$

инвариантно относительно однопараметрического обратимого преобразования

$$\begin{gathered}\bar{x}=X(x,t,u,a),\quad \bar{t}=T(x,t,u,a),\\ \bar{u}=U(x,t,u,a),\end{gathered} \qquad (2)$$

если после подстановки выражений (2) в (1) получим точно такое же уравнение

$$F(\bar{x},\bar{t},\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_t,\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}},\bar{u}_{\bar{x}\bar{t}},\bar{u}_{\bar{t}\bar{t}},\,\ldots)=0.$$

Важно отметить, что параметр a, который может принимать значения на некотором интервале (a_1,a_2), не входит в рассматриваемое уравнение (1).

Преобразования, сохраняющие вид уравнения (1), преобразуют решение рассматриваемого уравнения в решение этого же уравнения.

Функция $I(x,t,u)$ (отличная от константы и не зависящая от a) называется *инвариантом преобразования* (2), если она сохраняется при этом преобразовании, т.е.

$$I(x,t,u)=I(\bar{x},\bar{t},\bar{u})$$

при всех допустимых значениях параметра a.

Инварианты преобразования определяются неоднозначно, так как произвольная функция от инвариантов также является инвариантом.

Решение $u=U(x,t)$ уравнения (1) называется *инвариантным*, если оно при преобразовании (2) переходит в точно такое же решение $\bar{u}=U(\bar{x},\bar{t})$.

Далее будут рассматриваться только однопараметрические преобразования вида

$$\begin{gathered}x=\bar{x}+b_1,\quad t=\bar{t}+b_2,\\ u=\bar{u}+b_3\quad (\textit{преобразование сдвига});\\ x=c_1\bar{x},\quad t=c_2\bar{t},\quad u=c_3\bar{u}\\ (\textit{преобразование масштабирования}),\end{gathered}$$

и композиции этих преобразований. Здесь b_n и c_n ($n=1,2,3$) – постоянные величины, зависящие от свободного параметра a. Такие преобразования будем называть *простейшими преобразованиями*.

Ниже на конкретном примере показано, как определять инварианты простейших преобразований и вид соответствующих инвариантных решений.

Пример 1. Рассмотрим преобразование, состоящее из преобразования сдвига по переменной x и преобразований масштабирования по переменным t и u:

$$\bar{x} = x - m\ln a, \quad \bar{t} = at, \quad \bar{u} = a^k u, \tag{3}$$

где k и m — некоторые константы. Исключая параметр a, находим два функционально независимых инварианта:

$$I_1 = x + m\ln t, \quad I_2 = ut^{-k}. \tag{4}$$

Если рассматриваемое уравнение инвариантно относительно преобразования (3), то оно допускает инвариантное решение, которое можно представить в виде $I_2 = \varphi(I_1)$ [1] или $u = t^k\varphi(z)$, где $z = x + m\ln t$. Подставив полученное выражение в исходное уравнение приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $\varphi = \varphi(z)$.

2.2. Построение более сложных решений, исходя из простых решений. Примеры

Простые одночленные решения в виде произведения функций различных переменных проще всего находить методом разделения переменных (простейшие решения данного типа $u = Ax^\alpha t^\beta$ легко определяются из рассматриваемых уравнений методом неопределенных коэффициентов). Ниже описаны способы построения более сложных решений, исходя из таких решений.

Сначала будем рассматривать простые решения с разделением переменных специального вида

$$u = t^k\varphi_1(x), \tag{5}$$

где k — некоторая постоянная, а $\varphi_1(x)$ — некоторая функция. Такие решения не меняются (инварианты) при преобразовании масштабирования

$$\bar{t} = at, \quad \bar{u} = a^k u. \tag{6}$$

Ниже, в виде утверждения, дано описание метода, позволяющего строить более сложные решения, исходя из решений вида (5).

Утверждение 1. *Пусть уравнение*

$$F(t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \ldots) = 0, \tag{7}$$

которое не зависит явно от переменной x, имеет простое решение вида (5) *и не меняется при преобразовании масштабирования* (6) (*т.е. уравнение* (7) *имеет такое же свойство, что и исходное решение* (5)). *Тогда это уравнение имеет также более сложное решение вида*

$$u = t^k\varphi_2(z), \quad z = x + m\ln t, \tag{8}$$

где m — произвольная постоянная.

Доказательство. Поскольку уравнение (7) не зависит явно от пространственной переменной, оно допускает преобразование сдвига по x. Рассмотрим преобразование (3), которое является композицией преобразований сдвига по переменной x и преобразования масштабирования (6). Преобразование (3) имеет два функционально независимых инварианта (4). Поэтому решение, инвариантное относительно преобразования (3), имеет вид (8) (см. пример 1).

Замечание 1. В общем случае вид функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(z)$, входящих соответственно в исходное решение (5) и более сложное решение (8), может различаться, причем $\psi_2(z)\big|_{m=0} \neq \varphi_1(x)$.

Рассмотрим теперь простые решения с разделением переменных специального вида

$$u = x^n\psi_1(t), \tag{9}$$

где n — некоторая постоянная, а $\psi_1(t)$ — некоторая функция. Такие решения не меняются (инварианты) при преобразовании масштабирования

$$\bar{x} = ax, \quad \bar{u} = a^n u. \tag{10}$$

Более сложное, чем (9), решение можно получить с помощью утверждения 1, переобозначив соответствующим образом постоянные и переменные величины в (5)–(8). Ниже описан другой эквивалентный способ построения более сложного решения, который иногда удобнее использовать на практике.

Утверждение 2. *Пусть уравнение*

$$F(x, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \ldots) = 0, \tag{11}$$

которое не зависит явно от переменной t, имеет простое решение вида (9) *и не меняется при преобразовании масштабирования* (10) (*т.е. уравнение* (11) *имеет такое же свойство, что и исходное решение* (9)). *Тогда это уравнение имеет также более сложное решение вида*

$$u = e^{-npt}\psi_2(y), \quad y = xe^{pt}, \tag{12}$$

где p — произвольная постоянная.

Доказательство. Уравнение (11) допускает преобразование сдвига по переменной t. Рассмотрим преобразование, являющееся композицией преобразований сдвига по переменной t и преобразования масштабирования (10):

$$\bar{x} = ax, \quad \bar{t} = t - \frac{1}{p}\ln a, \quad \bar{u} = a^n u, \tag{13}$$

где p — произвольная постоянная ($p \neq 0$). Преобразование (13) имеет два функционально независимых инварианта $I_1 = y = xe^{pt}$ и $I_2 = e^{npt}u$. Поэтому решение, инвариантное относительно преобразования (13), имеет вид (12).

Замечание 2. Аргумент функции y линеен по x. Поэтому решение (12) легко дифференцировать по x. Это представление решения следует использовать для уравнений, которые содержат частные производные по x более высокого порядка, чем по t.

Пример 2. Рассмотрим уравнение Буссинеска

$$u_t = a(uu_x)_x, \tag{14}$$

которое описывает нестационарное течение грунтовых вод в пористой среде со свободной поверхностью [24].

Уравнение (14) имеет простое точное решение

$$u = -\frac{x^2}{6at}, \tag{15}$$

которое одновременно является решением двух видов (5) и (9). Рассмотрим по порядку обе возможности построения более сложных решений, исходя из решения (15).

1°. Решение (15) и уравнение (14) сохраняют вид при преобразовании масштабирования $\bar{t} = ct$, $\bar{u} = u/c$. Поэтому в силу утверждения 1 уравнение (14) допускает более сложное точное решение

$$u = \frac{\varphi(z)}{t}, \quad z = x + k\ln t,$$

где функция $\varphi = \varphi(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (далее ОДУ):

$$k\varphi'_z - \varphi = a(\varphi\varphi'_z)'_z. \tag{16}$$

Отметим, что уравнение (16) при $k = 0$ допускает однопараметрическое семейство решений в виде квадратичного многочлена

$$\varphi = -\frac{x^2}{6a} + Cx - \frac{3aC^2}{2},$$

где C – произвольная постоянная. При $C = 0$ это решение совпадает с исходным решением (15).

2°. Решение (15) и уравнение (14) сохраняют вид также при преобразовании масштабирования $\bar{x} = cx$, $\bar{u} = c^2u$. Поэтому, в силу утверждения 2, уравнение (14) допускает другое точное решение

$$u = e^{-2pt}\psi(y), \quad y = xe^{pt},$$

где $p \neq 0$, а функция $\psi = \psi(y)$ описывается ОДУ:

$$py\psi'_y - 2p\psi = a(\psi\psi'_y)'_y.$$

Пример 3. Рассмотрим теперь уравнение Гудерлея

$$u_{xx} = au_yu_{yy}, \tag{17}$$

которое используется для описания трансзвуковых течений газа [25].

Уравнение (17) допускает простое точное решение

$$u = \frac{y^3}{3ax^2}, \tag{18}$$

которое является частным случаем сразу двух видов решений (5) и (9). Рассмотрим по порядку обе возможности построения более сложных решений, исходя из решения (18).

1°. Решение (18) и уравнение (17) сохраняют вид при преобразовании масштабирования $\bar{x} = cx$, $\bar{u} = c^{-2}u$. Поэтому, в силу утверждения 1, уравнение (17) имеет более сложное точное решение вида

$$u = x^{-2}\varphi(z), \quad z = y + m\ln x,$$

где функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается ОДУ второго порядка:

$$m^2\varphi''_{zz} - 5m\varphi'_z + 6\varphi = a\varphi'_z\varphi''_{zz}.$$

Это уравнение при $m = 0$ допускает однопараметрическое семейство решений в виде кубического многочлена

$$\varphi(z) = \frac{z^3}{3a} + Cz^2 + aC^2z + \frac{a^2C^3}{3},$$

где C – произвольная постоянная. При $C = 0$ это решение совпадает с исходным решением (18).

2°. Решение (18) и уравнение (17) сохраняют вид также при преобразовании масштабирования $\bar{y} = cy$, $\bar{u} = c^3u$. Поэтому, в силу утверждения 2, можно получить также другое более сложное точное решение

$$u = e^{-3px}\psi(z), \quad z = ye^{px},$$

где $p \neq 0$, а функция $\psi = \psi(z)$ описывается ОДУ:

$$p^2z^2\psi''_{zz} - 5p^2z\psi'_z + 9p^2\psi = a\psi'_z\psi''_{zz}.$$

Пример 4. В газовой динамике встречается нелинейное волновое уравнение

$$u_{tt} = a(u^bu_x)_x, \quad b \neq 0, \tag{19}$$

которое допускает простое точное решение

$$u = a^{-1/b}x^{2/b}t^{-2b}. \tag{20}$$

Это решение принадлежит обоим классам решений (5) и (9). Поэтому, исходя из решения (20), можно построить два более сложных решения, описанных ниже.

1°. Решение (20) и уравнение (19) инвариантны относительно преобразования масштабирования $\bar{t} = ct$, $\bar{u} = c^{-2/b}u$. В силу утверждения 1, уравнение (19) имеет более сложное решение вида

$$u = t^{-2/b}\varphi(z), \quad z = x + m\ln t,$$

где функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается ОДУ:

$$m^2\varphi''_{zz} - \frac{m(b+4)}{b}\varphi'_z + \frac{2(b+2)}{b^2}\varphi = a(\varphi^b\varphi'_z)'_z.$$

2°. Решение (20) и уравнение (19) инвариантны также относительно преобразования масштабирования $\bar{x} = cx$, $\bar{u} = c^{2/b}u$. Поэтому, в силу утверждения 2, уравнение (19) допускает другое решение

$$u = e^{-2pt/b}\psi(y), \quad y = xe^{pt},$$

где $p \neq 0$, а функция $\psi = \psi(y)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ второго порядка

$$p^2y^2\psi''_{yy} + \frac{p^2(b-4)}{b}y\psi'_y + \frac{4p^2}{b^2}\psi = a\left(\psi^b\psi'_y\right)'_y.$$

Пример 5. Система уравнений пограничного слоя на плоской пластине путем введения функции тока сводится к одному нелинейному уравнению третьего порядка

$$u_yu_{xy} - u_xu_{yy} = \nu u_{yyy}, \tag{21}$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости [23].

Уравнение (21) имеет простое решение вида

$$u = \frac{6\nu x}{y}, \tag{22}$$

которое порождает два более сложных решения.

1°. Решение (22) и уравнение (21) не меняются при преобразовании масштабирования $\bar{x} = ax$, $\bar{u} = au$. Поэтому, в силу утверждения 1, уравнение (21) имеет более сложное решение вида

$$u = x\varphi(z), \quad z = y + k\ln x,$$

где k — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(z)$ удовлетворяет ОДУ:

$$-\varphi\varphi''_{zz} + (\varphi'_z)^2 = \nu\varphi'''_{zzz}.$$

2°. Решение (22) и уравнение (21) не меняются также при преобразовании масштабирования $\bar{y} = ay$, $\bar{u} = u/a$. Поэтому, в силу утверждения 2, уравнение (21) допускает другое решение

$$u = e^{px}\psi(z), \quad z = ye^{px},$$

где $p \neq 0$, а функция $\psi = \psi(z)$ описывается ОДУ:

$$p\psi\psi''_{zz} - 2p(\psi'_z)^2 = \nu\psi'''_{zzz}.$$

Пример 6. Рассмотрим нелинейное эволюционное уравнение, описывающее изменение толщины пленки тяжелой вязкой жидкости, движущейся вдоль горизонтальной супергидрофобной поверхности с переменным коэффициентом поверхностного натяжения

$$u_t = [(au^3 + bx^{2/3}u^2)(u_x - c(x^2u_{xx})_x)]_x, \tag{23}$$

где a, b и c — некоторые постоянные [26, 27].

Уравнение (23) имеет простое решение вида

$$u = x^{2/3}f(t), \tag{24}$$

где функция $f = f(t)$ описывается ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными

$$f'_t = \frac{10}{81}(2c+9)f^3(af+b).$$

Решение (24) и уравнение (23) инвариантны относительно преобразования масштабирования $\bar{x} = kx$, $\bar{u} = k^{2/3}u$. Поэтому, в силу утверждения 2, уравнение (23) имеет также более сложное решение вида

$$u = e^{-2pt/3}\psi(y), \quad y = xe^{pt},$$

где функция $\psi = \psi(y)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ четвертого порядка [26, 27]:

$$py\psi_y - \frac{2}{3}p\psi = \\ = [(a\psi^3 + by^{2/3}\psi^2)(\psi_y - (cy^2\psi_{yy})_y)]_y,$$

где p — произвольная постоянная ($p \neq 0$).

Пример 7. Рассмотрим эволюционное уравнение произвольного порядка n

$$u_t = u^sF(u_x/u, u_{xx}/u, \ldots, u_x^{(n)}/u), \quad s \neq 1. \tag{25}$$

Уравнение (25) имеет простое решение вида

$$u = t^{1/(1-s)}\varphi(x), \tag{26}$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ:

$$\frac{\varphi}{1-s} = \varphi^sF(\varphi'_x/\varphi, \varphi''_{xx}/\varphi, \ldots, \varphi_x^{(n)}/\varphi).$$

Решение (26) и уравнение (25) инвариантны относительно преобразования масштабирования $\bar{t} = at$, $\bar{u} = a^{1/(1-s)}u$. Поэтому, в силу утверждения 1, уравнение (25) имеет также более сложное решение вида

$$u = t^{1/(1-s)}\varphi(z), \quad z = x + m\ln t,$$

где m – произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(z)$ удовлетворяет ОДУ:

$$m\varphi'_z + \frac{\varphi}{1-s} = \varphi^s F(\varphi'_z/\varphi, \varphi''_{zz}/\varphi, \dots, \varphi_z^{(n)}/\varphi).$$

Утверждение 3. *Пусть уравнение*

$$F(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0, \qquad (27)$$

которое не зависит явно от переменных x и t (и поэтому допускает решение типа бегущей волны), не меняется при преобразовании масштабирования искомой функции

$$\bar{u} = au. \qquad (28)$$

Тогда это уравнение допускает точное решение (более сложное, чем решение типа бегущей волны), которое можно представить в следующих двух альтернативных формах:

$$\begin{aligned} u &= Ce^{kt}\varphi(z), \quad z = px + qt, \\ u &= Ce^{mx}\psi(z), \quad z = px + qt, \end{aligned} \qquad (29)$$

где C, k, p, q – произвольные постоянные ($pq \neq 0$), $m = kp/q$, $\psi(z) = e^{-mz/p}\varphi(z)$. Имеются также более простые решения с разделением переменных вида $u = Ce^{kt}\varphi(x)$ и $u = Ce^{mx}\psi(t)$.

Доказательство. Рассмотрим преобразование, являющееся композицией преобразований сдвига по переменным x и t и преобразования масштабирования искомой функции (28):

$$\bar{x} = x + \frac{1}{p}\ln a, \quad \bar{t} = t - \frac{1}{q}\ln a, \quad \bar{u} = a^{-k/q}u, \qquad (30)$$

где $a > 0$ – произвольная постоянная, а p и q – некоторые константы ($pq \neq 0$). Преобразование (30) сохраняет вид уравнения (27) и имеет два функционально независимых инварианта $I_1 = z = px + qt$ и $I_2 = e^{-kt}u$. Поэтому решение, инвариантное относительно преобразования (30), может быть представлено в виде (29).

Пример 8. Рассмотрим нелинейное уравнение типа теплопроводности

$$u_t = bu_{xx} + uf(u_x/u), \qquad (31)$$

где $f = f(\xi)$ – произвольная функция.

Уравнение (31) не меняется при преобразовании масштабирования зависимой переменной $\bar{u} = au$. Поэтому, в силу утверждения 3, это уравнение имеет решение вида (29), где функция $\varphi = \varphi(z)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ:

$$k\varphi + q\varphi'_z = bp^2\varphi''_{zz} + \varphi f(p\varphi'_z/\varphi).$$

Пример 9. Рассмотрим более сложное эволюционное уравнение произвольного порядка

$$u_t = uF(u_x/u, u_{xx}/u, \dots, u_x^{(n)}/u), \qquad (32)$$

где $F(w_1, w_2, \dots, w_n)$ – произвольная функция.

Уравнение (32) не меняется при преобразовании масштабирования зависимой переменной $\bar{u} = au$. Поэтому, в силу утверждения 3, это уравнение имеет решение вида (29), где функция $\varphi = \varphi(z)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ:

$$k\varphi + q\varphi'_z = \varphi F(p\varphi'_z/\varphi, p^2\varphi''_{zz}/\varphi, \dots, p^n\varphi_z^{(n)}/\varphi).$$

2.3. Обобщение на случай произвольного числа пространственных переменных

Приведенные выше утверждения 1–3 допускают очевидные обобщения на случай произвольного числа пространственных переменных.

Пример 10. Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности с n пространственными переменными

$$u_t = a\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u^k\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \quad k \neq 0. \qquad (33)$$

Уравнение (33) допускает простое решение с разделением переменных

$$u = t^{-1/k}\varphi(x_1, \dots, x_n), \qquad (34)$$

где функция $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$-\frac{1}{k}\varphi = a\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi^k\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right).$$

Решение (34) и уравнение (33) не меняются при преобразовании масштабирования $\bar{t} = ct$, $\bar{u} = c^{-k}u$. Поэтому, в силу утверждения 1, уравнение (33) имеет также более сложное решение вида

$$u = t^{-1/k}\theta(z_1, \dots z_n), \quad z_i = x_i + m_i\ln t,$$

где m_i – произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(z_1, \dots z_n)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$-\frac{1}{k}\theta + \sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\theta}{\partial z_i} = a\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left(\theta^k\frac{\partial\theta}{\partial z_i}\right).$$

2.4. Обобщение на системы уравнений

Приведенные выше утверждения 1–3 могут быть также использованы для нахождения решений систем уравнений.

Пример 11. Рассмотрим нелинейную систему, состоящую из двух уравнений реакционно-диффузионного типа

$$\begin{aligned} u_t &= a(u^bu_x)_x + uf(u/v), \\ v_t &= a(v^bv_x)_x + vg(u/v), \end{aligned} \qquad (35)$$

где a, b — некоторые постоянные ($b \neq 0$), $f(z)$ и $g(z)$ — произвольные функции.

Система уравнений (35) имеет простое решение вида

$$u = x^{2/b}\varphi(t), \quad v = x^{2/b}\psi(t), \tag{36}$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой ОДУ первого порядка

$$\varphi'_t = \frac{2a(b+2)}{b^2}\varphi^{b+1} + \varphi f(\varphi/\psi),$$
$$\psi'_t = \frac{2a(b+2)}{b^2}\psi^{\mu+1} + \psi g(\varphi/\psi).$$

Решение (36) и система уравнений (35) не меняются при преобразовании масштабирования $\bar{x} = cx$, $\bar{u} = c^{2/b}u$, $\bar{v} = c^{2/b}v$. Поэтому, в силу утверждения 2, система уравнений (35) имеет также более сложное решение вида

$$u = e^{-2mt/b}\Phi(z), \quad v = e^{-2mt/b}\Phi(z), \quad z = xe^{mt},$$

где функции $\Phi = \Phi(z)$ и $\Psi = \Psi(z)$ описываются системой ОДУ:

$$mz\Phi'_z - \frac{2m}{b}\Phi = a(\Phi^b\Phi'_z)'_z + \Phi f(\Phi/\Psi),$$
$$mz\Psi'_z - \frac{2m}{b}\Psi = a(\Psi^b\Psi'_z)'_z + \Psi f(\Phi/\Psi),$$

где m — произвольная постоянная ($m \neq 0$).

Пример 12. Рассмотрим другую нелинейную систему, состоящую из двух уравнений реакционно-диффузионного типа

$$\begin{aligned} u_t &= a(u^b u_x)_x + u^{b+1}f(u/v), \\ v_t &= a(v^b v_x)_x + v^{b+1}g(u/v), \end{aligned} \tag{37}$$

где a, b — некоторые постоянные ($b \neq 0$), $f(z)$ и $g(z)$ — произвольные функции.

Система уравнений (37) имеет простое решение вида

$$u = t^{-1/b}\varphi(x), \quad v = t^{-1/b}\psi(x), \tag{38}$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ описываются системой ОДУ второго порядка

$$-\frac{\varphi}{b} = a\left(\varphi^b\varphi'_x\right)'_x + \varphi^{b+1}f(\varphi/\psi),$$
$$-\frac{\psi}{b} = a\left(\psi^b\psi'_x\right)'_x + \psi^{b+1}g(\varphi/\psi).$$

Решение (38) и система уравнений (37) сохраняют вид при преобразовании масштабирования $\bar{t} = ct$, $\bar{u} = c^{-1/b}u$, $\bar{v} = c^{-1/b}v$. В силу утверждения 1, система уравнений (37) имеет также более сложное решение вида

$$u = t^{-1/b}\Phi(z), \quad v = t^{-1/b}\Psi(z), \quad z = x + m\ln t,$$

где m — произвольная постоянная, а функции $\Phi = \Phi(z)$ и $\Psi = \Psi(z)$ удовлетворяют системе ОДУ:

$$-\frac{\Phi}{b} + m\Phi'_z = a\left(\Phi^b\Phi'_z\right)'_z + \Phi^{b+1}f(\Phi/\Psi),$$
$$-\frac{\Psi}{b} + m\Psi'_z = a\left(\Psi^b\Psi'_z\right)'_z + \Psi^{b+1}g(\Phi/\Psi).$$

3. ПОСТРОЕНИЕ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ПУТЕМ ДОБАВЛЕНИЯ СЛАГАЕМЫХ К БОЛЕЕ ПРОСТЫМ РЕШЕНИЯМ

В некоторых случаях простые решения удается обобщить путем добавления к ним одного или нескольких дополнительных слагаемых, что приводит к более сложным решениям с обобщенным разделением переменных [12–15]. Продемонстрируем возможный ход рассуждений в таких случаях на примерах уравнения Буссинеска (14) и уравнения Гудерлея (17).

Пример 13. Как указывалось ранее, уравнение Буссинеска (14) имеет квадратичное по x решение с простым разделением переменных (15), которое запишем в виде

$$u = \varphi(t)x^2, \quad \varphi(t) = -1/(6at). \tag{39}$$

Попробуем искать более сложное решение в виде суммы

$$u(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x^k, \quad k \neq 2, \tag{40}$$

первый член которой совпадает с решением (39). Во второе слагаемое формулы (40) входят функция $\psi(t)$ и коэффициент k, которые требуется найти.

Подставив (40) в (14), после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} (\varphi'_t - 6a\varphi^2)x^2 + [\Psi'_t - a(k+1)(k+2)\varphi\psi]x^k - \\ - ak(2k-1)\psi^2x^{2k-2} = 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Поскольку это равенство должно выполняться тождественно для любых x, функциональные коэффициенты при различных степенях x в (41) должны равняться нулю. Таким образом, возможны два случая $k = 0$ и $k = 1/2$ (оба соответствуют обращению в нуль коэффициента при x^{2k-2}), которые надо рассмотреть отдельно.

1°. *Первый случай*. Подставив $k = 0$ в (41), для определения функций $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ имеем систему уравнений

$$\varphi'_t - 6a\varphi^2 = 0, \quad \psi'_t - 2a\varphi\psi = 0,$$

общее решение которой определяется формулами

$$\varphi(t) = -\frac{1}{6a(t + C_1)}, \quad \psi(t) = \frac{C_2}{|t + C_1|^{1/3}}, \tag{42}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

2°. *Второй случай* (решение Баренблатта–Зельдовича дипольного типа [28]). Подставив $k = 1/2$ в (41), получим систему уравнений для определения функций $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$:

$$\varphi'_t - 6a\varphi^2 = 0, \quad \psi'_t - \frac{15}{4}a\varphi\psi = 0.$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$\varphi(t) = -\frac{1}{6a(t + C_1)}, \quad \psi(t) = \frac{C_2}{|t + C_1|^{5/8}}. \tag{43}$$

Учитывая формулы (40), (42), (43), в итоге получим два трехпараметрических решения с обобщенным разделением переменных уравнения (14):

$$u = -\frac{1}{6a(t + C_1)}(x + C_3)^2 + \frac{C_2}{|t + C_1|^{1/3}},$$
$$u = -\frac{1}{6a(t + C_1)}(x + C_3)^2 + \frac{C_2}{|t + C_1|^{5/8}}(x + C_3)^{1/2},$$

где в целях большей общности дополнительно добавлен произвольный сдвиг по пространственной переменной x.

Замечание 3. Волновое уравнение с квадратичной нелинейностью

$$u_{tt} = a(uu_x)_x,$$

также допускает решения вида (40) при $k = 0$ и $k = 1/2$.

Пример 14. Вернемся теперь к уравнению Гудерлея (17). Это уравнение допускает простое точное решение (18), которое запишем в виде

$$u = f(x)y^3, \quad f(x) = 1/(3ax^2).$$

Будем искать более сложные решения (с обобщенным разделением переменных) уравнения (17) в виде

$$u(x, y) = \varphi(x)y^k + \psi(x), \tag{44}$$

где функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и константа $k \neq 0$ являются искомыми (решение (18) является частным случаем решения (44) при $k = 3$ и $\psi = 0$). Важно отметить, что подобные двучленные решения УрЧП достаточно часто встречаются на практике и являются наиболее простыми решениями с обобщенным разделением переменных.

Подставив (44) в (17), после перестановки членов приходим к соотношению

$$\varphi''_{xx}y^k - ak^2(k - 1)\varphi^2 y^{2k-3} + \psi''_{xx} = 0, \tag{45}$$

которое содержит степенные функции y^k и y^{2k-3} и должно удовлетворяться тождественно для любых y.

Рассмотрим два случая: $\psi''_{xx} = 0$ и $\psi''_{xx} \neq 0$.

1°. *Первый случай*. При $\psi''_{xx} = 0$ получим двучленное уравнение с разделяющимися переменными, которому можно удовлетворить, если положить

$$k = 3, \quad \varphi''_{xx} - 18a\varphi^2 = 0. \tag{46}$$

Общее решение автономного ОДУ (46) можно представить в неявной форме

$$x = \pm\int (12a\varphi^3 + C_1)^{-1/2} d\varphi + C_2.$$

Кроме того, это уравнение допускает частное решение степенного вида $\varphi = \frac{1}{3a}(x + C_1)^{-2}$, что приводит к трехпараметрическому точному решению уравнения (17):

$$u = \frac{1}{3a}(x + C_1)^{-2}y^3 + C_2x + C_3, \tag{47}$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

2°. *Второй случай*. Чтобы сбалансировать функцию $\psi''_{xx} \neq 0$ со вторым членом в равенстве (45), надо положить $k = 3/2$. В результате получим двучленное уравнение, которому можно удовлетворить, если положить

$$\varphi''_{xx} = 0, \quad \psi''_{xx} = \frac{9}{8}a\varphi^2.$$

Эти уравнения легко интегрируются и приводят к четырехпараметрическому точному решению уравнения (17):

$$u = (C_1x + C_2)y^{3/2} + \frac{3a}{32C_1^2}(C_1x + C_2)^4 + C_3x + C_4, \tag{48}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

Пример 15. Вернемся к уравнению гидродинамического пограничного слоя (21). Нетрудно проверить, что это уравнение допускает автомодельное решение [31]:

$$u = F(\xi), \quad \xi = y/x, \tag{49}$$

где функция $F = F(\xi)$ удовлетворяет ОДУ третьего порядка $-(F'_z)^2 = \nu F'''_{zzz}$.

Ищем более общее решение уравнения (21), добавив к (49) функцию $\varphi(x)$:

$$u = F(\xi) + \varphi(x), \quad \xi = y/x.$$

Несложные выкладки показывают, что $\varphi(x) = a\ln x$, где a — произвольная постоянная. В итоге получим неавтомодельное решение уравнения пограничного слоя (21) вида [13]:

$$u = F(\xi) + a\ln x, \quad \xi = y/x,$$

где функция $F = F(\xi)$ описывается ОДУ $-(F'_z)^2 - aF''_{zz} = \nu F'''_{zzz}$.

4. ПОСТРОЕНИЕ СОСТАВНЫХ РЕШЕНИЙ (НЕЛИНЕЙНАЯ СУПЕРПОЗИЦИЯ РЕШЕНИЙ)

В некоторых случаях два однотипных, но различных решения рассматриваемого нелинейного уравнения удается объединить и получить более общее составное решение. Продемонстрируем возможный ход рассуждений в таких случаях на примерах уравнения Гудерлея и нелинейного уравнения диффузии с объемной химической реакцией второго порядка.

Пример 16. Из выражений (47) и (48) следует, что уравнение Гудерлея (17) имеет два однотипных решения $u_1 = \varphi y^{3/2} + \psi$ и $u_2 = \varphi y^3 + \psi$, отличающихся друг от друга показателем степени y. Это обстоятельство наводит на мысль попытаться построить более общее решение уравнения (17), включающее сразу оба члена с различными показателями степени. Другими словами, ищем составное решение вида

$$u(x,y) = \varphi_1(x)y^3 + \varphi_2(x)y^{3/2} + \psi(x). \quad (50)$$

Подставим его в уравнение (17). После объединения членов при степенных функциях $y^{3n/2}$ $(n = 0, 1, 2)$, получим

$$\left(\varphi_1'' - 18a\varphi_1^2\right)y^3 + \left(\varphi_2'' - \frac{45}{4}a\varphi_1\varphi_2\right)y^{3/2} + \\ + \psi'' - \frac{9}{8}a\varphi_2^2 = 0.$$

Чтобы это равенство выполнялось для любых y, надо приравнять нулю коэффициенты при $y^{3n/2}$. В результате приходим к системе ОДУ:

$$\begin{aligned} &\varphi_1'' - 18a\varphi_1^2 = 0, \\ &\varphi_2'' - \frac{45}{4}a\varphi_1\varphi_2 = 0, \\ &\psi'' - \frac{9}{8}a\varphi_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (51)$$

Таким образом конструктивно доказано, что уравнение (17) допускает решение вида (50) (это решение было получено в работе [29]).

Можно показать, что система (51) допускает точное решение

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{3a}(x + C_1)^{-2}, \\ \varphi_2 &= C_2(x + C_1)^{5/2} + C_3(x + C_1)^{-3/2}, \\ \psi &= \frac{3a}{112}C_2^2(x + C_1)^7 + \frac{3}{8}aC_2C_3(x + C_1)^3 + \\ &+ \frac{9}{16}aC_3^2(x + C_1)^{-1} + C_4x + C_5. \end{aligned}$$

Пример 17. Рассмотрим теперь нелинейное уравнение диффузии с объемной химической реакцией второго порядка

$$u_t = a(uu_x) - bu^2. \quad (52)$$

Процедуру построения составного решения этого уравнения проведем в два этапа: сначала найдем два достаточно простых решений, а затем, используя эти решения, построим уже составное решение.

1°. *Решение экспоненциального вида по* x. Точные решения с обобщенным разделением переменных уравнения (52) ищем в виде

$$u(x,t) = \varphi(t)e^{\lambda x} + \psi(t), \quad (53)$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ и постоянная λ подлежат определению в ходе дальнейшего исследования. Подставив (53) в (52) и собрав подобные члены при экспонентах $e^{n\lambda x}$ $(n = 0, 1, 2)$, получим

$$(b - 2a\lambda^2)\varphi^2 e^{2\lambda x} + \\ + [\varphi_t' + (2b - a\lambda^2)\varphi\psi]e^{\lambda x} + \psi_t' + b\psi^2 = 0.$$

Поскольку это равенство должно выполняться тождественно для любых x, функциональные коэффициенты при $e^{n\lambda x}$ надо приравнять к нулю. В результате приходим к простой дифференциально-алгебраической системе

$$\begin{aligned} &b - 2a\lambda^2 = 0, \\ &\varphi_t' + (2b - a\lambda^2)\varphi\psi = 0, \\ &\psi_t' + b\psi^2 = 0, \end{aligned}$$

которая допускает два решения

$$\lambda = \pm\left(\frac{b}{2a}\right)^{1/2}, \quad \varphi = \frac{C_1}{|t + C_2|^{3/2}}, \quad \psi = \frac{1}{b(t + C_2)}, \quad (54)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2°. *Составное решение экспоненциального вида по* x. Из соотношений (53) и (54) следует, что уравнение (52) имеет два решения $u_{1,2} = \varphi e^{\pm\lambda x} + \psi$. По структуре они отличаются друг от друга только знаком показателя экспоненты λ.

Это обстоятельство наводит на мысль попытаться построить более общее решение уравнения (52), включающее сразу оба экспоненциальных члена. Другими словами, ищем составное решение вида

$$u(x,t) = \varphi_1(t)e^{-\lambda x} + \varphi_2(t)e^{\lambda x} + \psi(t), \quad \lambda = \left(\frac{b}{2a}\right)^{1/2}. \quad (55)$$

Подставив его в (52), после элементарных преобразований имеем

$$\left[(\varphi_1)'_t + \frac{3}{2}b\varphi_1\psi\right]e^{-\lambda x} + \left[(\varphi_2)'_t + \frac{3}{2}b\varphi_2\psi\right]e^{\lambda x} + \\ + \psi'_t + b(2\varphi_1\varphi_2 + \psi^2) = 0.$$

Приравнивая нулю функциональные коэффициенты при $e^{n\lambda x}$ $(n = 0, \pm 1)$, приходим к системе ОДУ первого порядка

$$(\varphi_1)'_t + \frac{3}{2}b\varphi_1\psi = 0, \quad (\varphi_2)'_t + \frac{3}{2}b\varphi_2\psi = 0, \\ \psi'_t + b(2\varphi_1\varphi_2 + \psi^2) = 0. \quad (56)$$

Таким образом доказано, что уравнение (52) допускает решение вида (55).

Исключив ψ из первых двух уравнений в (56), получим равенство $(\varphi_1)'_t/\varphi_1 = (\varphi_2)'_t/\varphi_2$. Отсюда следует, что $\varphi_1 = A\varphi(t)$, $\varphi_2 = B\varphi(t)$, где A и B — произвольные постоянные. Поэтому решение с обобщенным разделением переменных (55) приводится к виду

$$u(x,t) = \varphi(t)(Ae^{-\lambda x} + Be^{\lambda x}) + \psi(t), \quad \lambda = \left(\frac{b}{2a}\right)^{1/2}, \quad (57)$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ, состоящей из двух уравнений

$$\varphi'_t + \frac{3}{2}b\varphi\psi = 0, \quad \psi'_t + b(2AB\varphi^2 + \psi^2) = 0. \quad (58)$$

Эта автономная система путем исключения t сводится к одному ОДУ, которое является однородным и поэтому может быть проинтегрировано [30]. Отметим, что система уравнений (58) при $AB > 0$ допускает два простых решения

$$\varphi = \pm\frac{1}{3b\sqrt{AB}(t + C)}, \quad \psi = \frac{2}{3b(t + C)},$$

которые определяют решение (57) в виде произведения функций разных аргументов.

3°. *Решение тригонометрического вида по* x. При записи формул (55) и (57) неявно подразумевалось, что $ab > 0$. При $ab < 0$ имеем

$$\lambda = i\beta, \quad \beta = \left(-\frac{b}{2a}\right)^{1/2}, \quad i^2 = -1.$$

В этом случае в решении (57) вместо экспоненциальных функций появляются тригонометрические функции, т.е. его можно представить в виде

$$u(x,t) = \varphi(t)[A_1\cos(\beta x) + B_1\sin(\beta x)] + \psi(t), \\ \beta = \left(-\frac{b}{2a}\right)^{1/2}, \quad (59)$$

где A_1 и B_1 — произвольные постоянные. Подставив (59) в уравнение (52) и проведя выкладки аналогичные сделанным в п. 2°, получим следующую нелинейную систему ОДУ для определения функций $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$:

$$\varphi'_t + \frac{3}{2}b\varphi\psi = 0, \\ \psi'_t + b\left[\frac{1}{2}\left(A_1^2 + B_1^2\right)\varphi^2 + \psi^2\right] = 0. \quad (60)$$

Эта система допускает два простых решения

$$\varphi = \pm\frac{2}{3b\sqrt{A_1^2 + B_1^2}(t + C)}, \quad \psi = \frac{2}{3b(t + C)},$$

которые определяют решение (59) в виде произведения функций разных аргументов.

Замечание 4. Решение (59) и систему уравнений (60) можно получить непосредственно из решения (57) и системы уравнений (58), если в последних формально положить

$$e^{\lambda x} = e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i\sin(\beta x), \\ e^{-\lambda x} = e^{-i\beta x} = \cos(\beta x) - i\sin(\beta x), \\ A = \frac{1}{2}(A_1 + iB_1), \quad B = \frac{1}{2}(A_1 - iB), \\ A_1 = A + B, \quad B_1 = i(B - A).$$

5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕШЕНИЙ БОЛЕЕ ПРОСТЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ УРАВНЕНИЙ. ПРИНЦИП АНАЛОГИИ РЕШЕНИЙ

Нередко для построения точных решений сложных нелинейных дифференциальных уравнений удается использовать решения более простых уравнений. Проиллюстрируем ход рассуждений в подобных случаях на конкретных примерах.

Пример 18. Реакционно-диффузионное уравнение со степенной нелинейностью

$$u_t = au_{xx} + bu^k, \quad (61)$$

при $k \neq 1$ допускает автомодельное решение [33]:

$$u(x,t) = t^{\frac{1}{1-k}} U(z), \quad z = xt^{-1/2}, \tag{62}$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ:

$$\frac{1}{1-k} U - \frac{1}{2} z U'_z = a U''_{zz} + U^k.$$

Рассмотрим теперь существенно более сложное нелинейное функционально-дифференциальное уравнение типа пантографа

$$u_t = a u_{xx} + b w^k, \quad w = u(px, qt), \tag{63}$$

где p и q — свободные параметры ($p > 0$, $q > 0$). Значения параметров $0 < p < 1$ и $0 < q < 1$ соответствуют уравнениям с переменным запаздыванием по двум аргументам.

Функционально-дифференциальное уравнение (63) в частном случае $p = q = 1$ переходит в обычное уравнение с частными производными (61). При $k \neq 1$ решение уравнения типа пантографа (63), как и для уравнения (61), ищем в виде (62). В результате для функции $U = U(z)$ получим нелинейное ОДУ типа пантографа:

$$\begin{gathered} \frac{1}{1-k} U - \frac{1}{2} z U'_z = a U''_{zz} + b q^{\frac{k}{1-k}} W^k, \\ W = U(sz), \quad s = pq^{-1/2}. \end{gathered} \tag{64}$$

Замечание 5. Уравнение (63) с переменным запаздыванием при $0 < p$, $q < 1$ в частном случае $p = q^{1/2}$ имеет точное решение, которое выражается через решение ОДУ без запаздывания (64) при $s = 1$, при $p < q^{1/2}$ уравнение (63) сводится к ОДУ с запаздыванием при $s < 1$, а при $p > q^{1/2}$ — к ОДУ с опережением при $s > 1$. Более того, решение уравнения (63) с опережением при $p, q > 1$ при подходящих значениях параметров p и q также может выражаться через решение ОДУ с запаздыванием ($s < 1$), без запаздывания ($s = 1$) и с опережением ($s > 1$).

Замечание 6. Функционально-дифференциальные уравнения типа пантографа, которые содержат искомые функции с растяжением (при $0 < p < 1$) или сжатием (при $p > 1$) аргументов, используются для математического моделирования различных процессов в биологии [34—38], астрофизике [39], электродинамике [40], теории популяций [41], теории чисел [42], стохастических играх [43], теории графов [44], теории риска и очередей [45], теории нейронных сетей [46] и технике [47].

Пример 19. Рассмотрим теперь реакционно-диффузионное уравнение с экспоненциальной нелинейностью

$$u_t = a u_{xx} + b e^{\lambda u}, \tag{65}$$

которое при $\lambda \neq 0$ допускает инвариантное решение [33]:

$$u(x,t) = U(z) - \frac{1}{\lambda} \ln t, \quad z = xt^{-1/2}, \tag{66}$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ:

$$-\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} z U'_z = a U''_{zz} + b e^{\lambda U}.$$

Рассмотрим теперь существенно более сложное нелинейное функционально-дифференциальное уравнение типа пантографа

$$u_t = a u_{xx} + b e^{\lambda w}, \quad w = u(px, qt), \tag{67}$$

где p и q — свободные параметры ($p > 0$, $q > 0$).

Функционально-дифференциальное уравнение (67) при $p = q = 1$ переходит в обычное уравнение с частными производными (65). При $\lambda \neq 0$ решение уравнения типа пантографа (67), как и для уравнения (65), ищем в виде (66). В итоге для функции $U = U(z)$ получим нелинейное ОДУ типа пантографа:

$$\begin{gathered} -\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} z U'_z = a U''_{zz} + \frac{b}{q} e^{\lambda W}, \\ W = U(sz), \quad s = pq^{-1/2}. \end{gathered}$$

В частном случае при $p = q^{1/2}$ это уравнение является стандартным ОДУ (без растяжения или сжатия аргумента).

Пример 20. Нетрудно показать, что нелинейное уравнение типа Клейна—Гордона

$$u_{tt} = a u_{xx} + u(b \ln u + c), \tag{68}$$

допускает решение с разделением переменных

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t). \tag{69}$$

Более сложное, чем (68), нелинейное функционально-дифференциальное уравнение типа пантографа

$$u_{tt} = a u_{xx} + u(b \ln w + c), \quad w = u(px, qt), \tag{70}$$

также имеет решение с разделением переменных (69), где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются нелинейными ОДУ типа пантографа

$$a\varphi''_{xx} + \varphi(b\bar{\varphi} + c) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px);$$

$$\psi''_{tt} = b\psi \ln \bar{\psi}, \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Замечание 7. Более сложное, чем (70), функционально-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} = a u_{xx} + u(b \ln w + c), \quad w = u(\xi(x), \eta(t)), \tag{71}$$

где $\xi(x)$ и $\eta(t)$ – произвольные функции, также допускает решение с разделением переменных вида (69).

В частности, при $\xi(x) = x - x_0$ и $\eta(t) = t - t_0$, где x_0 и t_0 – некоторые положительные константы, уравнение (71) является функционально-дифференциальным уравнением с постоянным запаздыванием по двум аргументам.

Ниже сформулирован достаточно общий метод построения точных решений функционально-дифференциальных уравнений с частными производными типа пантографа в виде следующего принципа.

Принцип аналогии решений. *Структура точных решений функционально-дифференциальных уравнений вида*

$$\begin{gathered} F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\,\ldots, \\ w,w_x,w_t,w_{xx},w_{xt},w_{tt},\,\ldots) = 0, \quad w = u(px,qt) \end{gathered} \tag{72}$$

часто (но не всегда) определяется структурой решений более простых уравнений в частных производных:

$$\begin{gathered} F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\,\ldots, \\ u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\,\ldots) = 0. \end{gathered} \tag{73}$$

В уравнении (73) отсутствуют искомые функции с растяжением или сжатием аргументов; оно получается из (72) путем формальной замены w на u.

Рассмотренные в примерах 18–20 решения были получены путем использования принципа аналогий.

Замечание 8. В [48] описан ряд более сложных точных решений нелинейных уравнений в частных производных типа пантографа, которые были построены с помощью принципа аналогии решений (этот принцип в цитируемой статье сформулирован не был).

6. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В случае линейных уравнений с частными производными для построения более сложных решений, исходя из более простых решений, можно использовать следующее утверждение.

Утверждение 4. *Пусть линейное однородное уравнение с частными производными с двумя независимыми переменными x и t* имеет *однопараметрическое решение вида $u = \varphi(x,t,c)$, где c – параметр, который не входит в исходное уравнение. Тогда рассматриваемое уравнение имеет также два двухпараметрических решения*

$$u_1 = \operatorname{Re}\varphi(x,t,a+ib), \quad u_2 = \operatorname{Im}\varphi(x,t,a+ib),$$

где a и b – произвольные действительные постоянные, $\operatorname{Re}z$ *и* $\operatorname{Im}z$ *– действительная и мнимая части комплексного числа z.*

Доказательство. Справедливость предложения следует из линейности уравнения и из того, что решение $u = \varphi(x,t,c)$ также является решением при $c = a + ib$.

Из предложения 4 следует справедливость следующих двух следствий.

Следствие 1. *Пусть левая часть линейного однородного уравнения с частными производными не зависит явно от независимой переменной t и имеет решение $u = \varphi(x,t)$. Тогда это уравнение имеет также два однопараметрических семейства решений*

$$u_1 = \operatorname{Re}\varphi(x,t+ia), \quad u_2 = \operatorname{Im}\varphi(x,t+ia),$$

где a – произвольная действительная постоянная.

Следствие 2. *Пусть левая часть линейного однородного уравнения с частными производными не зависит явно от независимой переменной x и имеет решение $u = \varphi(x,t)$. Тогда это уравнение имеет также два однопараметрических семейства решений*

$$u_1 = \operatorname{Re}\varphi(x+ia,t), \quad u_2 = \operatorname{Im}\varphi(x+ia,t),$$

где a – произвольная действительная постоянная.

Пример 21. Рассмотрим линейное уравнение теплопроводности

$$u_t - u_{xx} = 0. \tag{74}$$

Нетрудно проверить, что это уравнение допускает точное решение экспоненциального вида

$$u = \exp(c^2t + cx),$$

где c – произвольный параметр.

Используя утверждение 4, получим два более сложных двухпараметрических семейства точных решений уравнения (74):

$$\begin{gathered} u_1 = \operatorname{Re}\exp(c^2t + cx)\big|_{c=a+ib} = \\ = \exp[(a^2 - b^2)t + ax]\cos[b(2at + x)], \\ u_2 = \operatorname{Im}\exp(c^2t + cx)\big|_{c=a+ib} = \\ = \exp[(a^2 - b^2)t + ax]\sin[b(2at + x)]. \end{gathered}$$

Пример 22. Рассмотрим линейное волновое уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} = 0. \tag{75}$$

Легко проверить, что уравнение (75) допускает преобразования сдвига по обоим независимым переменным и имеет частное решение

$$u = \frac{x}{x^2 - t^2}. \tag{76}$$

Делая в решении (76) сдвиг с мнимым параметром по переменной t и используя следствие 1, находим два более сложных однопараметрических семейства решений уравнения (75):

$$u_1 = \operatorname{Re}\frac{x}{x^2-(t+ia)^2} = \frac{x(x^2-t^2+a^2)}{(x^2-t^2+a^2)^2+4a^2t^2},$$
$$u_2 = \operatorname{Im}\frac{x}{x^2-(t+ia)^2} = \frac{2axt}{(x^2-t^2+a^2)^2+4a^2t^2}.$$

Делая в решении (76) сдвиг с мнимым параметром по переменной x и используя следствие 2, находим два других однопараметрических семейства решений:

$$u_3 = \operatorname{Re}\frac{x+ia}{(x+ia)^2-t^2} = \frac{x(x^2-t^2+a^2)}{(x^2-t^2-a^2)^2+4a^2x^2},$$
$$u_4 = \operatorname{Im}\frac{x+ia}{(x+ia)^2-t^2} = \frac{a(x^2+t^2+a^2)}{(x^2-t^2-a^2)^2+4a^2x^2}.$$

Пример 23. Рассмотрим линейное уравнение теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x, \tag{77}$$

которое описывает двумерные процессы с осевой симметрией, где x — радиальная координата. Нетрудно проверить, что уравнение (77) допускает преобразование сдвига по переменной t и имеет частное решение

$$u = \frac{1}{t}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right). \tag{78}$$

Делая в решении (78) сдвиг с мнимым параметром по переменной t и используя следствие 1, находим два более сложных однопараметрических семейства решений:

$$u_3 = \operatorname{Re}\frac{1}{t+ia}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t+ia)}\right) = \frac{1}{t^2+a^2}\exp\left(-\frac{x^2t}{4(t^2+a^2)}\right)\times \left(t\cos\frac{ax^2}{4(t^2+a^2)} + a\sin\frac{ax^2}{4(t^2+a^2)}\right),$$
$$u_4 = \operatorname{Im}\frac{1}{t+ia}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t+ia)}\right) = \frac{1}{t^2+a^2}\exp\left(-\frac{x^2t}{4(t^2+a^2)}\right)\times \left(a\cos\frac{ax^2}{4(t^2+a^2)} - t\sin\frac{ax^2}{4(t^2+a^2)}\right).$$

Пример 24. Рассмотрим линейное волновое уравнение с переменными коэффициентами

$$u_{tt} - (xu_x)_x = 0. \tag{79}$$

Это уравнение допускает преобразование сдвига по переменной t и имеет точное решение

$$u = \frac{Ct}{(4x-t^2)^{3/2}}, \tag{80}$$

где C — произвольная постоянная.

Делая в решении (80) сдвиг с мнимым параметром по переменной t и используя следствие 1, можно найти два более сложных однопараметрических семейства решений по формулам

$$u_1 = \operatorname{Re}\frac{C(t+ia)}{(4x-(t+ia)^2)^{3/2}},$$
$$u_2 = \operatorname{Im}\frac{C(t+ia)}{(4x-(t+ia)^2)^{3/2}}.$$

Окончательный вид этих решений здесь не приводится, ввиду громоздкости их записи. Решение u_1 было получено в [49] и было использовано для описания распространения локализованных возмущений в одномерной мелкой воде над наклонным дном. Отметим, что в работе [50] интегрированием по параметру a было получено другое точное решение уравнения (79).

7. ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПУТЕМ ПЕРЕХОДА ОТ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ К КОМПЛЕКСНЫМ ПАРАМЕТРАМ

Замечание 4 допускает обобщение, которое сформулируем в виде следующего утверждения.

Утверждение 5. *Пусть нелинейное уравнение имеет точное решение, содержащее тригонометрические функции вида*

$$u = F(x, t, A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x), \beta^2), \tag{81}$$

где A, B, β — свободные действительные параметры, которые не входят в рассматриваемое уравнение. Тогда это уравнение имеет также точное решение, содержащее гиперболические функции:

$$u = F(x, t, \bar{A}\cosh(\lambda x) + \bar{B}\sinh(\lambda x), -\lambda^2), \tag{82}$$

где $\bar{A}$, $\bar{B}$, λ — свободные действительные параметры. Верно и обратное: если уравнение имеет решение (82), *то оно имеет также точное решение* (81).

Решение (82) получается из (81) путем переобозначения параметров $\beta = i\lambda$, $A = \bar{A}$, $B = -i\bar{B}$, $i^2 = -1$.

Пример 25. Рассмотрим нелинейное уравнение четверного порядка

$$u_y(\Delta u)_x - u_x(\Delta u)_y = \nu\Delta\Delta u, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}, \tag{83}$$

к которому сводятся стационарные уравнения Навье–Стокса в плоском случае [32].

Уравнение (83) имеет точное решение

$$u(x,y) = [\bar{A}\sinh(\lambda x) + \bar{B}\cosh(\lambda x)]e^{-\gamma y} + \\ + \frac{\nu}{\gamma}(\gamma^2 + \lambda^2)x.$$

Поэтому это уравнение имеет также точное решение

$$u(x,y) = [A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)]e^{-\gamma y} + \frac{\nu}{\gamma}(\gamma^2 - \beta^2)x.$$

Приведенные решения и другие примеры такого рода можно найти в [13].

8. КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Описан ряд простых, но достаточно эффективных, методов построения точных решений нелинейных уравнений с частными производными, которые не требуют специальной подготовки и приводят к небольшому объему промежуточных вычислений. Эти методы базируются на следующих двух основных идеях: (i) простые точные решения могут служить основой для построения более сложных решений рассматриваемых уравнений; (ii) точные решения одних уравнений могут служить основой для построения решений более сложных уравнений. Эффективность предложенных методов иллюстрируется большим числом конкретных примеров построения точных решений нелинейных уравнений теории тепло- и массопереноса, теории волн, гидродинамики и газовой динамики. Помимо точных решений уравнений с частными производными описаны также некоторые точные решения нелинейных функционально-дифференциальных уравнений.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проекты государственного задания № АААА-А20-120011690135-5 и № 0723-2020-0036) и грантов РФФИ № 18-29-10025 и № 18-01-00890.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1978.
2. *Bluman G.W., Cole J.D.* Similarity Methods for Differential Equations. New York: Springer, 1974.
3. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1989.
4. *Ibragimov N.H. (Ed.)* CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 1, Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. Boca Raton: CRC Press, 1994.
5. *Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначев В.В., Родионов А.А.* Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994.
6. *Bluman G.W., Cole J.D.* The general similarity solution of the heat equation // Journal of Mathematics and Mechanics. 1969. V. 18. № 11. P. 1025–1042.
7. *Levi D., Winternitz P.* Nonclassical symmetry reduction: Example of the Boussinesq equation // J. Phys. A. 1989. V. 22. P. 2915–2924.
8. *Nucci M.C., Clarkson P.A.* The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions. An example of the Fitzhugh–Nagumo equation // Phys. Lett. A. 1992. V. 164. P. 49–56.
9. *Cherniha R., Serov M., Pliukhin O.* Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2018.
10. *Clarkson P.A., Kruskal M.D.* New similarity reductions of the Boussinesq equation // Journal of Mathematical Physics. 1989. V. 30. № 10. P. 2201–2213.
11. *Polyanin A.D.* Comparison of the effectiveness of different methods for constructing exact solutions to nonlinear PDEs. Generalizations and new solutions // Mathematics. 2019. V. 7. № 5. P. 386.
12. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
13. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.
14. *Полянин А.Д., Журов А.И.* Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. М.: Издательство “ИПМех РАН”, 2020.
15. *Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2007.
16. *Polyanin A.D.* Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients // Int. J. Non-Linear Mech. 2019. V. 111. P. 95–105.
17. *Polyanin A.D.* Functional separation of variables in nonlinear PDEs: General approach, new solutions of diffusion-type equations // Mathematics. 2020. V. 8. № 1. P. 90.
18. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Separation of variables in PDEs using nonlinear transformations: Applications to reaction-diffusion type equations // Applied Math. Letters. 2020. V. 100. 106055.
19. *Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.
20. *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 60 с.

21. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики, 2-е изд. Долгопрудный: Интеллект, 2010.
22. *Конт Р.М., Мюзетт М.* Метод Пенлеве и его приложения. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011.
23. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
24. *Boussinesq J.* Recherches théorique sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources // J. Math. Pures Appl. 1904. V. 10. № 1. P. 5–78.
25. *Гудерлей К.Г.* Теория околозвуковых течений. М.: Иностранная литература, 1960.
26. *Aksenov A.V., Sudarikova A.D., Chicherin I.S.* The surface tension effect on viscous liquid spreading along a superhydrophobic surface // Journal of Physics: Conference Series. 2017. V. 788. 01200.
27. *Аксенов А.В., Сударикова А.Д., Чичерин И.С.* Влияние поверхностного натяжения на растекание вязкой жидкости вдоль супергидрофобной поверхности. I. Плоскопараллельное движение // Вестник Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ". 2016. Т. 5. № 6. С. 489–496.
28. *Баренблатт Г.И., Зельдович Я.Б.* О решении типа диполя в задачах нестационарной фильтрации газа при политропическом режиме // Прикл. мат. мех. 1957. Т. 21. Вып. 5. С. 718–720.
29. *Титов С.С.* Метод конечномерных колец для решения нелинейных уравнений математической физики // Аэродинамика (ред. Т.П. Иванова), Саратовский ун-т. 1988. С. 104–110.
30. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. Boca Raton–London: CRC Press, 2018.
31. *Павловский Ю.Н.* Исследование некоторых инвариантных решений уравнений пограничного слоя // Выч. мат. и мат. физика. 1961. Т. 1. № 2. С. 280–294.
32. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.
33. *Дородницын В.А.* Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником // Ж. вычисл. мат. и мат. физики. 1982. Т. 22. № 6. С. 1393–1400.
34. *Hall A.J., Wake G.C.* A functional differential equation arising in the modelling of cell growth // J. Aust. Math. Soc. Ser. B. 1989. V. 30. P. 424–435.
35. *Hall A.J., Wake G.C., Gandar P.W.* Steady size distributions for cells in one dimensional plant tissues // J. Math. Biol. 1991. V. 30. P. 101–123.
36. *Derfel G., van Brunt B., Wake G.C.* A cell growth model revisited // Functional Differential Equations. 2012. V. 19. № 1–2. P. 71–81.
37. *Zaidi A.A., Van Brunt B., Wake G.C.* Solutions to an advanced functional partial differential equation of the pantograph type // Proc. R. Soc. A. 2015. V. 471. 20140947.
38. *Efendiev M., van Brunt B., Wake G.C., Zaidi A.A.* A functional partial differential equation arising in a cell growth model with dispersion // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. V. 41. № 4. P. 1541–1553.
39. *Ambartsumyan V.A.* On the fluctuation of the brightness of the Milky Way // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1944. V. 44. P. 223–226.
40. *Dehghan M., Shakeri F.* The use of the decomposition procedure of Adomian for solving a delay differential equation arising in electrodynamics // Phys. Scripta. 2008. V. 78. № 6. 065004.
41. *Ajello W.G., Freedman H.I., Wu J.* A model of stage structured population growth with density depended time delay // SIAM J. Appl. Math. 1992. V. 52. P. 855–869.
42. *Mahler K.* On a special functional equation // J. London Math. Soc. 1940. V. 1. № 2. P. 115–123.
43. *Ferguson T.S.* Lose a dollar or double your fortune // In: Proceedings of the 6th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, V. III (eds. L.M. Le Cam et al.). P. 657–666. Berkeley, Univ. California Press, 1972.
44. *Robinson R.W.* Counting labeled acyclic digraphs // In: New Directions in the Theory of Graphs (ed. *F. Harari*). P. 239–273. New York: Academic Press, 1973.
45. *Gaver D.P.* An absorption probablility problem // J. Math. Anal. Appl. 1964. V. 9. P. 384–393.
46. *Zhang F., Zhang Y.* State estimation of neural networks with both time-varying delays and norm-bounded parameter uncertainties via a delay decomposition approach // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2013. V. 18. № 12. P. 3517–3529.
47. *Ockendon J.R., Tayler A.B.* The dynamics of a current collection system for an electric locomotive // Proc. R. Soc. Lond. A. 1971. V. 332. P. 447–468.
48. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г.* Точные решения нелинейных уравнений в частных производных с переменным запаздыванием типа пантографа // Вестник НИЯУ МИФИ. 2020. Т. 9. № 4. С. 315–328.
49. *Доброхотов С.Ю., Тироцци Б.* Локализованные решения одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды со скоростью $c = \sqrt{x}$ // Успехи математических наук. 2010. Т. 65. Вып. 1. С. 185–186.
50. *Аксенов А.В., Доброхотов С.Ю., Дружков К.П.* Точные решения типа "ступеньки" одномерных уравнений мелкой воды над наклонным дном // Математические заметки. 2018. Т. 104. Вып. 6. С. 930–936.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 5, pp. 420–437

Using Simple Solutions of Nonlinear Equations of Mathematical Physics to Construct More Complex Solutions

A. D. Polyanin[a,#] and A. V. Aksenov[b,c,d,##]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia*

[b] *Moscow State University, Moscow, 119992 Russia*

[c] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

[d] *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 125047 Russia*

[#]*e-mail: polyanin@ipmnet.ru*

[##]*e-mail: aksenov@mech.math.msu.su*

Received October 25, 2020; revised October 25, 2020; accepted November 24, 2020

Abstract—A number of simple, but quite efficient, methods for constructing exact solutions of nonlinear partial differential equations that do not require special training and require a small amount of intermediate calculations are described. These methods are based on the following two main ideas: (i) simple exact solutions can serve as the basis for constructing more complex solutions of the equations under consideration; (ii) exact solutions of some equations can serve as the basis for constructing solutions of more complex equations. In particular, a method for constructing complex solutions based on simple solutions using translation and scaling transformations is proposed. It is shown that quite complex solutions can be obtain in some cases by adding terms to simpler solutions. Situations where a more complex composite solution can be constructed using similar simple solutions (nonlinear superposition of solutions) are considered. A method for constructing complex exact solutions of linear equations by introducing a complex parameter into more simple solutions is described. The efficiency of the proposed methods is illustrated by a large number of particular examples. Nonlinear heat conduction equations, reaction–diffusion equations, nonlinear wave equations, equations of motion in porous media, hydrodynamic boundary layer equations, equations of motion of a liquid film, gas dynamics equations, Navier–Stokes equations, etc. are considered. In addition to exact solutions of ordinary partial differential equations, some exact solutions of nonlinear functional-differential equations of the pantograph type with partial derivatives that, in addition to the required function, also contain functions with stretching or shrinking independent variables are described. The principle of analogy is formulated, which makes it possible to efficiently construct exact solutions of such functional-differential equations.

Keywords: exact solutions, nonlinear partial differential equations, reaction-diffusion equations, nonlinear wave equations, pantograph type functional-differential equations, solutions with generalized separation of variables

DOI: 10.1134/S2304487X20050119

REFERENCES

1. Ovsiannikov L.V., *Group Analysis of Differential Equations*, New York: Academic Press, 1982.
2. Bluman G.W., Cole J.D., *Similarity Methods for Differential Equations*, New York: Springer, 1974.
3. Olver P.J., *Applications of Lie Groups to Differential Equations, 2nd ed.*, Springer, 1993.
4. Ibragimov N.H., (Ed.), *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 1, Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws*, CRC Press, Boca Raton, 1994.
5. Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov A.A., *Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics*, Dordrecht: Kluwer, 1998.
6. Bluman G.W., Cole J.D., The general similarity solution of the heat equation, *Journal of Mathematics and Mechanics*, 1969, vol. 18, no. 11, pp. 1025–1042.
7. Levi D., Winternitz P., Nonclassical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation, *J. Phys. A*, 1989, vol. 22, pp. 2915–2924.
8. Nucci M.C., Clarkson P.A., The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions. An example of the Fitzhugh–Nagumo equation, *Phys. Lett. A*, 1992, vol. 164, pp. 49–56.
9. Cherniha R., Serov M., Pliukhin O., *Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications*, Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2018.

10. Clarkson P.A., Kruskal M.D., New similarity reductions of the Boussinesq equation, *Journal of Mathematical Physics*, 1989, vol. 30, no. 10, pp. 2201–2213.
11. Polyanin A.D., Comparison of the effectiveness of different methods for constructing exact solutions to nonlinear PDEs. Generalizations and new solutions, *Mathematics*, 2019, vol. 7, no. 5, p. 386.
12. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I., *Metody reshenija nelinejnyh uravnenij matematicheskoj fiziki i mehaniki* (Solution Methods for Nonlinear Equations of Mathematical Physics and Mechanics), Moscow, Fizmatlit, 2005 (in Russian).
13. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd ed., CRC Press: Boca Raton, 2012.
14. Polyanin A.D., Zhurov A.I., *Metody razdelenija peremennykh i tochnye reshenija nelinejnykh uravnenij matematicheskoj fiziki* (Methods of separating variables and exact solutions for nonlinear mathematical physics equations), M.: IPMech RAS, 2020 (in Russian).
15. Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R., *Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics*, Chapman and Hall/CRC, 2007.
16. Polyanin A.D., Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: new functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2019, vol. 11, pp. 95–105.
17. Polyanin A.D., Functional separation of variables in nonlinear PDEs: general approach, new solutions of diffusion-type equations, *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 1, p. 90.
18. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Separation of variables in PDEs using nonlinear transformations: applications to reaction-diffusion type equations, *Applied Math. Lett.*, 2020, vol. 100, 106055.
19. Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N., *Method of Differential Constraints and Its Applications in Gas Dynamics,* Novosibirsk: Nauka, 1984 (in Russian).
20. Kudryashov N.A., *Analytical Theory of Nonlinear Differential Equations*, Moscow–Izhevsk: Institut kompjuternyh issledovanii, 2004 (in Russian).
21. Kudryashov N.A., *Methods of Nonlinear Mathematical Physics*, Dolgoprudnyi: Izd. Dom Intellekt, 2010 (in Russian).
22. Conte R., Musette M., *The Painlevé Handbook*, Springer, 2008.
23. Schlichting H., Gersten Kl., *Boundary-Layer Theory*, Ninth Ed., Springer-Verlag, 2017.
24. Boussinesq J., Recherches théorique sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources, *J. Math. Pures Appl.*, 1904, vol. 10, no. 1, pp. 5–78.
25. Guderley K.G., *The Theory of Transonic Flow*, Oxford: Pergamon, 1962.
26. Aksenov A.V., Sudarikova A.D., Chicherin I.S., The surface tension effect on viscous liquid spreading along a superhydrophobic surface, *Journal of Physics: Conference Series*, 2017, vol. 788, 01200, pp. 1–6.
27. Aksenov A.V., Sudarikova A.D., Chicherin I.S., Effect of the surface tension on the spreading of a viscous Liquid along a superhydrophobic surface. I. Plane-parallel motion, *Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI"*, 2016, vol. 5, no. 6, pp. 489–496 (in Russian).
28. Barenblatt G.I., Zel'dovich Ya.B., On dipole-type solutions in problems of nonstationary filtration of gas under polytropic regime, *Prikl. Math. & Mech.*, 1957, vol. 21, pp. 718–720 (in Russian).
29. Titov S.S., A method of finite-dimensional rings for solving nonlinear equations of mathematical physics, In: *Aerodynamics,* Ed. T.P. Ivanova, Saratov: Saratov Univ., 1988, pp. 104–110 (in Russian).
30. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems*, CRC Press, Boca Raton–London, 2018.
31. Pavlovskii Yu.N., Investigation of some invariant solutions to the boundary layer equations, *Zhurn. Vychisl. Mat. i Mat. Fiziki*, 1961, vol. 1, no. 2, pp. 280–294 (in Russian).
32. Loitsyanskiy L.G., *Mechanics of Liquids and Gases*, New York: Begell House, 1995.
33. Dorodnitsyn V.A., On invariant solutions of the equation of non-linear heat conduction with a source, *USSR Comput. Math. & Math. Phys.* 1982, vol. 22, no. 6, pp. 115–122.
34. Hall A.J., Wake G.C., A functional differential equation arising in the modelling of cell growth, *J. Aust. Math. Soc. Ser. B*, 1989, vol. 30, pp. 424–435.
35. Hall A.J., Wake G.C., Gandar P.W., Steady size distributions for cells in one dimensional plant tissues, *J. Math. Biol.*, 1991, vol. 30, pp. 101–123.
36. Derfel G., van Brunt B., Wake G.C., A cell growth model revisited, *Functional Differential Equations*, 2012, vol. 19, nos. 1–2, pp. 71–81.
37. Zaidi A.A., van Brunt B., Wake G.C., Solutions to an advanced functional partial differential equation of the pantograph type, *Proc. R. Soc. A*, 2015, vol. 471, 20140947.
38. Efendiev M., van Brunt B., Wake G.C., Zaidi A.A., A functional partial differential equation arising in a cell growth model with dispersion, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2018, vol. 41, no. 4, pp. 1541–1553.
39. Ambartsumyan V.A., On the fluctuation of the brightness of the Milky Way, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1944, vol. 44, pp. 223–226.
40. Dehghan M., Shakeri F., The use of the decomposition procedure of Adomian for solving a delay differential equation arising in electrodynamics, *Phys. Scripta*, 2008, vol. 78, no. 6, 065004.
41. Ajello W.G., Freedman H.I., Wu J., A model of stage structured population growth with density depended time delay, *SIAM J. Appl. Math.*, 1992, vol. 52, pp. 855–869.
42. Mahler K., On a special functional equation. *J. London Math. Soc.*, 1940, vol. 1, no. 2, pp. 115–123.
43. Ferguson T.S., Lose a dollar or double your fortune, In: *Proceedings of the 6th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, V. III (eds. L.M. Le*

Cam et al.), pp. 657–666. Berkeley, Univ. California Press, 1972.

44. Robinson R.W., Counting labeled acyclic digraphs. In: *New Directions in the Theory of Graphs (ed. F. Harari)*, pp. 239–273. New York: Academic Press, 1973.
45. Gaver D.P., An absorption probablility problem, *J. Math. Anal. Appl.*, 1964, vol. 9, pp. 384–393.
46. Zhang F., Zhang Y., State estimation of neural networks with both time-varying delays and norm-bounded parameter uncertainties via a delay decomposition approach, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2013, vol. 18, no. 12, pp. 3517–3529.
47. Ockendon J.R., Tayler A.B., The dynamics of a current collection system for an electric locomotive, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1971, vol. 332, pp. 447–468.
48. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Exact solutions of nonlinear partial differential equations with variable delay of the pantograph type, *Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI"*, 2020, vol. 9, no. 4, pp. 315–328 (in Russian).
49. Dobrokhotov S.Yu., Tirozzi B., Localized solutions of one-dimensional non-linear shallow-water equations with velocity $c = \sqrt{x}$, *Russian Mathematical Surveys*, 2010, vol. 65, no. 1, pp. 177–179.
50. Aksenov A.V., Dobrokhotov S.Yu., Druzhkov K.P., Exact step-like solutions of one-dimensional shallow-water equations over a sloping bottom, *Mathematical Notes*, 2018, vol. 104, no. 6, pp. 915–921.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2020, том 9, № 5, с. 438–441

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.91

ОПТИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ТРЕТЬЕЙ, ПЯТОЙ И СЕДЬМОЙ СТЕПЕНИ

© 2020 г. А. А. Кутуков[1,*], Н. А. Кудряшов[1,**]

[1] *Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия*

**e-mail: alexkutuk@gmail.com*

***e-mail: nakudr@gmail.com*

Поступила в редакцию 29.09.2020 г.
После доработки 29.09.2020 г.
Принята к публикации 10.11.2020 г.

Рассматривается математическая модель для описания распространения импульсов в нелинейном оптическом волокне с решетками Брэгга. Изучаются аналитические свойства модели распространения волн в прямом и обратном направлении в волоконных решетках Брэгга, описываемые связанными обобщенными нелинейными уравнениями Шрёдингера с нелинейностями третьей, пятой и седьмой степени. С использованием переменных бегущей волны осуществляется переход к системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных для действительной и мнимой частей исходной системы уравнений. Представлено условие совместности для двух линейных дифференциальных уравнений изучаемой системы. Для двух нелинейных дифференциальных уравнений изучаемой системы получены первые интегралы, а также найдены ограничения на параметры, при которых система не содержит дробных степеней, и условия совместности, при которых система имеет общее решение. При найденных ограничениях на параметры модели представлено решение изучаемой системы четырех обыкновенных дифференциальных уравнений. Приводится решение в виде оптического солитона для связанных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных типа Шрёдингера с нелинейностями третьей, пятой и седьмой степени. Найденное решение иллюстрируется при различных значениях параметров.

Ключевые слова: оптические солитоны, точные решения дифференциальных уравнений, нелинейное уравнение Шрёдингера, волоконные решетки Брэгга

DOI: 10.1134/S2304487X20050090

1. ВВЕДЕНИЕ

Брэгговские или щелевые солитоны возникают в результате резонансного отражения электромагнитных волн в нелинейных оптических средах со слабо меняющимся периодическим показателем преломления (решетки Брэгга) [1]. Впервые такие оптические солитоны удалось экспериментально получить и описать в 1996 году в работе [2]. В настоящее время волоконные решетки Брэгга широко применяются в технике оптической связи и телекоммуникационных системах [3]. Классическая модель для описания распространения импульсов в волоконных брэгговских решетках представляет собой неинтегрируемую систему двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [1, 4]. В последнее время появляется все больше исследований, в которых для описания решеток Брэгга используют систему связанных нелинейных уравнений типа Шрёдингера с полиномиальными нелинейностями [5–9]. В данной работе рассматривается система уравнений такого типа с нелинейностью третьей, пятой и седьмой степени [5]

$$\begin{gathered} iq_t + a_1 r_{xx} + (b_1|q|^2 + c_1|r|^2)q + \\ + (\xi_1|q|^4 + \eta_1|q|^2|r|^2 + \zeta_1|r|^4)q + \\ + (l_1|q|^6 + m_1|q|^4|r|^2 + n_1|q|^2|r|^4 + p_1|r|^6)q + \\ + i\alpha_1 q_x + \beta_1 r = 0, \end{gathered} \qquad (1)$$

$$\begin{gathered} ir_t + a_2 q_{xx} + (b_2|r|^2 + c_2|q|^2)r + \\ + (\xi_2|r|^4 + \eta_2|r|^2|q|^2 + \zeta_2|q|^4)r + \\ + (l_2|r|^6 + m_2|r|^4|q|^2 + n_2|r|^2|q|^4 + p_2|q|^6)r + \\ + i\alpha_2 r_x + \beta_2 q = 0, \end{gathered} \qquad (2)$$

где $q(x,t)$ и $r(x,t)$ амплитуды волн, распространяющихся в прямом и обратном направлении, a_j, b_j, c_j, ξ_j, η_j, ζ_j, l_j, m_j, n_j, p_j, α_j, β_j $(j = 1, 2)$ – параметры оптической системы.

2. НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ (1), (2) В ПЕРЕМЕННЫХ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Точное решение системы (1), (2) ищется в виде

$$q(x,t) = y_1(z)e^{i(\kappa x-\omega t+\theta)},\quad r(x,t) = y_2(z)e^{i(\kappa x-\omega t+\theta)},\quad z = x - C_0 t, \tag{3}$$

где κ, ω, θ и C_0 – произвольные постоянные. После подстановки (3) в систему (1) и (2) получается система из четырех уравнений для действительной и мнимой частей системы (1), (2) в виде

$$\begin{aligned} &a_1 y_2'' + l_1 y_1^7 + m_1 y_1^5 y_2^2 + n_1 y_1^3 y_2^4 + p_1 y_1 y_2^6 + \\ &+ \eta_1 y_1^3 y_2^2 + \xi_1 y_1^5 + \zeta_1 y_1 y_2^4 - \kappa^2 a_1 y_2 + b_1 y_1^3 + \\ &+ c_1 y_1 y_2^2 - \kappa\alpha_1 y_1 + \omega y_1 + \beta_1 y_2 = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &a_2 y_1'' + l_2 y_2^7 + m_2 y_1^2 y_2^5 + n_2 y_1^4 y_2^3 + p_2 y_1^6 y_2 + \\ &\eta_2 y_1^2 y_2^3 + \xi_2 y_2^5 + \zeta_2 y_1^4 y_2 - \kappa^2 a_2 y_1 + b_2 y_2^3 + \\ &+ c_2 y_1^2 y_2 - \kappa\alpha_2 y_2 + \omega y_2 + \beta_2 y_1 = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

$$2\kappa a_1 y_2' - (C_0 - \alpha_1) y_1' = 0, \tag{6}$$

$$2\kappa a_2 y_1' - (C_0 - \alpha_2) y_2' = 0. \tag{7}$$

Если $4a_1a_2\kappa^2 \neq (\alpha_2 - C_0)(\alpha_1 - C_0)$, то система (6), (7) имеет решение $y_1 = \text{const}$, $y_2 = \text{const}$ и этот случай не представляет интереса. Если

$$\frac{2\kappa a_1}{C_0 - \alpha_2} = \frac{C_0 - \alpha_1}{2\kappa a_2}, \tag{8}$$

то

$$y_2 = \sigma y_1 + C, \tag{9}$$

где C постоянная интегрирования и

$$\sigma = \frac{2\kappa a_2}{C_0 - \alpha_2}. \tag{10}$$

Из соотношения (8) получаем

$$C_0 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 \pm \sqrt{16a_1a_2\kappa^2 + \alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2}). \tag{11}$$

Положим постоянную интегрирования $C = 0$. После подстановки выражения (9) в переопределенную систему (4), (5), умножения этих уравнений на y_1' и интегрирования по z система (4), (5) приобретает вид

$$\begin{aligned} &4a_1\sigma y_1'^2 + (\sigma^6 p_1 + \sigma^4 n_1 + \sigma^2 m_1 + l_1) y_1^8 + \\ &+ \left(\frac{4}{3}\sigma^4\zeta_1 + \frac{4}{3}\sigma^2\eta_1 + \frac{4}{3}\xi_1\right) y_1^6 + (2\sigma^2 c_1 + 2b_1) y_1^4 + \\ &+ (4\sigma\beta_1 + 4\omega - 4\kappa^2\sigma a_1 - 4\kappa\alpha_1) y_1^2 + C_1 = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &4a_2 y_1'^2 + (\sigma^7 l_2 + \sigma^5 m_2 + \sigma_3^2 n_2 + \sigma p_2) y_1^8 + \\ &+ \left(\frac{4}{3}\sigma^5\xi_2 + \frac{4}{3}\sigma^3\eta_2 + \frac{4}{3}\sigma\zeta_2\right) y_1^6 + \\ &+ (2\sigma^3 b_2 + 2\sigma c_2) y_1^4 + \\ &+ (4\omega\sigma + 4\beta_2 + 4\kappa^2 a_2 - 4\kappa\sigma\alpha_2) y_1^2 + C_2 = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Балансировочное число системы (12), (13) $p = \frac{1}{3}$. Полагая $y_1(z) = y(z)^{\frac{1}{3}}$, уравнения (12), (13) приобретают вид

$$A_1 y^{10/3} + B_1 y^{8/3} + C_1 y^{4/3} + E_1 y'^2 + F_1 y^4 + G_1 y^2 = 0, \tag{14}$$

$$A_2 y^{10/3} + B_2 y^{8/3} + C_2 y^{4/3} + E_2 y'^2 + F_2 y^4 + G_2 y^2 = 0, \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned} &A_1 = \frac{4}{3}\sigma^4\zeta_1 + \frac{4}{3}\sigma^2\eta_1 + \frac{4}{3}\xi_1, \\ &A_2 = \frac{4}{3}\sigma^5\xi_2 + \frac{4}{3}\sigma^3\eta_2 + \frac{4}{3}\sigma\zeta_2, \\ &B_1 = 2\sigma^2 c_1 + 2b_1, B_2 = 2\sigma(\sigma^2 b_2 + c_2), \\ &E_1 = \frac{4a_1\sigma}{9}, E_2 = \frac{4a_2}{9}, \\ &F_1 = \sigma^6 p_1 + \sigma^4 n_1 + \sigma^2 m_1 + l_1, \\ &F_2 = \sigma(\sigma^6 l_2 + \sigma^4 m_2 + \sigma^2 n_2 + p_2), \\ &G_1 = (-4\kappa^2 a_1 + 4\beta_1)\sigma - 4\kappa\alpha_1 + 4\omega, \\ &G_2 = (-4\kappa\alpha_2 + 4\omega)\sigma - 4\kappa^2 a_2 + 4\beta_2. \end{aligned} \tag{16}$$

Систему (14), (15) можно проинтегрировать при следующих ограничениях на параметры

$$A_1 = 0,\quad A_2 = 0,\quad B_1 = 0,\quad B_2 = 0,\quad C_1 = 0,\quad C_2 = 0 \tag{17}$$

и условиях совместности

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{G_1}{G_2}. \tag{18}$$

С учетом (16) условия на параметры (17), (18) можно выразить следующим образом

$$\begin{aligned} &\xi_1 = -\sigma^4\zeta_1 - \sigma^2\eta_1,\quad \xi_2 = -\frac{\sigma^2\eta_2 + \zeta_2}{\sigma^4},\quad b_1 = -\sigma^2 c_1, b_2 = -\frac{c_2}{\sigma^2}, \\ &\beta_1 = -\frac{\kappa\sigma^2 a_1\alpha_2 - \omega\sigma^2 a_1 - \kappa a_2\alpha_1 - \sigma a_1\beta_2 + \omega a_2}{a_2\sigma}, \\ &l_1 = \frac{\sigma^2(\sigma^6 a_1 l_2 + \sigma^4 a_1 m_2 - \sigma^4 a_2 p_1 + \sigma^2 a_1 n_2 - \sigma^2 a_2 n_1 + a_1 p_2 - a_2 m_1)}{a_2}. \end{aligned} \tag{19}$$

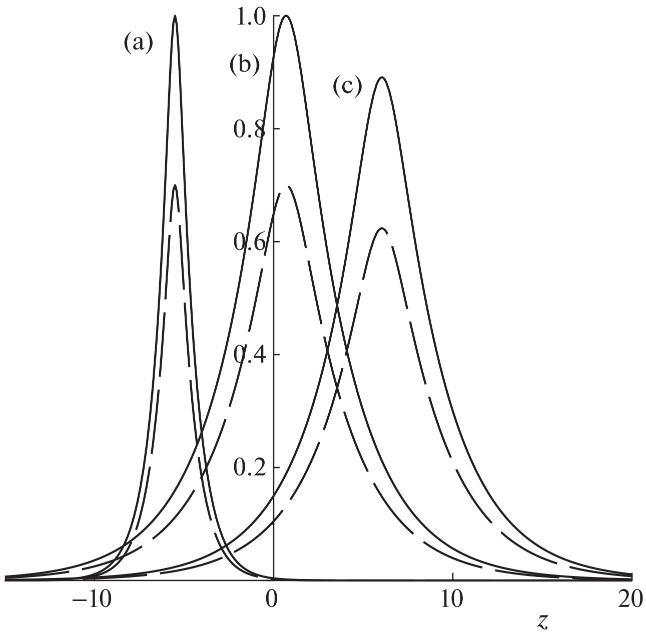


Рис. 1. Решение $y_1(z)$ (сплошная линия) и $y_2(z)$ (пунктирная линия) системы (4), (5), (6), (7) при значениях параметров: (a) $E_1 = 0.1$, $G_1 = -1$, $F_1 = 1$, $z_0 = 5$, $\sigma = 0.7$; (b) $E_1 = 1$, $G_1 = -1$, $F_1 = 1$, $z_0 = 0$, $\sigma = 0.7$; (c) $E_1 = 1$, $G_1 = -1$, $F_1 = 2$, $z_0 = -5$, $\sigma = 0.7$.

Система (14), (15) при условиях (17), (18) имеет общее решение в виде

$$y(z) = \frac{-4E_1G_1\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{-E_1G_1}(z-z_0)}{E_1}}}{-4E_1^2G_1F_1\mathrm{e}^{\frac{-2\sqrt{-E_1G_1}z_0}{E_1}} + \mathrm{e}^{\frac{2\sqrt{-E_1G_1}z}{E_1}}}. \tag{20}$$

Таким образом, найдено точное решение системы (1), (2) в виде

$$\begin{gathered} q(x,t) = \\ = \left(\frac{-4E_1G_1\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{-E_1G_1}(x-C_0t-z_0)}{E_1}}}{-4E_1^2G_1F_1\mathrm{e}^{\frac{-2\sqrt{-E_1G_1}z_0}{E_1}} + \mathrm{e}^{\frac{2\sqrt{-E_1G_1}(x-C_0t)}{E_1}}}\right)^{\frac{1}{3}} e^{i(\kappa x-\omega t+\theta)}, \\ r(x,t) = \\ = \sigma\left(\frac{-4E_1G_1\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{-E_1G_1}(x-C_0t-z_0)}{E_1}}}{-4E_1^2G_1F_1\mathrm{e}^{\frac{-2\sqrt{-E_1G_1}z_0}{E_1}} + \mathrm{e}^{\frac{2\sqrt{-E_1G_1}(x-C_0t)}{E_1}}}\right)^{\frac{1}{3}} e^{i(\kappa x-\omega t+\theta)} \end{gathered} \tag{21}$$

с условиями на параметры (8), (10), (17), (18).

На рис. 1 изображены графики решения $y_1(z)$ и $y_2(z)$ системы уравнений (4), (5), (6), (7) при различных значениях параметров модели с учетом ограничений (8), (10), (17), (18).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе изучалась модель волоконных решеток Брэгга, описываемая связанными обобщенными нелинейными уравнениями Шрёдингера (1), (2). В переменных бегущей волны найдено решение рассматриваемой системы в виде оптических солитонов Брэгга (21) с учетом ограничений на парметры модели (8), (10), (19). Проиллюстрирован модуль решения системы (1), (2) в переменных бегущей волны.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00209).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Malomed B.A.* Soliton Management in Periodic Systems. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2006.
2. *Eggleton B.J., Slusher R.E., de Sterke C.M., Krug P.A., Sipe J.E.* Bragg Grating Solitons // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 1627.
3. *Kivshar Y.S., Agrawal G.P.* Optical Solitons. Elsevier, 2003.
4. *Atai J., Malomed B.A.* Families of Bragg-grating solitons in a cubic-quintic medium // Phys. Lett. A. 2001. V. 284. P. 247–252.
5. *Biswas A., Sonmezoglu A., Ekici M., Alshomrani A.S., Belic M.R.* Optical solitons in fiber Bragg gratings with dispersive reflectivity for cubic quintic septic nonlinearity by extended trial function // Optik. 2019. V. 194. P. 163020.
6. *Kudryasahov N.A.* Periodic and solitary waves in optical fiber Bragg gratings with dispersive reflectivity // Chin. J. Phys. 2020. V. 66. P. 401–405.
7. *Kudryashov N.A., Antonova E.V.* Solitary waves of equation for propagation pulse with power nonlinearities // Optik. 2020. V. 217. P. 164881.
8. *Biswas A., Sonmezoglu A., Ekici M., Alshomrani A.S., Belic M.R.* Optical solitons in fiber Bragg gratings with dispersive reflectivity for parabolic-nonlocal combo nonlinearity by extended trial function // Optik, 2019. V. 195. P. 163146.
9. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Biswas A., Ekici M., Triki H., Alzahrani A.K., Belic M.R.* Optical solitons with fiber Bragg gratings and dispersive reflectivity having parabolic–nonlocal combo nonlinearity via three prolific integration architectures // Optik, 2020. V. 208. P. 164065.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 5, pp. 438–441

Solitary Wave Solutions of the Coupled Nonlinear Schrödinger Equation with Cubic–Quintic–Septic Nonlinearity

A. A. Kutukov[a,#] **and N. A. Kudryashov**[a,##]

[a] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

[#]*e-mail: alexkutuk@gmail.com*

[##]*e-mail: nakudr@gmail.com*

Received September 29, 2020; revised September 29, 2020; accepted November 10, 2020

Abstract—The mathematical model for describing the propagation of pulses in a nonlinear optical fiber with Bragg gratings is considered. The analytical properties of the model of wave propagation in the forward and backward directions in fiber Bragg gratings, described by coupled generalized nonlinear Schrödinger equations with qubic–quintic–septic nonlinearities, are studied. Using the traveling wave variables, the transition to the system of four ordinary differential equations obtained for the real and imaginary parts of the original system of equations is carried out. The compatibility condition for two linear differential equations of the system under study is presented. For two nonlinear differential equations of the system under study, first integrals are obtained, as well as constraints on the parameters for which the system does not contain fractional powers, and compatibility conditions under which the system has a general solution. Under the found constraints on the parameters of the model, the solution of the studied system of four ordinary differential equations is presented. The solution is given in the form of an optical soliton for coupled nonlinear partial differential equations of the Schrödinger type with nonlinearities of the third, fifth, and seventh degrees. The found solution is illustrated for different values of the parameters.

Keywords: optical solitons, exact solutions of differential equations, nonlinear Schrödinger equation, fiber Bragg gratings

DOI: 10.1134/S2304487X20050090

REFERENCES

1. Malomed B.A., Soliton Management in Periodic Systems, *Boston: Kluwer Academic Publishers*, 2006.
2. Eggleton B.J., Slusher R.E., de Sterke C.M., Krug P.A., Sipe J.E., Bragg Grating Solitons, *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 76. p. 1627.
3. Kivshar Y.S., Agrawal G.P., Optical Solitons, *Elsevier*, 2003.
4. Atai J., Malomed B.A., Families of Bragg-grating solitons in a cubic-quintic medium, *Phys. Lett. A.*, 2001, vol. 284, pp. 247–252.
5. Biswas A., Sonmezoglu A., Ekici M., Alshomrani A.S., Belic M.R., Optical solitons in fiber Bragg gratings with dispersive reflectivity for cubic–quintic–septic nonlinearity by extended trial function, *Optik*, 2019, vol. 194, art. no. 163020.
6. Kudryasahov N.A., Periodic and solitary waves in optical fiber Bragg gratings with dispersive reflectivity, *Chin. J. Phys.*, 2020, vol. 66, pp. 401–405.
7. Kudryashov N.A., Antonova E.V., Solitary waves of equation for propagation pulse with power nonlinearities, *Optik*, 2020, vol. 217, art. no. 164881.
8. Biswas A., Sonmezoglu A., Ekici M., Alshomrani A.S., Belic M.R., Optical solitons in fiber Bragg gratings with dispersive reflectivity for parabolic-nonlocal combo nonlinearity by extended trial function, *Optik*, 2019, vol. 195, art. no. 163146.
9. Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Biswas A., Ekici M., Triki H., Alzahrani A.K., Belic M.R., Optical solitons with fiber Bragg gratings and dispersive reflectivity having parabolic–nonlocal combo nonlinearity via three prolific integration architectures, *Optik*, 2020. vol. 208. art. no. 164065.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2020, том 9, № 5, с. 442–448

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ ОБОБЩЕННЫМ УРАВНЕНИЕМ ДУФФИНГА С УЧЕТОМ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ

© 2020 г. С. Ф. Лаврова[1,*], Н. А. Кудряшов[1,**]

[1] Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

*e-mail: infuriatedot@gmail.com

**e-mail: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию 15.09.2020 г.
После доработки 15.09.2020 г.
Принята к публикации 12.10.2020 г.

Рассмотрено обобщенное нелинейное уравнение Дуффинга, которое получено из уравнения для описания распространения импульсов в оптических волокнах с учетом переменных бегущей волны. Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка записано в форме динамической системы. Для обобщенного уравнения Дуффинга без учета внешней силы найдены стационарные точки и исследована их устойчивость. Результаты исследования представлены в таблице, где для каждой из трех точек покоя указан тип устойчивости в зависимости от значения параметра уравнения. Представлен Гамильтониан рассматриваемой системы уравнений. С помощью Гамильтониана построены фазовые портреты обобщенного уравнения Дуффинга без учета возмущения. Дан численный анализ рассматриваемой динамической системы в присутствии периодической внешней силы. Для различных значений амплитуд вынуждающей силы построены сечения Пуанкаре динамической системы при двух различных значениях параметра. Показано, что при увеличении амплитуды возмущающей силы происходит разрушение периодических траекторий решения системы и увеличение площади области хаотической динамики уравнений. По алгоритму Беннетина рассчитан старший Ляпуновский показатель динамической системы как функция амплитуды вынуждающей силы. Установлено, что при увеличении амплитуды, старший Ляпуновский показатель возрастает, и как следствие увеличивается экспоненциальная расходимость траекторий, что согласуется с полученными ранее отображениями Пуанкаре.

Ключевые слова: осциллятор Дуффинга, динамическая система, сечение Пуанкаре, показатель Ляпунова

DOI: 10.1134/S2304487X20050107

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения Дуффинга было предложено в 1918 году [1]

$$y_{zz} + \alpha y + \gamma y^3 = 0. \qquad (1.1)$$

Оно используется для описания ряда нелинейных физических процессов, таких как движение осциллятора с нелинейной возвращающей силой [2], динамика барабанной перепонки человеческого уха [3], вращательное движение корабля [4] и т.д.

Одним из замечательных свойств этого уравнения является наличие хаотической динамики при возмущении его периодической силой. Исследованию динамических режимов уравнения (1.1) посвящено достаточно большое количество работ. В [5] исследуется структура устойчивых и неустойчивых многообразий (1.1) и выводится для него аппроксимация отображения Пуанкаре, в [6] изучены бифуркации, происходящие в уравнении [6], работа [7] посвящена аналитическому расчету Ляпуновского показателя уравнения.

Данная работа посвящена исследованию нелинейных динамических режимов одного из обобщений уравнения Дуффинга [2]

$$y_{zz} + \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 = 0, \qquad (1.2)$$

которое может быть получено из следующего уравнения для распрострения импульсов в оптическом волокне, предложенного в работе [9]

$$iq_t + \alpha q_{xx} + (a|q|^n + b|q|^{2n})q = 0, \quad n \ge 1, \qquad (1.3)$$

при $n = 1$.

Введем в уравнении (1.3) безразмерные переменные

$$q = Qq', \quad t = Tt', \quad x = Xx'. \tag{1.4}$$

Используя в уравнении (1.3) переменные (1.4) и опуская штрихи при новых переменных, получим

$$iq_t + \frac{\alpha}{X^2T}q_{xx} + \left(\frac{a}{T}Q^n|q|^n + \frac{b}{T}Q^{2n}|q|^n\right)q = 0. \tag{1.5}$$

Приравнивая коэффициенты при втором, третьем и четвертом членах (1.5) к единице, получим

$$X = \frac{\sqrt{\alpha b}}{a}, \quad T = \frac{a^2}{b}, \quad Q = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}. \tag{1.6}$$

Таким образом, после перехода к переменным (1.4) с учетом (1.6) уравнение (1.5) примет вид

$$iq_t + q_{xx} + (|q|^n + |q|^{2n})q = 0. \tag{1.7}$$

Будем искать решения уравнения (1.7) в виде

$$q(x,t) = y(z)e^{i(kx-\omega t)}, \quad z = x - C_0t. \tag{1.8}$$

Подставляя (1.8) в уравнение (1.7) и приравнивая к нулю действительные и мнимые части, получим следующую систему уравнений

$$\begin{gathered} y_{zz} + (\omega - k^2)y + y^{n+1} + y^{2n+1} = 0, \\ (2k - C_0)y_z = 0. \end{gathered} \tag{1.9}$$

Положим $k = \dfrac{C_0}{2}$, тогда второе уравнение (1.9) будет выполняться тождественно, а первое примет вид

$$y_{zz} + \left(\omega - \frac{C_0^2}{4}\right)y + y^{n+1} + y^{2n+1} = 0. \tag{1.10}$$

При $n = 1$ уравнение (1.10) является обобщенным уравнением Дуффинга (1.2) без затухания, в котором $\alpha = \omega - \dfrac{C_0^2}{4}$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$. Обозначим $\omega - \dfrac{C_0^2}{4} = \alpha$ и введем в уравнение периодическую внешнюю силу

$$y_{zz} + \alpha y + y^{n+1} + y^{2n+1} = A\cos(\Omega z), \tag{1.11}$$

где A амплитуда возмущающей силы, а Ω ее частота.

Перепишем (1.11) в форме динамической системы

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -\alpha y_1 - y_1^{n+1} - y_1^{2n+1} + A\cos\theta, \\ \dot{\theta} = \Omega. \end{cases} \tag{1.12}$$

Работа построена следующим образом. Во втором разделе дается анализ стационарных точек системы (1.12) при отсутствии возмущения и построены ее фазовые портреты. В третьем разделе представлен численный анализ динамических режимов системы (1.12). Построены сечения Пуанкаре динамической системы и рассчитан ее старший Ляпуновский показатель при различных значениях амплитуды возмущающей силы.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Рассмотрим устойчивость точек покоя системы уравнений (1.12) без учета внешней силы

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -\alpha y_1 - y_1^{n+1} - y_1^{2n+1}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Стационарными точками (2.1) являются

$$\begin{gathered} O = (0,0), \quad P = \left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-4\alpha}}{2}\right)^{\frac{1}{n}}, 0\right), \\ Q = \left(\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-4\alpha}}{2}\right)^{\frac{1}{n}}, 0\right). \end{gathered} \tag{2.2}$$

Матрица Якоби (2.1) в точке покоя (x_*, y_*)

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - (n+1)y_*^n - (2n+1)y_*^{2n} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

где (x_*, y_*) – координаты точки O, P или Q.

Характеристическое уравнение Якобиана (2.3) имеет вид

$$\lambda^2 + (2n+1)y_*^{2n} + (n+1)y_*^n + \alpha = 0. \tag{2.4}$$

Решая уравнение (2.4), получим собственные значения Якобиана

$$\lambda^{\pm} = \pm\sqrt{-(2n+1)y_*^{2n} - (n+1)y_*^n - \alpha}, \tag{2.5}$$

которые в точках покоя O, P и Q имеют следующие значения

$$\begin{gathered} \lambda_O^{\pm} = \pm\sqrt{-\alpha}, \\ \lambda_P^{\pm} = \pm\frac{\sqrt{2}\sqrt{n}\sqrt{-1 + 4\alpha + \sqrt{1-4\alpha}}}{2}, \\ \lambda_Q^{\pm} = \pm\frac{i\sqrt{2}\sqrt{n}\sqrt{1 - 4\alpha + \sqrt{1-4\alpha}}}{2}. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Устойчивость стационарных точек исследуемого уравнения представлена в табл. 1, где "–" обозначает отсутствие стационарной точки при указанном значении параметра.

Система (2.1) консервативна, так как $\nabla\mathbf{y} = \dfrac{\partial y_{1z}}{\partial y_1} + \dfrac{\partial y_{2z}}{\partial y_2} = 0$ и имеет следующий Гамильтониан

$$H(y_1, y_2) = \frac{y_2^2}{2} + \frac{\alpha y_1^2}{2} + \frac{y_1^{n+2}}{n+2} + \frac{y_1^{2n+2}}{2n+2}. \tag{2.7}$$

Гамильтониан (2.7) позволяет для невозмущенного случая сразу построить фазовые портре-

Таблица 1. Устойчивость стационарных точек обобщенного уравнения Дуффинга (2.1) в зависимости от параметра α

	O	P	Q
$\alpha \in (-\infty, 0)$	Седло	Центр	Центр
$\alpha = 0$	Вырожденная точка	Вырожденная точка	Центр
$\alpha = \left(0, \frac{1}{4}\right)$	Центр	Седло	Центр
$\alpha = \frac{1}{4}$	Центр	Вырожденная точка	Вырожденная точка
$\alpha > \frac{1}{4}$	Центр	–	–

ты, поскольку фазовыми кривыми являются линии уровня Гамильтониана. Примеры фазовых портретов для двух значений параметра α приведены на рис. 1. Из них видно, как при увеличении α эллиптическая точка покоя P становится гиперболической, а точка гиперболическая O – эллиптической.

3. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Рассмотрим обобщенное уравнение Дуффинга без затухания с учетом внешней силы с амплитудой A и частотой Ω

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -\alpha y_1 - y_1^{n+1} - y_1^{2n+1} + A\cos\theta, \\ \dot{\theta} = \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Классическими характеристиками динамики трехмерных систем являются Ляпуновские показатели и отображения Пуанкаре [10]. Фиксируем $\omega = 1$ и будем варьировать амплитуду внешней силы A при $\alpha = -1$ и $\alpha = \frac{1}{5}$.

Построим отображения Пуанкаре системы при нескольких значениях амплитуды вынуждающей силы A. На рис. 2 и 3 представлено изменение динамики отображения Пуанкаре системы при различных начальных условиях и значениях параметра A. В качестве плоскости сечения выбрана $\Sigma = \left\{y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2 | \omega = \frac{2\pi}{\Omega}\right\}$. При малых значениях амплитуды внешней силы точки покоя P (для $\alpha = -1$) или O (для $\alpha = \frac{1}{5}$) и Q остаются эллиптическими. Замкнутые периодические орбиты превращаются в квазипериодические орбиты, в сечениях Пуанкаре которых находятся инвариантные замкнутые кривые. Сепаратриса при появлении вынуждающей силы разрушается и в ее области образуется тонкий хаотический слой. При увеличении параметра A площадь хаотической области увеличивается, а количество квазипериодических орбит внутри нее уменьшается.

Наличие хаотического режима в системе количественно определяется с помощью вычисления старшего Ляпуновского показателя, описывающего экспоненциальное расхождение близлежа-

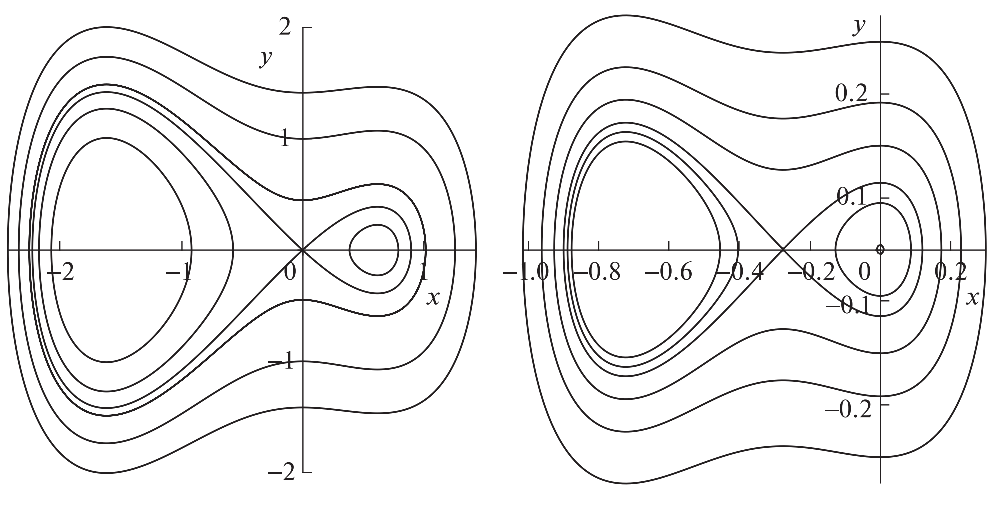


Рис. 1. Фазовые портреты системы уравнений (2.1) при $n = 1$, $\alpha = -1$ (слева) и $\alpha = \frac{1}{5}$ (справа).

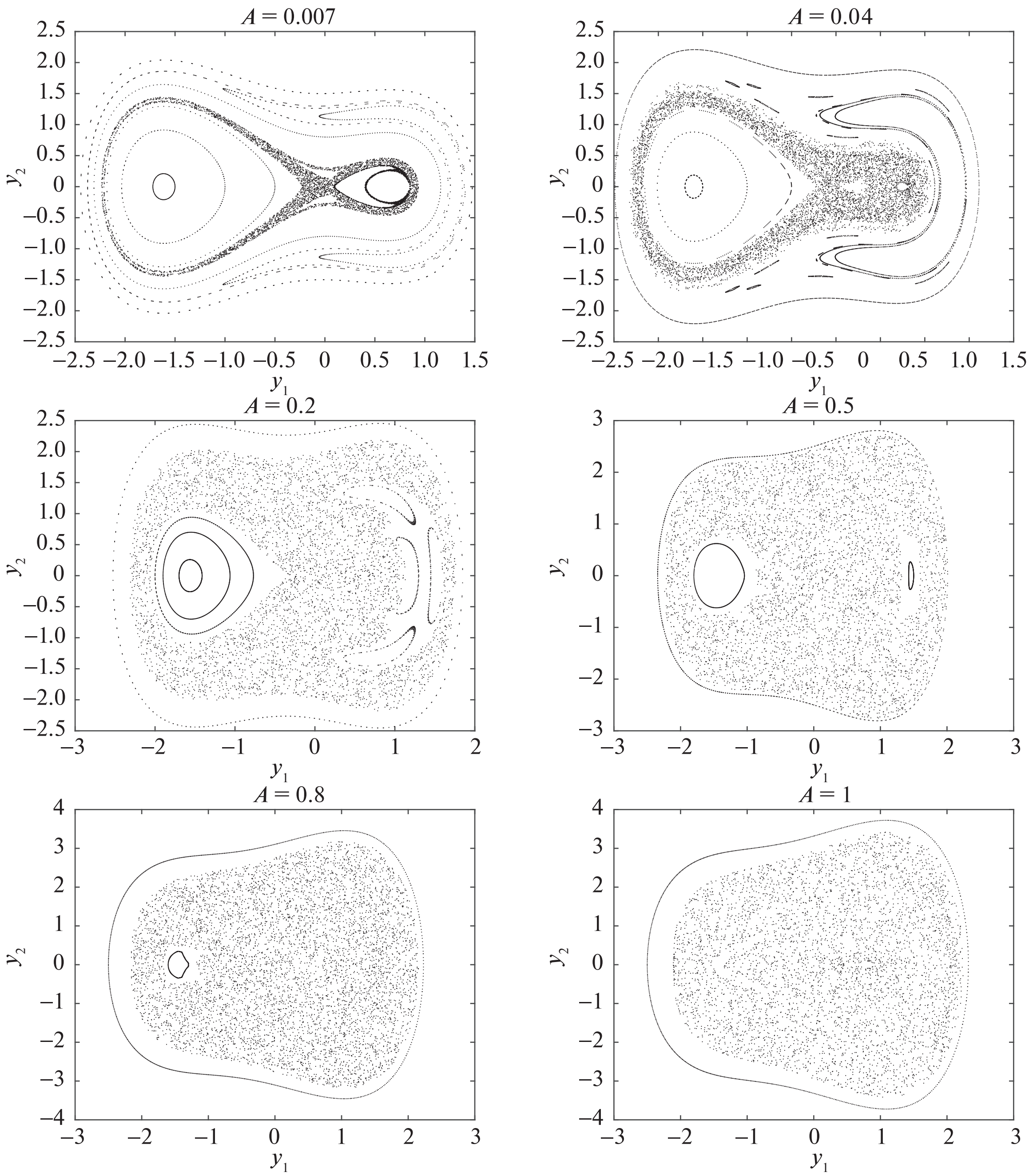


Рис. 2. Сечения Пуанкаре обобщенного уравнения Дуффинга (2.1) при различных значениях A и $\omega = 1$, $\alpha = -1$, $n = 1$.

щих траекторий решения динамической системы [10]. Присутствие положительного Ляпуновского показателя в спектре говорит о хаотическом поведении решения системы, если старший Ляпуновский показатель нулевой, то режим квазипериодический или периодический, а если показатель отрицательный, то решение является стационарной точкой. Вычисление старших Ляпуновских показаталей системы (2.1) проводилось по алгоритму Беннетина [11]. Рис. 4 показывает, как при увеличении амплитуды вынуждающей силы старший показатель сначала растет, что соответвует увеличению экспоненциального роста расходимости траекторий, а следовательно и увеличению площади хаотической области на отображении Пуанкаре.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ динамических режимов обобщенного уравнения Дуффинга, полученного с учетом переменных бегущей волны в уравнении

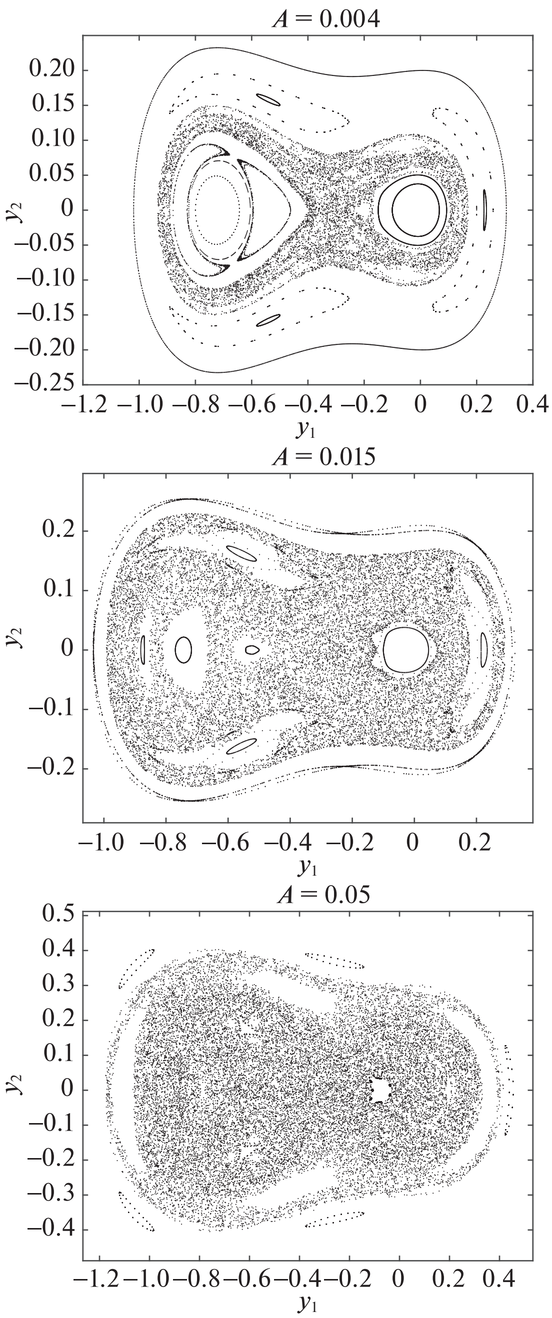


Рис. 3. Сечения Пуанкаре обобщенного уравнения Дуффинга (2.1) при различных значениях A и $\omega = 1$, $\alpha = \frac{1}{5}$, $n = 1$.

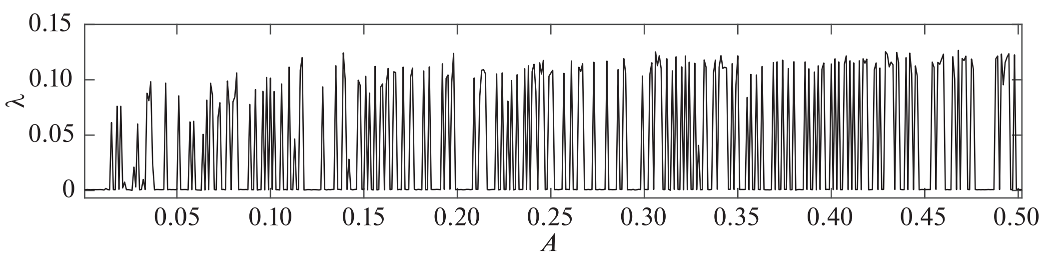


Рис. 4. Старший показатель Ляпунова системы (2.1) как функция параметра A при $\omega = 1$, $\alpha = -1$, $n = 1$.

для описания распространения оптических импульсов.

Проведен анализ устойчивости точек покоя исследуемой системы без учета возмущающей силы. Его результаты представлены в форме таблицы. Представлен Гамильтониан изучаемой системы и с его помощью построены фазовые портреты.

Проведен численный анализ динамических режимов обобщенного уравнения Дуффинга. Для различных значений амплитуды возмущающей силы A построены отображения Пуанкаре динамической системы и рассчитаны ее старшие показатели Ляпунова. Показано, что увеличение параметра A приводит к увеличению площади области хаотической динамики системы.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект государственного задания № 0723-2020-0036).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Duffing G.* Erzwungene schwingungen bei veränderlicher eigenfrequenz. Vieweg u. Sohn, Braunschweig. 1918. 7.
2. *Thompson J., Tutill M., Stewart H.B.* Nonlinear dynamics and chaos. John Wiley & Sons, 2002.
3. *Hu N.Q., Wen X.S.* The application of Duffing oscillator in characteristic signal detection of early fault // Journal of Sound and Vibration. 2003. V. 268 (5). P. 917–931.
4. *Nayfeh A.H., Khdeir A.A.* Nonlinear rolling of ships in regular beam seas // International Shipbuilding Progress. 1986. V. 33 (379). P. 40–49.
5. *Holmes P.* A nonlinear oscillator with a strange attractor // Philosophical Trans. Royal Soc. London. Ser. A, Math. and Phys. Sci. 1979. V. 292 (1394). P. 419–448.
6. *Holmes P., Rand D.* Phase portraits and bifurcations of the non-linear oscillator: $\dot{x} + (\alpha + \gamma x^2)\dot{x} + \beta x + \delta x^3$ // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1980. V. 15. № 6. P. 449–458.
7. *Chacón R., Díaz Bejarano J.* Routes to suppressing chaos by weak periodic perturbations // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71. № 19. P. 3103.
8. *Ludeke C.A., Wagner W.S.* The generalized Duffing equation with large damping // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1969. V. 3. № 3. P. 383–395.
9. *Kudryashov N.A.* Highly dispersive optical solitons of equation with various polynomial nonlinearity law // Chaos, Solitons & Fractals. 2020. V. 140. P. 110202.
10. *Lakshmanan Muthusamy*, Shanmuganathan Rajaseekar. *Nonlinear Dynamics: Integrability, Chaos and Patterns.* Springer Science & Business Media, 2012.
11. *Benettin Giancarlo et al.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory // Meccanica. 1980. V. 15. № 1. P. 9–20.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 5, pp. 442–448

Nonlinear Dynamical Processes Described by the Generalized Duffing Equation with an External Force

S. F. Lavrova[a,#] and N. A. Kudryashov[a,##]

[a] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

[#]*e-mail: kan_13@mail.ru*

[##]*e-mail: nakudr@gmail.com*

Received September 15, 2020; revised September 15, 2020; accepted October 12, 2020

Abstract—The generalized nonlinear Duffing equation, which is obtained from the equation for description of the pulse propagation in optical fibers using traveling wave variables, is considered. An ordinary second-order differential equation is written in the form of a dynamical system. For the generalized Duffing equation without external force, stationary points are found and their stability is investigated. The results of the study are presented in the table, where the type of stability is indicated for each of the three equilibrium points depending on the equation parameter. Using the presented Hamiltonian of the considered system of equations, phase portraits of the generalized Duffing equation are constructed excluding perturbation. The considered dynamical system in the presence of a periodic external force is numerically analyzed. For different amplitudes of the driving force, Poincaré sections of the dynamical system are constructed for two different values of the parameter. It is shown that with an increase in the amplitude of the perturbing force, the periodic trajectories of the solution of the system are destroyed and the area of the region of chaotic dynamics of the equations increases. According to Benettin's algorithm, the senior Lyapunov exponent of the dynamical system is calculated as a function of the amplitude of the driving force. It has been found that with an increase in the amplitude, the senior Lyapunov exponent increases, and as a consequence, the exponential divergence of the trajectories increases, which agrees with the previously obtained Poincaré mappings.

Keywords: Duffing oscillator, dynamical system, Poincaré section, Lyapunov exponent

DOI: 10.1134/S2304487X20050107

REFERENCES

1. Duffing G., *Erzwungene schwingungen bei verГ¤nderlicher eigenfrequenz*, Vieweg u. Sohn, Braunschweig, 1918, p. 7.
2. Thompson J., Tutill M., Stewart H.B., *Nonlinear dynamics and chaos,* John Wiley & Sons, 2002.
3. Hu N.Q., Wen X.S., The application of Duffing oscillator in characteristic signal detection of early fault, *J. Sound and Vibration*, 2003, vol. 268, no. 5, pp. 917–931.
4. Nayfeh A.H., Khdeir, A.A., Nonlinear rolling of ships in regular beam seas, *Int. Shipbuilding Progress,* 1986, vol. 33, no. 379, pp. 40–49.
5. Holmes Ph., A nonlinear oscillator with a strange attractor, *Philos. Trans. Royal Society of London. Ser. A, Math. and Phys. Sci.*, 1979, vol. 292, no. 1394, pp. 419–448.
6. Holmes P., Rand D., Phase portraits and bifurcations of the non-linear oscillator: $\ddot{x} + (\alpha + \gamma x^2)\dot{x} + \beta x + \delta x^3$, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 1980, vol. 15, no. 6, pp. 449–458.
7. Chacón R., Díaz Bejarano J., Routes to suppressing chaos by weak periodic perturbations, *Phys. Rev. Lett.*, 1993, vol. 71, no. 19, p. 3103.
8. Ludeke C.A., Wagner W.S., The generalized Duffing equation with large damping, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 1968, vol. 3, no. 3, pp. 383–395.
9. Kudryashov N.A., Highly dispersive optical solitons of equation with various polynomial nonlinearity law, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2020, vol. 140, p. 110202.
10. Lakshmanan Muthusamy, Shanmuganathan Rajaseekar, *Nonlinear Dynamics: Integrability, Chaos and Patterns,* Springer Science & Business Media, 2012.
11. Benettin Giancarlo, et al., Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory, *Meccanica,* 1980, vol. 15, no. 1, pp. 9–20.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2020, том 9, № 5, с. 449–454

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ОПТИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ СИСТЕМОЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 4-ГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2020 г. К. В. Кан[1,*], Н. А. Кудряшов[1]

[1] *Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия*

**e-mail: kan_13@mail.ru*

***e-mail: nakudr@gmail.com*

Поступила в редакцию 23.09.2020 г.
После доработки 23.09.2020 г.
Принята к публикации 10.11.2020 г.

Исследуется система нелинейных дифференциальный уравнений в частных производных четвертого порядка с нелокальной нелинейностью, которая описывает распространение двух волн в оптическом волокне. Задача Коши для рассматриваемой системы не решается методом обратной задачи рассеяния. Используются переменные бегущей волны для того, чтобы перейти от исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. В работе для поиска точных решений в виде уединенных волн использован метод простейших уравнений. Преобразованная система обыкновенных дифференциальных уравнений состоит из четырех уравнений, соответствующих действительной и мнимой частям исходной системы. Получены ограничения на параметры исходной математической модели. С учетом найденных ограничений рассмотрена система дифференциальных уравнений, соответствующих действительным частям. Для этой системы найдены условия совместности. С учетом ограничений на параметры, полученных из условий совместности, изучено одно из уравнений, соответствующее действительной части. Найдены точные решения в форме уединенных волн. Построены графики полученных решений при различных значениях параметров исходной системы уравнений. Проанализировано влияние параметров математической модели на поведение решений.

Ключевые слова: уединенные волны, нелинейные дифференциальные уравнения, распространение импульсов, оптическое волокно

DOI: 10.1134/S2304487X20050053

ВВЕДЕНИЕ

В связи с широким распространением новых технологий передачи информации в оптических линиях большое внимание уделяется изучению распространения нелинейных волновых импульсов в оптическом волокне. Развитие математического моделирования и программных комплексов для решения математических задач (таких как Maple, Matlab) позволяет строить численные и аналитические решения различных математических моделей.

Семейство нелинейных уравнений Шредингера и, в частности, уравнение, изученное, в [1–3] в виде

$$iq_t + i\alpha_1 q_{xxx} + \alpha_2 q_{xxxx} + F(|q|^2)q = 0, \qquad (1)$$

описывают распространение оптических импульсов в оптоволокне.

Оптические солитоны уравнений с различными типами нелинейности также изучены в работах [4–7]. Одним из известных уравнений, описывающих данное физическое явление, является уравнение Гинзбурга–Ландау [8, 9]:

$$iq_t + aq_{xx} + F(|q|^2)q = \\ = \frac{1}{|q|^2 q^*}[\alpha|q|^2(|q|^2)_{xx} - \beta\{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q.$$

В работах [10, 11] исследована модель Бисваса–Миловича:

$$i(q^m)_t + a(q^m)_{xx} + bF(|q|^2)q^m = 0.$$

Предложенное Бисвасом и Аршидом в 2018 году уравнение [12], исследованное в [13], также описывает распространение нелинейных импульсов в оптическом волокне и записывается в виде:

$$iq_t + a_1 q_{xx} + a_2 q_{xt} + i(b_1 q_{xxx} + b_2 q_{xxt}) = \\ = i[\lambda(|q|^2 q)_x + \mu(|q|^2)_x q + \theta|q|^2 q_x].$$

В данной работе рассматривается система, описывающая распространение двух волн в оптическом волокне, которая соответствует дифференциальному уравнению в частных производных четвертого порядка с нелокальной нелинейностью [5]:

$$iq_t + \alpha q_{xx} + i\beta q_{xxx} + \delta q_{xxxx} + [h(|q|^n)_{xx} + g(|q|^{2n})_{xx}]q + \\ + (a|q|^n + b|q|^{2n} + c|q|^{3n} + d|q|^{4n})q = 0. \quad (2)$$

Система уравнений, записанная по аналогии с [14], имеет вид:

$$iu_t + \alpha u_{xx} + i\beta u_{xxx} + \delta u_{xxxx} + \\ + (h_1|u|^n_{xx} + h_2|v|^n_{xx} + g_1|u|^{2n}_{xx} + g_2|v|^{2n}_{xx})u + \\ + (a_1|u|^n + a_2|v|^n + b_1|u|^{2n} + b_2|v|^{2n} + c_1|u|^{3n} + \\ + c_2|v|^{3n} + d_1|u|^{4n} + d_2|v|^{4n})u + su = 0, \quad (3)$$

$$iv_t + \alpha v_{xx} + i\beta v_{xxx} + \delta v_{xxxx} + \\ + (h_3|u|^n_{xx} + h_4|v|^n_{xx} + g_3 u|u|^{2n}_{xx} + g_4|v|^{2n}_{xx})v + \\ + (a_4|u|^n + a_3|v|^n + b_4|u|^{2n} + b_3|v|^{2n} + c_4|u|^{3n} + \\ + c_3|v|^{3n} + d_4|u|^{4n} + d_3|v|^{4n})v + rv = 0. \quad (4)$$

Система уравнений (3)–(4) является системой двух дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка с нелокальной нелинейностью.

Целью данной работы является поиск точных решений системы уравнений (3)–(4) в форме уединенных волн.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ (3)–(4)

Для системы уравнений (3)–(4) задача Коши не решается методом обратной задачи рассеяния, поэтому для поиска решений используем переменные бегущей волны

$$u(x,t) = y_1(z)e^{i(kx-\omega t)}, \\ v(x,t) = y_2(z)e^{i(kx-\omega t)}, \quad z = x - C_0 t. \quad (5)$$

Используя (5), переходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученная система состоит из четырех уравнений, соответствующих мнимым и действительным частям системы уравнений (3)–(4), и является переопределенной для функций $y_1(z)$ и $y_2(z)$.

$$\delta_1 y_{1,zzzz} + (2ng_1 y_1^{2n} + nh_1 y_1^n - 6\delta_1 k_1^2 - 3\beta_1 k_1 + \alpha_1)y_{1,zz} + \\ + (h_1 n^2 y_1^{n-1} - 2g_1 n y_1^{2n-1} - h_1 n y_1^{n-1} + 4g_1 n^2 y_1^{2n-1})y_{1,z}^2 + \\ + (a_1 y_1^n + b_1 y_1^{2n} + c_1 y_1^{3n} + d_1 y_1^{4n} + +4g_2 y_2^{2n-2} n^2 y_{2,z}^2 - \\ - 2g_2 y_2^{2n-2} n y_{2,z}^2 - h_2 y_2^{n-2} n y_{2,z}^2 + \beta_1 k_1^3 + a_2 y_2^n + \delta_1 k_1^4 + \\ + \omega_1 + c_2 y_2^{3n} + b_2 y_2^{2n} - \alpha_1 k_1^2 + d_2 y_2^{4n} + h_2 y_2^{n-2} n^2 y_{2,z}^2 + \\ + h_2 y_2^{n-1} n y_{2,zz} + 2g_2 y_2^{2n-1} n y_{2,zz} + s)y_1 = 0, \quad (6)$$

$$(4\delta_1 k_1 + \beta_1)y_{1,zzz} + (2\alpha_1 k_1 - \\ - 3\beta_1 k_1^2 - 4\delta_1 k_1^3 - C_0)y_{1,z} = 0, \quad (7)$$

$$\delta_2 y_{2,zzzz} + (2ng_4 y_2^{2n} + nh_4 y_2^n - 6\delta_2 k_2^2 - 3\beta_2 k_2 + \alpha_2)y_{2,zz} + \\ + (h_4 n^2 y_2^{n-1} - 2g_4 n y_2^{2n-1} - h_4 n y_2^{n-1} + 4g_4 n^2 y_2^{2n-1})y_{2,z}^2 + \\ + (a_4 y_2^n + b_4 y_2^{2n} + c_4 y_2^{3n} + d_4 y_2^{4n} + 4g_3 y_1^{2n-2} n^2 y_{1,z}^2 - \\ - 2g_3 y_1^{2n-2} n y_{1,z}^2 - h_3 y_1^{n-2} n y_{1,z}^2 + \beta_2 k_2^3 + a_3 y_1^n + \delta_2 k_2^4 + \\ + \omega_2 + c_3 y_1^{3n} + b_3 y_1^{2n} - \alpha_2 k_2^2 + d_3 y_1^{4n} + h_3 y_1^{n-2} n^2 y_{1,z}^2 + \\ + h_3 y_1^{n-1} n y_{1,zz} + 2g_3 y_1^{2n-1} n y_{1,zz} + r)y_2 = 0, \quad (8)$$

$$(4\delta_2 k_2 + \beta_2)y_{2,zzz} + (2\alpha_2 k_2 - \\ - 3\beta_2 k_2^2 - 4\delta_2 k_2^3 - C_0)y_{2,z} = 0. \quad (9)$$

Полагая коэффициенты мономов уравнений (7) и (9) равными нулю, получим, что любые функции $y_1(z)$ и $y_2(z)$ будут удовлетворять уравнениям (7) и (9) соответственно. Далее рассматриваем уравнения (6) и (8) с учетом найденных из (7) и (9) ограничений

$$\beta_1 = -4\delta_1 k_1, \quad \beta_2 = -4\delta_2 k_2, \\ \alpha_1 = \frac{1}{2k_1}(C_0 - 8\delta_1 k_1^3), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2k_2}(C_0 - 8\delta_2 k_2^3) \quad (10)$$

в виде:

$$\delta_1 y_{1,zzzz} + \left(2\delta_1 k_1^2 + nh_1 y_1^n + 2ng_1 y_1^{2n} + \frac{C_0}{2k_1}\right)y_{1,zz} + \\ + [ng_1(4n-2)y_1^{2n-1} + nh_1(n-1)y_1^{n-1}]y_{1,z}^2 + \\ + \left(ng_2(4n-2)y_{2,z}^2 y_2^{2n-2} + nh_2(n-1)y_{2,z}^2 y_2^{n-2} + \right. \\ + 2ng_2 y_{2,zz} y_2^{2n-1} + nh_2 y_{2,zz} y_2^{n-1} + \delta_1 k_1^4 + a_1 y_1^n + \\ + b_1 y_1^{2n} + c_1 y^{3n} + d_1 y_1^{4n} + a_2 y_2^n + b_2 y_2^{2n} + \\ \left. + c_2 y_2^{3n} + d_2 y_2^{4n} + s + \omega_1 - \frac{k_1 C_0}{2}\right)y_1 = 0, \quad (11)$$

$$\delta_2 y_{2,zzzz} + \left(2\delta_2 k_2^2 + nh_4 y_2^n + 2ng_4 y_2^{2n} + \frac{C_0}{2k_2}\right)y_{2,zz} + \\ + [ng_4(4n-2)y_2^{2n-1} + nh_4(n-1)y_2^{n-1}]y_{2,z}^2 + \\ + \left(ng_3(4n-2)y_{1,z}^2 y_1^{2n-2} + nh_3(n-1)y_{1,z}^2 y_1^{n-2} + \right. \\ + 2ng_3 y_{1,zz} y_1^{2n-1} + nh_3 y_{1,zz} y_1^{n-1} + \delta_2 k_2^4 + a_3 y_1^n + \\ + b_3 y_1^{2n} + c_3 y^{3n} + d_3 y_1^{4n} + a_4 y_2^n + b_4 y_2^{2n} + \\ \left. + c_4 y_2^{3n} + d_4 y_2^{4n} + r + \omega_2 - \frac{k_2 C_0}{2}\right)y_2 = 0. \quad (12)$$

Подставляя $y_1(z) = D_1 R(z)$, $y_2(z) = D_2 R(z)$ в систему (11)–(12), мы получаем переопределенную

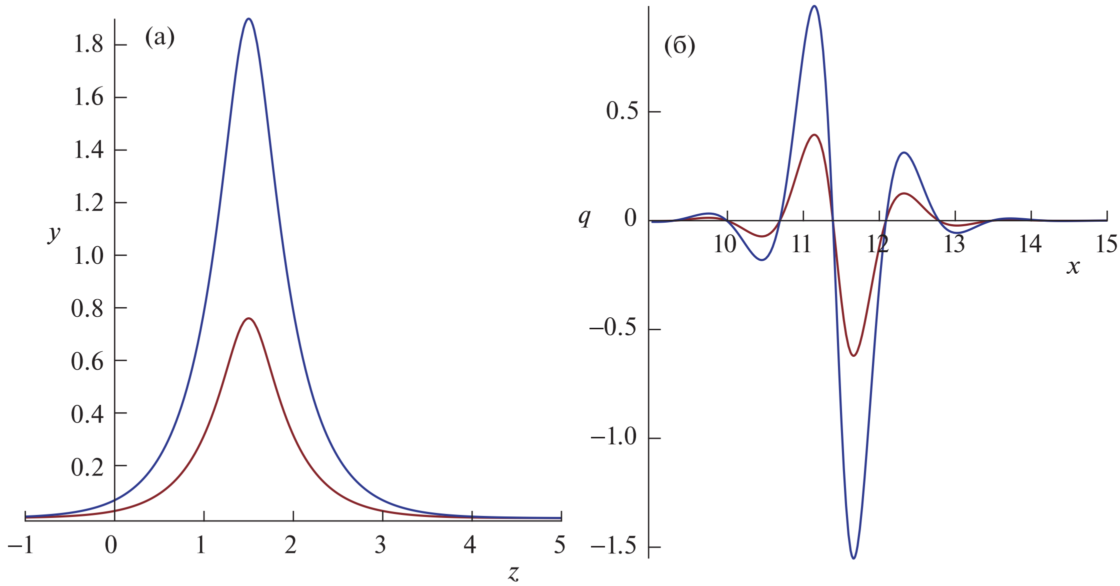


Рис. 1. Графики уединенных волн $y_1(z)$ и $y_2(z)$ (а) и действительных частей $u(x,t)$ и $v(x,t)$ (б) при $t = 10$, $A = 1.0$, $E = 6.0$, $C_0 = 1.0$, $k_1 = 8.0$, $k_2 = 13.0$, $\delta_1 = 1.0$, $\delta_2 = 1.0$, $D_1 = 1.0$, $D_2 = 2.5$, $s = 3.0$, $r = 1.0$, $z_0 = 1.5$, $n = 4.0$.

систему для $R(z)$. Полученные уравнения могут быть записаны в виде:

$$\begin{gathered}P_{i,1}R_{zzzz} + P_{i,2}R^nR_{zz} + P_{i,3}R^{2n}R_{zz} + P_{i,4}R_{zz} + \\ + P_{i,5}R^{2n-1}R_z^2 + P_{i,6}R^{n-1}R_z^2 + P_{i,7}R + P_{i,8}R^{n+1} + \\ + P_{i,9}R^{2n+1} + P_{i,10}R^{3n+1} + P_{i,11}R^{4n+1} = 0, \quad i = \overline{1,2},\end{gathered} \tag{13}$$

где $P_{i,j}$ $(i = 1,\, 2;\ j = \overline{1,11})$ – коэффициенты, зависящие от параметров исходной системы:

$$\begin{gathered}P_{1,1} = \delta_1D_1; \quad P_{2,1} = \delta_2D_2;\\ P_{1,2} = nh_1D_1^{n+1} + nh_2k_1D_1D_2^n;\\ P_{2,2} = nh_4D_2^{n+1} + nh_3D_2D_1^n;\\ P_{1,3} = 2ng_1D_1^{2n+1} + 2ng_2D_1D_2^{2n};\\ P_{2,3} = 2ng_4D_2^{2n+1} + 2ng_3D_2D_1^{2n};\\ P_{1,4} = D_1(2\delta_1k_1^3 + C_0/2k_1);\ P_{2,4} = D_2(2\delta_2k_2^3 + C_0/2k_2);\\ P_{1,5} = n(4n-2)(g_2D_1D_2^{2n} + g_1D_1^{2n+1});\\ P_{2,5} = n(4n-2)(g_3D_2D_1^{2n} + g_4D_2^{2n+1});\\ P_{1,6} = n(n-1)(h_2D_1D_2^n + h_1D^{n+1});\\ P_{2,6} = n(n-1)(h_3D_2D_1^n + h_4D_1^{n+1});\\ P_{1,7} = D_1\left(\delta_1k_1^4 - \frac{k_1C_0}{2} + s + \omega_1\right);\\ P_{2,7} = D_2\left(\delta_2k_2^4 - \frac{k_2C_0}{2} + r + \omega_2\right);\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}P_{1,8} = a_2D_1D_2^n + a_1D_1^{n+1};\ P_{2,8} = a_3D_2D_1^n + a_4D_1^{n+1};\\ P_{1,9} = b_2D_1D_2^{2n} + b_1D_1^{2n+1};\\ P_{2,9} = b_3D_2D_1^{2n} + b_4D_2^{2n+1};\\ P_{1,10} = c_2D_1D_2^{3n} + c_1D_1^{3n+1};\\ P_{2,10} = c_3D_2D_1^{3n} + c_4D_2^{3n+1};\\ P_{1,11} = d_2D_1D_2^{4n} + d_1D_1^{4n+1};\\ P_{2,11} = d_3D_2D_1^{4n} + d_4D_2^{4n+1}.\end{gathered} \tag{14}$$

Умножая первое уравнение на $P_{2,1}$, второе – на $P_{1,1}$ и вычитая из первого уравнения второе получаем следующее:

$$\begin{gathered}Q_1R^nR_{zz} + Q_2R^{2n}R_{zz} + Q_3R_{zz} + Q_4R^{2n-1}R_z^2 + \\ + Q_5R^{n-1}R_z^2 + Q_6R + Q_7R^{n+1} + \\ + Q_8R^{2n+1} + Q_9R^{3n+1} + Q_{10}R^{4n+1} = 0,\end{gathered} \tag{15}$$

где

$$\begin{gathered}Q_1 = n[(\delta_2h_1 - \delta_1h_3)D_1^n + (\delta_2h_2 - \delta_1h_4)D_2^n];\\ Q_2 = 2n[(\delta_2g_1 - \delta_1g_3)D_1^{2n} + (\delta_2g_2 - \delta_1g_4)D_2^{2n}];\\ Q_3 = \frac{2}{k_1k_2}\left(\delta_1\delta_2k_1^3k_2 - \delta_1k_1\left(\delta_2k_2^3 + \frac{C_0}{4}\right) + \frac{\delta_2k_2C_0}{4}\right);\\ Q_4 = n(4n-2)[(\delta_2g_1 - \delta_1g_3)D_1^{2n} + (\delta_2g_2 - \delta_1g_4)D_2^{2n}];\\ Q_5 = n(n-1)[(\delta_2h_1 - \delta_1h_3)D_1^n + (\delta_2h_2 - \delta_1h_4)D_2^n];\end{gathered}$$

$$Q_6 = \delta_2\left(s + \omega_1 - \frac{k_1C_0}{2}\right) -$$
$$- \delta_1\left(\delta_2(k_2^4 - k_1^4) + r + \omega_2 - \frac{k_2C_0}{2}\right);$$
$$Q_7 = (a_1\delta_2 - a_3\delta_1)D_1^n + (a_2\delta_2 - a_4\delta_1)D_2^n;$$
$$Q_8 = (b_1\delta_2 - b_3\delta_1)D_1^{2n} + (b_2\delta_2 - b_4\delta_1)D_2^{2n};$$
$$Q_9 = (c_1\delta_2 - c_3\delta_1)D_1^{3n} + (c_2\delta_2 - c_4\delta_1)D_2^{3n};$$
$$Q_{10} = (d_1\delta_2 - d_3\delta_1)D_1^{4n} + (d_2\delta_2 - d_4\delta_1)D_2^{4n}. \quad (16)$$

Из уравнений $Q_i = 0$, $i = \overline{1,10}$ получаем ограничения на следующие параметры математической модели:

$$a_1 = \frac{1}{\delta_2}(a_3\delta_1 - D_1^{-n}D_2^n(a_2\delta_2 - a_4\delta_1));$$
$$b_1 = \frac{1}{\delta_2}(b_3\delta_1 - D_2^{2n}D_1^{-2n}(b_2\delta_2 - b_4\delta_1));$$
$$c_1 = \frac{1}{\delta_2}(c_3\delta_1 - D_2^{3n}D_1^{-3n}(c_2\delta_2 - c_4\delta_1));$$
$$d_1 = \frac{1}{\delta_2}(d_3\delta_1 - D_2^{4n}D_1^{-4n}(d_2\delta_2 - d_4\delta_1));$$
$$g_1 = \frac{1}{\delta_2}(g_3\delta_1 - D_2^{2n}D_1^{-2n}(g_2\delta_2 - g_4\delta_1));$$
$$h_1 = \frac{1}{\delta_2}(h_3\delta_1 - D_1^{-n}D_2^n(h_2\delta_2 - h_4\delta_1)); \quad (17)$$
$$C_0 = \frac{4\delta_1\delta_2k_1k_2(k_1^2 - k_2^2)}{\delta_1k_1 - \delta_2k_2};$$
$$\omega_1 = \frac{1}{\delta_2(\delta_1k_1 - \delta_2k_2)}(\delta_1^2k_1(\delta_2(3k_2^4 - k_1^4 -$$
$$- 2k_1^2k_2^2) + r + \omega_2) - \delta_2(\delta_2(k_2^5 + 2k_1^2k_2^3 -$$
$$- 3k_1^4k_2) + k_1s + k_2(r + \omega_2)) + s\delta_2^2k_2).$$

В этом случае можно решать одно из уравнений, соответствующих действительным частям (6) или (8), с помощью замены $R(z) = F(z)$, где $F(z)$ это решение уравнения [6]

$$F_z^2n^2 - AF^{n+2}, \quad (18)$$

и имеет вид

$$F(z) = \left[\frac{4Ee^{(z-z_0)\sqrt{n^2E}}}{A(1 + e^{(z-z_0)\sqrt{n^2E}})^2}\right]^{1/n}. \quad (19)$$

Уравнение (13) при $i = 1$ в этом случае можно записать как следующее:

$$G_1F^n + G_2F^{2n} + G_3F^{3n} + G_4F^{4n} + G_5 = 0, \quad (20)$$

где коэффициенты представляются формулами:

$$G_1 = f_1D_1^{n+1}(h_3n^2E + a_3) - \frac{D_1}{2}(-2f_1D_2^n(h_4n^2E + a_4) +$$
$$+ \delta_2A(n + 2) - (\delta_2k_2(f_2E + 2k_2^2) + \delta_1k_1(f_2E + 2k_1^2)));$$
$$G_2 = f_1D_1^{2n+1}(4g_3n^2E + b_3) + f_1D_1D_2^{2n}(4g_4n^2E + b_4) +$$
$$+ \frac{f_1A}{4}(D_1(\delta_2A(n + 1)(n + 2)(3n + 2) -$$
$$- 6h_4n^2D_2^n) - 6h_3n^2D_1^{n+1});$$
$$G_3 = -f_1(5g_3n^2AD_1^{2n+1} - c_3D_1^{3n+1} +$$
$$+ D_1(5g_4n^2AD_2^{2n} - c_4D_2^{3n})); \quad (21)$$
$$G_4 = f_1(d_4D_1D_2^{4n} + d_3D_1^{4n+1});$$
$$G_5 = D_1(-\delta_2^2k_2(k_2^2 + E)^2 + \delta_2(3\delta_1k_1k_2^4 - 2\delta_1k_1^3k_2^2 -$$
$$- k_2(r + \omega_2) + \delta_1k_1E(2k_1^2 + E)) + \delta_1k_1(r + \omega_2)).$$

В (21) введены следующие обозначения:

$$f_1 = \delta_1k_1 - \delta_2k_2; \quad f_2 = n^2 + 2n + 2.$$

Из уравнений вида $G_i = 0, i = \overline{1,5}$ получаем

$$a_3 = \frac{1}{2f_1}((-2f_1D_2^n(h_4n^2E + a_4) +$$
$$+ \delta_2A(n + 2)(-k_2\delta_2(f_2E + 2k_2^2) +$$
$$+ \delta_1k_1(2k_1^2 + f_2E)))D_1^{-n} - 2h_3f_1n^2E);$$
$$b_3 = -((4g_4n^2E + b_4)D_2^{2n} +$$
$$+ \frac{3A}{4}\left(\delta_2(n + 1)(n + 2)\left(n + \frac{2}{3}\right)A - 2h_4n^2D_2^n\right)D_1^{-2n}\right) +$$
$$+ \frac{n^2}{2}(3h_3AD_1^{-n} - 8g_3E);$$
$$c_3 = 5g_4n^2AD_1^{-3n}D_2^{2n} + 5g_3n^2AD_1^{-n} - c_4D_1^{-3n}D_2^{3n},$$
$$d_3 = -d_4D_2^{4n}D_1^{-4n};$$
$$\omega_2 = \frac{1}{f_1}(\delta_2^2k_2(k_2^2 + E)^2 + \delta_2(2\delta_1k_1^3k_2^2 -$$
$$- 3\delta_1k_1k_2^4 + rk_2 - \delta_1k_1E(2k_1^2 + E) - r\delta_1k_1)).$$

Тогда, с учетом (19), решение системы (6)–(9) представляется в виде:

$$y_1(z) = \left[\frac{4ED_1e^{(z-z_0)\sqrt{n^2E}}}{A(1 + e^{(z-z_0)\sqrt{n^2E}})^2}\right]^{1/n},$$
$$y_2(z) = \left[\frac{4ED_2e^{(z-z_0)\sqrt{n^2E}}}{A(1 + e^{(z-z_0)\sqrt{n^2E}})^2}\right]^{1/n}. \quad (22)$$

Решение системы уравнений (3)–(4) записывается следующим образом:

$$u(x,t) = \left[\frac{4ED_1 e^{(x-C_0t-z_0)\sqrt{n^2E}}}{A(1+e^{(x-C_0t-z_0)\sqrt{n^2E}})^2} \right]^{1/n} e^{i(kx-\omega t)},$$

$$v(x,t) = \left[\frac{4ED_2 e^{(x-C_0t-z_0)\sqrt{n^2E}}}{A(1+e^{(x-C_0t-z_0)\sqrt{n^2E}})^2} \right]^{1/n} e^{i(kx-\omega t)}. \quad (23)$$

Ниже приведены графики уединенных волн $y_1(z)$ и $y_2(z)$ и действительных частей $u(x,t)$ и $v(x,t)$ как функции от z и x, соответственно.

Из графиков видно, что наибольшее влияние на решение оказывают параметры n, A и E. При этом параметр n существенно влияет на значение амплитуды волны, а параметры A и E определяют значение минимума графиков уединенных волн $y_1(z)$ и $y_2(z)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривается система двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка, описывающая распространение двух волн в оптической среде. Используя переменные бегущей волны, уравнения в частных производных можно свести к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Определены условия совместности исследуемой системы уравнений. С учетом ограничений на параметры найдены точные решения системы дифференциальных уравнений (3)–(4). Построены и проанализированы графики уединенных волн $y_1(z)$ и $y_2(z)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Biswas Anjan et al.* Cubic–quartic optical solitons in Kerr and power law media // Optik. 2017. V. 144. P. 357–362.
2. *Hosseini K. et al.* New optical solitons of cubic-quartic nonlinear Schrödinger equation // Optik. 2018. V. 157. P. 1101–1105.
3. *Кудряшов Н.А., Кутуков А.А.* Автоматизация построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений // Вестник Национального исследовательского ядерного университета МИФИ. 2019. Т. 8. № 6. С. 533–539.
4. *Kudryashov N.A.* Highly dispersive optical solitons of equation with various polynomial nonlinearity law // Chaos, Solitons & Fractals. 2020. V. 140. P. 110202.
5. *Kudryashov N.A.* Highly dispersive optical solitons of equation with arbitrary refractive index // Regular and Chaotic Dynamics. 2020.
6. *Kudryashov N.A.* Optical solitons of mathematical model with arbitrary refractive index // Optik. 2020. P. 165391.
7. *Kudryashov N.A.* On traveling wave solutions of the Kundu–Eckhaus equation // Optik. 2020. V. 224. P. 165500.
8. *Kudryashov N.A.* First integrals and general solution of the complex Ginzburg–Landau equation // Applied Mathematics and Computation. 2020. V. 386. P. 125407.
9. *Das A., Biswas A., Ekici M., Zhou Q., Alshomrani A.S., Belic M.R.* Optical solitons with complex Ginzburg–Landau equation for two nonlinear forms using F-expansion // Chinese Journal of Physics. 2019. V. 61. P. 255–261.
10. *Biswas Anjan, Milovic D.* Bright and dark solitons of the generalized nonlinear Schrödinger's equation // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2010. V. 15. № 6. P. 1473–1484.
11. *Sturdevant Benjamin.* Topological 1-soliton solution of the Biswas–Milovic equation with power law nonlinearity // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2010. V. 11. № 4. P. 2871–2874.
12. *Biswas Anjan, Saima Arshed.* Optical solitons in presence of higher order dispersions and absence of self-phase modulation // Optik. 2018. V. 174. P. 452–459.
13. *Ekici Mehmet, Abdullah Sonmezoglu.* Optical solitons with Biswas–Arshed equation by extended trial function method // Optik. 2019. V. 177. P. 13–20.
14. *Yıldırım Yakup et al.* Cubic-quartic optical solitons in birefringent fibers with four forms of nonlinear refractive index by exp-function expansion // Results in Physics. 2020. V. 16. P. 102913.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 5, pp. 449–454

Optical Solitons Described by a System of the Fourth Order Nonlinear Differential Equations with Nonlocal Nonlinearity

K. V. Kan[a,#] and N. A. Kudryashov[a,##]

[a] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

[#] *e-mail: kan_13@mail.ru*

[##] *e-mail: nakudr@gmail.com*

Received September 23, 2020; revised September 23, 2020; accepted November 24, 2020

Abstract—A system of nonlinear partial differential equations of the fourth order with nonlocal nonlinearity is investigated. The system of equations describes the propagation of two waves in an optical fiber. The Cauchy problem for the considered system is unsolvable by the inverse scattering method. Traveling wave variables are used to transform the system of partial differential equations to a system of ordinary differential equations of the fourth order. The simplest equation method is applied to seed exact solutions in the form of solitary waves. The transformed system of ordinary differential equations consists of four equations, corresponding to the real and imaginary parts of the initial system. Constraints on the parameters of the initial model are found. The system of differential equations corresponding to the real parts is considered together with the determined constraints. Compatibility conditions for the system are found. One of the equations corresponding to the real part is studied taking into account the constraints for the parameters obtained from compatibility conditions. Exact solutions in the form of solitary waves are found. Graphs of the solutions obtained at different parameter values of the initial system of equations with the determined constraints are constructed. The influence of the mathematical model parameters on the behavior of solutions is analyzed.

Keywords: solitary waves, nonlinear differential equations, pulse propagation, optical fiber

DOI: 10.1134/S2304487X20050053

REFERENCES

1. Biswas Anjan, et al., Cubic–quartic optical solitons in Kerr and power law media, *Optik*, 2017, vol. 144, pp. 357–362.
2. Hosseini K. et al., New optical solitons of cubic-quartic nonlinear Schrödinger equation, *Optik*, 2018, vol. 157, pp. 1101–1105.
3. Kudryashov N.A., Kutukov A.A., Avtomatizatsiya Postroyeniya tochnykh resheniy nelineynykh differentsialnykh uravneniy, *Vestnik Natsionalnogo issledovatelskogo yadernogo universiteta MIFI*, 2019, vol. 8, no. 6, pp. 533–539.
4. Kudryashov N.A., Highly dispersive optical solitons of equation with various polynomial nonlinearity law, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2020, vol. 140, p. 110202.
5. Kudryashov N.A., Highly dispersive optical solitons of equation with arbitrary refractive index, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2020.
6. Kudryashov N.A., Optical solitons of mathematical model with arbitrary refractive index, *Optik*, 2020, p. 165391.
7. Kudryashov N.A., On traveling wave solutions of the Kundu–Eckhaus equation, *Optik,* 2020, vol. 224, p. 165500.
8. Kudryashov N.A., First integrals and general solution of the complex Ginzburg–Landau equation, *Applied Mathematics and Computation*, 2020, vol. 386, p. 125407.
9. Das A., Biswas A., Ekici M., Zhou Q., Alshomrani A.S., Belic M.R., Optical solitons with complex Ginzburg–Landau equation for two nonlinear forms using F-expansion, *Chinese Journal of Physics*, 2019, vol. 61, pp. 255–261.
10. Biswas Anjan, Daniela Milovic, Bright and dark solitons of the generalized nonlinear Schrödinger's equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, vol. 15, no. 6, pp. 1473–1484.
11. Sturdevant Benjamin, Topological 1-soliton solution of the Biswas–Milovic equation with power law nonlinearity, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2010, vol. 11, no. 4, pp. 2871–2874.
12. Biswas Anjan, Saima Arshed, Optical solitons in presence of higher order dispersions and absence of self-phase modulation, *Optik*, 2018, vol. 174, pp. 452–459.
13. Ekici Mehmet, Abdullah Sonmezoglu, Optical solitons with Biswas–Arshed equation by extended trial function method, *Optik*, 2019, vol. 177, pp. 13–20.
14. Yıldırım Yakup et al., Cubic-quartic optical solitons in birefringent fibers with four forms of nonlinear refractive index by exp-function expansion, *Results in Physics*, 2020, vol. 16, p. 102913.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2020, том 9, № 5, с. 455–459

АВТОМАТИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

УДК 378.147: 004.6

ПОРТАТИВНЫЙ МНОГОКОМПОНЕНТНЫЙ ГАЗОАНАЛИЗАТОР, СОВМЕСТИМЫЙ СО СМАРТФОНОМ НА ОС ANDROID

© 2020 г. Н. В. Ермолаева[1,*], В. И. Ратушный[1,], Д. А. Севастьянов[1,***]**

[1] *Волгодонский инженерно-технический институт НИЯУ МИФИ, Волгодонск, 347360, Россия*

**e-mail: NVErmolayeva@mephi.ru*

***e-mail:viratush@mail.ru*

****e-mail:dima.nuclear@gmail.com*

Поступила в редакцию 31.10.2020 г.
После доработки 31.10.2020 г.
Принята к публикации 24.11.2020 г.

В настоящей работе представлен физический прототип универсального устройства – газоанализатора для измерения концентрации нескольких газов (метан, пропан, бутан, угарный газ, водород), который может работать в режиме онлайн. Также разработано программное обеспечение (ПО) для смартфона с ОС Android с целью выполнения функции визуализации и менеджмента данных, получаемых от газоанализатора. Смартфон используется для отображения информации, управления режимами вывода информации на экран, определения местоположения пользователя газоанализатора, пересылки оперативной информации на удаленный сервер. В данный момент мы имеем возможность визуально наблюдать изменения концентрации регистрируемых газов, просматривать на картах места проведения замеров и управлять программой в удобном интерфейсе. Предлагаемый прототип имеет компактные элементы управления, встроенный источник питания, что облегчает работу устройства. Центральной вычислительной частью прибора является микроконтроллер ATmega 328P. Выбор микроконтроллера обусловлен его доступностью, универсальностью, возможностью перепрограммирования выходов. В конструкции устройства предусматривается разъем для облегченного перепрограммирования. Измерительный функционал устройства определяется набором датчиков, подключенных к микроконтроллеру, и не зависит от модели смартфона. Каждый датчик можно заменять благодаря принципу модульности. Предлагаемое устройство компактное, прочное, удобное в эксплуатации, имеет эргономичную конструкцию, осуществляет замеры в режиме реального времени, имеет различные возможности мониторинга, может применяться в промышленных и бытовых целях для контроля опасных факторов непосредственно в самом месте нахождения человека.

Ключевые слова: портативный газоанализатор, смартфон, микроконтроллер, обнаружение и контроль газов, метан, пропан, угарный газ, водород

DOI: 10.1134/S2304487X2005003X

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время для определения качественного и количественного состава загрязняющих веществ в рабочей зоне или любом другом помещении, где есть опасные факторы утечки вредных веществ и газов, используют большое количество различных видов газоанализаторов. Большинство этих устройств работает исключительно в режиме оффлайн [1]. В случае выполнения работ на потенциально опасных территориях или в помещениях, для контроля опасных факторов непосредственно в самом месте нахождения человека, целесообразно применять приборы, способные работать в режиме онлайн. В этом случае будет повышена безопасность объекта, на котором проводятся измерения концентрации газов. Статистические исследования показывают, что довольно большое количество аварий, связанных с отравлением газами либо с детонацией газов, обусловлено человеческим фактором. Если человек, который проводит замеры концентрации опасных газов, будет пользоваться предлагаемым нами онлайн-устройством, то в случае нештатной ситуации оповещение об угрозе будет видеть не только он, но и работники подразделения наблюдения. При нештатной ситуации, когда работник, регистрирующий опасные газы, потеряет сознание при отравлении либо контузии от детонации, штаб наблюдения оперативно получит информацию о местонахождении пострадавшего, а также последние точные данные о загрязнении.

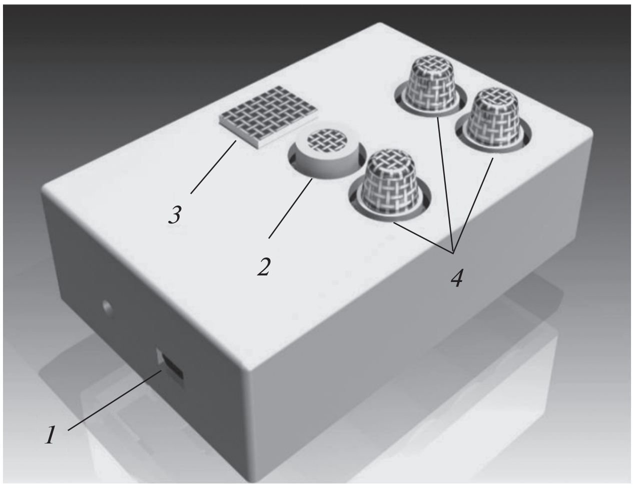


Рис. 1. 3D модель корпуса нового прототипа: *1* – разъем питания, *2* – датчик MQ-4, *3* – датчик влажности и температуры DHT-22, *4* – датчики MQ-6, MQ-7, MQ-8.

Целью настоящей работы является модернизация физического прототипа устройства – газоанализатора для измерения концентрации нескольких газов, который может работать в режиме онлайн с помощью смартфона с ОС Android. Представленная тема является актуальной, так как задача создания данного комплекса имеет практическое применение в промышленных и бытовых целях.

АППАРАТНЫЕ СРЕДСТВА И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ РАЗРАБАТЫВАЕМОГО УСТРОЙСТВА

Ранее нами уже был создан прототип данного устройства, но в процессе его тестирования мы выяснили, что его функционала недостаточно [2–4]. В настоящий момент разрабатывается прототип, который имеет более компактные элементы управления, а также имеет встроенный источник питания, что облегчает работу с устройством. Также проведена модернизация программного обеспечения устройства.

Предлагаемый прибор позволяет производить замеры концентрации сразу же нескольких газов: метан/пропан, бутан, водород и угарный газ. Данные с устройства поступают на смартфон, на котором возможна расшифровка данных с последующей визуализацией и загрузкой на сервер. Прибор сигнализирует о превышении ПДК контролируемого газа и посылает сигналы на главный сервер через смартфон.

Эта модификация позволила существенно расширить функционал устройства. Получена возможность визуально наблюдать изменения концентрации регистрируемых газов, просматривать на картах места проведения замеров и управлять программой в удобном интерфейсе.

Центральной вычислительной частью прибора является микроконтроллер ATmega 328P. Выбор микроконтроллера обусловлен его доступностью, универсальностью, достаточно высоким быстродействием, возможностью перепрограммирования выходов. К микроконтроллеру подключен набор газовых датчиков серии MQ (MQ4, MQ6, MQ7, MQ8) и датчик температуры и влажности DHT-22. Все газовые датчики работают одновременно в режиме диффузионного отбора пробы газа, что обеспечивает более экономичный расход энергии источника питания прибора [3, 5]. Каждый из датчиков можно заменять благодаря принципу модульности.

Связь микроконтроллера со смартфоном осуществляется по беспроводному каналу Bluetooth через модуль связи HC-06. При этом на смартфоне должна быть установлена программа Bluetooth terminal.

Практически все газоанализаторы требуют высокой степени защиты, поэтому к внешней оболочке следует предъявлять серьезные требования. Она должна быть герметичной, защищенной от воздействия атмосферы, влаги и пыли. На рис. 1 представлена 3D-модель корпуса проектируемого прибора. 3D-модель разработана в САПР Autodesk Inventor. Корпус предназначен для размещения в нем микроконтроллера ATmega 328P с подключенными датчиками измеряемых величин, модуля связи HC-06 и четырех аккумуляторных батарей типа 18650(168A). В корпусе прибора также предусмотрены разъем питания для подзарядки аккумуляторов и разъем для облегченного перепрограммирования микроконтроллера. Размеры корпуса – 100 × 150 × 30 мм.

Режим работы датчиков выбирается пользователем с помощью диалогового окна на смартфоне. Скриншот меню выбора датчиков представлен на рис. 2.

Важной особенностью предлагаемого устройства является возможность настраивать и программировать пороги срабатывания устройства, а также наличие памяти для записи результатов, времени и даты замеров.

Программное обеспечение (ПО) разрабатывается с помощью фреймворка Android Studio на языке программирования Java. ПО для смартфона не является кроссплатформенным, и работает исключительно в ОС семейства Android начиная с седьмой версии. Библиотека для сопряжения смартфона и прототипа используется сторонняя – Bluetooth SPP. Библиотека визуализации в виде графика также используется сторонняя – Anychart. В исходном прототипе программа была в одностраничном виде, но в данный момент программа переписана с использованием фрагмен-

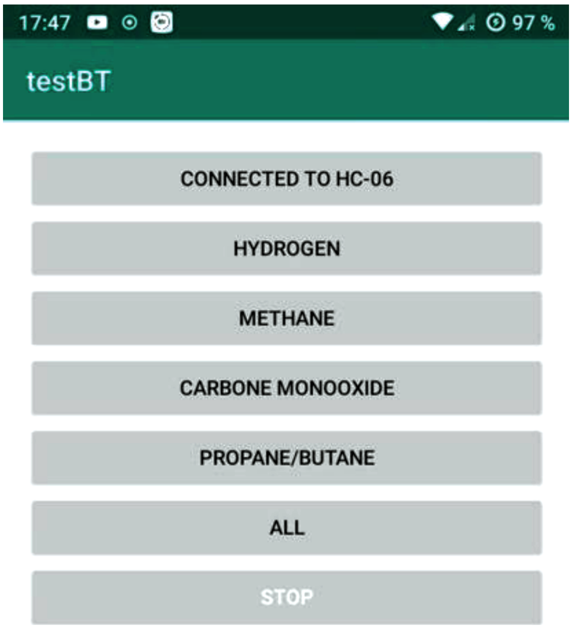


Рис. 2. Скриншот меню выбора датчиков.

тов, что соответствует современным стандартам программирования.

Для управления режимами вывода информации на экран смартфона разработано специальное меню, включающее следующие пункты: “Главное меню”, “Карта”, “График концентрации газов”.

Главное меню предназначено для настройки сопряжения с устройством по каналу Bluetooth, выгрузки данных в файл или настройки подключения к серверу.

На карте указываются координаты мест проведения замеров. Карты работают на базе картографического сервиса Google Maps API.

При выборе пункта “График концентрации газов” пользователь получает возможность визуально наблюдать изменение концентрации регистрируемого газа от времени (рис. 3).

В исходном прототипе данная информация предоставлялась дискретно [4].

В случае замены датчиков серии MQ единицы измерения концентрации будут представляться в стандартных единицах системы СИ.

Следует отметить, что предлагаемое устройство измеряет текущее значение концентрации газа. За время проведения измерений концентрация газов в воздухе может варьироваться из-за изменения условий (ветер, вентиляция), что проявляется в изменении показаний газоанализатора (рис. 3). В этом случае следует зафиксировать максимальное значение концентрации, полученное за время измерения в данной точке.

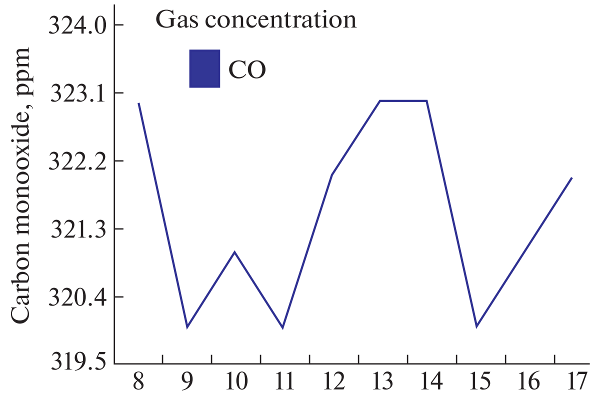


Рис. 3. Зависимость концентрации угарного газа от времени.

СФЕРА ПРИМЕНЕНИЯ РАЗРАБАТЫВАЕМОГО УСТРОЙСТВА

Проектируемый прибор является переносным, отличаются компактностью, мобильностью и простотой эксплуатации.

Важным назначением переносного газоанализатора для контроля параметров воздуха рабочей зоны принято считать обследование замкнутого пространства и подземных объектов на предмет наличия токсичных веществ и горючих газов, например, при оформлении допуска рабочих для осуществления работ [6].

Область применения предлагаемого устройства – измерение концентрации вредных веществ в воздухе рабочей зоны, в замкнутых помещениях (тоннелях, колодцах, дымоходах, трубопроводах и т.д.), при контроле вентиляционных выбросов; при аварийных ситуациях; поиск утечек в технологическом оборудовании и трубопроводах.

Газоанализатор может использоваться для определения загрязненности воздуха рабочей зоны на предприятиях лакокрасочной, химической, нефтехимической, нефтеперерабатывающей, пищевой промышленности, на предприятиях, связанных с хранением и транспортировкой нефти и нефтепродуктов. В чрезвычайных ситуациях, связанных с выбросами (или разливами) вредных и ядовитых веществ, а также при их ликвидации, с помощью газоанализатора можно выявить источники загрязнений, оценить степень опасности, направление и скорость перемещения загрязнителя в воздухе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемый прибор является многокомпонентным (пять измеряемых компонентов). Он надежный, удобный в работе, имеет такие дополнительные функции, как встроенная память, беспроводной интерфейс для передачи данных на

ПК, статистическая обработка результатов, отправление данных о превышении концентрации газа – через смс-сообщение (с одного мобильного устройства на другое, используя специальное приложение, Bluetooth). Благодаря своей уникальной конструкции и специально разработанному программному обеспечению, прибор способен в реальном времени проводить анализ нескольких компонентов газовой смеси одновременно и записывать в память полученную информацию. Прибор может использоваться для обеспечения безопасности работ, для контроля технологических процессов.

Следует отметить, что такие газоанализаторы незаменимы в промышленности, где необходимо непрерывно получать информацию о выбросах или контролировать технологический процесс в режиме реального времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Типы газоанализаторов. [Электронный ресурс]. URL: http://eurolabgas.ru/ tipy_gazoanalizatorov (дата обращения 10.09.2020).
2. *Ермолаева Н.В., Севастьянов Д.А.* Портативный газоанализатор на основе смартфона. // Тенденции развития науки и образования: сб. науч. тр. по материалам XIX междунар. науч. конф. Самара, 2016. Ч. 3. С. 12–13.
3. *Ермолаева Н.В., Севастьянов Д.А.* Устройство регистрации углеводородных газов на основе смартфона // Фундаментальные основы, теория, методы и средства измерений, контроля и диагностики: материалы 18-й Междунар. молодеж. науч.-практ. конф. Новочеркасск, 2017. С. 132–137.
4. *Ермолаева Н.В., Ратушный В.И., Севастьянов Д.А.* Мобильное устройство для обнаружения и контроля горючих и токсичных газов // Вестник национального исследовательского ядерного университета "МИФИ", 2018. Т. 7. № 1. С. 75–79.
5. *Севастьянов Д.А., Ермолаева Н.В., Рыбальченко А.Ю., Ратушный В.И.* Разработка газоанализатора с программным обеспечением для смартфона с ОС ANDROID // Студенческая научная весна–2020: сборник тезисов и статей ежегодной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Волгодонск: ВИТИ НИЯУ МИФИ, 2020. С. 64–67.
6. Классификация газоанализаторов. [Электронный ресурс]. URL: https://www.gazoanalizators.ru/poleznoe.html%26art%3D28 (дата обращения 20.10.2020).

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 5, pp. 455–459

Portable Multicomponent Gas Analyzer Compatible with an Android Smartphone

N. V. Ermolaeva[a,#], V. I. Ratushnyi[a,##], and D. A. Sevastyanov[a,###]

[a] *Volgodonsk Engineering and Technical Institute, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Volgodonsk, 347360 Russia*

[#]*e-mail: NVErmolayeva@mephi.ru*

[##]*e-mail: viratush@mail.ru*

[###]*e-mail:dima.nuclear@gmail.com*

Received October 31, 2020; revised October 31, 2020; accepted November 24, 2020

Abstract—A physical prototype of a universal gas analyzer has been presented for online measuring the concentration of several gases (methane, propane, butane, carbon monoxide, hydrogen). Software for an Android smartphone has also been developed in order to perform the visualization and management of data received from the gas analyzer. The smartphone is used to display information, to control the modes of displaying information on the screen, to determine the location of the user of the gas analyzer, and to send operational information to a remote server. At the moment, we can visually observe changes in the concentration of detected gases, view the measurement locations on maps, and manage the program in a convenient interface. The proposed prototype has compact controls, a built-in power supply, which facilitates the operation of the device. The Central computing part of the device is an ATmega 328P microcontroller, which is chosen due to its availability, versatility, and the ability to reprogram the outputs. The design of the device provides a connector for easy reprogramming. The measuring functionality of the device is determined by a set of sensors connected to the microcontroller, and does not depend on the smartphone model. Each sensor can be replaced owing to the modularity principle. The proposed device is compact, durable, easy to use, has an ergonomic design, performs real-time measurements, has various monitoring capabilities, and can be used for industrial and domestic purposes to control hazards directly at the location of a person.

Keywords: portable gas analyzer, smartphone, microcontroller, gas detection and control, methane, propane, carbon monoxide, hydrogen

DOI: 10.1134/S2304487X2005003X

REFERENCES

1. *Tipy gazoanalizatorov* (Types of Gas Analyzers). Available at http://eurolabgas.ru/tipy_gazoanalizatorov (accessed 10.09.2020).

2. Ermolaeva N.V., Sevastyanov D.A. Portativnyy gazoanalizator na osnove smartfona (Portable Gas Analyzer Based on a Smartphone), *Tendentsii razvitiya nauki i obrazovaniya: sb. nauch. tr. po materialam XIX mezhdunar. nauch. konf* (Trends in the Development of Science and Education: Collection of Scientific Tr. Based on the Materials of the XIX International. Scientific Conference), Samara, 2016, vol. 3, pp. 12–13 (in Russian).

3. Ermolaeva N.V., Sevastyanov D.A., Ustroystvo registratsii uglevodorodnykh gazov na osnove smartfona (Device for Registering Hydrocarbon Gases Based on a Smartphone), *Fundamentalnyye osnovy. teoriya. metody i sredstva izmereniy. kontrolya i diagnostiki: materialy 18-y Mezhdunar. molodezh. nauch.-prakt. konf.* (Fundamentals, Theory, Methods and Means of Measurement, Control and Diagnostics: Materials of the 18th International Conference the First One Scientific-Practical Conference), Novocherkassk, 2017, pp. 132–137 (in Russian).

4. Ermolaeva N.V., Ratushny V.I., Sevastyanov D.A., Mobilnoye ustroystvo dlya obnaruzheniya i kontrolya goryuchikh i toksichnykh gazov (Mobile Device for Detection and Control of Combustible and Toxic Gases), *Vestnik NIYaU MIFI*, 2018, vol. 7, no. 1, pp. 75–79 (in Russian).

5. Sevastyanov D.A. Ermolaeva N.V., Rybalchenko A.Yu., Ratushny V.I., *Razrabotka, gazoanalizatora s programmnym obespecheniyem dlya smartfona s OS ANDROID* (Development of a Gas Analyzer with Software for an ANDROID Smartphone), *Studencheskaya nauchnaya vesna – 2020: sbornik tezisov i statey ezhegodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii studentov. aspirantov i molodykh uchenykh* (Student Scientific Spring-2020: Collection of Abstracts and Articles of the Annual Scientific and Practical Conference of Students, Postgraduates and Young Scientists), Volgodonsk: VITI NIYaU MEPhI, 2020, pp. 64–67 (in Russian).

6. *Klassifikatsiya gazoanalizatorov* (Classification of Gas Analyzers), Available at https://www.gazoanalizators.ru/poleznoe.html%26art%3D28 (accessed 20.10.2020).

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 5, с. 460–469

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 621.039, 621.86, 51-74

КОНТРОЛЬ РАБОТЫ МАШИНЫ ПЕРЕГРУЗОЧНОЙ С ПОМОЩЬЮ ОТОБРАЖЕНИЯ ДИАГНОСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПРИЗНАКОВ

© 2020 г. Е. А. Абидова[1], В. В. Бойко[1], А. А. Лапкис[1,*]

[1] Волгодонский инженерно-технический институт – филиал Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ", Волгодонск, 347360, Россия

**e-mail: aalapkis@mephi.ru*

Поступила в редакцию 04.05.2020 г.
После доработки 08.11.2020 г.
Принята к публикации 10.11.2020 г.

В работе проанализированы результаты применения методов технической диагностики к контролю технического состояния машины перегрузочной энергоблока ВВЭР-1000. Оперативный контроль вибрационного состояния ее механизмов затруднен обилием возможных режимов работы, различающихся скоростью, направлением движения и весовыми нагрузками на захватах. С помощью инструментов кластерного анализа показано, какие вибрационные параметры позволяют обеспечить наилучшее разделение режимов работы механизмов в пространстве признаков.

На данных промышленного эксперимента на Ростовской АЭС построены типичные кластеры точек, соответствующих различным режимам работы механизмов МП. Показана необходимость использования как традиционных вибрационных параметров, так и коэффициента эксцесса виброускорения, учитывающего форму распределения вибрации. Анализ профилей компактности и соотношений между расстояниями внутри и между построенными кластерами позволил выявить режимные параметры, которые больше всего оказывают влияние на вибрационное состояние механизмов.

Ключевые слова: ВВЭР, перегрузка топлива, машина перегрузочная, диагностика, техническое состояние, кластеризация, кластерный анализ, пространство признаков, профиль компактности

DOI: 10.1134/S2304487X20050028

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ КОНТРОЛЯ ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ

В рамках задач, поставленных АО "Концерн Росэнергоатом" в части модернизации перегрузочных машин действующих энергоблоков АЭС, НИИ атомного энергетического машиностроения ВИТИ НИЯУ МИФИ в течение более чем 15 лет выполняет работы по обследованию, оценке технического состояния и ресурсных характеристик машин перегрузочных энергоблоков ВВЭР [1–3]. Практический опыт по поставке и сопровождению каналов виброакустического контроля на действующие и строящиеся АЭС (энергоблок № 1 Ростовской АЭС, энергоблоки 1 и 2 Тяньваньской АЭС) показал, что вибрационное состояние основных узлов и механизмов машины перегрузочной может быть связано с:

– режимом работы механизма (весовая нагрузка, скорость, направление движения и т.п.);

– техническим состоянием механизма (износ элементов, виброударные взаимодействия).

Постоянный мониторинг работы МП методами технической диагностики позволит повысить эффективность ее эксплуатации и сократить затраты времени на поиск дефектов и ремонт механизмов.

К особенностям перегрузочной машины как объекта контроля следует отнести огромное количество возможных режимов – сочетаний направления и скорости движения с типом перегружаемого изделия для каждого механизма (захват кассеты, захват кластера). Число таких режимов достигает нескольких десятков, что накладывает повышенные требования к системе контроля: признаки технического состояния должны обеспечивать качественное разделение как исправных и неисправных состояний, так и исправных состояний на разных режимах между собой.

2. ЗАДАЧА ИССЛЕДОВАНИЯ

Традиционно применяемые на оборудовании АЭС виброметры и виброанализаторы преиму-

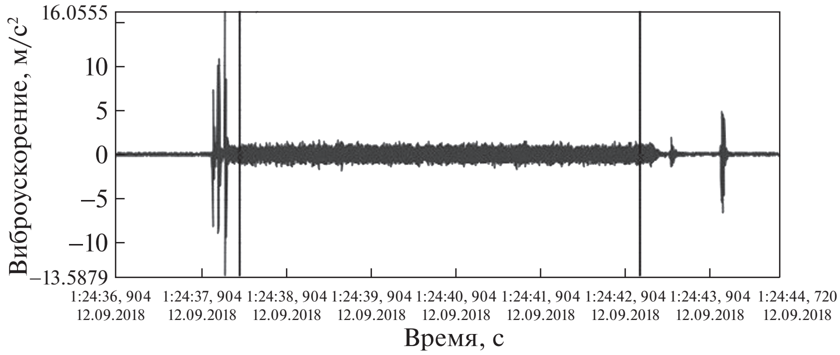


Рис. 1. Циклограмма срабатывания механизма фиксатора.

щественно делают оперативный вывод о техническом состоянии объекта (обычно это паровая турбина, насос или вентилятор, или иной вращающийся с высокой скоростью механизм) по изменению общего уровня вибрации. Экспертные системы, кроме того, применяют широко развитый математический аппарат спектрального анализа для поиска деталей, возбуждающих характерные колебания на соответствующих детерминированных частотах [4].

Авторами было показано ранее, что для механизмов МП, состоящих из низкочастотных вращающихся узлов, а также узлов с поступательным движением груза, спектральный анализ также позволяет выявить «звучание» отдельных кинематических пар и валов редуктора [5]. При этом применение наиболее распространенного подхода анализа по общему уровню вибрации для механизмов МП затруднено в связи с ограниченностью применения соответствующих ГОСТ [6] к их приводам.

В связи с этим выбор наиболее значимых признаков, описывающих вибрационное состояние механизмов машины перегрузочной, должен быть выполнен на основе промышленного эксперимента. Критерием важности того или иного параметра будут являться свойства идентифицируемости и изолируемости – способности данного набора параметров обеспечить различение нормальных режимов работы МП и режимов с отклонениями [7]. В качестве демонстрации подхода в настоящей работе использованы признаки вибрационного состояния механизма:

– среднеквадратическое значение виброускорения;

– пиковое значение виброускорения;

– пик-фактор;

– коэффициент эксцесса виброускорения.

Задача контроля в рассматриваемой системе сводится к необходимости оценить принадлежность вновь регистрируемых данных к известным классам. В данной работе требуется найти набор координат, в которых имеющиеся данные будут разделяться в пространстве состояний между известными классами наилучшим образом, для улучшения качества оценки новых сигналов. При этом имеющиеся данные получены на действующей перегрузочной машине АЭС при заведомо известном состоянии оборудования и известных режимах.

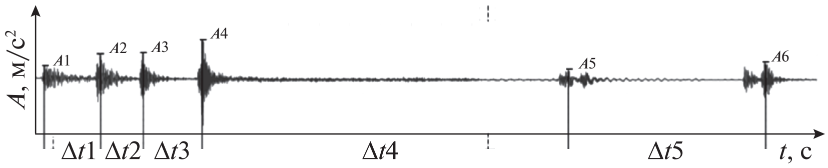
В качестве параметра в связи с наличием на Ростовской АЭС каналов виброакустического контроля МП, оснащенных виброакселерометрами, выбрано виброускорение, а вычисление всех признаков проведено программно на фрагментах сигнала одинаковой длины, равной одной секунде. Анализу подверглись перемещения механизмов захвата кластера (ЗКл) и захвата рабочей штанги (ЗРШ).

Для механизма фиксатора (винтового захвата) ТВС, циклограмма срабатывания которого приведена на рис. 1, построен индивидуальный виброакустический портрет срабатывания, содержащий 9 параметров, показанных на рис. 2. В его состав были включены амплитуды пиков виброускорения и длительности промежутков между ними.

Параметры портрета срабатывания фиксатора приведены на рис. 2.

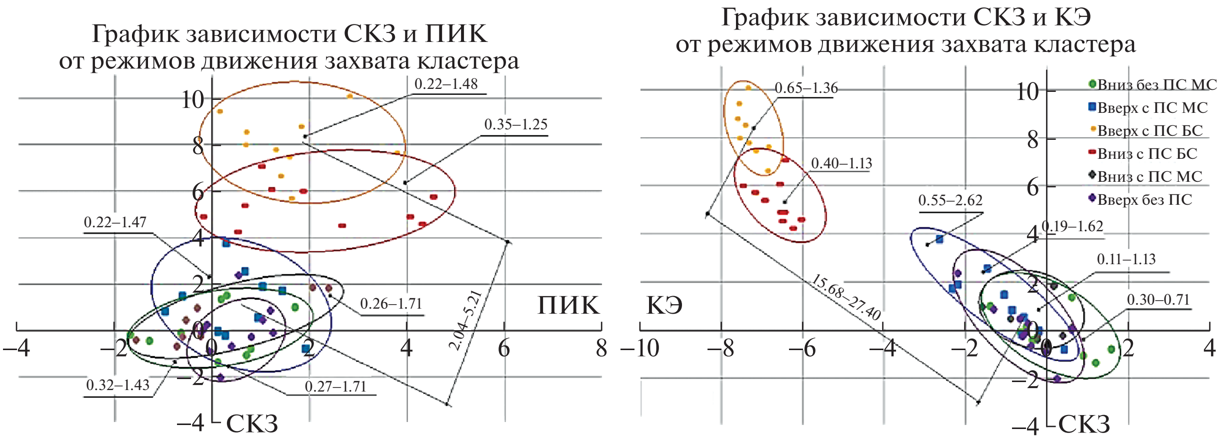
3. ИНСТРУМЕНТЫ ДЛЯ ВЫБОРА ПРИЗНАКОВ СОСТОЯНИЯ

Для выбора наиболее значимых признаков применен следующий подход. Набор признаков, вычисляемых для оценки технического состояния механизма на данном режиме, называется информационным портретом. Если от исключения признака из портрета свойство изолируемости, то есть разделения режимов в исправном состоянии, ухудшается, то данный признак являлся важным. Количественно ухудшение изолируемости может быть продемонстрировано с применением инструментов кластерного анализа.



$A1...A6$, м/с^2 – амплитуды импульсов (1...6 – номера импульсов)
$\Delta t1$ ... $\Delta t3$, мс – длительности импульсов (1...3 – номера импульсов)
$\Delta t4$, с и $\Delta t5$, мс – длительности участков с равномерным уровнем вибрации

Рис. 2. Параметры портрета срабатывания фиксатора.



МС – малая скорость, БС – большая скорость

Рис. 3. Примеры отображения режимов механизма ЗКл на плоскости.

Если каждый признак представить как координату и составить информационный портрет из n признаков, то один зарегистрированный сигнал можно отобразить как одну точку в n-мерном пространстве признаков $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$. При качественном выборе признаков точки, зарегистрированные на одинаковых режимах, возможно рассматривать как кластеры, вычисляя характерные расстояния внутри них и между ними.

Для вычисления расстояний при использовании данных различной размерности и вариабельности они должны быть подвергнуты нормированию. В данной работе применялось z-нормирование, при котором нормированное значение признака X_j для k-го сигнала равно

$$X_{j(k,н)} = \frac{X_{jk} - M(X_j)}{S(X_j)},$$

где $M(X)$ – математическое ожидание, $S(X)$ – среднеквадратическое отклонение в массиве значений X_j.

Расстояние d между точками k и m в нормированном пространстве использовано Евклидово

$$d(k,m) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(X_{j(k,н)} - X_{j(m,н)}\right)^2}.$$

Предварительное построение кластеров показало, что они имеют преимущественно вытянутую форму эллипсоидов или цепочек. Примеры таких кластеров показаны для портрета из двух признаков на рис. 3.

В качестве характерных расстояний для кластеров подобной формы рекомендуется оценка по расстоянию до ближайшего соседа [8]. В данной работе рассматривался вариант с оценкой средних расстояний внутри кластера, но был отброшен в связи с тем, что эти расстояния для некоторых режимов описывали слишком крупные области, не похожие по форме на имеющиеся массивы данных. Для оценки того, насколько кластеры удалены в пространстве признаков, использованы:

– средние попарные расстояния между точками

$$\overline{d(A,B)} = \frac{\sum_{1}^{NB}\sum_{1}^{NA} d(A_k, B_m)}{NA \cdot NB};$$

– минимальные расстояния между ближайшими точками разных кластеров

$$d_{\min}(A,B) = \min(d(A_k, B_m))$$
$$\text{при} \quad k = 1\,..\,NA, \quad m = 1\,..\,NB,$$

где NA и NB – соответственно числа элементов в кластерах A и B.

Таблица 1. Проанализированные режимы механизмов МП

Способ классификации	Для ЗКл	Для ЗРШ	Для фиксатора
По направлению движения	Вверх или вниз	Вверх или вниз	Сцепление или расцепление
По типу перегружаемого изделия	Пустой захват или ПС СУЗ	Пустой захват или ТВС	Только ТВС
По скорости перемещения	Малая, большая	0.6; 1.2; 2.0; 4.0; 6.0 м/мин	Скорость механизма не регулируется

Визуализация качества разделения режимов механизма тем или иным набором признаков может быть выполнена с помощью профиля компактности [9]. Профиль компактности определяется по формуле:

$$R(k,A,B) = \frac{1}{NA+NB}\sum_{j=1}^{m}[y_j \neq y_{j;xi}],$$

где $R(j)$ – доля объектов выборки, для которых i-й сосед лежит в другом классе; X^m – выборка; y_i и $y_{j;xi}$ – элементы обучающей и контрольной выборки, m – длина выборки.

Плавный рост профиля $R(k)$ указывает на недостаточно качественное разделение данных, при этом идеальному разделению соответствует скачкообразное изменение R от нуля до единицы при $k = NA$.

Описанный механизм вычисления метрик и профилей компактности был реализован в графической среде программирования LabView. Выбор инструмента разработки был обусловлен тем, что программное обеспечение канала виброакустического контроля анализируемой МП также написано в данной среде.

4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Виброакустические сигналы, зарегистрированные на Ростовской АЭС, были обработаны с вычислением четырех признаков вибрационного состояния механизмов подъема ЗРШ и ЗКл:

– среднеквадратическое значение виброускорения (далее СКЗ);

– пиковое значение виброускорения (далее ПИК);

– пик-фактор виброускорения (далее ПФ);

– коэффициент эксцесса (далее КЭ).

Для работы механизма фиксатора, как было сказано выше, определен виброакустический портрет из девяти признаков.

Режимы работы механизмов МП были классифицированы в соответствии с табл. 1.

Общее количество возможных режимов для привода ЗКл составило восемь (из которых фактически зарегистрированы шесть), для привода захвата кассеты – 20, а для фиксатора – два. При использовании четырехпараметрических портретов характерные минимальные расстояния внутри кластеров для отдельных режимов приведены в табл. 2.

В результате исключения одного из признаков портрет становится трехпараметрическим, а расстояния внутри и между кластерами изменяются. Для любой пары режимов при одном и том же наборе параметров может быть построен профиль компактности. Чем более важным являлся признак, тем сильнее будет выровнен профиль компактности при его исключении по сравнению с эталонным профилем (скачкообразное изменение от нуля до единицы, как было замечено выше). Примеры анализа изолируемости при исключении отдельных признаков приведены в табл. 2 и 3 и на рис. 1–6.

В табл. 2 средние расстояния между рассмотренными режимами построены в матричной форме: на пересечении строк и столбцов занесены расстояния между соответствующими режимами, а на главной диагонали – средние расстояния внутри самих этих режимов. Характерные расстояния между режимами с различными скоростями (МС и БС) заметно уменьшаются, если исключить коэффициент эксцесса виброускорения из числа признаков. Уменьшение данных метрик можно трактовать как слияние различных режимов работы механизма в пространстве признаков.

Средние расстояния внутри отдельных режимов в случае анализа вибрации привода МП достаточно часто, в соответствии с табл. 1, оказываются выше, чем расстояния между разными режимами. Повысить изолируемость можно, перейдя в соответствии с вышесказанным, на анализ расстояния до ближайшего соседа, которое больше подходит для оценки принадлежности к кластеру сильно вытянутой формы [8]. Демонстрация такого подхода приведена в табл. 3 и 4, где выполнено сопоставление расстояния до ближайшего соседа внутри конкретного режима с расстоянием между ближайшими точками разных режимов. Для визуализации слияния/разделения режимов на рис. 4, 5 также приведены профили компактности для проанализированных пар режимов.

Примеры анализа, приведенные на рис. 4, показывают, что исключение эксцесса из числа ана-

Таблица 2. Расстояния между кластерами в пространстве трех признаков (исключен признак пик-фактор)

Режим механизма	вверх с ПС БС	вверх с ПС МС	вниз с ПС БС	вниз с ПС МС	вниз без ПС МС	вверх без ПС МС
Исключен признак пик-фактор						
вверх с ПС БС	2.31	23.46	4.15	11.16	26.95	25.85
вверх с ПС МС	23.46	5.50	6.79	2.70	2.79	2.30
вниз с ПС БС	4.15	6.79	3.27	15.49	16.02	15.02
вниз с ПС МС	11.16	2.70	15.49	3.92	2.55	2.48
вниз без ПС МС	26.95	2.79	16.02	2.55	2.21	2.32
вверх без ПС МС	25.85	2.30	15.02	2.48	2.32	4.33
Исключен признак эксцесс						
вверх с ПС БС	2.31	6.34	3.62	6.65	7.18	7.27
вверх с ПС МС	6.34	2.31	4.53	2.55	2.56	2.20
вниз с ПС БС	3.62	4.53	2.31	6.00	6.55	6.44
вниз с ПС МС	6.65	2.55	6.00	2.31	2.45	2.45
вниз без ПС МС	7.18	2.56	6.55	2.45	2.21	2.27
вверх без ПС МС	7.27	2.20	6.44	2.45	2.27	2.08

Таблица 3. Совместный анализ важности признаков и режимных параметров работы механизма ЗКл

Изменение режима	Изменение скорости	Изменение весовой нагрузки	Изменение направления
Режим А Режим Б	Вниз с ПС – малая Вниз с ПС – большая	Вниз с ПС – малая Вниз без ПС – малая	Вниз с ПС – малая Вверх с ПС – малая
Набор признаков без пик-фактора			
Расстояние до ближайшего соседа внутри режима А	0.26–1.15	0.26–1.15	0.26–1.15
Расстояние до ближайшего соседа внутри режима Б	0.81–1.58	0.43–1.29	0.411–2.18
Расстояние между точками из режима А до точек из режима Б	8.29–10.25	0.24–1.89	0.50–3.37
Набор признаков без эксцесса			
Расстояние до ближайшего соседа внутри режима А	0.44–1.29	0.44–1.29	0.44–1.29
Расстояние до ближайшего соседа внутри режима Б	0.56–1.70	0.32–2.01	0.38–2.62
Расстояние между точками из режима А до точек из режима Б	2.99–6.77	0.20–2.02	0.44–3.17

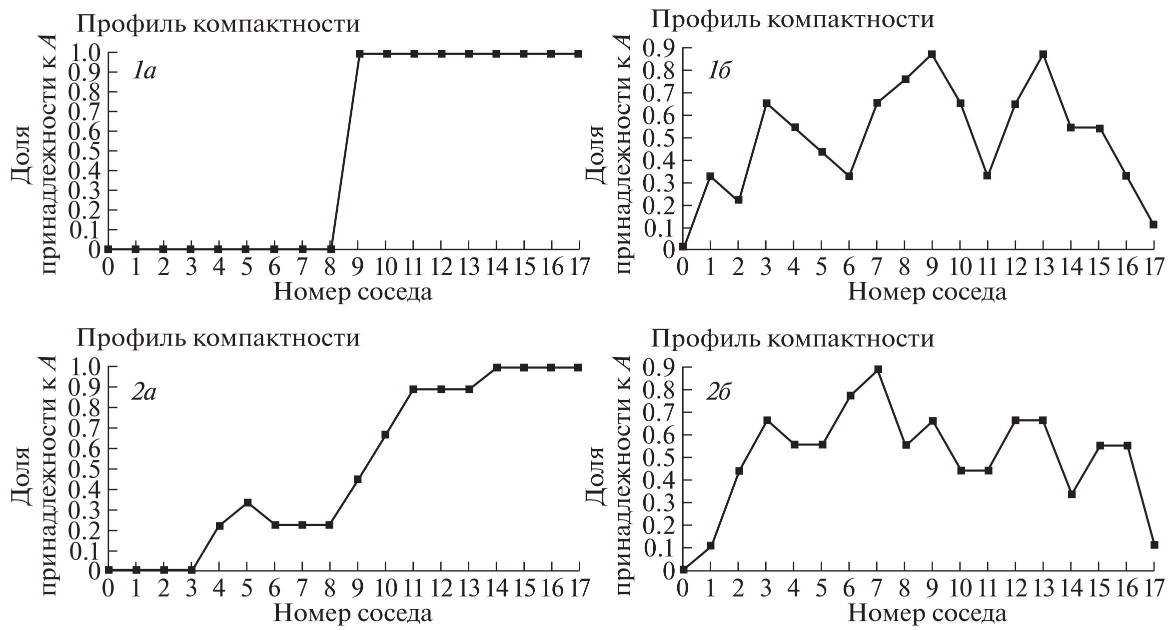
лизируемых параметров, приводят к деформации профиля компактности, свидетельствующей о неразделении режимов в пространстве оставшихся признаков.

Аналогичный анализ, выполненный для режимов перемещения захвата кассеты, приведен в табл. 4.

Анализ профилей компактности и расстояний до ближайшего соседа показывает, что для обоих рассмотренных механизмов:

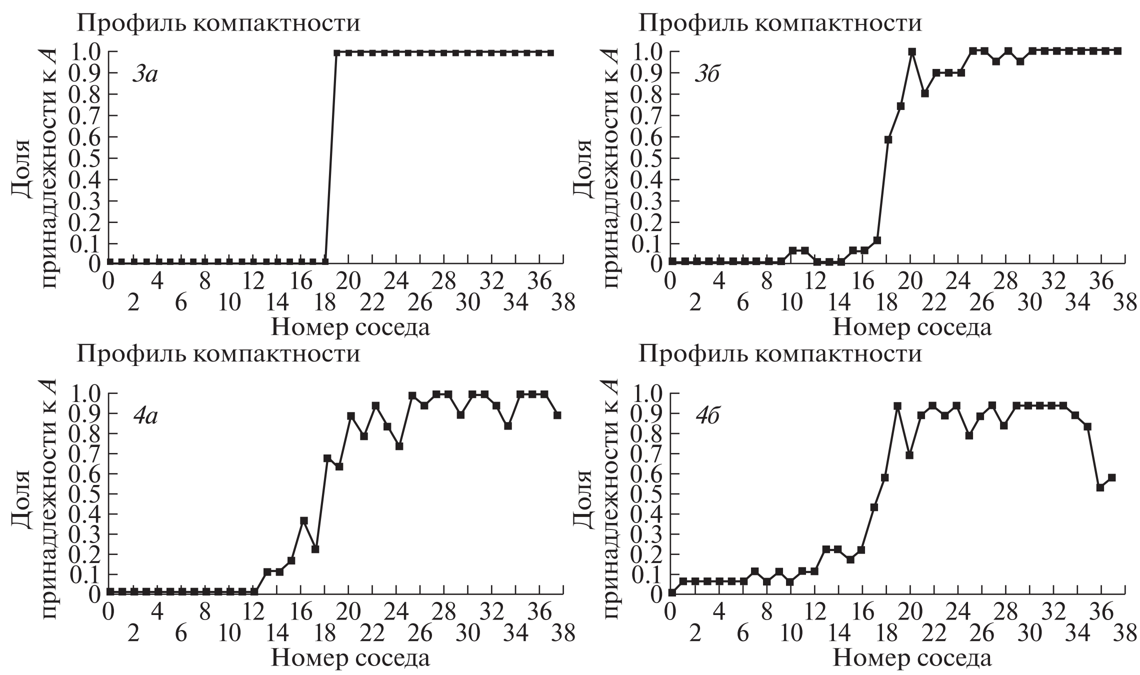
– исключение из признаков коэффициента эксцесса виброускорения способствует ухудшению изолируемости – разделения режимов МП в пространстве признаков;

– при изменении скорости движения механизма его режимы эффективно разделяются в пространстве признаков, то есть определяющим режимным параметром для оценки вибрационного состояния МП является скорость;



1 — без пик-фактора, *2* — без эксцесса, *а* — изменение скорости, *б* — изменение направления

Рис. 4. Типовые профили компактности разделения режимов механизма ЗКл.



3 — без пик-фактора, *4* — без эксцесса, *а* — изменение скорости, *б* — изменение направления

Рис. 5. Типовые профили компактности разделения режимов механизма ЗРШ.

– для более мощного механизма подъема ЗРШ достаточно эффективно разделяются режимы с движениями вверх и вниз при прочих неизменных параметрах;

– практически никакого влияния на вибрационное состояние не оказывает весовая нагрузка на механизм, выражаемая как наличие или отсутствие в захвате перегружаемого изделия.

Для механизма фиксатора вычисление характерных метрик, разделяющих портреты сцепления и расцепления с ТВС, позволило отделить друг от друга как нормальные режимы работы, так и режимы, для которых был выявлен дефект (растяжение каната фиксатора). Основные результаты анализа работы фиксатора приведены в табл. 5, а типовые профили компактности – на

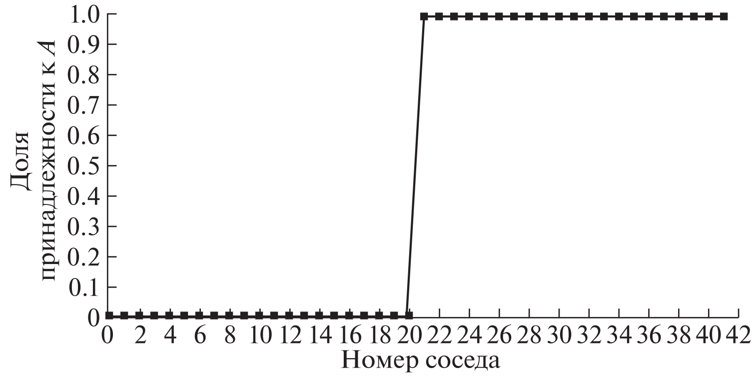


Рис. 6. Профиль компактности между режимами сцепления и расцепления с ТВС.

рис. 6, 7. Тонкой вертикальной линией на рис. 7 отделены точки режима А от режима Б в соответствии с табл. 5.

Инструменты кластерного анализа позволили отделить друг от друга как различные режимы работы исправного механизма фиксатора, так и подтвердить отделение от них режима с дефектом механизма. При этом внутри кластеров с успешными срабатываниями механизма случайно отобранная подвыборка не отделяется от остальных точек.

На основании выполненной работы система виброакустического контроля может быть дополнительно снабжена модулем контроля сцепления с ТВС по степени отличия от эталонной работы механизма.

Таблица 4. Совместный анализ важности признаков и режимных параметров работы механизма ЗРШ

Изменение режима	Изменение скорости		Изменение весовой нагрузки	Изменение направления	Изменение числа секций
Режим А	Вверх с ТВС, 2 секции, 6 м/мин	Вверх с ТВС, 2 секции, 6 м/мин	Вверх с ТВС, 2 секции, 6 м/мин	Вверх без ТВС, 1 секция, 6 м/мин	Вверх без ТВС, 1 секция, 6 м/мин
Режим Б	Вверх с ТВС, 2 секции, 0.6 м/мин	Вверх с ТВС, 2 секции, 2 м/мин	Вверх без ТВС 2 секции, 6 м/мин	Вниз без ТВС, 1 секция, 6 м/мин	Вверх без ТВС, 2 секции, 6 м/мин
Набор признаков без пик-фактора					
Расстояние до ближайшего соседа внутри режима А	0.30–1.58	0.30–1.58	0.30–1.58	0.21–1.10	0.21–1.10
Расстояние до ближайшего соседа внутри режима Б	0.14–4.09	0.29–6.44	0.39–2.46	0.41–4.12	0.36–2.87
Расстояние между точками из режима А до точек из режима Б	13.49–17.26	0.11–5.86	0.44–5.96	3.51–6.44	0.83–6.29
Набор признаков без эксцесса					
Расстояние до ближайшего соседа внутри режима А	0.20–1.60	0.20–1.60	0.20–1.60	0.15–1.19	0.15–1.19
Расстояние до ближайшего соседа внутри режима Б	0.11–3.56	0.10–2.26	0.11–1.97	0.09–5.46	0.09–1.43
Расстояние между точками из режима А до точек из режима Б	2.69–9.19	0.10–3.55	0.22–5.27	1.04–4.16	0.28–3.11

Таблица 5. Основные метрики кластеров сцепления и расцепления с ТВС

Вид сравнения	Два кластера с исправными механизмами	Два кластера с исправными механизмами	Кластер с неисправностью и кластер с исправным механизмом	Два кластера с исправными механизмами
Режим А	Три случайно выбранных расцепления	Три случайно выбранных сцепления	Три сцепления, с дефектами	Все сцепления, без дефектов
Режим Б	Все остальные расцепления	Все остальные сцепления	Все сцепления, без дефектов	Все расцепления, без дефектов
Среднее расстояние между Б и А	4.49	4.04	13.42	815.6
Среднее расстояние между точками внутри А	4.14	4.12	4.14	4.10
Среднее расстояние между точками внутри Б	4.40	2.29	2.34	81.56
Наибольшее расстояние до ближайшего соседа внутри А	3.47	4.98	5.25	5.26
Наибольшее расстояние до ближайшего соседа внутри Б	5.21	2.82	2.19	91.63
Минимальное расстояние между ближайшими соседями в Б и А	1.24	1.18	10.72	654.8

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При создании системы контроля технического состояния механизма, работающего на большом числе режимов, хорошие результаты показали инструменты кластерного анализа. Для обоснования выбора рассчитываемых признаков состояния следует выполнить следующую последовательность:

– отобразить зарегистрированные сигналы в z-нормированном виде в многомерном пространстве признаков;

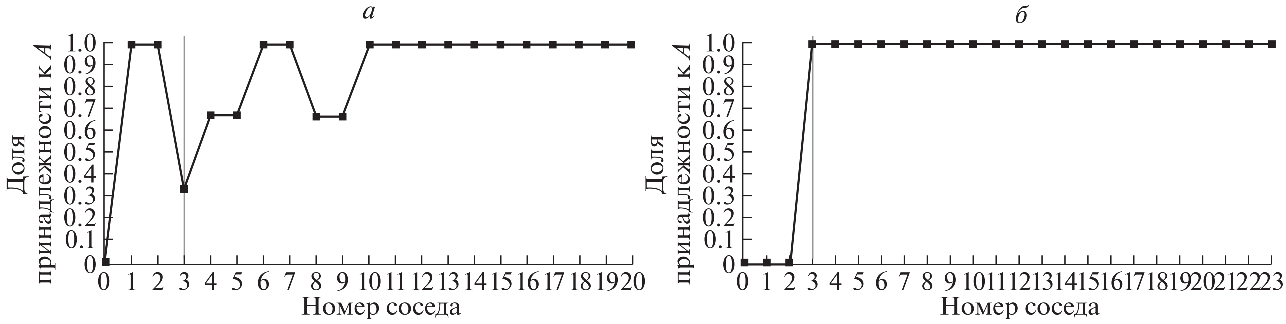
– вычислить основные характерные метрики полученных кластеров;

– исключая по очереди признаки, отследить изменение метрик и деформацию профилей компактности;

– выбрать наиболее важные признаки из числа тех, которые при исключении сильнее всего снижают расстояние между кластерами с различными режимами работы механизма и выравнивают профиль компактности между ними.

Применение инструментов кластерного анализа позволило оценить количественно изменение вибрационного состояния механизма при появлении дефекта, что было показано на примере анализа работы фиксатора ТВС.

Для системы вибродиагностики перегрузочной машины энергоблока ВВЭР-1000 применение вы-



а – профиль между исправными и исправными состояниями, *б* – профиль между неисправными и исправными состояниями

Рис. 7. Профили компактности между режимами сцепления с ТВС.

шеописанного алгоритма позволило обоснованно ввести коэффициент эксцесса виброускорения в число наиболее важных характеристик вибрационного состояния механизмов, а также не рассматривать отдельно оценку вибрационного состояния для режимов, плохо разделяемых в пространстве признаков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никифоров В.Н., Пугачева О.Ю., Паламарчук А.В., Елжов Ю.Н., Первушин Л.А.* Контроль технического состояния рабочей штанги перегрузочной машины для ВВЭР-1000 // Теплоэнергетика. 2003. № 5. С. 33–34.
2. *Лапкис А.А., Никифоров В.Н., Первушин Л.А.* Виброакустическая паспортизация режимов работы машин перегрузочных энергоблоков ВВЭР // Глобальная ядерная безопасность. 2018. № 2 (27). С. 82–90.
3. *Лапкис А.А., Малахов И.В., Никифоров В.Н., Поваров В.П.* Вопросы виброакустической паспортизации процессов перегрузки ядерного топлива энергоблоков ВВЭР / Доклад на Международной научно-практической конференции "55 лет безопасной эксплуатации АЭС с ВВЭР в России и за рубежом". 23–27 сентября 2019 г. Нововоронеж, 2019.
4. *Русов В.А.* НПФ "Вибро-центр". Диагностика дефектов вращающегося оборудования по вибрационным сигналам. https://vibrocenter.ru/book2012.htm (дата обращения 15.03.2020).
5. *Бойко В.В., Лапкис А.А.* Построение эталонных виброакустических портретов операций перегрузки ядерного топлива / Системы обеспечения техносферной безопасности: материалы VI Всероссийской конференции и школы для молодых ученых (Таганрог, Россия, 4–5 октября 2019 г.) Ростов-на-Дону. Таганрог: Изд-во Южного федерального университета, 2019. С. 32–34.
6. Комплекс ГОСТ ИСО 10816. Вибрация. Контроль состояния машин по результатам измерений вибрации на невращающихся частях.
7. *Муха Ю.П., Авдеюк О.А., Королева И.Ю.* Информационно-измерительные системы с адаптивными преобразованиями. Управление гибкостью функционирования. Монография. Волгоград: ВолгГТУ, 2010. 303 с.
8. StatSoft, Inc. (2012). Электронный учебник по статистике. Москва, StatSoft. http://www.statsoft.ru/home/textbook/default.htm (дата обращения 15.03.2020).
9. *Воронцов К.В., Колосков А.О.* Профили компактности и выделение опорных объектов в метрических алгоритмах классификации // Искусственный Интеллект. 2006. С. 30–33.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 5, pp. 460–469

Monitoring the Technical Condition of a Refueling Machine Using Representation in a Multidimensional Feature Space

E. A. Abidova[a], V. V. Boiko[a], and A. A. Lapkis[a,#]

[a] *Volgodonsk Engineering and Technical Institute, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Volgodonsk, 347360 Russia*

[#]*e-mail: aalapkis@mephi.ru*

Received May 4, 2020; revised November 8, 2020; accepted November 10, 2020

Abstract—The possibility of applying the methods of technical diagnostics to monitor the technical condition of the VVER-1000 power unit refueling machine (RM) has been analyzed. Operational monitoring of the vibrational state of its mechanisms is complicated by the abundance of possible operating modes, differing in speed, direction of movement, and weight loads on the grips. Cluster analysis tools have shown which vibration parameters allow the best separation of the operating modes of mechanisms in the normalized feature space.

Typical clusters of points corresponding to different operation modes of the RM mechanisms have been constructed on the data of an industrial experiment at the Rostov NPP. The necessity of using both traditional vibrational parameters and vibration acceleration kurtosis taking into account the form of vibration distribution has been shown. The analysis of the compactness profiles and the relationships between the distances inside and between the built clusters has revealed the regime parameters that mostly affect the vibrational state of the mechanisms.

Keywords: VVER, refueling, refueling machine, diagnostics, technical condition, clustering, cluster analysis, feature space, compactness profile

DOI: 10.1134/S2304487X20050028

REFERENCES

1. Nikiforov V.N., Pugacheva O.Yu., Palamarchuk A.V., Elzhov Yu.N., Pervushin L.A., Kontrol tekhnicheskogo sostoyaniya rabochey shtangi peregruzochnoy mashiny dlya VVER-1000 (Control of the Technical Condition of the Working Rod of the Reloading Machine for VVER-1000), *Teploenergetika*, 2003, no. 5, pp. 33–34 (in Russian).
2. Lapkis A.A., Nikiforov V.N., Pervushin L.A., *Vibroakusticheskaya pasportizatsiya rezhimov raboty mashin peregruzochnykh energoblokov VVER* (Vibroacoustic certification of operating modes of VVER reloading power units machines), Globalnaya yadernaya bezopasnost, 2018, no. 2 (27), pp. 82–90 (in Russian).
3. Lapkis A.A., Malakhov I.V., Nikiforov V.N., Povarov V.P., (Questions of vibroacoustic certification of processes of nuclear fuel overload of VVER power units), *Doklad na Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii "55 let bezopasnoy ekspluatatsii AES s VVER v Rossii i za rubezhom"* (Report at the International scientific and practical conference "55 years of safe operation of nuclear power plants with VVER in Russia and abroad", Novovoronezh, 2019 (in Russian).
4. Rusov V.A., *Diagnostika defektov vrashchayushchegosya oborudovaniya po vibratsionnym signalam* (Diagnostics of Rotating Equipment Defects by Vibration Signals), Available at https://vibrocenter.ru/book2012.htm. Accessed 15.03.2020.
5. Boyko V.V., Lapkis A.A. (Construction of reference vibroacoustic portraits of nuclear fuel overload operations), *Sistemy obespecheniya tekhnosfernoy bezopasnosti: materialy VI Vserossiyskoy konferentsii i shkoly dlya molodykh uchenykh* (Systems for Ensuring Technosphere Security: Proceedings of the VI All-Russian Conference and School for Young Scientists), Taganrog, 2019, pp. 32–34 (in Russian).
6. GOST ISO 10816, Vibratsiya, Kontrol sostoyaniya mashin po rezultatam izmereniy vibratsii na nevrashchayushchikhsya chastyakh (State Standard ISO 10816, Mechanical Vibration, Evaluation of Machine Vibration by Measurements on Non-Rotating Parts), Gosstandart of Russia, 1999, 29 p.
7. Mukha Yu.P., Avdeyuk O.A., Koroleva I.Yu., *Informatsionno-izmeritelnyye sistemy s adaptivnymi preobrazovaniyami. Upravleniye gibkostyu funktsionirovaniya* (Information and Measurement Systems with Adaptive Transformations. Managing the Flexibility of Functioning), Volgograd, VolgGTU, 2010, 303 p.
8. Borovikov V.P., Populyarnoye vvedeniye v sovremennyy analiz dannykh v sisteme STATISTICA (A Popular Introduction to Modern Data Analysis in the STATISTICA System), Available at http://www.statsoft.ru/home/textbook/default.htm. Accessed 15.03.2020.
9. Vorontsov K.V., Koloskov A.O., *Profili kompaktnosti i vydeleniye opornykh obyektov v metricheskikh algoritmakh klassifikatsii* (Compactness Profiles and Selection of Reference Objects in Metric Classification Algorithms), Iskusstvennyy Intellekt, 2006, pp. 30–33 (in Russian).

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2020, том 9, № 5, с. 470–474

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 621.039

ВЫБОР И УСТОЙЧИВОСТЬ ОПТИМАЛЬНОГО ВАРИАНТА ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ПРИ ВЫВОДЕ ИЗ ЭКСПЛУАТАЦИИ ОБЪЕКТОВ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

А. В. Крянев[1,3,*], В. В. Бочкарев[1,2], Б. Д. Бриллиантов[1,2]

[1] Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

[2] НТЦ ядерной и радиационной безопасности, Москва, 107140, Россия

[3] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, 141980, Россия

**e-mail: avkryanev@mephi.ru*

Поступила в редакцию 20.09.2020 г.
После доработки 10.10.2020 г.
Принята к публикации 10.11.2020 г.

В статье приведены схемы и алгоритмы выбора оптимального варианта технологического процесса вывода из эксплуатации объектов использования атомной энергии, а также определение степени устойчивости выбранного варианта в условиях неопределенности исходных данных. Неопределенности экспертных оценок и расчетных значений части этих данных порождают неопределенности значений показателей для вариантов технологического процесса вывода из эксплуатации объектов использования атомной энергии. Рассматривается схема выбора оптимального варианта технологического процесса и определения его устойчивости в условиях неопределенности показателей, характеризующих каждый рассматриваемый вариант ВЭ (перечень возможных показателей представлен ниже). Выбор оптимального варианта технологического процесса производится на основе комплексного показателя, объединяющего частные показатели в виде линейной суперпозиции для каждого рассматриваемого варианта технологического процесса вывода из эксплуатации. Согласно предложенной схеме выбор оптимального варианта технологического процесса осуществляется по максимальному для всех рассматриваемых вариантов вывода из эксплуатации среднему ожидаемому значению комплексных показателей для этих вариантов, а устойчивость оптимального варианта технологического процесса тестируется относительно значения комплексного показателя для оптимального варианта технологического процесса для минимально возможного значения по каждому частному показателю.

Ключевые слова: вывод из эксплуатации (ВЭ), объекты использования атомной энергии (ОИАЭ), ядерно-радиационная безопасность (ЯРБ), технологический процесс, оптимальный вариант, показатели, устойчивость, неопределенность

DOI: 10.1134/S2304487X20050065

1. ВВЕДЕНИЕ

В мировой практике при определении варианта вывода из эксплуатации, как правило, используется многофакторный анализ параметров, которые влияют на выбор того или иного варианта [1–11]. Следовательно, задачу по выбору и обоснованию варианта технологического процесса вывода из эксплуатации можно представить как задачу поиска оптимального решения в многокритериальном пространстве и условно разбить на следующие этапы:

1. Определение показателей (факторов), которые необходимо учитывать, и которые влияют на выбор того или иного варианта вывода из эксплуатации;

2. Проведение многофакторного анализа, решение задачи оптимизации;

3. Сравнительная оценка вариантов технологического процесса вывода из эксплуатации по полученным результатам многофакторного анализа;

4. Выбор оптимального варианта технологического процесса ВЭ ОИАЭ;

5. Исследование устойчивости выбранного варианта технологического процесса ВЭ;

6. Принятие обоснованного решения о выборе оптимального варианта технологического процесса ВЭ.

В настоящей работе предлагается следующий подход к выбору и обоснованию оптимального варианта ВЭ ОИАЭ: при сопоставлении рассматриваемых возможных вариантов ВЭ рекомендуется опираться на методы многофакторного выбора на конечном множестве альтернатив (вариантов ВЭ ОИАЭ).

Например, в качестве минимального набора показателей каждого из рассматриваемых вариантов ВЭ ОИАЭ можно взять:

– стоимость реализации варианта технологического процесса ВЭ;

– длительность реализации варианта технологического процесса ВЭ;

– дозовая нагрузка на персонал, реализующий технологический процесс ВЭ;

– дозовая нагрузка на окружающую среду.

На этапе идентификации вариантов ВЭ ОИАЭ для каждого варианта технологического процесса ВЭ ОИАЭ определяются количественные значения каждого показателя.

Таким образом, задача выбора оптимального варианта технологического процесса ВЭ ОИАЭ для дальнейшей его реализации является задачей многокритериального выбора на конечном множестве альтернатив, осложненная: неопределенными значениями оценок объемов производимых работ; размытостью используемых оценок экспертов; необходимостью учета возможных рисков и неопределенностей; многовариантными подходами к обращению с РАО, образующимися при демонтаже и дезактивации основного технологического оборудования и инженерной инфраструктуры (оборудование, помещения, вентиляция, спецканализация, транспортеры, промплощади и так далее).

2. ВЫБОР И АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО ВАРИАНТА ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ВЭ ОИАЭ

В этом разделе приведена схема выбора оптимального варианта технологического процесса ВЭ ОИАЭ и анализа его устойчивости на основе комплексного показателя, объединяющего частные показатели в виде линейной суперпозиции для каждого рассматриваемого варианта вывода из эксплуатации. Согласно предложенной схеме выбор оптимального варианта осуществляется по максимальному для всех рассматриваемых вариантов вывода из эксплуатации среднему ожидаемому значению комплексных показателей для этих вариантов, а устойчивость оптимального варианта тестируется относительно значения комплексного показателя для оптимального варианта для минимально возможного значения по каждому частному показателю.

Для расчета частных показателей каждого варианта технологического процесса ВЭ ОИАЭ необходимо знать физические характеристики конструкций и систем, образующих выводимый из эксплуатации объект.

Ниже представлен некоторый перечень типовых основных физических характеристик конструкций выводимого из эксплуатации объекта:

1) Каждая конструкция (элемент) имеет неопределенные числовые значения показателей ($П_{ср}$., $\sigma_П$);

2) Материальный объем (вес, площадь, длина с указанием качественной характеристики материалов, учитываемой в расчетах показателей технологических операций по демонтажу, дезактивации, переработке, транспортировке, захоронении и другие);

3) Характеристика (показатели) радиационного заражения (объем РАО, его тип и другие);

4) Каждой конструкции (элемента) соответствует набор нескольких возможных технологических операций по ВЭ этой конструкции (минимальное число – одна операция, максимальное – 5).

Для каждой пары конструкция – технологическая операция рассчитаны характеристики (с погрешностями, описываемые СКО – σ).

В качестве базовых частных показателей, характеризующих, как пару конструкция–технологическая операция, так и вариант в целом, взят следующий их набор:

1) Стоимость работ – $СР_i$, $\sigma_{СРi}$;

2) Длительность работ – $ДЛ_i$, $\sigma_{ДЛi}$;

3) Дозовая нагрузка на персонал – $ДНП_i$, $\sigma_{ДНi}$;

Объем и вид (жидкий, твердый) материала с РАО с количеством РАО в каждом виде, на основе которых подсчитываются две характеристики (с неопределенностями):

4) Дозовые нагрузки на окружающую среду – $Д_{НОi}$, $\sigma_{ДНОi}$;

5) Дозовые нагрузки на население – $Д_{ННi}$, $\sigma_{ДННi}$.

Здесь $СР_i$, $ДЛ_i$, $ДНП_i$, $ДНО_i$, $ДНН_i$ – средние значения частных показателей; $\sigma_{СРi}$, $\sigma_{ДЛi}$, $\sigma_{ДНi}$, $\sigma_{ДНОi}$, $\sigma_{ДННi}$ – СКО этих показателей.

<u>Замечание</u>. Для некоторых объектов часть характеристик может отсутствовать, например, дозовые нагрузки ДНО и ДНН.

Для каждой конструкции ВЭ с несколькими возможными технологическими операциями ($i = 1, ..., n$), подсчитывается комплексный показатель приоритета K_i по ВЭ с технологической операции i:

$$K_i = \alpha_1 СР_{Нi} + \alpha_2 ДЛ_{Нi} + \alpha_3 ДНП_{Нi} + \alpha_4 ДНО_{Нi} + \alpha_5 ДНН_{Нi}, \tag{1}$$

где $\alpha_j, j = 1, 5$ – введенные (принятые) коэффициенты приоритета частных показателей $0 \le \alpha_j \le 1$,

$\sum_{j=1}^{5}\alpha_j = 1$, $СР_{Нi}$, $ДЛ_{Нi}$, $ДНП_{Нi}$, $ДНО_{Нi}$, $ДНН_{Нi}$ – нормированные значения частных показателей, подсчитываемых, например, для показателя $СР_{Нi}$ согласно формуле:

$$СР_{Нi} = \frac{СР_{макс} - СР_i}{СР_{макс} - СР_{мин}}, \quad (2)$$

где:

$$\begin{aligned} СР_{макс} &= \max(СР_1,\ldots,СР_n);\\ СР_{мин} &= \min(СР_1,\ldots,СР_n). \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогично производится нормирование остальных показателей.

Оптимальным вариантом считается тот, у которого комплексный показатель имеет максимальное значение.

Влияние степени неопределенности показателей операций и, как следствие, неопределенности частных показателей для выводимого из эксплуатации ОИАЭ можно учитывать с помощью ниже приведенной схемы.

Подсчитываются комплексные показатели неопределенности для каждого технологического процесса – пары "конструкция–технологическая операция":

$$\begin{aligned} K_{i\sigma} = \alpha_1 СР_{Нi\sigma} + \alpha_2 ДЛ_{Нi\sigma} + \alpha_3 ДНП_{Нi\sigma} + \\ + \alpha_4 ДНО_{Нi\sigma} + \alpha_5 ДНН_{Нi\sigma}, \end{aligned} \quad (4)$$

где α_i – прежние (смотри (1)), а

$$СР_{Нi\sigma} = \frac{СР_{\sigma макс} - СР_{i\sigma}}{СР_{\sigma макс} - СР_{\sigma мин}}, \quad (5)$$

где:

$$\begin{aligned} СР_{\sigma макс} &= \max(СР_{1\sigma},\ldots,СР_{n\sigma});\\ СР_{\sigma мин} &= \min(СР_{1\sigma},\ldots,СР_{n\sigma});\\ СР_{i\sigma} &= \sigma_{СРi}, \quad i = 1,\ldots,n. \end{aligned} \quad (6)$$

Нормированные значения других показателей неопределенности подсчитываются аналогично (6).

Подставляются предельные значения показателей и предельные значения комплексного показателя $K_{i\sigma}$ для каждого технологического процесса.

Подсчитываются значения интегральных комплексных показателей технологического процесса с учетом неопределенности

$$K_{i\,\mathrm{int}} = (1-\beta)K_i + \beta K_{i\sigma}, \quad (7)$$

где $\beta \in [0,1]$ – коэффициент значимости учета неопределенности в значении комплексного показателя K_i.

Технологический процесс с номером $i^* = \max\{K_{i\,\mathrm{int}}, i = 1,\ldots,n\}$ выбирается как оптимальный и подлежащий реализации.

В частности, если $i^* = \max\{i : K_{i\,\mathrm{int}}, i = \overline{1,n}\}$ и одновременно $i^* = \max\{i : K_{i\sigma}, i = \overline{1,n}\}$, то технологический процесс с номером i^* называется устойчивым. В противном случае такой вариант выбора технологического процесса называется условно устойчивым.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлена схема выбора оптимального варианта технологического процесса при ВЭ ОИАЭ и определение его устойчивости. Предлагается схема выбора оптимального варианта технологического процесса на основе значений частных показателей для каждого рассматриваемого варианта технологического процесса ВЭ. Итоговый выбор оптимального варианта технологического процесса при ВЭ ОИАЭ принимается согласно значению комплексного показателя, рассчитываемого по средним значениям частных показателей и их СКО, объединяемых в комплексный показатель с помощью коэффициентов приоритета частных показателей и коэффициента значимости учета неопределенности в значении комплексного показателя.

В статье представлены результаты научных исследований, выполненные в рамках договора № 313/1685-Д, финансируемого АО "Наука и инновации".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов А.А., Дорофеев А.Н., Комаров Е.А., Линге Ин.И., Абалкина И.Л., Ведерникова М.В., Бирюков Д.В., Иорданов А.С., Линге И.И., Ковальчук Д.В., Крючков Д.В., Уткин С.С., Алексахин Р.М., Хамаза А.А., Бочкарев В.В., Супатаева О.А., Кононов В.В., Тихоновский В.Л., Иванов О.П., Павленко В.И., Семенов С.Г., Чесноков А.В.* Заключительный том трехтомной монографии "Проблемы ядерного наследия и пути их решения", посвященный завершающему этапу жизненного цикла объекта использования атомной энергии – выводу из эксплуатации. "Проблемы ядерного наследия и пути их решения. Вывод из эксплуатации" / Под общей редакцией академика РАН Л.А. Большова, Н.П. Лаверова, чл.-кор. РАН И.И. Линге. М., 2015, 316 с.
2. International Structure for Decommissioning Costing (ISDC) of Nuclear Installations, IAEA, 2012, 195 p.
3. Costs of Decommissioning Nuclear Power Plants. IAEA, 2016. 260 p.
4. Financing the Decommissioning of Nuclear Facilities. IAEA, 2016. 23 p.
5. Addressing Uncertainties in Cost Estimates for Decommissioning Nuclear Facilities. IAEA, 2017. 68 p.
6. Федеральная целевая программа "Обеспечение ядерной и радиационной безопасности на 2016–2020 годы и на период до 2030 года".
7. *Емец П.Е., Крянев А.В.* Методика оценки экономической эффективности вывода из эксплуатации

ядерно и радиационно опасных объектов // Бюллетень по атомной энергии. 2008. № 11. С. 4–7.

8. *Емец П.Е., Крянев А.В.* Инвестиционная эффективность вывода из эксплуатации ядерно и радиационно опасных объектов (ЯРОО) // Ядерная и радиационная безопасность. 2011. № 1 (59). С. 10–19.
9. *Бочкарев В.В., Крянев А.В., Ханбикова Д.Т.* Ранжирование ядерно- и радиационно-опасных объектов, эксплуатация которых прекращена. "Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем": материалы Всероссийской конференции с международным участием. М.: РУДН, 2014. С. 195–197.
10. *Крянев А.В., Лукин Г.В.* Математические методы обработки неопределенных данных. М.: Физматлит, 2006.
11. РБ-153-18 "Рекомендации по обоснованию выбора варианта вывода из эксплуатации объектов использования атомной энергии". Утверждено приказом Федеральной службы по экологическому, технологическому и атомному надзору от 29 декабря 2018 г. № 666, 22 с.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 5, pp. 470–474

Selection and Stability of the Optimal Variant of the Technological Process during the Decommissioning of Nuclear Facilities under Conditions of Uncertainty in the Initial Data

A. V. Kryanev[a,c,#], V. V. Bochkarev[a,b], and B. D. Brilliantov[a,b]

[a] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

[b] *Scientific and Engineering Centre for Nuclear and Radiation Safety, Moscow, 107140 Russia*

[c] *Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, 141980 Russia*

[#] *e-mail: avkryanev@mephi.ru*

Received September 20, 2020; revised October 10, 2020; accepted November 10, 2020

Abstract—Diagrams and algorithms for choosing the optimal variant of the technological process for decommissioning of nuclear facilities, as well as for determining the degree of stability of the chosen variant in conditions of uncertainty of the initial data, have been presented. Uncertainties of expert assessments and calculated values of some of these data give rise to uncertainties in the values of indicators for options for the technological process of decommissioning nuclear facilities. A scheme for selecting the optimal variant of the technological process and determining its stability in conditions of uncertainty of the indicators characterizing each considered variant of decommissioning (the list of possible indicators is presented below) is considered. The optimal variant of the technological process is chosen on the basis of a complex indicator that combines particular indicators in the form of a linear superposition for each considered variant of the technological decommissioning process. According to the proposed scheme, the optimal variant of the technological process is chosen according to the maximum for all considered decommissioning options, the average expected value of the complex indicators for these options, and the stability of the optimal variant of the technological process is tested against the complex indicator for the optimal variant of the technological process for the minimum possible value for each particular indicator.

Keywords: decommissioning, nuclear facilities, nuclear and radiation safety, technological process, best option, indicators, stability, uncertainty

DOI: 10.1134/S2304487X20050065

REFERENCES

1. Abramov A.A., Dorofeev A.N., Komarov E.A., Linge In.I., Abalkina I.L., Vedernikova M.V., Birukov D.V., Iordanov A.S., Linge I.I., Kovalchuk D.V., Kruchkov D.V., Utkin S.S., Aliksahin R.M., Hamaza A.A., Bochkarev V.V., Supataeva O.A., Kononov V.V., Tikhonovsky V.L., Ivanov O.P., Pavlenko V.I., Semenov S.G., Chesnokov A.V. *Zakluchitelnii tom trehtomnoi monografii "Problemi yadernogo naslediya I puti ih resheniya", posvyashenni zavershaemomu etapu jiznennogo cikla obekta ispolzovaniya atomnoi energii – vivodu iz ekspluatacii, "Problemi yadernogo naslediya i puti ih resheniya, Vivod iz ekspluatacii"*, Pod obshei redakciei akademika RAN L.A. Bolshova, N.P. Laverova, chl.-kor. RAN I.I. Lingue (The final volume of the three-volume monograph "Problems of Nuclear Legacy and the Ways of Their Solution", dedicated to the final stage of the life cycle of an atomic energy use facility – decom-

missioning, "The problems of nuclear legacy and ways to solve them. Removal from service", Under the general editorship of the academician of the RAS L.A. Bolshova, N.P. Laverova, Corr. RAS I.I. Linge), M., 2015, 316 p.

2. International Structure for Decommissioning Costing (ISDC) of Nuclear Installations, IAEA, 2012, 195 p.
3. Costs of Decommissioning Nuclear Power Plants, IAEA, 2016, 260 pp.
4. Financing the Decommissioning of Nuclear Facilities, IAEA, 2016, 23 pp.
5. Addressing Uncertainties in Cost Estimates for Decommissioning Nuclear Facilities, IAEA, 2017, 68 p.
6. *Federalnaya tselevaya programma "Obecpechenie yadernoi i radiatsionnoi bezopasnosti na 2016–2020 godi i na period do 2030 goda"* (Federal Target Program "Ensuring Nuclear and Radiation Safety for 2016–2020 and for the Period until 2030").
7. Emets P.E., Kryanev A.V., *Metodika otsenki ekonomichskoi effektivnosti vivoda iz ekspluatatsii yaderno i radiatsionno opasnih obektov* (Methodology for Assessing the Economic Efficiency of Decommissioning of Nuclear and Radiation Hazardous Facilities), *Atomic Energy Bulletin*, 2008, no. 11, pp. 4–7.
8. Emets P.E., Kryanev A.V., *Investitsionnaya effektivnost vivoda iz ekspluatatsii yadernoi radiatsionno opasnih obektov (YaROO)* (Investment Efficiency of Decommissioning of Nuclear and Radiation Hazardous Facilities (NROO)), Nuclear and radiation safety, 2011, no. 1 (59), pp. 10–19.
9. Bochkarev V.V., Kryanev A.V., Hanbikova D.T., *Ranjirovanie yaderno i radiatsionno opasnih obektov, ekspluatatsiya kotorih prekrashena, "Informatsionno – ielekommunikatsionnie tehnologii i matematicheskoe modelirovanie vicokotehnologicheskih system": materiali Vserossiskoi konferentsii s mejdunarodnim uchastiem* (Ranking of Nuclear and Radiation Hazardous Facilities Whose Operation has been Discontinued, "Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems": materials of the All-Russian Conference with International Participation), M.: PFUR, 2014, pp. 195–197 (in Russian).
10. Kryanev A.V., Lukin G.V., *Matematicheskie metodi obrabotki neopredelennih dannih* (Mathematical Methods for Processing Uncertain Data), M.: Fizmatlit, 2006.
11. RB-153-18 *"Rekomendatsii po obosnovaniu vibora variant vivoda iz ekspluatatsii obektov ispolzovaniya atomnoi energii", Utverjdteno prikazom Federalnoi slujbi po ecologicheskomu i atomnomu nadzoru ot 29 dekabrya 2018 g.* ("Recommendations on the Justification of the Choice of Option for Decommissioning of Nuclear Facilities", Approved by order of the Federal Service for Ecological, Technological and Nuclear Supervision of December 29, 2018"), Moscow, no. 666, 22 p.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2020, том 9, № 5, с. 475–480

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 004.032.26

ПРИМЕНЕНИЕ ОГРАНИЧЕННОЙ МАШИНЫ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ АВТОРСКОГО ПРОФИЛИРОВАНИЯ РУССКОЯЗЫЧНЫХ ТЕКСТОВ[1]

© 2020 г. А. Г. Сбоев[1,2,*], Р. Б. Рыбка[1], Ю. А. Давыдов[1], А. А. Селиванов[1]

[1] НИЦ “Курчатовский институт”, Москва, 123182, Россия

[2] Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

**e-mail: sag111@mail.ru*

Поступила в редакцию 01.10.2020 г.
После доработки 03.11.2020 г.
Принята к публикации 24.11.2020 г.

В данной работе исследуется возможность применения ограниченной машины Больцмана (ОМБ) для решения задачи авторского профилирования текстов на русском языке на примере определения пола и возраста автора. ОМБ используется в качестве трансформера, извлекающего полезные признаки из документов, слова в которых закодированы при помощи морфологических тегов. Классификация осуществляется при помощи составного двухслойного модуля, включающего в себя MultinomialNB и LinearSVC. В рамках поставленной задачи используются четыре корпуса документов, три из которых размечены по полу автора (в том числе с его имитацией), четвертый же – по возрасту. Проведенные эксперименты показывают, что построенная модель успешно решает поставленные перед ней задачи, превосходя baseline-модель (LinearSVC) в среднем (по всем четырем корпусам) на 7.5% по f1-score. Также представляется сравнение полученных результатов с результатами других моделей из литературных источников (в частности, с использованием сложной модели на основе комбинации сверточной нейронной сети и LSTM), демонстрирующее эффективность созданной модели и ее устойчивость по набору представленных корпусов.

DOI: 10.1134/S2304487X20050144

1. ВВЕДЕНИЕ

Ограниченная машина Больцмана (ОМБ) – разновидность стохастической (основанной на принципах статистической физики, в том числе на применении канонического распределения Гиббса) нейронной сети, которая определяет распределение вероятности на входных образцах данных [1]. ОМБ активно применяются как для извлечения признаков из изображений, документов и др. (см., например, [2–6]), так и непосредственно для классификации (такая модификация ОМБ обучается в supervised-манере, см. [7, 8]).

В настоящей работе исследуется возможность применения ОМБ для решения задачи авторского профилирования текстов на русском языке на примере определения пола и возраста автора. В работе [8] эта задача была решена для англоязычных текстов при помощи классификационной ОМБ. Авторы использовали для кодирования документов частотно-словарный подход. Его привлекательная сторона заключается в возможности анализировать текст без какой бы то ни было глубокой предобработки. Однако в общем случае, как указывается в литературе, этот подход требует существенно большего набора обучающих примеров. Так, например, корпус PAN-AP-13, использованный авторами статьи [8], содержит более 400000 примеров. В то же время, доступные русскоязычные корпуса, подобранные для решения задачи авторского профилирования, значительно меньше по объему (массивы документов, используемые в данной работе, меньше PAN-AP-13 на два порядка).

Исходя из этих ограничений авторами настоящей работы был выбран иной подход: ОМБ здесь используется для извлечения полезных признаков из документов, закодированных при помощи морфологических тегов. Важно также отметить, что такой выбор кодирования, будучи несколько более трудоемким с точки зрения предобработки корпусов, не зависит от выбора словаря, по которому производится частотно-словарное кодирование, а значит, является более универсальным.

[1] Работа была выполнена с использованием оборудования центра коллективного пользования “Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса” НИЦ “Курчатовский институт”, http://ckp.nrcki.ru/.

2. КОРПУСА ДАННЫХ

Для изучения возможностей, представляемых ОМБ в контексте решения задачи авторского профилирования, было использовано четыре корпуса данных: первый из них (RusPersonality (RusPer)) состоит из 1150 сочинений, написанных студентами и в дальнейшем размеченных экспертами, второй, третий и 4-й (Gender Imitation crowdsource "a" (GI cs "a"), GI cs "ab" и Age Imitation crowdsource "a" (AI cs "a")) – из 1664, 3330 и 1680 документов соответственно, собранных при помощи краудсорсинговой платформы. При этом в третьем корпусе содержатся тексты с имитацией: авторам было дано задание сымитировать стиль человека противоположного пола. Четвертый же корпус, в отличие от трех других, разбит на три класса по возрасту автора (20–30 лет, 30–40 лет, 40–50 лет). Все четыре корпуса были предварительно сбалансированы по классам. Вычислительные эксперименты проводились на основе стратифицированной кросс-валидации со смешением (stratified shuffle split) с пятью разбиениями корпуса. В каждом разбиении 80% корпуса представляло тренировочное множества, 20% – тестовое. После этого в каждом разбиении 10% тренировочного множества использовалось для валидации модели, таким образом конечное соотношение множеств для каждой итерации кросс-валидации:

- 72% – тренировочное множество;
- 8% – валидационное множество;
- 20% – тестировочное множество.

Также обязательным условием в процессе разбиения было, чтобы в тренировочном и тестировочном множествах были документы, написанные разными авторами. В результате для каждого корпуса было получено пять фолдов, пригодных для проведения кросс-валидации. Далее документы были векторизованы: каждое слово было закодировано вектором, содержащим морфологические признаки (часть речи, падеж и т.д.) длиной 58. Этот способ представления данных уже доказал свою эффективность в задаче авторского профилирования (см. [9]).

3. ТОПОЛОГИЯ СЕТИ И АЛГОРИТМЫ

В данной работе используется реализация классической ОМБ из библиотеки scikit-learn [10]: это так называемая BernoulliRBM, обучаемая при помощи алгоритма PCD (Persistent Contrastive Divergence; также встречается название "стохастическая максимизация правдоподобия"). Ее важной особенностью является работа только с бинарным входом, т.е. обучающие примеры должны состоять только из нулей и единиц.

Как уже было сказано, для решения задачи определения пола или возраста автора была использована связка из ОМБ и следующего за ней классификатора. То, какой именно классифицирующий алгоритм использовать – очень существенный вопрос, ответ на который был получен с использованием библиотеки TPOT [11], позволяющей по заданному множеству обучающих примеров подобрать оптимальный классификатор из набора, предоставляемого scikit-learn. Закодированные морфологическими признаками слова из корпуса RusPersonality объединялись в триграммы длиной 174 (со сдвигом 2) и подавались в ОМБ с числом нейронов на видимом слое, равном входной размерности примеров, и с величиной скрытого слоя, равной 600 нейронов (тестировались и иные конфигурации, в том числе сжимающие; выяснилось, что расширяющая ОМБ дает лучшие результаты, причем чем больше скрытый слой (до определенного порога), тем лучше). После документы, входящие в корпус, по очереди преобразовывались обученной ОМБ: фактически, каждая триграмма в документе кодировалась логистическими функциями активации, связанными со скрытым слоем ОМБ. Далее для каждого документа триграммы усреднялись – в итоге для документов были получены вектора, массив которых, соответствующий тренировочному множеству, подавался в TPOT, который обучался до тех пор, пока внутренняя кросс-валидационная точность не переставала меняться в течение десяти эпох. Полученный классификатор состоит из двух частей: первая из них (**MultinomialNB**) выступает в роли эстиматора, вторая (**LinearSVC**) – осуществляет классификацию непосредственно.

TPOT не дает ответа на вопрос, оптимально ли была выбрана топология ОМБ, поэтому необходимо дополнительно оптимизировать набор гиперпараметров ОМБ (число нейронов на скрытом слое, learning rate и т.д.) совместно с набором гиперпараметров классификатора.

Для этой цели был использован HyperOpt [12] (библиотека, осуществляющая подбор оптимальных гиперпараметров сети исходя из заданного тренировочного множества), запуск которого осуществлялся на одном из фолдов, соответствующих корпусу Toloka_a (предварительные тесты показали, что он анализируется несколько хуже, а значит, подбирая оптимальную конфигурацию для него, можно ожидать, что более простой корпус RusPersonality также будет классифицироваться успешно). Финальная топология целой модели представлена на рис. 1. Параметры, использованные в экспериментах:

- **RBM**: n_visible = 58 * 3 – число нейронов в видимом слое; n_hidden = 560 – число нейронов в скрытом слое;
- **MultinomialNB**: alpha = 0.001; fit_prior = True;

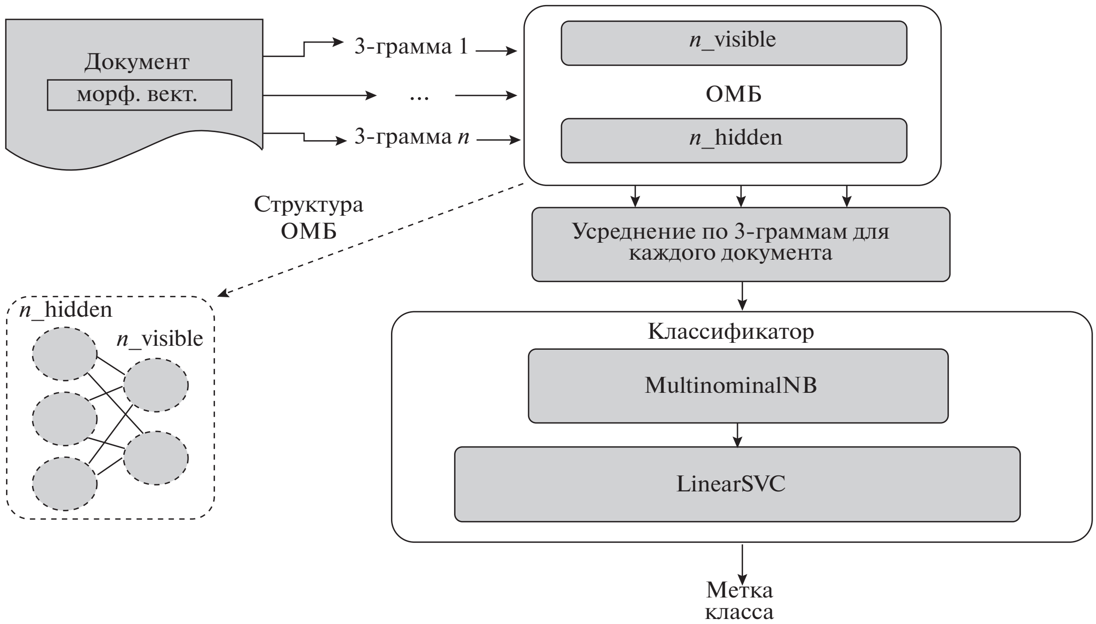


Рис. 1. Общая топология сети RBM_SVC.

• **LinearSVC**: C = 10.0; dual = False; loss = = "squared_hinge"; penalty = "l2"; tol = 0.0001; max_iter = 100000.

4. ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Чтобы установить, насколько хорошо связка ОМБ+SVC подходит для решения задачи авторского профилирования, модель была обучена и протестирована на всех трех корпусах следующим образом: на каждом из пяти фолдов производилось по одному запуску (без фиксации random state), после чего для полученного MacroF1-score вычислялось выборочное среднее по всем пяти фолдам.

Чтобы оценить уровень полученных результатов, необходимо определить нижнюю границу точности, относительно которой и будет производиться оценка. В данном случае для всех корпусов можно построить похожую модель, не включающую в себя ОМБ, и провести на ней серию экспериментов, в остальном полностью идентичную описанной выше: слова, входящие в состав документов, кодируются при помощи морфологических признаков, объединяются в триграммы с шагом 1, после чего усредняются и подаются в классификатор.

Исходя из этого, была построена baseline-модель, состоящая из LinearSVC с теми же параметрами, что и у LinearSVC, входящего в модель RBM_SVC. Результаты экспериментов в сравнении с доступными историческими данными[2] приведены в табл. 1–4.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Из приведенных выше экспериментальных результатов можно заключить, что составная нейронная сеть из ОМБ и двухслойного классификатора на основе LinearSVC эффективно решает задачу авторского профилирования документов на русском языке. Прирост macrof1-score по сравнению с baseline-моделью (LinearSVC) в среднем по всем четырем использованным корпусам составляет 7.5%, достигая 8% на корпусе RusPer.

Для дополнительной оценки полученных точностей можно обратиться к результатам, полученным нами на других моделях. Так, в сравнении с работой [13] для сбалансированного корпуса RusPer, закодированного морфологическими признаками, модель, построенная на основе сверточной нейронной сети и слоя LSTM, показывает macro f1-score, равный 0.81+/–0.04. В пределах погрешности этот результат довольно близок к полученному в данной работе (0.77+/–0.02). Следует также отметить, что модель под кодовым именем ModelNN частично учитывает структуру

[2] Исторические данные были получены следующим образом: в случае ModelNN из статьи [13] была взята топология сети и протестирована на том же разбиении, на котором проводились эксперименты с RBM_SVC и LinearSVC из данной работы. Аналогичным образом для AI cs "a" был пересчитан TF-IDF+LinearSVC (сокращенно TFIDF) из статьи [14].

Таблица 1. Результаты экспериментов на корпусе RusPer

RusPer	fold 0	fold 1	fold 2	fold 3	fold 4	AVG	STD
RBM_SVC	0.77	0.78	0.83	0.71	0.76	0.77	0.02
LinearSVC	0.64	0.69	0.73	0.68	0.73	0.69	0.03
ModelNN [13]						0.81	0.04

Таблица 2. Результаты экспериментов на корпусе GIcs “a”

GI cs “a”	fold 0	fold 1	fold 2	fold 3	fold 4	AVG	STD
RBM_SVC	0.65	0.71	0.70	0.69	0.68	0.69	0.02
LinearSVC	0.55	0.59	0.62	0.58	0.59	0.59	0.02
ModelNN [13]						0.77	0.04

Таблица 3. Результаты экспериментов на корпусе GIcs “ab”

GI cs “ab”	fold 0	fold 1	fold 2	fold 3	fold 4	AVG	STD
RBM_SVC	0.57	0.55	0.58	0.54	0.56	0.56	0.02
LinearSVC	0.56	0.54	0.59	0.55	0.56	0.56	0.02
ModelNN [13]						0.51	0.02

Таблица 4. Результаты экспериментов на корпусе AIcs “a”

AI cs “a”	fold 0	fold 1	fold 2	fold 3	fold 4	AVG	STD
RBM_SVC	0.57	0.55	0.58	0.54	0.56	0.56	0.02
LinearSVC	0.47	0.47	0.49	0.50	0.48	0.48	0.01
TFIDF [14]	0.56	0.55	0.57	0.56	0.52	0.55	0.01
ModelNN [13]	0.49	0.47	0.47	0.44	0.43	0.46	0.02

текста на уровне последовательностей, поэтому является хорошим baseline для сравнения. Результат на корпусе Toloka_a демонстрирует некоторое ее превосходство по отношению к результату, полученному на RBM_SVC (0.02 над статистической погрешностью). Для корпуса с имитацией пола можно констатировать более высокую эффективность RBM_SVC модели. То же самое можно сказать и о задаче определения возрастной группы. Таким образом, можно заключить, что предлагаемая модель демонстрирует хорошую точность и устойчивость на ряде корпусов, что является ее сильной стороной.

6. ВЫВОДЫ

В целом можно заключить, что предложенный в данной работе метод использования ОМБ для решения задачи авторского профилирования оказывается достаточно перспективным. Построенная модель превосходит baseline-модель (LinearSVC) в среднем (по всем четырем корпусам) на 7.5% по f1-score, что доказывает эффективность ОМБ как экстрактора полезных признаков, а также ее устойчивость по набору представленных корпусов. Сказанное дает основания полагать, что дальнейшие исследования в рамках этого подхода позволят добиться дальнейшего прироста точности классификации, а также развить на его основе классифицирующие модели для анализа русскоязычных текстов.

7. БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-29-10084 мк.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Goodfellow I., Yoshua Bengio, Courville A.* Deep Learning. MIT Press, 2016.
2. *Hinton G.E., Osindero S., Yee Whye Teh.* A fast learning algorithm for deep belief nets // Neural Computation. 2006. V. 18. P. 1527–1554.
3. *Yoshua Bengio, Pascal Lamblin, Dan Popovici, Hugo Larochelle.* Greedy layer-wise training of deep networks / In: Advances in Neural Information Processing Systems 19 (NIPS’06), Ed. by *B. Schölkopf, J. Platt, T. Hoffman*. 2007. MIT Press, 2007. P. 153–160.
4. *Welling M., Sutton Ch.* Learning in Markov random fields with contrastive free energies / In: Proceedings of the 10th International Workshop on Artificial Intelligence and Statistics (AISTATS’05), 2005. P. 397–404.
5. *Salakhutdinov R., Hinton G.E.* Semantic hashing / In: Proceedings of the 2007 Workshop on Information Retrieval and applications of Graphical Models (SIGIR’07), Amsterdam: Elsevier, 2007.
6. *Mnih A., Hinton G.E.* Three new graphical models for statistical language modelling / In: Proceedings of the Twenty-fourth International Conference on Machine Learning (ICML’07). Ed. by Zoubin Ghahramani, ACM, 2007. P. 641–648.
7. *Larochelle H. et al.* Learning Algorithms for the Classification Restricted Boltzmann Machine // J. Mach. Learn. Res. 2012. V. 13. P. 643–669.
8. *Antkiewicz M., Kuta Marcin, Kitowski J.* Author Profiling with Classification Restricted Boltzmann Machines. 2017.
9. *Sboev A., Litvinova T., Gudovskikh D., Rybka R., Moloshnikov I.* Machine Learning Models of Text Categorization by Author Gender Using Topic-independent Features // Procedia Computer Science, 2016. V. 101. P. 135–142.
10. *Pedregosa et al.* Scikit-learn: Machine Learning in Python. JMLR, 2011. V. 12. P. 2825–2830.
11. *Trang T. Le, Weixuan Fu, Jason H. Moore.* Scaling tree-based automated machine learning to biomedical big data with a feature set selector // Bioinformatics. 2020. V. 36. № 1. P. 250–256.

12. *Bergstra J., Yamins D., Cox D.D.* Making a Science of Model Search: Hyperparameter Optimization in Hundreds of Dimensions for Vision Architectures / To appear in Proc. of the 30th International Conference on Machine Learning (ICML 2013). 2013.
13. *Sboev A., Gudovskikh D., Moloshnikov I., Rybka R.* A gender identification of text author in mixture of Russian multi-genre texts with distortions on base of data-driven approach using machine learning models // AIP Conference Proceedings. 2019. V. 2116. P. 270006. https://doi.org/10.1063/1.5114280
14. *Sboev A., Rybka R., Moloshnikov I., Gudovskikh D., Litvinova T.* To the question of data-driven identification of author's age for Russian texts with age deceptions using machine learning // Journal of Physics: Conf. Ser. 2019. V. 1205. P. 012049.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 5, pp. 475–480

Application of Restricted Boltzmann Machines to Solve the Problem of Author's Profiling of Russian Texts

A. G. Sboev[a,b,#], R. B. Rybka[a], Yu. A. Davydov[a], and A. A. Selivanov[a]

[a] *National Research Center Kurchatov Institute, Moscow, 123182 Russia*

[b] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

[#]*e-mail: sag111@mail.ru*

Received October 1, 2020; revised November 3, 2020; accepted November 24, 2020

Abstract—The possibility of using the restricted Boltzmann machine (RBM) to solve the problem of author's profiling of Russian texts has been studied on the example of determining the gender and age of an author. The restricted Boltzmann machine is used as a transformer that extracts useful features from documents, where words are encoded using morphological tags. The classification is carried out using a composite two-layer module, which includes MultinomialNB and LinearSVC. Within this task, four corpuses of documents are used, three of which are classified by the gender of the author, and the fourth one, by age. The experiments show that the constructed model successfully solves the tasks assigned to it, surpassing the baseline model (LinearSVC) on average (for all four corpuses) by 7.5% in terms of f1-score. In addition, of the results are compared with the results of other models from the literature (in particular, using a complex model, based on a convolutional neural network and LSTM). This comparison shows the efficiency of the constructed composite neural network based on the RBM and the stability of its results on a set of presented corpora.

Keywords: artificial neural networks, natural language processing, text classification, author profiling, restricted Boltzmann machine, RBM, energy-based neural networks

DOI: 10.1134/S2304487X20050144

REFERENCES

1. Goodfellow I., Yoshua Bengio, Courville A., *Deep Learning,* MIT Press, 2016.
2. Hinton G.E., Osindero S., Yee Whye Teh, A fast learning algorithm for deep belief nets, *Neural Computation,* 2006, vol. 18, pp. 1527–1554.
3. Yoshua Bengio, Lamblin P., Popovici D., Larochelle H., Greedy layer-wise training of deep networks, in *Advances in Neural Information Processing Systems 19 (NIPS'06)*, Schölkopf, B., Platt J., Hoffman T., Ed., MIT Press, 2007, pp. 153–160.
4. Welling M., Sutton Ch., Learning in Markov random fields with contrastive free energies, in *Proceedings of the 10th International Workshop on Artificial Intelligence and Statistics (AISTATS'05),* 2005, pp. 397–404.
5. Salakhutdinov R., Hinton G.E., Semantic hashing, in *Proceedings of the 2007 Workshop on Information Retrieval and Applications of Graphical Models (SIGIR'07)*, Amsterdam: Elsevier, 2007.
6. Mnih A., Hinton G.E., Three new graphical models for statistical language modeling, in *Proceedings of the Twenty-fourth International Conference on Machine Learning (ICML'07),* Zoubin Ghahramani, Ed., ACM, 2007, pp. 641–648.
7. Larochelle H. et al., Learning Algorithms for the Classification Restricted Boltzmann Machine, *J. Mach. Learn. Res.*, 2012, vol. 13, pp. 643–669.
8. Antkiewicz M., Kuta Marcin, Kitowski J., Author Profiling with Classification Restricted Boltzmann Machines. 2017.
9. Sboev A., Litvinova T., Gudovskikh D., Rybka R., Moloshnikov I., Machine Learning Models of Text Categorization by Author Gender Using Topic-independent Features, *Procedia Computer Science*, 2016, vol. 101, pp. 135–142.

10. Pedregosa, et al., *Scikit-learn: Machine Learning in Python*, JMLR, 2011, vol. 12, pp. 2825–2830.

11. Trang T.Le, Weixuan Fu, Jason H. Moore, Scaling tree-based automated machine learning to biomedical big data with a feature set selector, *Bioinformatics*, 2020, vol. 36, no. 1, pp. 250–256.

12. Bergstra J., Yamins D., Cox D.D., Making a Science of Model Search: Hyperparameter Optimization in Hundreds of Dimensions for Vision Architectures, *To appear in Proc. of the 30th International Conference on Machine Learning (ICML 2013),* 2013.

13. Sboev A., Gudovskikh D., Moloshnikov I., Rybka R., A gender identification of text author in mixture of Russian multi-genre texts with distortions on base of data-driven approach using machine learning models, *AIP Conference Proceedings*, 2019, vol. 2116, p. 270006. 10.1063/1.5114280.

14. Sboev A., Rybka R., Moloshnikov I., Gudovskikh D., Litvinova T., To the question of data-driven identification of author's age for Russian texts with age deceptions using machine learning, *J. Phys.: Conf. Ser.,* 2019, vol. 1205, p. 012049.