

СОДЕРЖАНИЕ

Том 8, номер 3, 2019

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Сравнение влияния выгорающих поглотителей (Gd и Eu) на нейтронно-физические характеристики ТВС реакторов ВВЭР-1000

М. А. Абу Сондос, В. М. Демин, В. И. Савандер 199

Оптимальный набор угловых ориентаций ГСП при калибровке акселерометров на неподвижном стенде

М. Д. Гребенкин 206

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Точные решения нелинейных телеграфных уравнений с переменными коэффициентами

А. Д. Полянин 213

Нелинейные волновые процессы в среде взаимодействующих частиц без учета столкновений

В. В. Аверина, Н. А. Кудряшов 226

Численное интегрирование нелинейных уравнений типа Клейна–Гордона с запаздыванием методом прямых

В. Г. Сорокин 232

Базовые законы сохранения системы уравнений двумерной мелкой воды над неровным дном в лагранжевых переменных

А. В. Аксенов, К. П. Дружков 248

Об асимптотике простого собственного значения задачи Стеклова, возмущенного на малом участке границы однородным условием Дирихле

Ю. О. Королева, Т. П. Чечкина 253

Первые интегралы одного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка

Ю. Е. Семенова, Д. И. Синельщиков, Н. А. Кудряшов 264

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Расчетные исследования теплового состояния испытательных стендов БМ-П и БМ-ЛР

А. А. Рякин, Е. С. Горбачева, О. В. Койнов, М. В. Никульшин 268

АВТОМАТИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Моделирование импульсных помех в двухфазных КМОП инверторах
при сборе заряда с трека ионизирующей частицы

В. Я. Стенин, Ю. В. Катунин

274

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Автоматизация построения многоугольников Ньютона,
соответствующих обыкновенным дифференциальным
уравнениям полиномиального вида

Н. А. Кудряшов, А. А. Кутуков

283

Вычисление ФРО и ПФ аксиальной компоненты
нормального распределения текстуры

В. Г. Попков, Т. И. Савелова, Т. М. Иванова

289

Contents

Volume 8, Number 3, 2019

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI"

Technical Physics

Comparison of the Effect of Burnable Absorbers (Gd and Eu)
on the Neutron-Physical Characteristics of VVER-1000 Fuel Assemblies

M. A. Abu Sondas, V. M. Demin, and V. I. Savander

199

Optimal Set of Angular Positions of Inertial Measurement Units
for Accelerometer Calibration on a Stationary Bench

M. D. Grebenkin

206

Differential Equations and Dynamic Systems

Exact Solutions of Nonlinear Telegraph Equations
with Variable Coefficients

A. D. Polyinin

213

Nonlinear Wave Processes in a Medium of Interacting Particles
without Collisions

V. V. Averina and N. A. Kudryashov

226

Numerical Integration of Nonlinear Klein–Gordon Type Equations
with Delay by the Method of Lines

V. G. Sorokin

232

Basic Conservation Laws of the System of Equations of Two-Dimensional
Shallow Water over an Uneven Bottom in the Lagrangian Variables

A. V. Aksenov and K. P. Druzhkov

248

On the Asymptotic Behavior of a Simple Eigenvalue of the Steklov Problem
Perturbed on a Small Part of the Boundary by the Homogeneous
Dirichlet Condition

Yu. O. Koroleva and T. P. Chechkina

253

First Integrals of One Fourth Order Ordinary Differential Equation

Yu. E. Semenova, D. I. Sinelshchikov, and N. A. Kudryashov

264

Mathematical Modeling and Computer Simulation

Computational Analysis of the Thermal States of BM-P
and BM-LR Experimental Facilities

A. A. Ryakin, E. S. Gorbacheva, O. V. Koinov, and M. V. Nikulshin

268

Automation and Electronics

Simulation of Error Pulses in Two-Phase CMOS Inverters at Charge Collection
from the Track of an Ionizing Particle

V. Ya. Stenin and Yu. V. Katunin

274

Applied Mathematics and Informatics

Automatic Construction of Newton Polygons Corresponding
to Polynomial Ordinary Differential Equations

N. A. Kudryashov and A. A. Kutukov

283

Calculation of the Orientation Distribution Function and Pole Figures
of the Axial Component of the Normal Texture Distribution

V. G. Popkov, T. I. Savyolova, and T. M. Ivanova

289

СРАВНЕНИЕ ВЛИЯНИЯ ВЫГОРАЮЩИХ ПОГЛОТИТЕЛЕЙ (Gd и Eu) НА НЕЙТРОННО-ФИЗИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТВС РЕАКТОРОВ ВВЭР-1000

© 2019 г. М. А. Абу Сондос^{1,*}, В. М. Демин¹, В. И. Савандер¹

¹ *Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", 115409, Москва, Россия*

**e-mail: MAbusondos@mephi.ru*

Поступила в редакцию 24.01.2019 г.

После доработки 12.04.2019 г.

Принята к публикации 26.04.2019 г.

Рассматривается задача об использовании выгорающих поглотителей (ВП) в реакторах типа ВВЭР для снижения объема жидкостного регулирования избыточного запаса реактивности при выгорании топлива. Использование выгорающих поглотителей (ВП) таких, как Gd_2O_3 и Eu_2O_3 в ядерном топливе оказывает положительное влияние на ядерный топливный цикл легководных реакторов PWR (ВВЭР-1000) и BWR (РБМК). Их использование приводит к увеличению продолжительности кампании и некоторым другим положительным свойствам, описанным ниже. Но, с другой стороны, присутствие выгорающих поглотителей в топливе приводит к ухудшению равномерности поля энерговыделения и ряду других негативных свойств. Проводятся изложенные в литературе исследования для снижения этих отрицательных результатов [3–7]. Одним из предлагаемых технических решений является изменение структуры размещения гадолиния в твэлах [5]. В настоящей работе проведено исследование влияния размещения выгорающих поглотителей (Gd_2O_3 и Eu_2O_3) на изменение нейтронно-физических характеристик ядерного топлива реакторов ВВЭР-1000: бесконечно-го коэффициента размножения нейтронов (K_∞), коэффициента неравномерности распределения энерговыделения и накопления изотопов в зависимости от глубины выгорания.

Ключевые слова: ТВЭГ, Serpent, ТВС, ВВЭР-1000, выгорающий поглотитель, Eu_2O_3 , Gd_2O_3 , коэффициент неравномерности распределения энерговыделения

DOI: 10.1134/S2304487X19030027

ВВЕДЕНИЕ

Основными источниками энергии для АЭС, которые эксплуатируются и сооружаются в настоящее время, являются водо-водяные легководные реакторы (например, ВВЭР-1000). Подобные установки планируется использовать и в дальнейшем при строительстве АЭС в разных странах вне зависимости от специфики национальных планов развития ядерной энергетики.

Одной из главных целей научно-технических разработок, касающихся топливного цикла энергетических реакторов, является увеличение глубины выгорания топлива. Обычно оно достигается путем повышения начального обогащения и использования выгорающих поглотителей. Выгорающий поглотитель при этом снижает размножающие свойства активной зоны реактора в начале кампании, что может быть скомпенсировано системой СУЗ.

Выгорающие поглотители представляют собой материалы с высоким сечением поглощения нейтронов, которые преобразуются в материалы с

относительно низким сечением поглощения в результате радиационного захвата. Отрицательная реактивность выгорающего поглотителя уменьшается за время кампании. В идеальном случае она должна уменьшаться с той же скоростью, что и истощение избыточной положительной реактивности топлива. Из-за более равномерного распределения ВП по высоте зоны его влияние на неравномерность энерговыделения менее разрушительно, чем действие контрольных стержней (СУЗ).

В качестве выгорающего поглотителя в реакторных установках типа ВВЭР (PWR) и BWR применяется гадолиний Gd_2O_3 или европий Eu_2O_3 . Вклад основных изотопов в состав природного гадолиния или европия и их сечения поглощения тепловых нейтронов при энергии 0.0253 эВ приведены в табл. 1.

Выгорающий поглотитель используют для следующих основных целей:

1) Компенсации избыточной положительной реактивности в начале кампании.

Таблица 1. Вклад основных изотопов в природный состав ВП и их сечения поглощения тепловых нейтронов [1]

Изотопы	Массовая доля, %	σ , б
^{155}Gd	14.8	61100
^{157}Gd	15.7	259000
^{151}Eu	47.8	9100
^{153}Eu	52.2	312

Таблица 2. Распределение ВП в рассмотренных вариантах расчетов

Вариант	Количество и состав топлива твэлов
B_1	312–4.4% (^{235}U)
B_2	270–4.4% (^{235}U) и 42–4.4% (^{235}U) с 1.5% Gd_2O_3
B_3	270–4.4% (^{235}U) и 42–4.4% (^{235}U) с 1.5% Eu_2O_3
B_4	270– 4.4% (^{235}U) и 42–4.4% (^{235}U) с 0.75% Gd_2O_3 и 0.75% Eu_2O_3
B_5	270– 4.4% (^{235}U) и 42–4.4% (^{235}U) с 1.5% Gd_2O_3 в центральном отверстии твэлов
B_6	270– 4.4% (^{235}U) и 42–4.4% (^{235}U) с 1.5% Eu_2O_3 между оболочками и топливными таблетками
B_7	270– 4.4% (^{235}U) и 42–4.4% (^{235}U) с 0.75% Gd_2O_3 в центральном отверстии твэлов и 0.75% Eu_2O_3 между оболочками и топливными таблетками

Таблица 3. Основные геометрические параметры ТВС-А.

Параметр	ТВС-А
Длина топливного элемента, мм	3530
Масса UO_2 , кг	497.98
Плотность топлива (г/см^3)	10.4
Плотность воды (г/см^3)	0.72
Количество твэлов в одной ТВС	312
Обогащение (мас. %)	4.4%
Внутренний/Наружный диаметр топливной таблетки, мм	1.4/7.57
Внутренний/Наружный диаметр оболочки, мм	7.73/9.1
Материал оболочки, сплав	Э110
Центральная трубка	
Внутренний/Наружный диаметр, мм	11.0/13.0
Материал, сплав	Э635
Направляющая трубка (18 шт.)	
Внутренний/Наружный диаметр, мм	10.9/12.6
Материал, сплав	Э635

2) Увеличения продолжительности кампании.
3) Выравнивания энерговыделения в активной зоне и оптимизации выгорания топлива.

4) Уменьшения концентрации бора в теплоносителе в начале кампании, что существенно для обеспечения безопасности работы реактора [2].

Обычно гадолиний и европий размещают в твэлах (твэгах и твэях), полностью заполненных таблетками из однородной смеси топлива и выгорающего поглотителя природного изотопного состава. Топливные таблетки, содержащие однородную смесь Gd_2O_3 или Eu_2O_3 и UO_2 (твердый раствор Gd_2O_3 или Eu_2O_3 в UO_2) просты в изготовлении и позволяют адекватно контролировать реактивность. Дальнейшее развитие технологий водо-водяных реакторов требует оптимизации размещения выгорающего поглотителя в активной зоне.

Переход от чисто уранового топлива к топливу с выгорающими поглотителями увеличивает по абсолютному значению отрицательный температурный коэффициент реактивности. Гомогенное распределение выгорающего поглотителя в топливе приводит к следующему:

1) Ухудшению (снижению) теплопроводности (особенно для гадолиния).

2) Снижению температуры плавления топлива (особенно для европия).

3) Ухудшению самозащитенности реактора.

4) Быстрому выгоранию сильнопоглощающих изотопов гадолиния (^{155}Gd , ^{157}Gd), определяющих свойства ^{nat}Gd как выгорающего поглотителя.

5) Ухудшению равномерности распределения энерговыделения.

По этим причинам авторы работ [3, 4] анализируют возможность использования гранулированного Gd_2O_3 в UO_2 -матрице, что практически не ухудшает теплопроводность UO_2 -топлива и позволяет снизить скорость выгорания гадолиния, т.е. увеличить продолжительность кампании. В работе [5] рассматривается возможность размещения проволоки из Gd_2O_3 в центральном отверстии твэлов. А в работе [6] сравнивается коэффициент размножения ячейки $K_{яч}$ как функции глубины выгорания для нескольких выгорающих поглотителей. В работе [7] сравнили влияние Gd_2O_3 и Eu_2O_3 на характеристики ядерного топлива легководного реактора PWR американского производства.

В настоящей работе проведено исследование нескольких вариантов топлива (B_1 – B_7), представленных в табл. 2. Расчеты проводились при стандартных параметрах ТВС (ТВС-А) (439ГТ) и твэлов ВВЭР-1000, представленных в табл. 3 и на рис. 1–3.

ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Сравнение влияния Gd и Eu на нейтронно-физические характеристики ТВС реакторов ВВЭР-1000 при различных вариантах размещения выгорающих поглотителей в тепловыделяющих элементах в независимом или смешанном виде.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Все расчеты были выполнены методом Монте-Карло с использованием версии 2.1.29 кода Serpent 2 [8] для сборки ТВС-A типа 439GT [9]. Основное внимание уделено анализу зависимости от глубины выгорания коэффициента размножения нейтронов K_{∞} , концентрации различных изотопов в составе топлива, в частности ^{239}Pu и ^{241}Pu , и распределения поля энерговыделения.

Примем среднюю линейную мощность энерговыделения в твэле равной 166 Вт/см [10]. Использовали статистику расчетов – 2000000. Характеристики рассчитывались для 74 шагов выгорания в диапазоне от свежего топлива до конечной глубины выгорания в 60 МВт сут/кгU. Ядерные данные были получены из библиотеки ядерных констант ENDFB7 [11].

КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗМНОЖЕНИЯ НЕЙТРОНОВ

На рис. 4 представлены коэффициенты размножения нейтронов K_{∞} в зависимости от глубины выгорания.

Коэффициент размножения K_{∞} в топливе сборки ВВЭР-1000 с 1.5% Gd (B_2) повышается до выгорания 5.34 (МВт сут/кгU) и уменьшается с выгоранием далее почти неотличимо от варианта B_1 . Соответствующие изменения K_{∞} связаны с изменением концентраций изотопов ВП, которые представлены на рис. 5а. Очевидно, что изотопы Gd выгорают быстро и не оказывают длительного влияния. Однако, если поместить Gd в центральное отверстие твэл (вариант B_5), выгорание замедлится и его влияние будет заметно более продолжительное время. Это обусловлено уменьшением потока тепловых нейтронов в новом месте расположения выгорающего поглотителя.

Коэффициент размножения K_{∞} в топливе сборки ВВЭР-1000 с 1.5% Eu (B_3), почти постоянен до выгорания 10.34 (МВт сут/кгU), и уменьшается с выгоранием после этого, всегда оставаясь меньше, чем в случае просто уран-оксидного топлива. Изменения K_{∞} связаны с изменением концентраций изотопов ВП, которые представлены на рис. 5б. Коэффициент размножения K_{∞} в топливе сборки ВВЭР-1000 с 0.75% Gd и 0.75% Eu (B_4) находится между значениями вариантов рас-

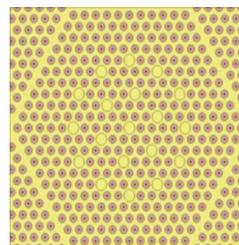


Рис. 1. Геометрия сборки ТВС-A (B_1).

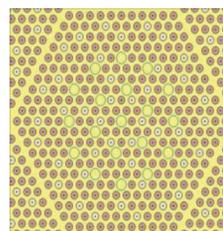


Рис. 2. Геометрия сборок ТВС-A (B_2 – B_7).

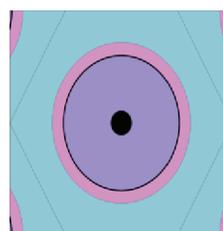


Рис. 3. Геометри твэл в ТВС-A.

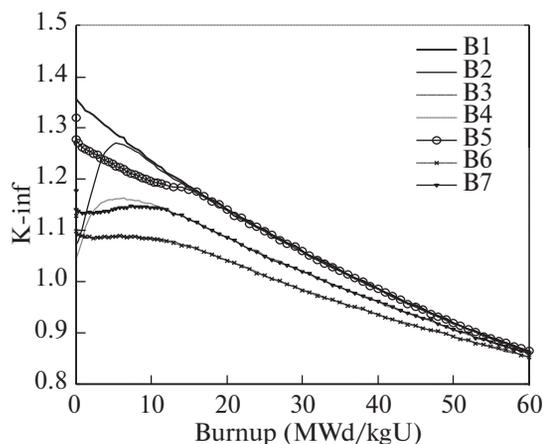


Рис. 4. Коэффициент размножения нейтронов K_{∞} в зависимости от глубины выгорания.

чета B_2 и B_3 и эти изменения K_{∞} связаны с изменением концентраций изотопов ВП, которые представлены на рис. 5в. Использование в ядерном топливе совместно двух выгорающих погло-

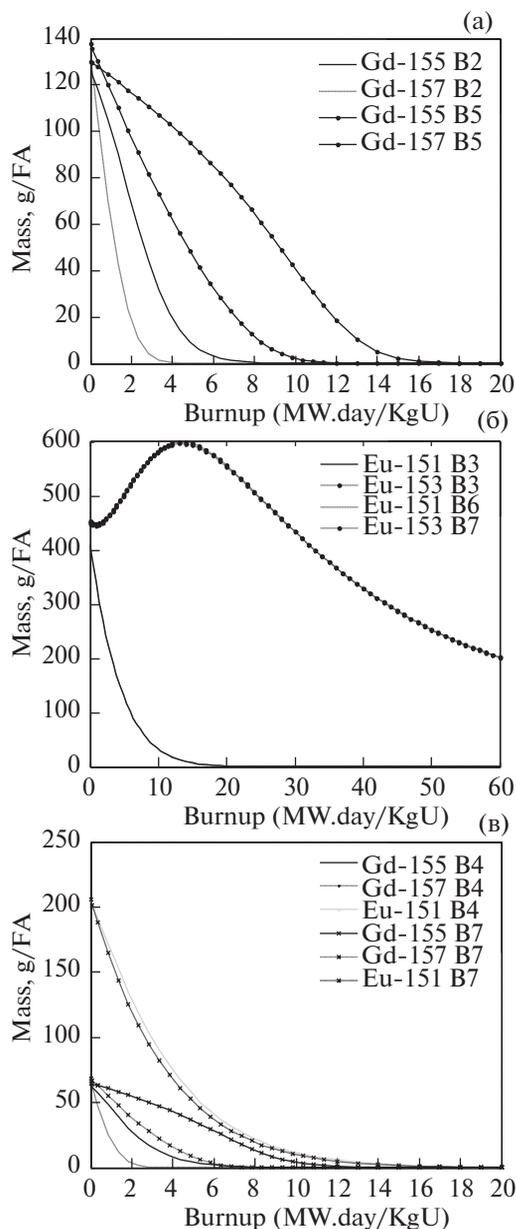


Рис. 5а. Масса ^{155}Gd и ^{157}Gd в зависимости от глубины выгорания в вариантах B_2 и B_5 . **5б.** Масса ^{151}Eu и ^{153}Eu в зависимости от глубины выгорания в вариантах B_3 и B_6 . **5в.** Масса ^{155}Gd , ^{157}Gd и ^{151}Eu в зависимости от глубины выгорания в вариантах B_4 и B_7 .

тителей (Gd и Eu) лучше стабилизирует поведение коэффициента размножения в зависимости от глубины выгорания и на более длительное время, чем при любом использовании одного Gd. К тому же, это меньше снижает теплопроводность, чем при использовании одного Gd, и меньше снижает температуру плавления топлива, чем при использовании одного Eu.

Радиальный коэффициент неравномерности распределения энерговыделения по ТВС в зави-

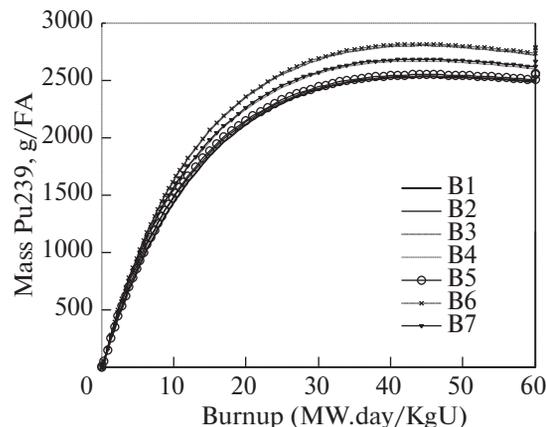


Рис. 6. Масса ^{239}Pu в зависимости от глубины выгорания.

симости от глубины выгорания представлен в табл. 4.

Следует отметить существенное возрастание коэффициента неравномерности энерговыделения по ТВС в случае применения ВП, особенно в начале каждой кампании. Естественно, что для гадолиния степень депрессии потока нейтронов в твэлах, расположенных вблизи твэгов, больше, чем для твэлов вблизи твэев. Поэтому и коэффициент неравномерности для вариантов с европием ниже, чем с гадолинием. Однако по мере выгорания поглотителя коэффициент неравномерности снижается, приближаясь к значению для эталонного варианта. Кроме того, для вариантов с гетерогенным распределением ВП по твэлу степень неравномерности энерговыделения снижается.

НАКОПЛЕНИЕ ИЗОТОПОВ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВЫГОРАНИЯ

Наличие ВП в топливе смещает нейтронный спектр в область эпитепловых нейтронов. И чем боль-

Таблица 4. Коэффициент неравномерности распределения энерговыделения

Глубина выгорания (МВт сут/кгU)	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
0.0	1.07	1.25	1.20	1.25	1.10	1.18	1.16
9.84	1.07	1.08	1.15	1.10	1.09	1.14	1.10
20	1.07	1.07	1.11	1.09	1.07	1.11	1.08
30	1.06	1.06	1.11	1.08	1.07	1.10	1.09
40	1.06	1.07	1.09	1.09	1.06	1.09	1.08
50	1.06	1.07	1.07	1.07	1.06	1.08	1.07
60	1.06	1.06	1.08	1.07	1.06	1.07	1.07

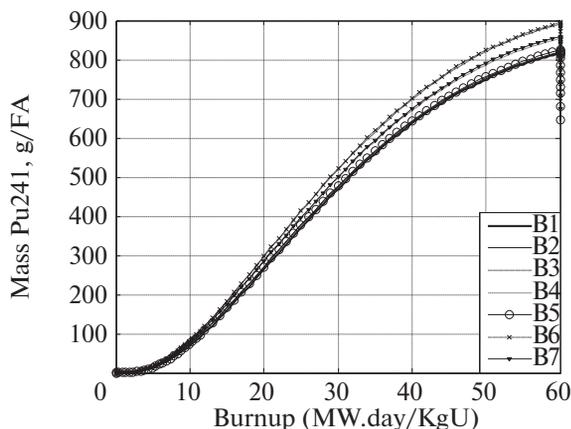


Рис. 7. Масса ^{241}Pu в зависимости от глубины выгорания.

ше эффективность ВП, тем больше это смещение. Гадолиний полностью выгорает до 14 МВт сут/кгU, поэтому нейтронный спектр смещается в область быстрых нейтронов только в этом промежутке времени. А при использовании европия, во-первых: эффективность ВП больше, что приводит к большему смещению нейтронного спектра в область быстрых нейтронов; во вторых, влияние ВП продолжается до конца кампании. Это приводит к большему накоплению ^{239}Pu и ^{241}Pu , что показано на рис. 6 и 7.

ВЫВОДЫ

Использование ВП в ядерном топливе приводит как к положительным, так и к отрицательным эффектам. Эти эффекты зависят от вида используемого выгорающего поглотителя, концентрации ВП в топливе и количества ячеек, содержащих ВП. В настоящей работе проведено сравнение влияния выгорающих поглотителей для вариантов их использования, представленных в табл. 2.

Применение Gd в качестве выгорающего поглотителя уменьшает коэффициент размножения нейтронов K_{∞} только в начальный период кампании, а использование Eu уменьшает K_{∞} практически на все время кампании, но топливо при этом переходит в подкритическое состояние при меньшем выгорании (т.е. на более ранней стадии). К тому же радиоактивность топлива при использовании Eu выше, чем при применении Gd, что может потребовать более длительного охлаждения ОЯТ в бассейне выдержки.

Совместное использование Gd и Eu в качестве выгорающих поглотителей с разными вариантами их размещения в твэл стабилизирует поведение коэффициента размножения K_{∞} в надкритическом положении (B_4 и B_7), и еще лучший ре-

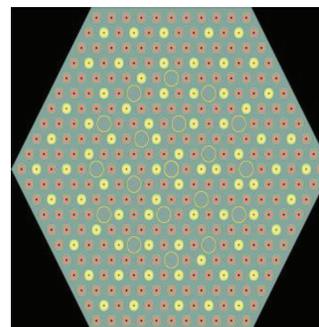


Рис. 8. Геометрия сборки ТВС-А с 72 твэгами.

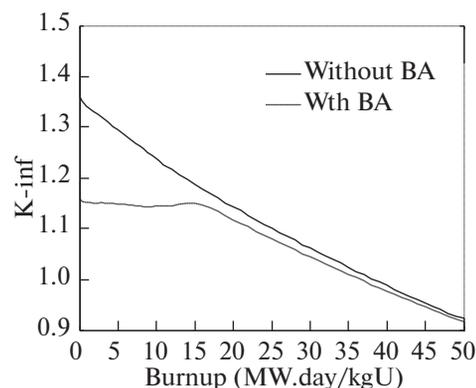


Рис. 9. Коэффициент размножения нейтронов K_{∞} в зависимости от глубины выгорания.

зультат достигается, когда Gd помещается в центральное отверстие твэл (B_7).

Сравнение проведенных вариантов расчета показывает, что наилучшими характеристиками и условиями обеспечения безопасности работы реактора обладают варианты B_4 и B_7 совместного использования выгорающих поглотителей, причем размещение Gd в центральное отверстие твэл дает дополнительные преимущества. Величина K_{∞} остается в критическом состоянии до выгорания 27 МВт сут/кгU, что потребует меньшего количества бора при эксплуатации реактора во время кампании и сокращения экономических расходов. Использование Gd в центральном отверстии твэл стабилизирует изменение коэффициента размножения нейтронов в начале кампании.

Устойчивость K_{∞} (рис. 4) обеспечивает дополнительные пределы ядерной безопасности во время работы, особенно в начале кампании. Первая кампания топлива в реакторе не требует тогда изменения концентрации борной кислоты, регулирования критичности состояния с помощью вставки или извлечения СУЗ, а это уменьшает экономические издержки.

Наилучшего варианта удается достигнуть при использовании 72 топливных элементов с ВП в ТВС: с 0.15% содержанием Eu в топливе каждого из 72 твэгов и с 1.5% содержанием Gd в центральной области этих твэгов, как показано на рис. 8.

В результате получается большая стабильность в значениях K_{∞} на начальной стадии кампании вплоть до выгорания в 16 МВт сут/кгU, как показано на рис. 9. Величина K_{∞} остается в критическом состоянии вплоть до глубины выгорания в 37 МВт сут/кгU.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жахонг Ли, Дзюньити Хори, Кен Накадзима, Тадафуми Сано, Самуол Ли* Нейтронозахватной крест измерений раздел 151, 153 ЕС через пару СбД6 детекторы [Текст]. Стр. 1046–1057. Получено 14 октября 2016, принято 23 мая 2017, опубликовано онлайн: 17 июля 2017. – URL: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00223131.2017.1344575> (дата обращения: 10.11.2018).
2. Выгорающие Поглотители – Выгорающие Яды. Адрес: <https://ВСП.ядерной.энергии.сеть/атомная.электростанция/ядерного.топлива/горючие.материалы.горючие-яды/>. (Дата обращения 21.01.2018).
3. *Стогов Ю.В.* Перспективные технологии использования оксидного уран-гадолиниевого топлива в легководных реакторах [Текст] / Ю.В. Стогов [и др.] // Материалы XIV семинара по проблемам физики реакторов. Москва : МИФИ, 2006. С. 45–47.
4. *Балистайри Д.* Исследование UO₂/Gd₂O₃ топливной смеси [Текст] / Д. Балистайри // МАГАТЭ-ТесДос-1036. Вена (Австрия). 1998. С. 63–72.
5. *Ермолин В.С.* О размещении гадолиния в центральном отверстии твэлов водо-водяных реакторов [Текст] / В.С. Ермолин, В.С. Окунев // Физико-технические проблемы ядерной энергетики. Научная сессия МИФИ-2008. С. 101–102.
6. *Бергельсон Б.Р.* Глубина выгорания ядерного топлива ВВЭР с разными поглотителями [Текст] / Б.Р. Бергельсон [и др.] // Атомная энергия. Т. 109. Вып. 4. Октябрь 2010. С. 240–245.
7. *Абдельгафар Галахом А.* Исследование возможности использования сплава европия и Пирекса в качестве сжигаемого поглотителя в PWR [Текст] / А. Абдельгафар Галахом // Анналы ядерной энергии. Том 110. Декабрь 2017. С. 1127–1133.
8. *Липаннен Дж.* SERPENT – код расчета выгорания физики реактора Монте-Карло с непрерывной энергией [Текст] / Центр технических исследований VTT Финляндии. 18.06.2015.
9. *Ондрей Новак, Ондрей Chvala, Николай П. и др.* “ВВЭР 1000 Хмельницкий бенчмарк-анализ, рассчитанный Serpent2”. Анналы ядерной энергетики 110 (2017) 948–957.
10. Ядерное топливо для реакторов ВВЭР, URL: http://www.tvel.ru/wps/wcm/connect/tvel/tvelsite/resources/9a8c448042df8fd7a492b7b2cb3f9f43/Nuclear-Fuel_RUS_2017.pdf. (Дата обращения 21.01.2018).
11. *Чедвик М.Б.* ENDF/B-VII.1 ядерные данные для науки и техники: сечения, ковариации, выходы продуктов деления и данные распада [Текст] / М.Б. Чедвик [и др.] // Листы данных. 112. 2011. С. 2887–2996. <https://doi.org/10.1016/Дж.НСР.2011.11.002>

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta “MIFI”, 2019, vol. 8, no. 3, pp. 199–205

Comparison of the Effect of Burnable Absorbers (Gd and Eu) on the Neutron-Physical Characteristics of VVER-1000 Fuel Assemblies

M. A. Abu Sondos^{a,#}, V. M. Demin^a, and V. I. Savander^a

^a National Research Nuclear University MEPHI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: MAbusondos@mephi.ru

Received January 24, 2019; revised April 12, 2019; accepted April 26, 2019

Abstract—The problem of using burnable absorbers in VVER reactors to reduce the volume of liquid regulation of excess fuel burnup reactivity has been considered. The use of burnable absorbers such as Gd₂O₃ and Eu₂O₃ in nuclear fuel has a positive effect on the nuclear fuel cycle of light-water reactors PWR (VVER-1000) and BWR (RBMK) and leads to an increase in the duration of the campaign and some other positive properties. However, the presence of burnable absorbers in fuel simultaneously deteriorates the uniformity of the energy field and a number of other negative properties. Previous studies of the possibility of reducing these negative results have been presented. One of the proposed technical solutions is to change the structure of gadolinium placement in fuel rods. In this work, the influence of the placement of burnable absorbers (Gd₂O₃ and Eu₂O₃) on the neutron-physical characteristics of nuclear fuel of VVER-1000 reactors has been studied.

These characteristics are the infinite neutron multiplication factor, the coefficient of uneven distribution of energy release, and the accumulation of isotopes depending on the burnup.

Keywords: TVEG, Serpent, FA, VVER-1000, burnable absorbers, Eu_2O_3 , Gd_2O_3 , coefficient of uneven distribution of energy

DOI: 10.1134/S2304487X19030027

REFERENCES

1. Jaehong Lee Jun-ichi Hori, Ken Nakajima, Tadafumi Sano & Samyol Lee. Neutron capture cross section measurements of ^{151}Eu , ^{153}Eu using a pair of C6D6 detectors. P. 1046–1057 | Received 14 Oct 2016, Accepted 23 May 2017, Published online: 17 Jul 2017.
2. Burnable Absorbers – Burnable Poisons. URL: <https://www.nuclear-power.net/nuclear-power-plant/nuclear-fuel/burnable-absorbers-burnable-poisons/>. (Accessed 21.01.2018).
3. Stogov Yu.V., Belousov N.I. Savander V.I. et al. Perspektivnye tekhnologii ispol'zovaniya oksidnogo uranogadolinievogo topliva v legkovodnykh reaktorax [Promising Technologies for the Use of Uranium-Gadolinium Oxide Fuel in Light-Water Reactors]. Materialy XIV seminarov po problemam fiziki reaktorov [Proceedings of the XIV Seminar on Reactor Physics]. Moscow: MEFPhI. 2006. P. 45–47 (in Russian).
4. Balestieri D. Issledovanie $\text{UO}_2/\text{Gd}_2\text{O}_3$ toplivnoj smesi. IAEA-TECDOC-1036. Vienna (Austria). 1998. P. 63–72.
5. Ermolin V.S., Okunev V.S. O razmeshchenii gadoliniya v central'nom otverstii tvelov vodo-vodyanykh reaktorov [Placement of Gadolinium in the Central Opening of Water–Water Reactor Fuel Rods]. Fiziko-tekhnicheskie problemy yadernoj energetiki [Physical and Technical Problems of Nuclear Power Engineering]. Nauchnaya sessiya MIFI [Scientific Session of MEFPhI]. 2008. P. 101–102 (in Russian).
6. Bergelson B., Belonog V., Gerasimov A. et al. Glubina vygoraniya yadernogo topliva VVER s raznymi poglotitelyami [Depth of Burn-Up of WWER Nuclear Fuel with Different Absorbers]. Atomnaya energiya [Atomic Energy]. V. 109. Vol. 4. October 2010. P. 240–245 (in Russian).
7. Abdelghafar Galahom A. Issledovanie vozmozhnosti ispol'zovaniya splava evropiya i Pireksa v kachestve szhigaemogo poglotitelya v PWR [Study of Possibility of Europium and Pyrex Alloy Using as Burnable Absorber in PWR]. Annaly yadernoj energii [Annals of Nuclear Energy]. V. 110. December 2017. P. 1127–1133 (in Russian).
8. Leppänen J. SERPENT – a Continuous-energy Monte Carlo Reactor Physics Burnup Calculation Code. VTT Technical Research Centre of Finland. (June 18, 2015).
9. Ondrej Novak, Ondrej Chvala, Nicholas P. и др. “VVER 1000 Khmel'nitskiy benchmark analysis calculated by Serpent2”. Annals of Nuclear Energy 110 (2017). P. 948–957.
10. Nuclear fuel for VVER reactors. URL: http://www.tvel.ru/was/otklucheny/podklyuchenie/tel/tvel-site/resursov/9a8c448042df8fd7a492b7b2cb3f9f43/NuclearFuel_RUS_2017.pdf. (Accessed 21.01.2018).
11. Chadwick M.B., et al. ENDF/B-VII.1 nuclear data for science and technology: cross sections, covariances, fission product yields and decay data. Nucl. Data Sheets, 112 (2011). P. 2887–2996, 10.1016/j.nds.2011.11.002.

ОПТИМАЛЬНЫЙ НАБОР УГЛОВЫХ ОРИЕНТАЦИЙ ГСП ПРИ КАЛИБРОВКЕ АКСЕЛЕРОМЕТРОВ НА НЕПОДВИЖНОМ СТЕНДЕ

© 2019 г. М. Д. Гребенкин^{1,2*}

¹ ФГУП “НПЦАП им. акад. Н.А. Пилюгина”, Москва, 117342, Россия

² Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

*e-mail: grebenkinmd@gmail.com

Поступила в редакцию 29.01.2019 г.

После доработки 12.04.2019 г.

Принята к публикации 26.04.2019 г.

Проведен анализ математической модели формирования измерительных ошибок блока из трех акселерометров при определении вектора кажущегося ускорения. Рассмотрен метод векторной калибровки блока акселерометров на неподвижном основании с вектором силы тяжести в качестве опорной величины. Для каждого из акселерометров список параметров модели формирования измерительных ошибок, которые уточняются при калибровке, включает в себя два угловых параметра выставки оси чувствительности в приборной системе координат, отклонения масштабного коэффициента и смещение нуля. Предложен способ выбора оптимального набора угловых ориентаций блока акселерометров при проведении стендовой калибровки для наилучшей точности оценки параметров рассмотренной модели ошибок. Улучшение достигается благодаря уменьшению числа обусловленности промежуточной матрицы, возникающей при решении калибровочной системы линейных уравнений методом наименьших квадратов. Уменьшение числа обусловленности матрицы позволяет уменьшить влияние на итоговую оценку вектора параметров неучтенных в модели факторов, таких как измерительный шум датчиков и ошибки угловой выставки блока в пространстве. Приведенный способ выбора набора оптимальных калибровочных угловых ориентаций проверен с помощью компьютерного моделирования векторной калибровки путем добавления в массив измерений шума с гауссовским распределением. Набор калибровочных угловых ориентаций блока, полученный приведенным способом, позволил значительно увеличить точность получаемой оценки на фоне зашумленных измерений.

Ключевые слова: гиросtabilизированная платформа, калибровка акселерометров, метод наименьших квадратов

DOI: 10.1134/S2304487X19030064

ВВЕДЕНИЕ

Одним из ключевых факторов точности работы инерциальных систем навигации является определение погрешностей чувствительных элементов (калибровка), входящих в эту систему. Калибровка акселерометров, установленных на ГСП, может быть выполнена на неподвижном стенде путем последовательных вращений ГСП и сравнением ожидаемого в данной географической точке Земли вектора ускорения свободного падения с измеренными акселерометрами. Математически данная задача представлена в виде несовместной системы линейных уравнений, которую, однако, можно решить, используя метод наименьших квадратов или Калмановскую фильтрацию. Приближенным решением этой системы будет являться вектор оценок параметров, чьи погрешно-

сти определяют конечные погрешности акселерометров.

Точность оценки этого вектора параметров, а следовательно, и конечных погрешностей, несомненно зависит от полноты используемой математической модели. Однако, также логично допустить влияние на точность оценки набора угловых положений, при которых производились измерения вектора ускорения.

В статье показано наличие зависимости точности оценивания методом наименьших квадратов вектора параметров погрешностей акселерометров от набора угловых ориентаций ГСП во время проведения измерений в рамках рассматриваемой модели погрешностей, а также определен оптимальный набор угловых ориентаций для калибровки тройки акселерометров, близкой к ортогональной.

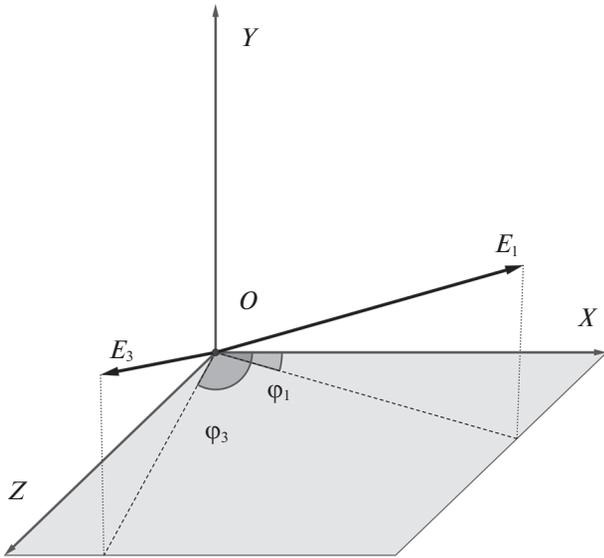


Рис. 1. Угловые параметры φ_1 и φ_3 ориентации акселерометров 1 и 3 (X и Z).

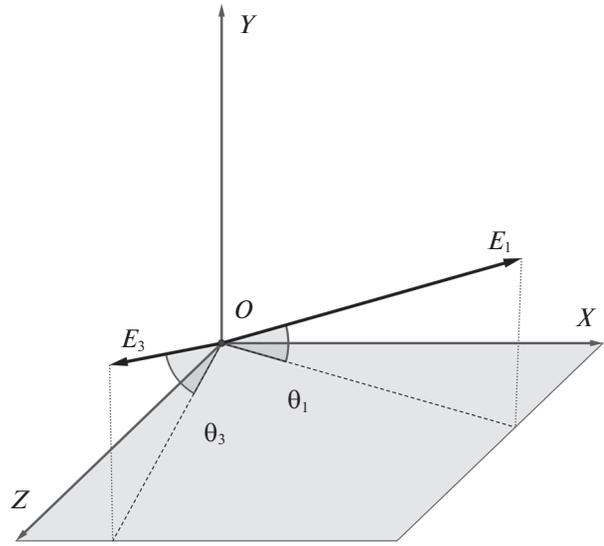


Рис. 2. Угловые параметры θ_1 и θ_3 ориентации акселерометров 1 и 3 (X и Z).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОД КАЛИБРОВКИ

В рассматриваемой модели 3 акселерометра закреплены на ГСП так, что их оси чувствительности E_1 , E_2 и E_3 составляют тройку векторов, близкую к ортогональной. Номинальное положение оси чувствительности E_2 второго акселерометра сонаправлена с вертикальной осью OY приборной системы координат. Номинальные положения осей чувствительности E_1 и E_3 первого и третьего акселерометров составляют угол величины $0,5^\circ$ с плоскостью OXZ приборной системы координат.

В модели погрешность акселерометров обусловлена следующими параметрами:

1. Ошибки угловых положений акселерометров относительно ГСП (выставка). Для акселерометров 1 и 3, соответствующих осям OX и OZ это углы θ_1 , φ_1 и θ_3 , φ_3 (см. рис. 1, рис. 2). θ_1 и θ_3 – углы между осями чувствительности E_1 и E_3 и плоскостью OXZ . φ_1 и φ_3 – углы между проекциями осей чувствительности E_1 и E_3 на плоскость OXZ и осью OX .

Для акселерометра 2, соответствующего оси OY , это углы ν_1 и ν_2 (см. рис. 3). Это углы между осью вертикали OY и проекциями оси чувствительности E_2 на плоскости OXY и OYZ соответственно;

2. Отклонения масштабных коэффициентов акселерометров K_1, K_2, K_3 ;

3. Постоянное смещение показаний акселерометров b_1, b_2, b_3 (смещение нуля).

Из набора параметров $\theta_1, \varphi_1, \theta_3, \varphi_3, \nu_1, \nu_2, K_1, K_2, K_3, b_1, b_2, b_3$ можно сформировать 3 отдельных

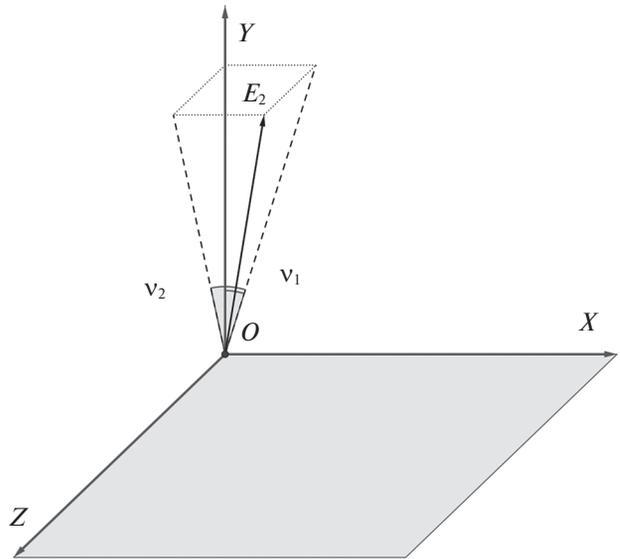


Рис. 3. Угловые параметры ν_1 и ν_2 ориентации акселерометра 2 (Y).

вектора, каждый из которых соответствует одному акселерометру:

$$p_1 = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \varphi_1 \\ K_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ K_2 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} \theta_3 \\ \varphi_3 \\ K_3 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Приведенные вектора p_1, p_2, p_3 , связаны с величиной на выходе акселерометра в каждый момент времени выражением:

$$\begin{aligned} A_i(\mathbf{p}_i, t) &= K_i \mathbf{E}_i(\theta_i, \psi_i) \mathbf{g}(t) + b_i, \quad i = 1, 3, \\ A_i(\mathbf{p}_i, t) &= K_i \mathbf{E}_i(v_1, v_2) \mathbf{g}(t) + b_i, \quad i = 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь:

- $A_i(\mathbf{p}_i, t)$ – величина на выходе акселерометра i ;
- $K_i \mathbf{E}_i$ – вектор оси чувствительности акселерометра i , зависящий от угловых параметров выставки и масштабного коэффициента K_i ;
- $\mathbf{g}(t)$ – вектор ускорения свободного падения в текущей точке Земли; представленный в приборной системе координат и потому зависящий от времени ввиду вращения Земли и вращения самой платформы. Номинальные значения векторов параметров:

$$\mathbf{p}_1^{ном} = \begin{pmatrix} 0.5^\circ \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2^{ном} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3^{ном} = \begin{pmatrix} 0.5^\circ \\ -90^\circ \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Модель предполагает возникновение ошибок из-за отклонения приведенных параметров от их номинальных значений. Допуская малость этих отклонений, величину конечной ошибки измерения в момент времени t можно линеаризовать относительно малых отклонений составляющих векторов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$:

$$\begin{aligned} \delta A_i(\mathbf{p}_i, t) &= \frac{\partial A_i(\mathbf{p}_i^{ном}, t)}{\partial p_{i1}} \delta p_{i1} + \frac{\partial A_i(\mathbf{p}_i^{ном}, t)}{\partial p_{i2}} \delta p_{i2} + \\ &+ \frac{\partial A_i(\mathbf{p}_i^{ном}, t)}{\partial p_{i3}} \delta p_{i3} + \frac{\partial A_i(\mathbf{p}_i^{ном}, t)}{\partial p_{i4}} \delta p_{i4}, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (4)$$

где в виде p_{ik} обозначена k -я компонента вектора параметров \mathbf{p}_i акселерометра i .

Далее можно рассматривать задачу определения отклонения величин параметров от их номинальных значений для каждого из акселерометров в отдельности. Пусть акселерометр проводит измерение p_j в моменты времени $t_j, j = 1..n$. При этом g_i – ожидаемое измерение вектора \mathbf{g} данным акселерометром в момент времени t_j . Для удобства частные производные выходной величины рассматриваемого акселерометра по параметру p_k в момент времени t_j далее будем обозначать d_{jk} . Последовательность из n измерений сформирует систему уравнений:

$$\begin{aligned} a_1 - g_1 &= \delta a_1 = g_1 + d_{11} \delta p_1 + d_{12} \delta p_2 + d_{13} \delta p_3 + d_{14} \delta p_4 \\ a_2 - g_2 &= \delta a_2 = g_2 + d_{21} \delta p_1 + d_{22} \delta p_2 + d_{23} \delta p_3 + d_{24} \delta p_4 \\ &\dots \\ a_n - g_n &= \delta a_n = g_n + d_{n1} \delta p_1 + d_{n2} \delta p_2 + d_{n3} \delta p_3 + d_{n4} \delta p_4. \end{aligned} \quad (5)$$

Удобнее записать эту систему в векторно-матричном виде:

$$\begin{bmatrix} a_1 - g_1 \\ a_2 - g_2 \\ \vdots \\ a_n - g_n \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \delta p_1 \\ \delta p_2 \\ \delta p_3 \\ \delta p_4 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Эта система уравнений будет являться несовместной, но ее приближенное решение может быть найдено методом наименьших квадратов или фильтром Калмана.

ОПТИМИЗАЦИЯ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Точность решения и даже возможность его нахождения будет зависеть от вида матрицы D . В случае, когда матрица D является плохо обусловленной и ее строки близки к линейной зависимости друг от друга, результирующая оценка сильно искажается за счет неточности модели и воздействия шумов в измерениях. Максимальная точность оценки может быть получена, если матрица D хорошо обусловлена и ее строки ортогональны друг другу. В случае, когда измерений больше, чем размерность оцениваемого вектора, строки могут образовывать блоки, внутри которых они линейно зависимы или близки к этому, но количество таких блоков должно быть равно размерности вектора оценки, то есть на каждую компоненту оцениваемого вектора приходится строка или блок строк, ортогональных другим блокам. Тривиальным случаем такой матрицы является диагональная (если количество измерений полностью совпадает с размерностью вектора оценки) или блочно-диагональная с блоками столбцами размерности $n \times 1$ (количество измерений больше размерности вектора оценки). Каждый элемент на диагонали (число или блок) соответствует компоненту в искомом векторе (см. рис. 4).

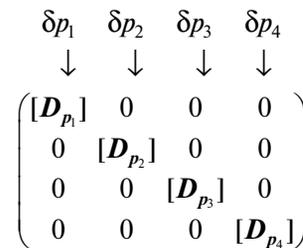


Рис. 4. Соответствие блоков матрицы D компонентам вектора \mathbf{p} .

Из (3), (4) следует, что коэффициенты из первых трех столбцов матрицы D зависят от вектора $\mathbf{g}(t)$, и эта зависимость является линейной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i(\mathbf{p}^{ном}, t_i)}{\partial p} &= \frac{\partial [KE]}{\partial p} \mathbf{g}(t_i) + \frac{\partial b}{\partial p} = \\ &= Hg(t_i) + \frac{\partial b}{\partial p} = [d_{i1} \ d_{i2} \ d_{i3} \ d_{i4}]. \end{aligned} \quad (7)$$

Ниже приведены матрицы H для каждого из акселерометров в соответствии с описанной

выше моделью ошибок. Для первого акселерометра:

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{K_1 \sqrt{1 - \sin(\psi_1)^2} \cos(\theta_1) \sin(\theta_1)}{\sqrt{1 - \sin(\theta_1)^2}} & K_1 \cos(\theta_1) & -\frac{K_1 \sin(\psi_1) \cos(\theta_1) \sin(\theta_1)}{\sqrt{1 - \sin(\theta_1)^2}} \\ -\frac{K_1 \sqrt{1 - \sin(\theta_1)^2} \cos(\psi_1) \sin(\psi_1)}{\sqrt{1 - \sin(\psi_1)^2}} & 0 & K_1 \cos(\psi_1) \sqrt{1 - \sin(\theta_1)^2} \\ \sqrt{1 - \sin(\psi_1)^2} \sqrt{1 - \sin(\theta_1)^2} & \sin(\theta_1) & -\sin(\psi_1) \sqrt{1 - \sin(\theta_1)^2} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Для второго акселерометра:

$$H = \begin{pmatrix} K_2 \cos(v_1) & -K_2 \frac{\cos(v_1) \sin(v_1)}{\sqrt{1 - \sin(v_1) - \sin(v_2)}} & 0 \\ 0 & -K_2 \frac{\cos(v_2) \sin(v_2)}{\sqrt{1 - \sin(v_1) - \sin(v_2)}} & -K_2 \cos(v_2) \\ \sin(v_1) & \sqrt{1 - \sin(v_1) - \sin(v_2)} & -\sin(v_2) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Для третьего акселерометра:

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{K_3 \cos(\psi_3) \cos(\theta_3) \sin(\theta_3)}{\sqrt{1 - \sin(\theta_3)^2}} & K_3 \cos(\theta_3) & -\frac{K_3 \sqrt{1 - \sin(\psi_3)^2} \cos(\theta_3) \sin(\theta_3)}{\sqrt{1 - \sin(\theta_3)^2}} \\ -K_3 \sin(\psi_3) \sqrt{1 - \sin(\theta_3)^2} & 0 & \frac{K_3 \sqrt{1 - \sin(\theta_3)^2} \cos(\psi_3) \sin(\psi_3)}{\sqrt{1 - \sin(\psi_3)^2}} \\ \cos(\psi_3) \sqrt{1 - \sin(\theta_3)^2} & \sin(\theta_3) & \sqrt{1 - \cos(\psi_3)^2} \sqrt{1 - \sin(\theta_3)^2} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Матрицу H можно интерпретировать как тройку строк-векторов в трехмерном пространстве, описанных в приборной системе координат. Проекция вектора $\mathbf{g}(t_i)$ на эти векторы задает элементы d_{i1} , d_{i2} , d_{i3} i -й строки матрицы D , соответствующие измерению, проведенному в момент t_i . Рассмотрим некоторую пару векторов из матрицы H . Этой паре соответствует плоскость, ортогонально которой можно направить вектор $\mathbf{g}(t_i)$ путем соответствующего поворота платформы. При этом проекция вектора $\mathbf{g}(t_i)$ на третью строку-вектор будет ненулевой, так как для каждого акселерометра матрица H имеет ранг равный трем, то есть ее строки линейно-независимы, а значит три вектора не лежат в одной плоскости. Таким образом возможен выбор такой ориентации платформы и соответствующего вектора $\mathbf{g}(t_i)$, при котором два из трех элементов d_{i1} , d_{i2} и d_{i3} будут равны нулю.

Однако из (7) видно, что элементы d_{i4} соответствующие величине смещения нуля акселеромет-

ра, всегда будут равны единице. Поэтому наилучший вид матрицы, который можно получить:

$$\begin{pmatrix} [D_{p_1}] & 0 & 0 & 1 \\ 0 & [D_{p_2}] & 0 & 1 \\ 0 & 0 & [D_{p_3}] & 1 \\ 0 & 0 & -[D_{p_3}] & 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

И хотя эта матрица не является даже треугольной, нахождение четвертого компонента искомого вектора и исключение его из задачи выполняется сравнительно просто. Для этого достаточно выполнить измерения в двух противоположных ориентациях и сформировать блоки с противоположными знаками у всех элементов, кроме d_{i4} , после чего просуммировать полученные уравнения. После исключения из задачи четвертой компоненты вектора, матрица D примет желаемую диагональную (блочную-диагональную) форму.

ПРОВЕРКА С ПОМОЩЬЮ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для проверки того, приводит ли приведенная схема подбора ориентаций платформы к повышению точности оценки при зашумленных измерениях, проведено моделирование на компьютере процесса калибровки с применением неоптимального набора ориентаций, и набора, подобранного по схеме, описанной выше. В модель вводились ошибки – отклонения параметров акселерометров $i = 1, 2, 3$ составляющих вектор p_i , от их номинальных значений. Величины номинальных значений и введенных отклонений приведены в табл. 1.

По измерениям, сгенерированным моделью с указанными отклонениям параметров, производилась оценка отклонений с помощью метода наименьших квадратов. При этом к измерениям добавлен аддитивный белый шум со среднеквадратичным отклонением 10^{-4} м/с² для проверки устойчивости двух подходов к такого рода искажениям. Оценка с применением первого и второго подхода произведена 200 раз с одними и теми же условиями для усреднения результатов. В первом подходе использовался неоптимальный набор ориентаций:

1. Начальная ориентация: ось OY направлена вертикально, противоположно вектору g , 100 измерений на каждый акселерометр;

2. Поворот платформы вокруг оси OY на 40° , 100 измерений на каждый акселерометр;

3. Поворот платформы вокруг оси OY на 33° и вокруг оси OZ на 70° , 100 измерений на каждый акселерометр;

4. Поворот платформы вокруг оси OY на 70° , 100 измерений на каждый акселерометр.

Общая размерность решаемой системы уравнений для каждого из акселерометров составила 400. Усредненные результаты оценки приведены в табл. 2.

Во втором подходе для оценки использовался оптимальный набор из четырех ориентаций. Три из них определяются таким образом, чтобы вектор g в приборной системе координат был сонаправлен результату векторного перемножения трех пар строк-векторов матрицы H для каждого акселерометра. Четвертая ориентация определяется, как направленная противоположно одной из трех предыдущих. Она нужна для оценки смещения нуля акселерометра. На каждую из четырех ориентаций приходится 100 измерений каждого из акселерометров, общая размерность задачи для каждого из акселерометров составляет 400 уравнений. Соответствующие усредненные результаты оценивания приведены в таблице 2. В случае неоптимального набора угловых ориентаций получена низкая точность оценки неугло-

Таблица 1. Номинальные значения параметров и их отклонения

№	Параметр	Значение	Величина отклонения
1	θ_1	0.5°	$30''$
2	φ_1	0°	$30''$
3	ν_1	$30''$	$30''$
4	ν_1	$30''$	$30''$
5	θ_3	0.5°	$30''$
6	φ_3	-90°	$30''$
7	K_1	1	$5 \cdot 10^{-5}$
8	K_2	1	$5 \cdot 10^{-5}$
9	K_3	1	$5 \cdot 10^{-5}$
10	b_1	0	$5 \cdot 10^{-5}$ м/с ²
11	b_2	0	$5 \cdot 10^{-5}$ м/с ²
12	b_3	0	$5 \cdot 10^{-5}$ м/с ²

Таблица 2. Усредненная относительная погрешность оценки отклонений параметров при неоптимальном и оптимальном наборе ориентаций

№	Параметр	Относительная погрешность, неоптимальный набор ориентаций, %	Относительная погрешность, оптимальный набор ориентаций, %
1	θ_1	17.5745	0.7152
2	φ_1	19.5877	0.6555
3	ν_1	7.8072	0.6982
4	ν_2	11.3287	0.6816
5	θ_3	11.1752	0.7201
6	φ_3	8.5489	0.6652
7	K_1	30.1383	1.1370
8	K_2	56.1574	1.2563
9	K_3	25.4136	1.0919
10	b_1	495.4044	12.0713
11	b_2	540.8591	10.7666
12	b_3	551.2224	11.4856

вых параметров модели ошибок. Причина низкой точности заключается в том, что решаемая система уравнений плохо обусловлена (близка к вырожденной). Выбор оптимальных угловых ориентаций повышает информативность измерений, и, как следствие, улучшает обусловленность этой системы уравнений.

При данных условиях относительная точность оценивания с применением оптимального набора ориентаций на порядок превосходит точность

оценивания при неоптимальном наборе. Сравнение результатов дает понять, что:

1. Углы ориентации влияют на точность оценивания при одинаковой размерности задачи;
2. Выбор оптимального набора ориентаций способен значительно улучшить точность калибровки при наличии зашумленных измерений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена зависимость точности метода наименьших квадратов при оценивании вектора параметров погрешностей акселерометров от программы угловых ориентаций ГСП во время проведения измерений в рамках приведенной модели погрешностей. При рассмотрении математической модели и метода оценки показано, что существуют и могут быть найдены оптимальные ориентации ГСП, при которых может быть улучшена устойчивость метода к измерительным шумам и, как следствие, повышена точность оценивания. Проведено компьютерное моделирование процесса оценивания, произведено

сравнение точностей оценок, полученных при применении оптимальных и неоптимальных ориентаций в условиях присутствия измерительного шума. Результаты показали, что выбор оптимального набора ориентаций способен улучшить точность оценивания в условиях зашумленных измерений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузовков Н.Т., Салычев О.С. Инерциальная навигация и оптимальная фильтрация. М.: Машиностроение, 1982. 216 с.
2. Бромберг П.В. Теория инерциальных систем навигации. М.: Наука, 1979. 296 с.
3. Гребенкин М.Д. Сравнение методов оценки параметров погрешностей блока акселерометров трехосной гиросtabilизированной платформы. Труды ФГУП “НПЦАП”. Системы и приборы управления. 2017. № 4. С. 22–31.
4. Парусников Н.А., Тихомиров В.В., Требников С.А. Определение инструментальных погрешностей инерциальной навигационной системы на неподвижном основании. Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11. № 7. С. 159–166.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta “МИФИ”, 2019, vol. 8, no. 3, pp. 206–212

Optimal Set of Angular Positions of Inertial Measurement Units for Accelerometer Calibration on a Stationary Bench

M. D. Grebenkin^{a,b,#}

^a Pilyugin Scientific Production Association of Automation and Instrumentation, Moscow, 117342 Russia

^b National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: grebenkinmd@gmail.com

Received January 29, 2019; revised April 12, 2019; accepted April 26, 2019

Abstract—The mathematical model of instrumental errors of a three-accelerometer module has been analyzed in application to the determination of the apparent acceleration vector. To this end, the vector calibration method is used on a stationary testing bench with the gravitational acceleration as a reference. The instrumental errors of each accelerometer in the module are determined by a set of parameters, which are refined at calibration. This set consists of two angular errors of the sensitivity axis orientation, the deviation of the scaling coefficient, and bias. An approach has been proposed to determine the optimal set of angular calibration positions for the accelerometer module to achieve the best accuracy for estimating the listed parameters of the instrumental error model. The improvement is achieved due to a smaller condition number of an intermediate matrix arising when solving the calibration system of linear equations by the least squares method. The decrease in the condition number reduces the influence of unaccounted factors, such as instrumental noise and alignment error, on final parameter estimate. The approach has been tested through a computer simulation by adding noise to the array of measurements and comparison with a nonoptimal set of angular calibration positions.

Keywords: gyrostabilized platform, accelerometer calibration, least squares method

DOI: 10.1134/S2304487X19030064

REFERENCES

1. Kuzovkov N.T., Salychev O.S. *Inertsialnaya navigatsiya i optimalnaya filtratsiya* [Inertial navigation and optimal filtering]. Moscow, Mashinostroenie, 1982. 216 p.
2. Bromberg P.V. *Teoriya inertsialnikh sistem navigatsii* [Theory of inertial navigation systems]. Moscow, Nauka, 1979. 296 p.
3. Grebenkin M.D. The comparison of evaluation parameter methods of accelerometer module of the three-axel gyrostabilized platform. *Trudy FGUP NPTsAP. Systemy i pribory upravleniia*, 2017, no. 4, pp. 22–31 (in Russian).
4. Parusnikov N.A., Tikhomirov V.V., Trubnikov S.A. Determination of Instrument Errors for an Inertial Navigation System on a Stationary Base. *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika*, 2005, vol. 11, no. 7, pp. 159–166 (in Russian).

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2019 г. А. Д. Полянин^{1,2,3,*}

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

² Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

³ Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*e-mail: polyanin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 27.11.2018 г.

После доработки 27.11.2018 г.

Принята к публикации 04.12.2018 г.

Описаны различные классы нелинейных телеграфных уравнений с переменными коэффициентами

$$c(x)u_{tt} + d(x)u_t = [a(x)u_x]_x + b(x)u_x + p(x)f(u),$$

которые допускают точные решения с функциональным разделением переменных вида $u = U(z)$, $z = \varphi(x, t)$. Показано, что функция источника $f(u)$ и любые четыре из пяти коэффициентов $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$, $p(x)$ этих уравнений могут быть выбраны произвольно, а оставшийся коэффициент через них выражается. Исследованы свойства и построены некоторые решения переопределенной нелинейной системы дифференциальных уравнений, которым удовлетворяет функция $\varphi(x, t)$. Приведены примеры конкретных уравнений и их точных решений. Построены также некоторые точные решения типа обобщенной бегущей волны более сложных нелинейных телеграфных уравнений с запаздыванием вида

$$c(x)u_{tt} + d(x)u_t = [a(x)u_x]_x + b(x)u_x + p(x)f(u, w), w = u(x, t - \tau),$$

где $\tau > 0$ – время запаздывания, $f(u, w)$ – произвольная функция двух аргументов.

Ключевые слова: нелинейные телеграфные уравнения, нелинейные уравнения типа Клейна–Гордона, дифференциальные уравнения с запаздыванием, точные решения, решения с функциональным разделением переменных, решения типа обобщенной бегущей волны

DOI: 10.1134/S2304487X1902010X

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Краткий обзор литературы

Преобразования и точные решения различных классов нелинейных уравнений типа Клейна–Гордона вида

$$u_{tt} = [f_1(u)u_x]_x + f_2(u) \tag{1}$$

рассматривались во многих работах (см., например, [1–17] и цитируемую в них литературу). Для построения точных решений чаще всего использовались классический и неклассические методы исследования симметрий [1, 3, 4, 6, 10, 16, 17] и методы обобщенного и функционального разделения переменных [5, 7, 9, 12, 14, 15, 17].

В общем случае уравнение (1) допускает решения типа бегущей волны $u = U(kx - \lambda t)$ и при $f_2(u) = 0$ имеет автомодельное решение $u = U(x/t)$ [1]. Помимо указанных случаев известны также допускающие точные решения уравнения вида (1),

в которых две функции $f_1(u)$ и $f_2(u)$ выражаются через одну произвольную функцию $\varphi(u)$ [17]. Важно отметить, что при $f_2(u) = 0$ уравнение (1) может быть линеаризовано [11, 13, 14, 16]; в этом случае для произвольной функции $f_1(u)$ его некоторые точные решения, представленные в параметрической форме, приведены в [13, 14, 17].

В [8, 13, 14, 17–20] рассматривались нелинейные уравнения типа Клейна–Гордона с переменными коэффициентами автономного вида

$$c(x)u_{tt} = [a(x)f_1(u)u_x]_x + b(x)f_2(u). \tag{2}$$

В табл. 1 собраны некоторые уравнения вида (2), содержащие одну произвольную функцию искомого величини или пространственной переменной, допускающие точные решения (в решении уравнения № 1 вместо $\cosh\left(\frac{1}{2}\lambda t\right)$ можно взять

$\sinh\left(\frac{1}{2}\lambda t\right)$).

Таблица 1. Нелинейные уравнения типа Клейна–Гордона, зависящие от произвольных функций, допускающие точные решения. Здесь $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ – произвольные функции, b_1 , b_2 , k , λ – свободные параметры

№	Уравнение	Вид решения или пояснение	Литература
1	$u_{tt} = u_{xx} + e^{\lambda x} f(u)$	$u = U(z)$, $z = e^{\frac{1}{2}\lambda x} \cosh\left(\frac{1}{2}\lambda t\right)$	[13, 14]
2	$u_{tt} = (x^k u_x)_x + f(u)$	$u = U(z)$, $z = 4x^{2-k} - (2-k)^2 t^2$, $k \neq 2$	[8, 13, 14]
3	$u_{tt} = (x^k u_x)_x + x^{k-2} f(u)$	$u = U(z)$, $z = x^{(k-2)/2} t$	[18]
4	$u_{tt} = (e^{\lambda x} u_x)_x + f(u)$	$u = U(z)$, $u = 4e^{-\lambda x} - \lambda^2 t^2$	[8, 13, 14]
5	$u_{tt} = (u^k u_x)_x + b(x)u^{k+1}$	$u = \varphi(x)\psi(t)$	[14]
6	$u_{tt} = (e^{\lambda u} u_x)_x + b(x)e^{\lambda u}$	$u = \varphi(x) + \psi(t)$	[14]
7	$u_{tt} = (u^{-4/3} u_x)_x + b(x)u^{-1/3}$	уравнение приводится к виду $v_{tt} = (v^{-4/3} v_x)_z$	[8, 13, 14]
8	$u_{tt} = [a(x)u^k u_x]_x$	$u = \varphi(x)\psi(t)$	[8, 13, 14]
9	$u_{tt} = [a(x)u_x]_x + b_1 u \ln u + b_2 u$	$u = \varphi(x)\psi(t)$	[13, 14]

Ниже приведены еще три уравнения, обобщающие уравнения № 3, 5, 6, 8 в табл. 1, которые содержат две произвольные функции и допускают точные решения:

$$u_{tt} = [a(x)u^k u_x]_x + b(x)u^{k+1}, \quad u = \varphi(x)\psi(t)$$

(обобщает уравнения №№ 5, 8);

$$u_{tt} = [a(x)e^{\lambda u} u_x]_x + b(x)e^{\lambda u}, \quad u = \varphi(x) + \psi(t)$$

(обобщает уравнение № 6);

$$u_{tt} = [x^k g(u)u_x]_x + x^{k-2} f(u), \quad u = U(x^{(k-2)/2} t)$$

(обобщает уравнение № 3).

Отметим также, что уравнение

$$u_{tt} = [e^{\lambda x} g(u)u_x]_x + e^{\lambda x} f(u),$$

также имеет точное (инвариантное) решение вида $u = U(z)$, $z = e^{\lambda x/2} t$.

В [8, 13, 14, 21–23] исследовались симметрии и были приведены некоторые точные решения нелинейных телеграфных уравнений вида

$$c(x)u_{tt} = [a(x)f_1(u)u_x]_x + b(x)f_2(u)u_x, \quad (3)$$

причем в [21, 22] рассматривался случай $a(x) = b(x) = 1$.

Другие родственные и более сложные нелинейные уравнения гиперболического типа исследовались, например, в [24–29].

Отметим также, что точные решения нелинейных уравнений Клейна–Гордона с запаздыванием вида

$$u_{tt} = au_{xx} + f(u, w), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (4)$$

где $\tau > 0$ – время запаздывания, были получены в [30, 31].

В данной статье будут исследоваться допускающие точные решения нелинейные уравнения Клейна–Гордона и нелинейные телеграфные уравнения достаточно общего вида (в том числе и уравнения с запаздывающим аргументом), которые зависят от одной или нескольких произвольных функций.

Важно отметить, что точные решения нелинейных уравнений математической физики, которые содержат произвольные функции и поэтому обладают значительной общностью, представляют наибольший практический интерес для тестирования и оценки точности приближенных аналитических и численных методов интегрирования соответствующих начально-краевых задач.

1.2. Используемая терминология

В данной статье термин *точное решение* будет использоваться в отношении нелинейных уравнений с частными производными, если его решение выражается:

- (i) в элементарных функциях;
- (ii) в замкнутом виде с использованием определенных или/и неопределенных интегралов;
- (iii) через решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или систем таких уравнений.

Допускаются также комбинации случаев (i)–(iii).

Для более сложных нелинейных уравнений в частных производных с запаздывающим аргументом дополнительно включаются также решения, которые выражаются через решения обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием.

2. ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Класс рассматриваемых уравнений.

Редукция нелинейного телеграфного уравнения к ОДУ

Будем рассматривать одномерные нелинейные телеграфные уравнения с переменными коэффициентами следующего вида:

$$c(x)u_{tt} + d(x)u_t = [a(x)u_x]_x + b(x)u_x + p(x)f(u), \quad (5)$$

где $f(u)$ – произвольная функция. Некоторые из пяти функциональных коэффициентов $a = a(x) > 0$, $b = b(x)$, $c = c(x) > 0$, $d = d(x)$, $p = p(x)$ могут быть свободными, а другие будут через них выражаться в результате последующего анализа (свободные коэффициенты могут выбираться по-разному, см. далее). Без ограничения общности далее будем считать, что $p > 0$ (при $p < 0$ надо переобозначить функции p, f на $-p, -f$).

Замечание 1. При $c(x) \equiv 0$ уравнение (5) вырождается в нелинейное уравнение конвективной диффузии с объемной реакцией. Редукции и точные решения подобных и более сложных нелинейных уравнений параболического типа рассматривались, например, в [8, 13, 14, 17, 32–54].

Замечание 2. В специальном случае $b(x) \equiv d(x) \equiv 0$ уравнение (5) будем называть нелинейным уравнением типа Клейна–Гордона.

Ищем точные решения уравнения (5) в виде суперпозиции функций

$$u = U(z), \quad z = \varphi(x, t). \quad (6)$$

Подставив (6) в (5), получим функционально-дифференциальное уравнение

$$[a(x)\varphi_x^2 - c(x)\varphi_t^2]U''_{zz} + \{[a(x)\varphi_x]_x - c(x)\varphi_{tt} + b(x)\varphi_x - d(x)\varphi_t\}U'_z + p(x)f(U) = 0. \quad (7)$$

В частном случае $U(z) = z$, уравнение (7) совпадает с исходным уравнением (5) (т.е. на этом этапе никакие решения не потеряны). Потребуем теперь, чтобы выполнялись соотношения

$$p(x) = s(\varphi)[a(x)\varphi_x^2 - c(x)\varphi_t^2], \quad (8)$$

$$c(x)\varphi_{tt} + d(x)\varphi_t = [a(x)\varphi_x]_x + b(x)\varphi_x + k(\varphi)[a(x)\varphi_x^2 - c(x)\varphi_t^2], \quad (9)$$

где $s(\varphi), k(\varphi)$ – некоторые функции ($s \neq 0$). Тогда уравнение (7) редуцируется к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$U''_{zz} - k(z)U'_z + s(z)f(U) = 0. \quad (10)$$

Точные решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (10) для некоторых функций $k(z), s(z), f(U)$ можно найти в [55, 56].

В частном случае $k(z) \equiv 0$, что соответствует линейному уравнению (9), при $s(z) = 1$ общее решение уравнения (10) для любой функции $f(U)$ можно представить в неявном виде [55]:

$$\int [C_1 - 2 \int f(U) dU]^{-1/2} dU = C_2 \pm z, \quad (11)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Уравнения (8)–(10) позволяют несколькими способами конструктивно находить точные решения широкого класса нелинейных телеграфных уравнений вида (5).

Замечание 3. В уравнении (5) без ограничения общности два из пяти функциональных коэффициентов $a(x), b(x), c(x), d(x), p(x)$ можно положить равными единице. В частности, если поделить обе части уравнения на c , а затем перейти от t, x к новым независимым переменным $t, y = \int \sqrt{c/adx}$, то получим уравнение в канонической форме $u_{tt} + d_1(y)u_t = u_{yy} + b_1(y)u_y + p_1(y)f(u)$. Нетрудно найти преобразование $t, \bar{y} = \bar{y}(x)$, которое приводит уравнение (5) к другой канонической форме $u_{tt} + d_2(\bar{y})u_t = [a_2(\bar{y})u_{\bar{y}}]_{\bar{y}} + p_2(\bar{y})f(u)$. Однако исследование уравнения в общем виде (5) более удобно поскольку включает его любые канонические и неканонические формы.

Замечание 4. В уравнениях (5), (7)–(9) вместо $a(x), b(x), c(x), d(x), p(x)$ могут стоять функции двух переменных $a(x, t), b(x, t), c(x, t), d(x, t), p(x, t)$.

2.2. Определяющая система уравнений и ее свойства. Прямая процедура построения точных решений

В случае общего положения уравнения (8) и (9) при заданных функциях $a = a(x), b = b(x), c = c(x), d = d(x), p = p(x), k(\varphi), s(\varphi)$ представляют собой переопределенную нелинейную систему уравнений относительно функции φ (эту систему будем называть *определяющей системой уравнений*).

Нелинейные преобразования

$$\varphi = F(\Psi) \quad (12)$$

сохраняют вид уравнений (8) и (9), меняя функциональные коэффициенты $k(\varphi)$ и $s(\varphi)$ по правилу:

$$k(\varphi) \Rightarrow k(F(\Psi))F'_\Psi(\Psi) + \frac{F''_{\Psi\Psi}(\Psi)}{F'_\Psi(\Psi)}, \quad (13)$$

$$s(\varphi) \Rightarrow s(F(\Psi)) \left[F'_\Psi(\Psi) \right]^2.$$

Вырожденному случаю $k(\varphi) \equiv 0$ соответствует линейное уравнение гиперболического типа с переменными коэффициентами (9). При $k(\varphi) \neq 0$ подстановка

$$\psi = C_1 \int K(\varphi) d\varphi + C_2, \quad K(\varphi) = \exp \left[\int k(\varphi) d\varphi \right], \quad (14)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, приводит нелинейное уравнение (9) к линейному уравнению

$$c(x)\psi_{tt} + d(x)\psi_t = [a(x)\psi_x]_x + b(x)\psi_x. \quad (15)$$

В частном случае $k(\psi) = k = \text{const}$ можно использовать подстановку

$$\varphi = k^{-1} \ln |\psi|, \quad (16)$$

которая следует из (14).

Поскольку преобразования вида (12) меняют только функциональные коэффициенты $k(\varphi)$ и $s(\varphi)$ в уравнениях (8) и (9), то без потери общности можно выбрать функцию F так, чтобы упростить одно из указанных уравнений.

Прямая процедура построения точных решений нелинейных уравнений вида (5), заключается в том, что функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$, $f(u)$ считаются заданными, а искомыми являются функции $u = u(x)$ и $p = p(x)$. В этом случае, задав некоторым образом функции $k(\varphi)$ и $s(\varphi)$, сначала надо найти частные решения $p(x)$ и $\varphi = \varphi(x, t)$ уравнений (8) и (9) (напомним, что последнее уравнение может быть линеаризовано, см. выше). После этого решение уравнения (5) с учетом зависимости (8) определяется по формуле (6), где функция $U(z)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения (10).

Решения линейных уравнений (9) при $k(\varphi) \equiv 0$ и (15) можно строить методом разделения переменных. В частности, уравнение (15) при $d(x) \equiv 0$ имеет точные решения вида:

$$\psi = \alpha t^2 + \beta t + \zeta(x), \quad (17)$$

$$[a(x)\zeta'_x]'_x + b(x)\zeta'_x - 2\alpha c(x) = 0;$$

$$\psi = [\alpha \exp(-\lambda t) + \beta \exp(\lambda t)] \zeta(x), \quad (18)$$

$$[a(x)\zeta'_x]'_x + b(x)\zeta'_x - \lambda^2 c(x)\zeta = 0;$$

$$\psi = [\alpha \cos(\lambda t) + \beta \sin(\lambda t)] \zeta(x), \quad (19)$$

$$[a(x)\zeta'_x]'_x + b(x)\zeta'_x + \lambda^2 c(x)\zeta = 0,$$

где α , β , λ – произвольные постоянные. Уравнение в (17) легко интегрируется с помощью подстановки $w(x) = \zeta_x$, а решения линейных уравнений (18) и (19) для различных функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ приведены в [55, 56]. Другие точные решения уравнения (15) для некоторых функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ можно найти в [57].

Далее, не претендуя на исчерпывающий анализ переопределенной системы (8) и (9), продемонстрируем как с ее помощью путем подходящего выбора функциональных коэффициентов $k(\varphi)$ и $s(\varphi)$ можно строить точные решения уравнений вида (5).

2.3. Случай $k(\varphi) = k$ и $s(\varphi) = 1$. Решения типа обобщенной бегущей волны

Нелинейные телеграфные уравнения (5) допускают точные решения типа обобщенной бегущей волны (6), где

$$\varphi(x, t) = t + \int g(x) dx. \quad (20)$$

Здесь функция $g(x)$ может задаваться или определяться в ходе последующего анализа (в зависимости от поставленной цели, см. далее). Подставив (20) в уравнения (8) и (9) и полагая в них $s(\varphi) = 1$ и $k(\varphi) = k$, получим

$$p(x) = a(x)g^2(x) - c(x), \quad (21)$$

$$d(x) = [a(x)g(x)]'_x + b(x)g(x) + k [a(x)g^2(x) - c(x)]. \quad (22)$$

Соотношение (22) связывает четыре первых функциональных коэффициента уравнения (5) и входящую в (20) функцию $g = g(x)$ (это соотношение является дифференциальным относительно функций a и g и алгебраическим относительно функций b , c и d), а соотношение (21) является алгебраическим и служит для определения функционального коэффициента $p(x)$.

Если четыре функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ считать заданными, то соотношение (22) при $k \neq 0$ представляет собой уравнение Риккати относительно функции $g = g(x)$, которое можно записать в виде

$$a(x)g'_x + ka(x)g^2 + [b(x) + a'_x(x)]g - kc(x) - d(x) = 0. \quad (23)$$

Обширный список точных решений этого уравнения для функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ различного вида можно найти в [55, 56]. Рассмотрим два случая.

Вырожденный случай. При $k = 0$ уравнение Риккати (23) вырождается в линейное уравнение, общее решение которого имеет вид

$$g(x) = \frac{E(x)}{a(x)} \left[\int \frac{d(x)}{E(x)} dx + m \right], \quad (24)$$

$$E(x) = \exp \left[- \int \frac{b(x)}{a(x)} dx \right],$$

где m – произвольная постоянная.

Пример 1. Пусть один из коэффициентов уравнения произвольным образом зависит от пространственной переменной $a = a(x)$, а три других являются константами $b(x) = d(x) = 0$, $c(x) = 1$. По формулам (24) находим $g(x) = m/a(x)$. Подставив эту функцию в (20) и (21), получим $\varphi(x) = t + m \int \frac{dx}{a(x)}$, $p(x) = \frac{m^2}{a(x)} - 1$. Поэтому нелинейное уравнение типа Клейна–Гордона

$$u_{tt} = [a(x)u_x]_x + \left[\frac{m^2}{a(x)} - 1 \right] f(u), \quad (25)$$

зависящее от двух произвольных функций $a(x)$ и $f(u)$, допускает точное решение с функциональным разделением переменных

$$u = U(z), \quad z = t + m \int \frac{dx}{a(x)}, \quad (26)$$

где функция $U(z)$ описывается разрешимым автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$U''_{zz} + f(U) = 0 \quad (27)$$

(получено подстановкой значений $k = 0$ и $s = 1$ в (10)), общее решение которого можно представить в неявном виде (11).

Подставляя в (25), например $a(x) = e^{\lambda x}$, получим нелинейное уравнение

$$u_t = (e^{\lambda x} u_x)_x + (m^2 e^{-\lambda x} - 1) f(u), \quad (28)$$

допускающее точное решение для произвольной функции $f(u)$.

Пример 2. Рассмотрим случай $a = a(x)$, $b(x) = 0$, $c(x) = d(x) = 1$. По формулам (24) при $m = 0$ имеем $g(x) = x/a(x)$. Подставив эту функцию в (20) и (21), получим $\varphi(x) = t + \int \frac{x dx}{a(x)}$, $p(x) = \frac{x^2}{a(x)} - 1$. Поэтому нелинейное телеграфное уравнение

$$u_{tt} + u_t = [a(x)u_x]_x + \left[\frac{x^2}{a(x)} - 1 \right] f(u), \quad (29)$$

зависящее от двух произвольных функций $a(x)$ и $f(u)$, допускает точное решение с функциональным разделением переменных

$$u = U(z), \quad z = t + \int \frac{x dx}{a(x)}, \quad (30)$$

где функция $U(z)$ определяется из разрешимого дифференциального уравнения (27).

Пример 3. Положим теперь $a = a(x)$, $b = -a_x(x)$, $c(x) = 1$, $d(x) = 0$. По формулам (24) находим $g(x) = m$. Подставив эту функцию в (20) и (21), получим $\varphi(x) = t + mx$, $p(x) = m^2 a(x) - 1$. Поэтому нелинейное уравнение типа Клейна–Гордона

$$u_{tt} = a(x)u_{xx} + [m^2 a(x) - 1] f(u), \quad (31)$$

зависящее от двух произвольных функций $a(x)$ и $f(u)$, допускает точное решение

$$u = U(z), \quad z = t + mx, \quad (32)$$

где функция $U(z)$ описывается разрешимым автономным обыкновенным дифференциальным уравнением (27).

Замечание 5. Решение (32) является *неинвариантным решением* уравнения (31) типа бегущей волны (это решение не может быть получено с помощью группового анализа рассматриваемого уравнения). В уравнении (31) вместо $a(x)$ может стоять произвольная функция двух переменных $a(x, t)$.

Невырожденный случай. При $k = \text{const}$ ($k \neq 0$) замена

$$g = \frac{1}{k} \frac{y'_x}{y} \quad (33)$$

приводит уравнение (23) к линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$a(x)y''_{xx} + [b(x) + a'_x(x)]y'_x - k[kc(x) + d(x)]y = 0. \quad (34)$$

Обширный список точных решений этого уравнения для функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ различного вида можно найти в [55, 56].

Пример 4. В случае постоянных коэффициентов $a = c = 1$, $b = d = 0$ общее решение уравнения (34) имеет вид

$$y = C_1 \cosh(kx) + C_2 \sinh(kx), \quad (35)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Полагая в (35) $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $k = 1$, с помощью формулы (33) находим

$$g(x) = \tanh x.$$

Подставив эту функцию в (20) и (21), имеем

$$\varphi(x) = t + \text{Incosh } x, \quad p(x) = -1/\cosh^2 x.$$

Отсюда следует, что нелинейное уравнение типа Клейна–Гордона

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{1}{\cosh^2 x} f(u) \quad (36)$$

для произвольной функции $f(u)$ допускает точное решение с функциональным разделением переменных

$$u = U(z), \quad z = t + \text{Incosh } x, \quad (37)$$

где функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$U''_{zz} - U'_z + f(U) = 0. \quad (38)$$

Таблица 2. Различные способы задания функциональных коэффициентов уравнения (5) при $p(x) = a(x)g^2(x) - c(x)$. Здесь k и C_1 – произвольные постоянные, $g^{-1} = 1/g$

№	Функции, которые задаются	Функция, которая определяется
1	$a = a(x), b = b(x), d = d(x), g = g(x)$	$c(x) = k^{-1}[ag'_x + kag^2 + (b + a'_x)g - d]$
2	$a = a(x), c = c(x), d = d(x), g = g(x)$	$b(x) = g^{-1}(kc + d - ag'_x) - a'_x - kag$
3	$a = a(x), b = b(x), c = c(x), g = g(x)$	$d(x) = ag'_x + kag^2 + (b + a'_x)g - kc$
4	$b = b(x), c = c(x), d = d(x), g = g(x)$	$a(x) = g^{-1}E \left[\int (kc + d - bg)E^{-1}dx + C_1 \right],$ $E = \exp(-k \int gdx)$

Порядок уравнения (38) может быть понижен на единицу подстановкой $U'_z = \Phi(U)$, которая приводит к уравнению Абеля второго рода в канонической форме. Точные решения уравнения (38) для некоторых зависимостей $f(U)$ имеются в [55, 56].

Другие способы построения точных решений. Рассмотрим теперь другие возможности построения точных решений уравнений вида (5) при $k(\varphi) = k$, $s(\varphi) = 1$ без интегрирования уравнения Риккати (23). Для этого будем задавать функцию $g(x)$ и любые три из четырех функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$, а оставшуюся функцию будем находить, исходя из (23). В табл. 2 описаны возможные ситуации и приведены формулы для определения искомой функции. Итоговый вид нелинейного телеграфного уравнения определяется подстановкой функции $p(x) = a(x)g^2(x) - c(x)$ в (5).

Пример 5. Используем описанный в табл. 2 четвертый способ задания функциональных коэффициентов при $b = d = 0$, $c = 1$ для альтернативного представления точных решений рассматриваемого уравнения. Возможны два случая.

1. *Вырожденный случай при $k = 0$.* Из табл. 2, строка № 4, находим $a(x) = C_1 g^{-1}(x)$, $p(x) = C_1 g(x) - 1$, что (с точностью до переобозначений) приводит к уравнению (25) и его решению (26).

2. *Невырожденный случай при $k \neq 0$.* Из табл. 2, строка № 4, при $k \neq 0$, $C_1 = 0$ имеем $a(x) = kg^{-1}E \int E^{-1}dx$. Введем новую функцию $h = h(x)$, положив $h = \int E^{-1}dx$. Дифференцируя это выражение и учитывая формулу $E = \exp(-k \int gdx)$, выразим функцию g через h . После несложных вычислений, в результате получим $g = k^{-1}h''_{xx}/h'_x$,

$a = k^2 h/h''_{xx}$, $p = h(h'_x)^{-2}h''_{xx} - 1$. Отсюда следует, что уравнение

$$u_{tt} = [a(x)u_x]_x + p(x)f(u),$$

$$a(x) = k^2 \frac{h}{h''_{xx}}, \quad p(x) = \frac{hh''_{xx}}{(h'_x)^2} - 1, \quad (39)$$

где $f(u)$ и $h = h(x)$ – произвольные функции, $k \neq 0$ – произвольная постоянная, допускает точное решение с обобщенным разделением переменных

$$u = U(z), \quad z = t + \frac{1}{k} \ln |h'_x|.$$

Здесь функция $U(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения $U''_{zz} - kU'_z + f(U) = 0$.

Полагая, например, в (39) $h = \sinh x$, $k = 1$ получим уравнение (36), которое имеет точное решение вида (37).

2.4. *Случай $d(x) = 0$, $k(\varphi) = k_0/\varphi$, $s(\varphi) = s_0/\varphi$.*
Решение с обобщенным разделением переменных

При $d(x) = 0$, $k(\varphi) = k_0/\varphi$ и $s(\varphi) = s_0/\varphi$ переопределенная система (8)–(9) допускает решения вида

$$\varphi(x, t) = \theta(x) - (t + t_0)^2, \quad (40)$$

где t_0 – произвольная постоянная. Функция $\theta = \theta(x)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$a(x)(\theta'_x)^2 = 4c(x)\theta, \quad (41)$$

а уравнения (8) и (9) преобразуются к виду

$$p(x) = 4s_0c(x), \quad (42)$$

$$[a(x)\theta'_x]'_x + b(x)\theta'_x + (4k_0 + 2)c(x) = 0. \quad (43)$$

Рассмотрим подробнее специальный случай $b(x) = 0$. Будем считать функцию $c = c(x)$ заданной. Тогда функция $p(x)$ находится по формуле (42), а функции $a = a(x)$ и $\xi = \xi(x)$ определяем из уравнений (41) и (43). Опуская промежуточные выкладки, получим при $k_1 = 4k_0 + 2 \neq 0$:

$$a(x) = \frac{1}{4C_1c(x)} I^{\frac{4}{k_1}+2}, \quad \theta = C_1 I^{-\frac{4}{k_1}}, \quad (44)$$

$$I = C_2 - k_1 \int c(x) dx;$$

при $k_0 = -\frac{1}{2}$:

$$a(x) = \frac{C_1^2}{4C_2c(x)E(x)}, \quad \theta = C_2 E(x), \quad (45)$$

$$E(x) = \exp\left[\frac{4}{C_1} \int c(x) dx\right],$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Пример 6. При $b(x) = 0$, $c(x) = p(x) = 1$, $s_0 = \frac{1}{4}$, $k_0 = -\frac{1}{2}$ удовлетворяется соотношение (42), а формулы (45) преобразуются к виду

$$a(x) = \frac{C_1^2}{4C_2} \exp\left(-\frac{4}{C_1} x\right), \quad \theta(x) = C_2 \exp\left(\frac{4}{C_1} x\right). \quad (46)$$

Полагая в (46) $C_1 = -4/\lambda$, $C_2 = 4/\lambda^2$, приходим к нелинейному уравнению типа Клейна–Гордона

$$u_{tt} = \left(e^{\lambda x} u_x\right)_x + f(u), \quad (47)$$

которое для произвольной функции $f(u)$ допускает точное решение с функциональным разделением переменных вида

$$u = U(z), \quad z = 4\lambda^{-2} e^{-\lambda x} - t^2, \quad (48)$$

где функция $U(z)$ описывается неавтономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$4zU''_{zz} + 2U'_z + f(U) = 0. \quad (49)$$

Замечание 6. Решение (48) уравнения (47) было получено в [8].

Пример 7. Положим теперь $a(x) = c(x) = p(x) = 1$, $s_0 = \frac{1}{4}$. Уравнение (42) в этом случае тождественно удовлетворяется, а решения уравнений (41) и (43) имеют вид

$$b(x) = -\frac{2k_0}{x + C_1}, \quad \theta(x) = (x + C_1)^2,$$

где C_1 – произвольная постоянная. Значениям $C_1 = 0$, $k_0 = -\frac{1}{2}(n-1)$ соответствует n -мерное не-

линейное уравнение Клейна–Гордона в радиально-симметричном случае [8]:

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{n-1}{x} u_x + f(u),$$

которое допускает точное решение вида $u = U(z)$, где $z = x^2 - (t + t_0)^2$ (x – радиальная координата).

2.5. *Случай $d(x) = 0$. Решения определяющей системы в виде произведения $\varphi = \xi(x)t$*

Ищем совместные решения определяющей системы (8)–(9) в виде

$$\varphi = \xi(x)t. \quad (50)$$

Несложный анализ показывает, что решение (50) удовлетворяет обоим уравнениям (8) и (9), если и только если выполняются следующие условия:

$$p = s_0 c \xi^2, \quad k(\varphi) = \frac{k_0 \varphi}{A^2 \varphi^2 - 1}, \quad (51)$$

$$s(\varphi) = \frac{s_0}{A^2 \varphi^2 - 1},$$

где A , k_0 , s_0 – некоторые (варьируемые) константы, а функции $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c = c(x)$, $\xi = \xi(x)$, связаны двумя дифференциально-алгебраическими соотношениями

$$a(\xi'_x)^2 = A^2 c \xi^4, \quad (a \xi'_x)'_x + b \xi'_x + k_0 c \xi^3 = 0. \quad (52)$$

В (52) две любые функции из четырех можно считать заданными (произвольным образом), а две оставшиеся – искомыми.

Рассмотрим подробнее частный случай $b(x) = 0$, $c(x) = 1$. Исключая a из (52), приходим к дифференциальному уравнению для функции ξ :

$$\xi \xi''_{xx} = (k_0 A^{-2} + 4)(\xi'_x)^2. \quad (53)$$

Уравнение (53) является автономным и обобщенно-однородным. Его общее решение имеет вид

$$\xi = \begin{cases} C_1(x + C_2)^{-\frac{A^2}{k_0 + 3A^2}} & \text{при } k_0 \neq -3A^2, \\ C_1 e^{\lambda x} & \text{при } k_0 = -3A^2, \end{cases} \quad (54)$$

где C_1 , C_2 , λ – произвольные постоянные. Функция a выражается через ξ по формуле $a = A^2 \xi^4 (\xi'_x)^{-2}$, которая следует из первого уравнения (52).

Пример 8. Положим в (51) и (54) $A = C_1 = s_0 = 1$, $k_0 = -3$, $\lambda = 1/2$, $b(x) = 0$, $c(x) = 1$. Находим $\xi(x) = e^{x/2}$, $a(x) = p(x) = e^x$. В результате

получим нелинейное уравнение типа Клейна–Гордона

$$u_{tt} = (e^x u_x)_x + e^x f(u),$$

которое для произвольной функции $f(u)$ допускает точное инвариантное решение вида $u = U(z)$, где $z = e^{x/2}t$.

3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

3.1. Нелинейные уравнения с запаздыванием, допускающие точные решения типа обобщенной бегущей волны

Полученные в разд. 2 результаты можно обобщить также на случай более сложных нелинейных телеграфных уравнений с запаздыванием следующего вида:

$$c(x)u_{tt} + d(x)u_t = [a(x)u_x]_x + b(x)u_x + p(x)f(u, w), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (55)$$

где τ – время запаздывания, $f(u, w)$ – произвольная функция двух аргументов.

Покажем, как решения нелинейного телеграфного уравнения без запаздывания (5), которые определяются формулами (6) и (20), могут быть использованы для построения точных решений нелинейного уравнения с запаздыванием (55). Пусть уравнение (5) допускает решение типа обобщенной бегущей волны вида

$$u = U(z), \quad z = t + \theta(x), \quad (56)$$

где функция $U(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (10). Тогда уравнение с запаздыванием (55) допускает точное решение вида (56), где функция $U(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению с запаздыванием

$$U''_{zz} - k(z)U'_z + s(z)f(U, W) = 0, \quad W = U(z - \tau). \quad (57)$$

Уравнения (25), (28), (29), (31), (36), (39) допускают решения вида (56). Поэтому допускают также точные решения вида (56) более сложные нелинейные телеграфные уравнения, которые получаются из указанных уравнений заменой функции $f(u)$ на функцию $f(u, w)$.

Пример 9. Нелинейное уравнение типа Клейна–Гордона с запаздыванием

$$u_{tt} = [a(x)u_x]_x + \left[\frac{m^2}{a(x)} - 1 \right] f(u, w), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (58)$$

которое является обобщением уравнения (25), для произвольных функций $a(x)$ и $f(u, w)$ допус-

кает точное решение типа обобщенной бегущей волны

$$u = U(z), \quad z = t + m \int \frac{dx}{a(x)}, \quad (59)$$

где функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$U''_{zz} + f(U, W) = 0, \quad W = U(z - \tau). \quad (60)$$

Отметим, что при $f(U, W) = Ug(W/U)$ уравнение (60) допускает точное решение вида $UCe^{\lambda z}$, где C – произвольная постоянная, а λ определяется из трансцендентного уравнения $\lambda^2 + g(e^{-\tau\lambda}) = 0$.

Пример 10. Нелинейное телеграфное уравнение с запаздыванием

$$u_{tt} + u_t = [a(x)u_x]_x + \left[\frac{x^2}{a(x)} - 1 \right] f(u, w), \quad w = u(x, t - \tau),$$

которое является обобщением уравнения (29), для произвольных функций $a(x)$ и $f(u, w)$ имеет точное решение типа обобщенной бегущей волны

$$u = U(z), \quad z = t + \int \frac{x dx}{a(x)},$$

где функция $U(z)$ описывается дифференциальным уравнением (60).

3.2. Нелинейные уравнения с запаздыванием, допускающие решения с мультипликативным разделением переменных

Нелинейное телеграфное уравнение с запаздыванием

$$c(x)u_{tt} + d(x)u_t = [a(x)u_x]_x + b(x)u_x + uF(x, w/u), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (61)$$

зависящее от пяти произвольных функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$, $F(x, v)$, допускает точное решение в виде произведения функций разных аргументов $u = e^{\lambda t} \xi(x)$, где λ – произвольная постоянная, а функция $\xi = \xi(x)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[a(x)\xi'_x]_x + b(x)\xi_x + [F(x, e^{-\lambda\tau}) - \lambda^2 c(x) - \lambda d(x)]\xi = 0.$$

Некоторые точные решения этого уравнения можно найти в [55, 56].

В специальном случае $d(x) = 0$ уравнение (61) допускает также точные решения вида $u = \sin(\beta_n t + C)\xi(x)$, где $\beta_n = \pi n / \tau$ ($n = 1, 2, \dots$), C – произвольная постоянная.

4. КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Описаны различные классы нелинейных уравнений типа Клейна–Гордона и телеграфных уравнений с переменными коэффициентами, которые допускают точные решения с функциональным разделением переменных. Особое внимание уделено уравнениям достаточно общего вида, которые зависят от одной или нескольких произвольных функций. Приведены примеры конкретных уравнений и их точных решений. Построены также некоторые точные решения типа обобщенной бегущей волны более сложных нелинейных телеграфных уравнений с запаздыванием.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310385-6) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10025).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ames W.F., Lohner J.R., Adams E.* Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$ // Int. J. Non-Linear Mech. 1981. V. 16. № 5–6. P. 439–447.
2. *Clarkson P.A., McLeod J.B., Olver P.J., Ramani R.* Integrability of Klein–Gordon equations // SIAM J. Math. Anal. 1986. V. 17. P. 798–802.
3. *Oron A., Rosenau P.* Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. 1986. V. 118. P. 172–176.
4. *Pucci E., Salvatori M.C.* Group properties of a class of semilinear hyperbolic equations // Int. J. Non-Linear Mech. 1986. V. 21. P. 147–155.
5. *Grundland A.M., Infeld E.* A family of non-linear Klein-Gordon equations and their solutions // J. Math. Phys. 1992. V. 33. P. 2498–2503.
6. *Ibragimov N.H.* (Editor). CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Symmetries, Exact solutions and Conservation Laws, Vol. 1. Boca Raton: CRC Press, 1994.
7. *Zhdanov R.Z.* Separation of variables in the non-linear wave equation // J. Phys. A. 1994. V. 27. P. L291–L297.
8. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения. М.: Международная программа образования, 1996.
9. *Andreev V.K., Kapitsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov A.A.* Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics. Dordrecht: Kluwer, 1998.
10. *Sophocleous C., Kingston J.G.* Cyclic symmetries of one-dimensional non-linear wave equations // Int. J. Non-Linear Mech. 1999. V. 34. P. 531–543.
11. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Точные решения и преобразования нелинейных уравнений теплопроводности и теории волн // Доклады АН. 2001. Т. 381. № 1. С. 31–36.
12. *Эстевес П.Г., Чу Ч.* Разделение переменных в нелинейных волновых уравнениях с переменной волновой скоростью // Теор. мат. физика. 2002. Т. 133. № 2. С. 202–210.
13. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2002.
14. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition. Boca Raton: CRC Press, 2004.
15. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
16. *Bluman G.W., Cheviakov A.F.* Nonlocally related systems, linearization and nonlocal symmetries for the nonlinear wave equation // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 333. P. 93–111.
17. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition. Boca Raton: CRC Press, 2012.
18. *Hu J., Qu C.* Functionally separable solutions to nonlinear wave equations by group foliation method // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 330. P. 298–311.
19. *Huang D.J., Zhou S.* Group properties of generalized quasi-linear wave equations // J. Math. Anal. Appl. 2010. V. 366. P. 460–472.
20. *Huang D.J., Zhu Y., Yang Q.* Reduction operators and exact solutions of variable coefficient nonlinear wave equations with power nonlinearities // Symmetry. 2017. V. 9. № 3.
21. *Bluman G.W., Temuerchaolu, Sahadevan R.* Local and nonlocal symmetries for nonlinear telegraph equation // J. Math. Phys. 2005. V. 46. Article ID 023505.
22. *Huang D.J., Ivanova N.M.* Group analysis and exact solutions of a class of variable coefficient nonlinear telegraph equations // J. Math. Phys. 2007. V. 48, Article ID 073507.
23. *Huang D.J., Zhou S.* Group-theoretical analysis of variable coefficient nonlinear telegraph equations // Acta Appl. Math. 2012. V. 117. № 1. P. 135–183.
24. *Pucci E.* Group analysis of the equation $u_{tt} + \lambda u_{xx} = g(u, u_x)$ // Riv. Mat. Univ. Parma. 1987. V. 12. № 4. P. 71–87.
25. *Ibragimov N.H., Torrisi M., Valenti A.* Preliminary group classification of equations $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$ // J. Math. Phys. 1991. V. 32. P. 2988–2995.
26. *Ibragimov N.H., Khabirov S.V.* Contact transformation group classification of nonlinear wave equations // Nonlin. Dyn. 2000. V. 22. P. 61–71.
27. *Anco S.C., Liu S.* Exact solutions of semilinear radial wave equations in n dimensions // J. Math. Anal. Appl. 2004. V. 297. P. 317–342.
28. *Gandarias M.L., Torrisi M., Valenti A.* Symmetry classification and optimal systems of a non-linear wave equation // Int. J. Non-Linear Mech. 2004. V. 39. P. 389–398.

29. *Lahno V., Zhdanov R., Magda O.* Group classification and exact solutions of nonlinear wave equations // *Acta Appl. Math.* 2006. V. 91. P. 253–313.
30. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Generalized and functional separable solutions to nonlinear delay Klein–Gordon equations // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2014. V. 19. № 8. P. 2676–2689.
31. *Long F.-S., Meleshko S.V.* On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein–Gordon equation with a delay // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2016. V. 39. № 12. P. 3255–3270.
32. *Дородницын В.А.* Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником // *Ж. выч. мат. и мат. физики.* 1982. Т. 22. № 6. С. 1393–1400.
33. *Kudryashov N.A.* On exact solutions of families of Fisher equations // *Theor. Math. Phys.* 1993. V. 94. № 2. P. 211–218.
34. *Galaktionov V.A.* Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions // *Nonlinear Anal. Theory, Methods and Appl.* 1994. V. 23. P. 1595–621.
35. *Doyle Ph.W., Vassiliou P.J.* Separation of variables for the 1-dimensional non-linear diffusion equation // *Int. J. Non-Linear Mech.* 1998. V. 33. № 2. P. 315–326.
36. *Hood S.* On direct, implicit reductions of a nonlinear diffusion equation with an arbitrary function – generalizations of Clarkson’s and Kruskal’s method // *IMA J. Appl. Math.* 2000. V. 64. № 3. P. 223–244.
37. *Cherniha R.M., Pliukhin O.* New conditional symmetries and exact solutions of nonlinear reaction–diffusion–convection equations // *J. Physics A: Math. Theor.* 2007. V. 40. № 33. P. 10049–10070.
38. *Cherniha R.M., Pliukhin O.* New conditional symmetries and exact solutions of reaction–diffusion–convection equations with exponential nonlinearities // *J. Math. Anal. Appl.* 2013. V. 403. P. 23–37.
39. *Cherniha R., Serov M., Pliukhin O.* *Nonlinear Reaction–Diffusion–Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications.* Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2018.
40. *Vaneeva O.O., Johnpillai, A.G., Popovycha R.O., Sophocleous C.* Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with power nonlinearities // *J. Math. Anal. Appl.* 2007. V. 330. № 2. P. 1363–1386.
41. *Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C.* Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with exponential nonlinearities // *J. Math. Anal. Appl.* 2012. V. 396. P. 225–242.
42. *Popovych R.O., Ivanova N.M.* New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations // *J. Physics A: Math. General.* 2004. V. 37. № 30. P. 7547–7565.
43. *Ivanova N.M., Sophocleous C.* On the group classification of variable-coefficient nonlinear diffusion-convection equations // *J. Comput. Appl. Math.* 2006. V. 197. № 2. P. 322–344.
44. *Ivanova N.M.* Exact solutions of diffusion-convection equations // *Dynamics of PDE.* 2008. V. 5. № 2. P. 139–171.
45. *Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C.* Group analysis of variable coefficient diffusion-convection equations. I. Enhanced group classification // *Lobachevskii J. Math.* 2010. V. 31. № 2. P. 100–122.
46. *Jia H., Zhao W.X.X., Li Z.* Separation of variables and exact solutions to nonlinear diffusion equations with x -dependent convection and absorption // *J. Math. Anal. Appl.* 2008. V. 339. № 982–995.
47. *Polyanin A.D.* Functional separable solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with variable coefficients // *Appl. Math. Comput.* 2019. V. 347. pp. 282–292.
48. *Meleshko S.V., Moyo S.* On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay // *J. Math. Anal. Appl.* 2008. V. 338. P. 448–466.
49. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact separable solutions of delay reaction-diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2014. V. 19. № 3. P. 409–416.
50. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2014. V. 19. № 3. P. 417–430.
51. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* New generalized and functional separable solutions to non-linear delay reaction-diffusion equations // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2014. V. 59. P. 16–22.
52. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions // *Appl. Math. Letters.* 2014. V. 37. P. 43–48.
53. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2014. V. 67. P. 267–277.
54. *Polyanin A.D.* Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay and variable coefficients // *Appl. Math. Letters.* 2019. V. 90. P. 49–53.
55. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, 2nd Edition.* Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2003.
56. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* *Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems.* Boca Raton: CRC Press, 2018.
57. *Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E.* *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, Second Edition.* Boca Raton: CRC Press, 2016.

Exact Solutions of Nonlinear Telegraph Equations with Variable Coefficients

A. D. Polyani^{a, b, c, #}^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia*^b *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*^c *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005 Russia*

#e-mail: polyanin@ipmnet.ru

Received November 27, 2018; revised November 27, 2018; accepted December 4, 2018

Abstract—Various classes of nonlinear telegraph equations with variable coefficients

$$c(x)u_{tt} = [a(x)u_x]_x + b(x)u_x + p(x)f(u),$$

which allow exact solutions with a functional separation of variables of the form $u = U(z)$, $z = \varphi(x, t)$, have been described. It has been shown that the source function $f(u)$ and any four of the five coefficients $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$, and $p(x)$ of these equations can be chosen arbitrarily, and the remaining coefficient is expressed in terms of them. The properties have been studied of the overdetermined system of differential equations for the function $\varphi(x, t)$ and some its solutions have been obtained. Examples of particular equations and their exact solutions are given. Some exact generalized traveling-wave solutions of more complex nonlinear telegraph equations with delay of the form

$$c(x)u_{tt} + d(x)u_t = [a(x)u_x]_x + b(x)u_x + p(x)f(u, w), \quad w = u(x, t - \tau),$$

where $\tau > 0$ is the delay time and $f(u, w)$ is an arbitrary function of two arguments, are also obtained.

Keywords: nonlinear telegraph equations, nonlinear Klein–Gordon type equations, differential equations with delay, exact solutions, functional separable solutions, generalized traveling-wave solutions

DOI: 10.1134/S2304487X1902010X

REFERENCES

- Ames W.F., Lohner J.R., Adams E., Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1981, vol. 16, no. 5–6, pp. 439–447.
- Clarkson P.A., McLeod J.B., Olver P.J., Ramani R., Integrability of Klein–Gordon equations, *SIAM J. Math. Anal.*, 1986, vol. 17, pp. 798–802.
- Oron A., Rosenau P., Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations, *Phys. Lett. A*, 1986, vol. 118, pp. 172–176.
- Pucci E., Salvatori M.C., Group properties of a class of semilinear hyperbolic equations, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1986, vol. 21, pp. 147–155.
- Grundland A.M., Infeld E., A family of non-linear Klein–Gordon equations and their solutions, *J. Math. Phys.*, 1992, vol. 33, pp. 2498–2503.
- Ibragimov N.H. (Editor), *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Symmetries, Exact solutions and Conservation Laws, vol. 1*, Boca Raton: CRC Press, 1994.
- Zhdanov R.Z., Separation of variables in the non-linear wave equation, *J. Phys. A*, 1994, vol. 27, pp. L291–L297.
- Zaitsev V.F., Polyani A.D., *Handbook of Partial Differential Equations: Exact Solutions*, Moscow, International Program of Education, 1996 (in Russian).
- Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov A.A., *Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics*, Dordrecht: Kluwer, 1998.
- Sophocleous C., Kingston J.G., Cyclic symmetries of one-dimensional non-linear wave equations, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1999, vol. 34, pp. 531–543.
- Zaitsev V.F., Polyani A.D., Exact solutions and transformations of nonlinear heat and wave equations, *Dokl. Math.*, 2001, vol. 64, no. 3, pp. 416–420.
- Estévez P.G., Qu C.Z., Separation of variables in nonlinear wave equations with variable wave speed, *Theor. Math. Phys.*, 2002, vol. 133, pp. 1490–1497.
- Polyani A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of nonlinear equations of mathematical physics*, Moscow: Fizmatlit, 2002 (in Russian).
- Polyani A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd Edition, Boca Raton: CRC Press, 2004.
- Polyani A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I., *Solution methods for nonlinear equations of mathematical physics and mechanics*, Moscow: Fizmatlit, 2005 (in Russian).
- Bluman G.W., Cheviakov A.F., Nonlocally related systems, linearization and nonlocal symmetries for the nonlinear wave equation, *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, vol. 333, pp. 93–111.

17. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd Edition, Boca Raton: CRC Press, 2012.
18. Hu J., Qu C., Functionally separable solutions to nonlinear wave equations by group foliation method, *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, vol. 330, pp. 298–311.
19. Huang D.J., Zhou S., Group properties of generalized quasi-linear wave equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 2010, vol. 366, pp. 460–472.
20. Huang D.J., Zhu Y., Yang Q., Reduction operators and exact solutions of variable coefficient nonlinear wave equations with power nonlinearities, *Symmetry*, 2017, vol. 9, no. 3.
21. Bluman G.W., Temuerchaolu, Sahadevan R., Local and nonlocal symmetries for nonlinear telegraph equation, *J. Math. Phys.*, 2005, vol. 46, Article ID 023505.
22. Huang D.J., Ivanova N.M., Group analysis and exact solutions of a class of variable coefficient nonlinear telegraph equations, *J. Math. Phys.*, 2007, vol. 48, Article ID 073507.
23. Huang D.J., Zhou S., Group-theoretical analysis of variable coefficient nonlinear telegraph equations, *Acta Appl. Math.*, 2012, vol. 117, no. 1, pp. 135–183.
24. Pucci E., Group analysis of the equation $u_{tt} + \lambda u_{xx} = g(u, u_x)$, *Riv. Mat. Univ. Parma*, 1987, vol. 12, no. 4, pp. 71–87.
25. Ibragimov N.H., Torrisi M., Valenti A., Preliminary group classification of equations $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$, *J. Math. Phys.*, 1991, vol. 32, pp. 2988–2995.
26. Ibragimov N.H., Khabirov S.V., Contact transformation group classification of nonlinear wave equations, *Nonlin. Dyn.*, 2000, vol. 22, pp. 61–71.
27. Anco S.C., Liu S., Exact solutions of semilinear radial wave equations in n dimensions, *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, vol. 297, pp. 317–342.
28. Gandarias M.L., Torrisi M., Valenti A., Symmetry classification and optimal systems of a non-linear wave equation, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2004, vol. 39, pp. 389–398.
29. Lahno V., Zhdanov R., Magda O., Group classification and exact solutions of nonlinear wave equations, *Acta Appl. Math.*, 2006, vol. 91, pp. 253–313.
30. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Generalized and functional separable solutions to nonlinear delay Klein–Gordon equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 8, pp. 2676–2689.
31. Long F.-S., Meleshko S.V., On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein–Gordon equation with a delay, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2016, vol. 39, no. 12, pp. 3255–3270.
32. Dorodnitsyn V.A., On invariant solutions of the nonlinear heat equation with a source, *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 1982, vol. 22, no. 6, pp. 1393–1400 (in Russian).
33. Kudryashov N.A., On exact solutions of families of Fisher equations, *Theor. Math. Phys.*, 1993, vol. 94, no. 2, pp. 211–218.
34. Galaktionov V.A., Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions, *Nonlinear Anal.: Theory, Methods and Appl.*, 1994, vol. 23, pp. 1595–621.
35. Doyle Ph.W., Vassiliou P.J., Separation of variables for the 1-dimensional non-linear diffusion equation, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1998, vol. 33, no. 2, pp. 315–326.
36. Hood S., On direct, implicit reductions of a nonlinear diffusion equation with an arbitrary function – generalizations of Clarkson's and Kruskal's method, *IMA J. Appl. Math.*, 2000, vol. 64, no. 3, pp. 223–244.
37. Cherniha R.M., Pliukhin O., New conditional symmetries and exact solutions of nonlinear reaction–diffusion–convection equations, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2007, vol. 40, no. 33, pp. 10049–10070.
38. Cherniha R.M., Pliukhin O., New conditional symmetries and exact solutions of reaction–diffusion–convection equations with exponential nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, vol. 403, pp. 23–37.
39. Cherniha R., Serov M., Pliukhin O., *Nonlinear Reaction–Diffusion–Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications*, Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2018.
40. Vaneeva O.O., Johnpillai, A.G., Popovych R.O., Sophocleous C., Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with power nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, vol. 330, no. 2, pp. 1363–1386.
41. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C., Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with exponential nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, vol. 396, pp. 225–242.
42. Popovych R.O., Ivanova N.M., New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations, *J. Phys. A: Math. General*, 2004, vol. 37, no. 30, pp. 7547–7565.
43. Ivanova N.M., Sophocleous C., On the group classification of variable-coefficient nonlinear diffusion-convection equations, *J. Comput. Appl. Math.*, 2006, vol. 197, no. 2, pp. 322–344.
44. Ivanova N.M., Exact solutions of diffusion-convection equations, *Dynamics of PDE*, 2008, vol. 5, no. 2, pp. 139–171.
45. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C., Group analysis of variable coefficient diffusion-convection equations. I. Enhanced group classification, *Lobachevskii J. Math.*, 2010, vol. 31, no. 2, pp. 100–122.
46. Jia H., Zhao W.X.X., Li Z., Separation of variables and exact solutions to nonlinear diffusion equations with x -dependent convection and absorption, *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 339, pp. 982–995.
47. Polyanin A.D., Functional separable solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with variable coefficients, *Appl. Math. Comput.*, 2019, vol. 347, pp. 282–292.
48. Meleshko S.V., Moyo S., On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay, *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 338, pp. 448–466.
49. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations, *Commun.*

- Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 409–416.
50. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction–diffusion equations and more complex nonlinear equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 417–430.
51. Polyanin A.D., Zhurov A.I., New generalized and functional separable solutions to non-linear delay reaction-diffusion equations, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 59, pp. 16–22.
52. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions, *Appl. Math. Letters*, 2014, vol. 37, pp. 43–48.
53. Polyanin A.D., Zhurov A.I., The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 67, pp. 267–277.
54. Polyanin A.D., Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay and variable coefficients, *Appl. Math. Letters*, 2019, vol. 90, pp. 49–53.
55. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, 2nd Edition, Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2003.
56. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems*, Boca Raton: CRC Press, 2018.
57. Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E., *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*, Second Edition, Boca Raton: CRC Press, 2016.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В СРЕДЕ
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ БЕЗ УЧЕТА СТОЛКНОВЕНИЙ

© 2019 г. В. В. Аверина^{а,*}, Н. А. Кудряшов^{а,**}

^а Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ",
Москва, 115409, Россия

*e-mail: lera_averina@mail.ru

**e-mail: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию 11.03.2019 г.

После доработки 14.03.2019 г.

Принята к публикации 26.03.2019 г.

Рассматривается модель Ферми–Паста–Улама с учетом взаимодействия между частицами, которое выражается потенциалом четвертой и пятой степени. Выполнен предельный переход при стремлении расстояния между частицами к нулю, а числа частиц к бесконечности. Показано, что вместо известного уравнения Кортевега–де Вриза при учете квадратичного взаимодействия между частицами получается нелинейное уравнение в частных производных шестого порядка. Выведено эволюционное уравнение пятого порядка. Исследованы аналитические свойства полученных уравнений пятого и шестого порядков. Показано, что общее решение дифференциального уравнения пятого порядка, полученного при переходе к переменным бегущей волны, при разложении в ряд Лорана имеет четыре ветви. На втором шаге теста Пенлеве найдены индексы Фукса, два из которых являются комплексными числами. Установлено, что в общем случае уравнение не проходит тест Пенлеве, что соответствует тому, что задача Коши для полученного уравнения не решается методом обратной задачи рассеяния. С помощью метода простейших уравнений получены некоторые точные решения эволюционного уравнения пятого порядка. Построены графики точных решений в случае потенциалов взаимодействия между частицами четвертой и пятой степени.

Ключевые слова: модель Ферми–Паста–Улама, нелинейные волны, непрерывный предел, тест Пенлеве

DOI: 10.1134/S2304487X19030040

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель Ферми–Паста–Улама представляет собой математическую модель распространения возмущений в цепочке точечных масс, взаимодействующих по нелинейному закону [1]. Она была предложена в 1952 году в Лос-Аламосе. Целью работы Ферми, Паста и Улама было решить нелинейную задачу на ЭВМ [2]. Задача состояла в том, чтобы рассчитать колебания 64-х частиц одинаковой массы, связанных друг с другом пружинками. При отклонении частицы от положения равновесия на Δl , появлялась возвращающая сила $k\Delta l + \alpha(\Delta l)^2$. Здесь k и α – постоянные коэффициенты. Нелинейная добавка предполагалась малой по сравнению с основной силой $k\Delta l$. Ферми, Паста и Улам задали начальное отклонение цепочки частиц от положения равновесия и наблюдали распространение возмущения в цепочке во времени. Их эксперимент стал особенно интересен, когда они получили, что спустя некоторое

время возмущение в цепочке частиц возвращается к начальному состоянию. Это явление получило название парадокса Ферми–Паста–Улама.

Результаты вычислительного эксперимента стали известны Мартину Крускалу и Норману Забуски. В своей работе [3] они впервые установили, что модель, используемая Ферми, Пастой и Уламом, при предельном переходе к нулю расстояния между частицами и стремлении их количества к бесконечности, переходит в уравнение Кортевега–де Вриза. Это уравнение было получено в 1895 г. для описания волн на воде. Используя численное моделирование, Забуски и Крускал объяснили парадокс ФПУ (повтор начальных возмущений), используя концепцию солитонов.

Модель ФПУ представляет собой цепочку одинаковых масс, соединенных пружинами [4] (рис. 1).

Движение i -й массы в цепочке зависит от сил, действующих со стороны соседних масс, и внеш-

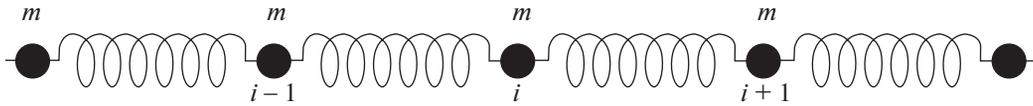


Рис. 1. Модель Ферми, Паста и Улама.

них сил. Второй закон Ньютона для i -й частицы имеет вид

$$m \frac{d^2 y_i}{dt^2} = F_{i,i+1} - F_{i-1,i} + f_i, \quad (1)$$

где $F_{i,i+1}$ – потенциал взаимодействия между частицами, а f_i – внешнее поле.

В работе [5] было получено эволюционное нелинейное дифференциальное уравнение 5-го порядка, описывающее модель ФПУ. Проведен тест полученного уравнения на свойство Пенлеве и найдены некоторые точные решения. В работах [6, 7] была рассмотрена $\alpha + \beta$ модель ФПУ, т.е. модель распространения возмущений в цепочке масс, потенциал которой имеет вид [8]

$$F_{i,i+1} = \gamma(x_{i+1} - x_i) + \alpha(x_{i+1} - x_i)^2 - \beta(x_{i+1} - x_i)^3. \quad (2)$$

В работах [6, 7] было получено нелинейное дифференциальное уравнение 6-го порядка, соответствующее модели ФПУ.

В работе [9] получены уравнения пятого и седьмого порядка, которые выведены из цепочки Ферми–Паста–Улама. Для анализа аналитических свойств уравнений пятого и седьмого порядка использован тест Пенлеве. Показано, что нелинейные эволюционные уравнения пятого и седьмого порядка не проходят тест на свойство Пенлеве. Однако локальные разложения общих решений существуют. Для этих уравнений получены аналитические решения в виде уединенных волн и кинков. Приведены результаты численного моделирования волновых процессов, описываемых нелинейными уравнениями высокого порядка.

В данной работе сделана попытка учесть потенциал взаимодействия более высокой степени. Ниже учитываются потенциалы 4-й и 5-й степени и выведены дифференциальные уравнения, описывающие модель при таком взаимодействии частиц. Исследованы аналитические свойства полученных нелинейных дифференциальных уравнений 6-го порядка.

2. ВЫВОД НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ МОДЕЛЬ ФПУ С ПОТЕНЦИАЛОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ 4-Й И 5-Й СТЕПЕНИ

Рассмотрим потенциал взаимодействия между частицами в модели ФПУ, зависящий от расстояния между частицами 4-й степени. Предположим, что квадратичная и кубическая составляющие в потенциале отсутствуют и взаимодействие между частицами описывается формулой

$$F_{i+1,i} = \gamma(x_{i+1} - x_i) + Q(x_{i+1} - x_i)^4 \quad (3)$$

Тогда модель ФПУ будет описываться системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \gamma(x_{i+1} - x_i) + Q(x_{i+1} - x_i)^4 - \\ &- \gamma(x_i - x_{i-1}) - Q(x_i - x_{i-1})^4 = \\ &= (x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1})(\gamma + Q(x_{i+1}^3 - x_{i-1}^3 + 2x_{i+1}x_i^2 - \\ &- 2x_{i+1}^2x_i + 2x_ix_{i-1}^2 - 2x_i^2x_{i-1} + \\ &+ x_{i+1}x_{i-1}^2 - x_{i+1}^2x_{i-1})), \\ &i = 1 \dots N, \end{aligned} \quad (4)$$

где x_i – смещение i -й частицы от положения равновесия, m – масса частицы. Используем переход к непрерывному пределу в модели ФПУ. Для этого разложим отклонение $x_{\pm 1}$ в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} x_{i\pm 1} &= x \pm hx_{\xi} + \frac{h^2}{2} x_{\xi\xi} \pm \frac{h^3}{6} x_{\xi\xi\xi} + \\ &+ \frac{h^4}{24} x_{\xi\xi\xi\xi} \pm \frac{h^5}{120} x_{\xi\xi\xi\xi\xi} + \frac{h^6}{720} x_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi} + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя разложение (5) в систему (4) и учитывая слагаемые с точностью до h^6 , получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{\gamma h^2}{m} x_{\xi\xi} + \frac{\gamma h^4}{12m} x_{\xi\xi\xi\xi} + \\ &+ \frac{4Qh^5}{m} x_{\xi\xi} (x_{\xi})^3 + \frac{\gamma h^6}{360m} x_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi}, \end{aligned} \quad (6)$$

После введения параметра

$$c^2 = \frac{\gamma h^2}{m}, \quad (7)$$

уравнение (8) принимает вид:

$$x_{\tau\tau} = c^2 x_{\xi\xi} + \frac{mc^4}{12\gamma} x_{\xi\xi\xi\xi} + \frac{4Qc^5 m\sqrt{m}}{\gamma^2 \sqrt{\gamma}} x_{\xi\xi}(x_\xi)^3 + \frac{m^2 c^6}{360\gamma^2} x_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi}, \quad (8)$$

Используя

$$\tau = ct, \quad (9)$$

разделив уравнение на c^2 после введения параметра $\delta^2 = \frac{mc^2}{12\gamma}$, запишем уравнение в виде

$$x_{tt} = x_{\xi\xi} + \delta^2 x_{\xi\xi\xi\xi} + \frac{4Qc^3 m\sqrt{m}}{\gamma^2 \sqrt{\gamma}} x_{\xi\xi}(x_\xi)^3 + \frac{5}{2} \delta^4 x_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi}. \quad (10)$$

Используя также замену

$$x = \left(\frac{\gamma^2 \sqrt{\gamma}}{4Qc^3 m\sqrt{m}} \right)^{\frac{1}{3}} x', \quad (11)$$

приводим уравнение к виду

$$x_{tt} = x_{\xi\xi} + \delta^2 x_{\xi\xi\xi\xi} + x_{\xi\xi}(x_\xi)^3 + \frac{5}{2} \delta^4 x_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi}. \quad (12)$$

Таким образом, получено дифференциальное уравнение 6-го порядка, описывающее нелинейные волны в цепочке масс.

Решение уравнения (12) может быть представлено в виде двух волн, бегущих в противоположных направлениях. Удобно изучать одну из этих волн, для этого решение будем искать в виде:

$$x(\xi, \tau) = f(z, T) + \varepsilon x_1(\xi, \tau), \quad (13)$$

$$z = \xi - \tau, \quad T = \varepsilon\tau,$$

где $f(z, T)$ соответствует профилю волны на больших расстояниях. Подставляя (13) в уравнение (12) и опуская члены более высокого порядка по ε , получим уравнение для $f(z, T)$ в виде

$$2f_{zT} + \delta^2 f_{zzzz} + f_{zz}(f_z)^3 + \frac{5}{2} \delta^4 f_{zzzzzz} = 0, \quad (14)$$

которое с помощью замены

$$u(z, T) = f_z(z, T) \quad (15)$$

приводится к эволюционному уравнению:

$$2u_T + \delta u_{zzz} + u_z(u)^3 + \frac{2}{5} \delta^4 u_{zzzzz} = 0. \quad (16)$$

Используя преобразование растяжения

$$T = \frac{t}{2}, \quad x = z, \quad (17)$$

уравнение (16) можно представить в виде

$$u_t + u_x u^3 + \delta^2 u_{xxx} + \frac{2}{5} \delta^4 u_{xxxxx} = 0. \quad (18)$$

Если в полученном уравнении оставить члены с точностью до h^5 , то получим

$$u_t + u_x u^3 + \delta^2 u_{xxx} = 0. \quad (19)$$

Аналогично рассмотрим модель ФПУ с потенциалом

$$F_{i+1,i} = \gamma(x_{i+1} - x_i) + \theta(x_{i+1} - x_i)^5. \quad (20)$$

С помощью преобразований, аналогичных представленным выше, сохраняя члены с точностью до h^6 , получим уравнения вида

$$y_{\tau\tau} = y_{\xi\xi} + y_{\xi\xi} y_\xi^4 + \delta^2 y_{\xi\xi\xi\xi} + \frac{2}{5} \delta^4 y_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi}, \quad (21)$$

$$u_t + u_x u^4 + \delta^2 u_{xxx} + \frac{2}{5} \delta^4 u_{xxxxx} = 0. \quad (22)$$

Полученные выше эволюционные дифференциальные уравнения 5-го порядка (18) и (22) являются частными случаями обобщенного уравнения Кавахары [10]:

$$u_t + a u_x u^n + b u_{xxx} - c u_{xxxxx} = 0, \quad a \neq 0, \quad c \neq 0. \quad (23)$$

В случае $n = 1$, имеем известное уравнение Кавахары [11].

3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 5-ГО ПОРЯДКА

Проведем исследование уравнений (18) и (22) на тест Пенлеве. Для этого используем переменные бегущей волны

$$u(x, t) = w(x - C_0 t) = w(z), \quad (24)$$

тогда уравнение (18) примет вид

$$\frac{2}{5} \delta^4 w_{zzzz} + \delta^2 w_{zzz} + w^3 w_z - C_0 w_z = 0. \quad (25)$$

Проинтегрируем один раз уравнение (25) по z

$$\frac{2}{5} \delta^4 w_{zzzz} + \delta^2 w_{zz} + \frac{1}{4} w^4 - C_0 w + C_1 = 0. \quad (26)$$

Умножим уравнение (26) на w_z и снова проинтегрируем по z , тогда имеем

$$\frac{2}{5} \delta^4 \left(w_{zzz} w_z - \frac{1}{2} w_{zz}^2 \right) + \frac{\delta^2}{2} w_z^2 + \frac{1}{20} w^5 - \frac{C_0}{2} w^2 + C_1 w + C_2 = 0. \quad (27)$$

Аналогичным образом уравнение (22) примет вид

$$\frac{2}{5} \delta^4 \left(w_{zzz} w_z - \frac{1}{2} w_{zz}^2 \right) + \frac{\delta^2}{2} w_z^2 + \frac{1}{30} w^6 - \frac{C_0}{2} w^2 + C_1 w + C_2 = 0. \quad (28)$$

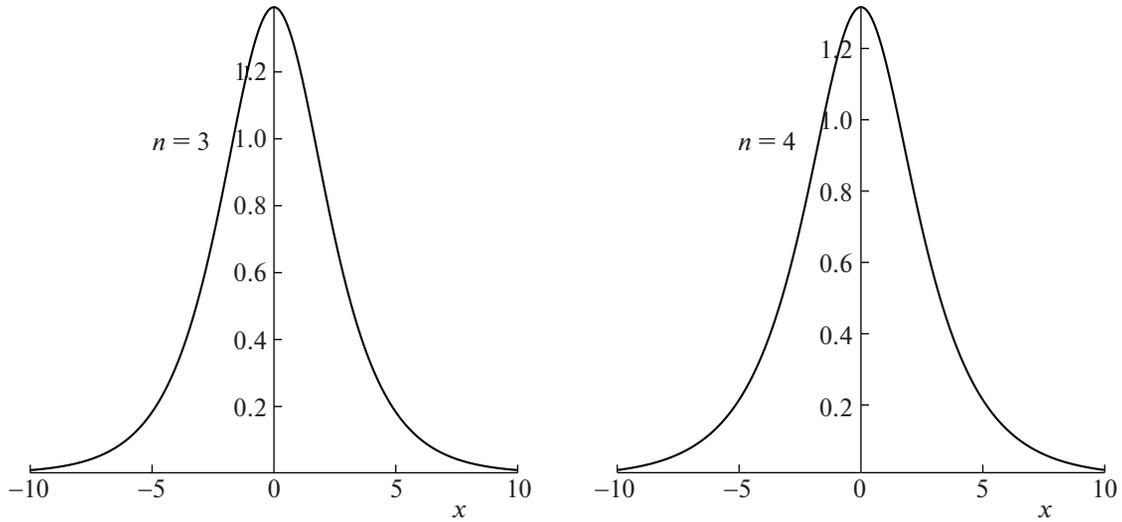


Рис. 2. График решения (38) при $n = 3$ и $n = 4$.

Таким образом, понизили порядок дифференциальных уравнений с 5-го до 3-го, что упрощает их исследование.

Анализ уравнения на свойство Пенлеве проводится в три шага. На первом шаге определяется порядок полюса и первый член разложения решения уравнения в ряд Лорана. Для этого используется уравнение, составленное из ведущих членов. Для уравнения (27) оно имеет вид

$$\frac{2}{5} \delta^4 \left(w_{zzz} w_z - \frac{1}{2} w_{zz}^2 \right) + \frac{1}{20} w^5 = 0. \quad (29)$$

Подставляя в уравнение (29)

$$w = \frac{a_0}{z^p}, \quad (30)$$

найдем, что решение уравнения (27) имеет полюс нецелого порядка $p = \frac{4}{3}$. Сделаем в уравнении (29)

замену $w(z) = v(z)^{\frac{4}{3}}$ и умножив его на $v(z)^{1/3}$, получим уравнение

$$\frac{16}{9} \delta^4 \left(\frac{4}{15} v_z^2 v_{zz} + \frac{2}{5} v v_z v_{zzz} - \frac{1}{9} \frac{v_z^4}{v} - \frac{1}{5} v v_{zz}^2 \right) + \frac{1}{20} v^7 = 0, \quad (31)$$

решение которого в свою очередь имеет полюс целого порядка $p = 1$. Подставляя в уравнение (31)

$v = \frac{a_0}{z^p}$, найдем a_0 :

$$a_{0,1,2,3,4} = \pm \left(\frac{1}{3} 364^{1/4} \sqrt{2} (1 \pm i) \right) \delta. \quad (32)$$

Таким образом, решение уравнения (31) имеет 4 ветви.

На втором шаге находятся индексы Фукса, которые в случае интегрируемости соответствуют номерам произвольных коэффициентов при разложении решения в ряд Лорана. Для определения индексов Фукса в уравнение (31) подставляем выражение $v = \pm a_0 (z - z_0)^2 + \beta (z - z_0)^{r-1}$, где a_0 определяется формулой (32). Индексы Фукса находятся путем приравнивания слагаемого, линейного по β , к нулю и решения полученного алгебраического уравнения относительно r . Выражения для индексов Фукса уравнения (31) имеют громоздкий вид, однако два из трех индексов являются комплексными. Таким образом, уравнение (31) не проходит тест Пенлеве и задача Коши для него не может быть решена методом обратной задачи рассеяния.

Для (28) уравнение из ведущих членов имеет вид

$$\frac{2}{5} \delta^4 \left(w_{zzz} w_z - \frac{1}{2} w_{zz}^2 \right) + \frac{1}{30} w^6 = 0. \quad (33)$$

Решение (28) имеет полюс первого порядка ($p = 1$) и 4 ветви

$$a_{0,1,2,3,4} = \pm (3^{1/4} \sqrt{2} (1 \pm i)) \delta. \quad (34)$$

Индексы Фукса для каждой ветви принимают следующие значения

$$j_1 = -1, \quad j_{2,3} = \frac{5 \pm i\sqrt{39}}{2}. \quad (35)$$

Два из трех индексов Фукса являются комплексными числами. Поэтому уравнение (28) также не проходит тест на свойство Пенлеве, и за-

дача Коши для этого уравнения не может быть решена методом обратной задачи рассеяния.

4. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ПОЛУЧЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 5-ГО ПОРЯДКА

Полученные дифференциальные уравнения (18) и (22), описывающие модель ФПУ с потенциалами взаимодействия между частицами соответственно (3) и (20), не проходят тест на свойство Пенлеве, а значит, не могут быть решены методом обратной задачи рассеяния. Однако некоторые точные решения этих уравнений находятся.

Рассмотрим общий вид уравнений (18) и (22) в переменных бегущей волны:

$$\frac{2}{5}\delta^4 w_{zzzz} + \delta^2 w_{zzz} + w^n w_z - C_0 w_z = 0, \quad n = 3, 4. \quad (36)$$

Сделав замену $z = \frac{z'}{\delta}$, опустив штрихи и умножив уравнение (36) на δ , получим

$$\mu w_{zzzz} + w_{zzz} + w^n w_z - C_0 w_z = 0, \quad n = 3, 4, \quad (37)$$

где $\mu = \frac{2}{5}$.

Для уравнения (37) в работе [12] были найдены точные решения в виде

$$w(z) = A \operatorname{sech}(Bz)^{\frac{4}{n}}, \quad (38)$$

где

$$A = \left(\frac{(n+1)(n+4)(3n+4)C_0}{8(n+2)} \right)^{1/n},$$

$$B = \frac{n\sqrt{(n^2+4n+8)C_0}}{4(n+2)}, \quad (39)$$

$$C_0 = \frac{1}{\mu} \left(\frac{2(n+2)}{n^2+4n+8} \right)^2.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе выведены нелинейные дифференциальные уравнения 6-го порядка, описывающие модель Ферми–Паста–Улама с потенциалами взаимодействия частиц 4-й и 5-й степени. Уравнения приведены к эволюционным дифференциальным уравнениям 5-го порядка и имеют вид обобщенного уравнения Кавахары. Исследованы аналитические свойства уравнений и показано, что оба уравнения не обладают свойством Пенлеве, однако допускают существование некоторых аналитических решений. Получены точные решения уравнений в виде уединенной волны.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00209).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fermi E., Pasta J., Ulam S.* Studies of nonlinear problems // Los Alamos Report – LA-1940; 1955. P. 978–988.
2. *Ford J.* Equipartition of energy for nonlinear systems // J. Math. Phys. 1961. V. 2. № 3. P. 387–393.
3. *Zabusky N.J., Kruskal M.D.* Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15. № 6. P. 240.
4. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики // Изд. дом “Интеллект”. 2010. 368 с.
5. *Kudryashov N.A.* Refinement of the Korteweg-de Vries equation from the Fermi-Pasta-Ulam model // Phys. Lett. A. 2015. V. 379. P. 2610–2614.
6. *Волков А.К., Кудряшов Н.А.* Уравнение высокого порядка для описания $\alpha + \beta$ модели Ферми–Паста–Улама // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2016. Т. 5. № 4. С. 308–320.
7. *Kudryashov N.A., Volkov A.K.* The fifth-order partial differential equation for the description of the $\alpha + \beta$ Fermi-Pasta-Ulam model // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. 2017. V. 42. P. 491–501.
8. *Kudryashov N.A.* Analytical properties of nonlinear dislocation equation // Applied Mathematics Letters. 2017. V. 69. P. 29–34.
9. *Кудряшов Н.А.* Модель Ферми–Паста–Улама и нелинейные эволюционные уравнения // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2016. Т. 5. № 1. С. 3–22.
10. *Demina M.V., Kudryashov N.A.* From Laurent series to exact meromorphic solutions: The Kawahara equation // Physics Letters A. 2010. V. 374. P. 4023–4029.
11. *Takuiji Kawahara.* Formation of Saturated Solitons in a Nonlinear Dispersive System with Instability and Dissipation // Physical review letters. 1983. V. 51. № 5. P. 381–383.
12. *Dey B., Khare Avinash, Nagaraja C. Kumar.* Stationary solitons of the fifth order KdV-type. Equations and their stabilization // Physics Letters A. 1996. V. 223. P. 449–452.

Nonlinear Wave Processes in a Medium of Interacting Particles without Collisions

V. V. Averina^{a,#} and N. A. Kudryashov^{a,##}

^a National Research Nuclear University MEPHI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: lera_averina@mail.ru

^{##}e-mail: nakudr@gmail.com

Received March 11, 2019; revised March 14, 2019; accepted March 26, 2019

Abstract—The Fermi–Pasta–Ulam model including the fourth and fifth terms in the potential of interaction between neighboring particles has been considered. A passage to a continuum limit has been performed when the distance between the particles approaches zero and the number of particles tends to infinity. It has been shown that, a nonlinear partial differential equation of the sixth order is obtained instead of the well-known Korteweg–de Vries equation taking into account the quadratic interaction between particles. The fifth-order evolution partial differential equation has been obtained. The analytical properties of the resulting equations have been investigated. It has been shown that the general solution of the fifth-order differential equation obtained during the passage to traveling wave variables has four branches in the expansion into a Laurent series. In the second step of the Painlevé test, Fuchs indices two of which are complex have been found. It has been shown that the fifth-order nonlinear partial differential equations found from the Fermi–Pasta–Ulam model do not pass the Painlevé test. The exact solutions of the fifth-order evolution equations have been obtained using the simplest equation method. The chart of the solutions has been constructed.

Keywords: Fermi–Pasta–Ulam model, nonlinear wave processes, continuum limit, Painlevé analysis

DOI: 10.1134/S2304487X19030040

REFERENCES

1. Fermi E., Pasta J., Ulam S. Studies of nonlinear problems // Los Alamos Report – LA-1940; 1955. p. 978–988.
2. Ford J. Equipartition of energy for nonlinear systems // J. Math. Phys., 1961, vol. 2, no. 3, pp. 387–393.
3. Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. 1965, vol. 15, no. 6, p. 240.
4. Kudryashov N.A. Methods of nonlinear mathematical physics // Izdatel'skiy dom "Intellekt", 2010. 368 pp. (in Russian).
5. Kudryashov N.A. Refinement of the Korteweg–de Vries equation from the Fermi–Pasta–Ulam model // Phys. Lett. A. 2015. V. 379. P. 2610–2614.
6. Volkov A.K., Kudryashov N.A. High-Order Equation for the Description of the $\alpha + \beta$ Fermi–Pasta–Ulam Model // Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2016, vol. 5, no. 4, pp. 308–320.
7. Kudryashov N.A., Volkov A.K. The fifth-order partial differential equation for the description of the $\alpha + \beta$ Fermi–Pasta–Ulam model // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. 2017. V. 42. P. 491–501.
8. Kudryashov N.A. Analytical properties of nonlinear dislocation equation // Applied Mathematics Letters. 2017. V. 69. P. 29–34.
9. Kudryashov N.A. Fermi–Pasta–Ulam Model and Higher-Order Nonlinear Evolution Equations // Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2016, vol. 5, no. 1, p. 3–22.
10. Demina M.V., Kudryashov N.A. From Laurent series to exact meromorphic solutions: The Kawahara equation // Physics Letters A. 374 (2010) 4023–4029.
11. Takuji Kawahara. Formation of Saturated Solitons in a Nonlinear Dispersive System with Instability and Dispersion // Physical review letters. 1983, vol. 51, no. 5. p. 381–383.
12. B. Dey, Avinash Khare, C. Nagaraja Kumar. Stationary solitons of the fifth order KdV-type. Equations and their stabilization // Physics Letters A. 223 (1996). P. 449–452.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.929+519.633

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
ТИПА КЛЕЙНА–ГОРДОНА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ МЕТОДОМ ПРЯМЫХ

© 2019 г. В. Г. Сорокин*

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

*e-mail: vsesor@gmail.com

Поступила в редакцию 02.03.2019 г.

После доработки 02.03.2019 г.

Принята к публикации 12.03.2019 г.

Описываются качественные особенности численного интегрирования методом прямых начально-краевых задач для уравнений в частных производных с запаздыванием. Метод прямых основан на аппроксимации пространственных производных разностными аналогами, что позволяет свести исходное уравнение к приближенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием τ . Для решения полученной системы используются численные методы Рунге–Кутты второго и четвертого порядка и метод Гира, встроенные в программный пакет Mathematica. Сформулированы тестовые задачи для нелинейных уравнений типа Клейна–Гордона с постоянным запаздыванием, решения которых выражаются через элементарные функции. Проводится обширное сопоставление численных решений с точными решениями тестовых задач на значительном временном интервале интегрирования от 0 до 50τ . Установлено, что при умеренных значениях времени запаздывания рассматриваемый численный метод обеспечивает высокую точность полученных результатов.

Ключевые слова: нелинейные уравнения гиперболического типа, уравнения типа Клейна–Гордона, дифференциально-разностные уравнения, уравнения с запаздыванием, численное интегрирование, метод прямых

DOI: 10.1134/S2304487X19030131

1. ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения с запаздыванием используются в динамике популяций, биологии, биохимии, биомедицине, экологии, механике, физике, химии, теории управления и других областях (см., например, [1–14] и ссылки в них). Подобные модели также встречаются в математической теории искусственных нейронных сетей, результаты которой применяются для обработки сигналов и изображений и в задачах о распознавании образов [15–17]. Наиболее простые пространственно однородные модели с запаздыванием описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Анализ и решение ОДУ с запаздыванием по сложности сопоставимы с анализом и решением уравнений в частных производных без запаздывания. Добавление диффузионного члена в модели с ОДУ дает возможность учесть распределение частиц, объектов или субстанций в пространстве и позволяет описывать более сложные явления или процессы. Краткий обзор нелинейных моделей реакционно-диффузионного типа с запаздыванием представлен в [18].

Широко известные методы численного интегрирования начально-краевых задач без запаздывания после некоторой модификации могут применяться и для задач с запаздыванием (см. обзор [19]). Одним из таких является метод прямых [20–22], который позволяет свести уравнение в частных производных с запаздыванием к системе ОДУ с запаздыванием. Полученную систему можно решить с помощью пакетов вычислительных программ Mathematica [23], Maple [24] и MATLAB [25], которые пока не справляются с непосредственным решением уравнений с запаздыванием в частных производных.

Данная статья посвящена тестированию метода прямых в среде Mathematica 11.2.0 на модельных задачах для нелинейных уравнений типа Клейна–Гордона с запаздыванием

$$u_{tt} = au_{xx} + f(u, w), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (1)$$

где $\tau > 0$ – время запаздывания, $a > 0$.

Отметим, что для корректной постановки начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с запаздыванием начальные условия

необходимо задавать не в точке, а на отрезке $-\tau \leq t \leq 0$ (или $0 \leq t \leq \tau$).

2. МЕТОД ПРЯМЫХ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Краткое описание метода прямых. Рассмотрим одномерную начально-краевую задачу для уравнения с запаздыванием достаточно общего вида

$$\begin{aligned} \varepsilon u_{tt} + \sigma u_t &= [p(x, u)u_x]_x + \\ &+ q(x, u)u_x + f(x, u, w), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ u(x, t) &= \varphi_0(x, t), \quad u_t(x, t) = \varphi_1(x, t), \quad (2) \\ 0 \leq x \leq 1, \quad -\tau \leq t \leq 0; \\ u(0, t) &= \psi_0(t), \quad u(1, t) = \psi_1(t), \quad t > 0, \end{aligned}$$

где $\varepsilon \geq 0, \sigma \geq 0$ ($\varepsilon + \sigma > 0$); функции p, q и f могут явно зависеть от t . Уравнение (2) включает в себя как частные случаи реакционно-диффузионное уравнение с запаздыванием ($\varepsilon = 0, \sigma = 1$), уравнение типа Клейна–Гордона с запаздыванием ($\varepsilon = 1, \sigma = 0$), нелинейное телеграфное уравнение с запаздыванием ($\varepsilon = 1, \sigma > 0$) и др. Второе слагаемое в правой части уравнения соответствует возможной конвективной (движущейся) составляющей модели; в частности, при $p(x, u) = 1, q(x, u) = -u, \varepsilon = 0, \sigma = 1$ уравнение (2) является уравнением Бюргерса с нелинейным источником и запаздыванием.

Для применения метода прямых к уравнениям вида (2) необходимо ввести вторую искомую функцию $v = u_t$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} u_t &= v, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ \varepsilon v_t + \sigma v &= [p(x, u)u_x]_x + q(x, u)u_x + \\ &+ f(x, u, w), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ u(x, t) &= \varphi_0(x, t), \quad v(x, t) = \varphi_1(x, t), \quad (3) \\ 0 \leq x \leq 1, \quad -\tau \leq t \leq 0; \\ u(0, t) &= \psi_0(t), \quad u(1, t) = \psi_1(t), \quad t > 0, \\ v(0, t) &= (\psi_0)'_t, \quad v(1, t) = (\psi_1)'_t, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Введем пространственную сетку $x_m = mh$, где $m = 0, 1, \dots, M, h = 1/M$ – шаг сетки. Аппроксимируя производные по x разностными аналогами и записывая уравнение в точке x_m , сводим задачу (3) к системе ОДУ:

$$\begin{aligned} (u_m)'_t &= v_m, \quad m = 1, \dots, M - 1, \quad 0 < t \leq T; \\ \varepsilon (v_m)'_t + \sigma v_m &= \delta_x [p_m \delta_x u_m] + q_m \delta_x u_m + f_m, \\ m &= 1, \dots, M - 1, \quad 0 < t \leq T; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_m(t) &= \varphi_0(x_m, t), \quad v_m(t) = \varphi_1(x_m, t), \\ m &= 0, 1, \dots, M, \quad -\tau \leq t \leq 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \psi_0(t), \quad u_M(t) = \psi_1(t), \quad 0 < t \leq T, \\ v_0(t) &= (\psi_0)'_t, \quad v_M(t) = (\psi_1)'_t, \quad 0 < t \leq T. \end{aligned}$$

Здесь $u_m = u_m(t) = u(x_m, t), v_m = v_m(t) = v(x_m, t), w_m = u(x_m, t - \tau), p_m = p(x_m, u_m), q_m = q(x_m, u_m), f_m = f(x_m, u_m, w_m), T$ – временной интервал вычислений, δ_x – разностный оператор, который определяется так:

$$\begin{aligned} \delta_x u_m &= \frac{1}{h} (u_{m+1} - u_m), \\ \delta_x [p_m \delta_x u_m] &= \frac{1}{h^2} [p_m (u_{m+1} - u_m) - p_{m-1} (u_m - u_{m-1})]. \end{aligned}$$

Система (4) содержит $M - 1$ неизвестных функций $u_m(t), M - 1$ неизвестных функций $v_m(t)$ и $2M - 2$ уравнений, а также четыре известные функции: $u_0(t), u_M(t), v_0(t), v_M(t)$.

Замечание 1. Функция $w_m(t)$ является известной и обозначает функцию $u_m(t - \tau)$, которая была вычислена на несколько временных слоев ранее. Численное интегрирование уравнений с запаздыванием, в отличие от уравнений без запаздывания, требует хранения данных со всех временных слоев в промежутке от $t_n - \tau$ до t_{n-1} , где t_n – расчетный временной слой, что приводит к существенным затратам оперативной памяти [1].

Замечание 2. Помимо равномерной сетки по x можно использовать также сетки с неравномерным шагом [26]. Для неравномерных сеток с переменным шагом $h_m = x_m - x_{m-1}$ вторая производная u_{xx} аппроксимируется так:

$$u_{xx} \approx \frac{2}{h_m + h_{m+1}} \left(\frac{u_{m+1} - u_m}{h_{m+1}} - \frac{u_m - u_{m-1}}{h_m} \right),$$

где $\sum h_m = 1$ (если $0 \leq x \leq 1$).

Замечание 3. Метод прямых может использоваться также для численного интегрирования 2D- и 3D-уравнений реакционно-диффузионного типа с запаздыванием, в которых слагаемые $[p(x, u)u_x]_x$ и $q(x, u)u_x$ заменяются соответственно на $\text{div}[p(\mathbf{x}, u)\nabla u]$ и $\mathbf{q}(\mathbf{x}, u) \cdot \nabla u$. В частности, в двумерном случае на равномерных сетках оператор Лапласа ($\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$) аппроксимируется следующим образом:

$$\Delta u \approx \frac{1}{h^2} (u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + \frac{1}{\tilde{h}^2} (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}),$$

где $u_n = u(y_n, t), y_n = n\tilde{h}$ ($n = 0, 1, \dots, N$), $\tilde{h} = 1/N$ – шаг сетки по y .

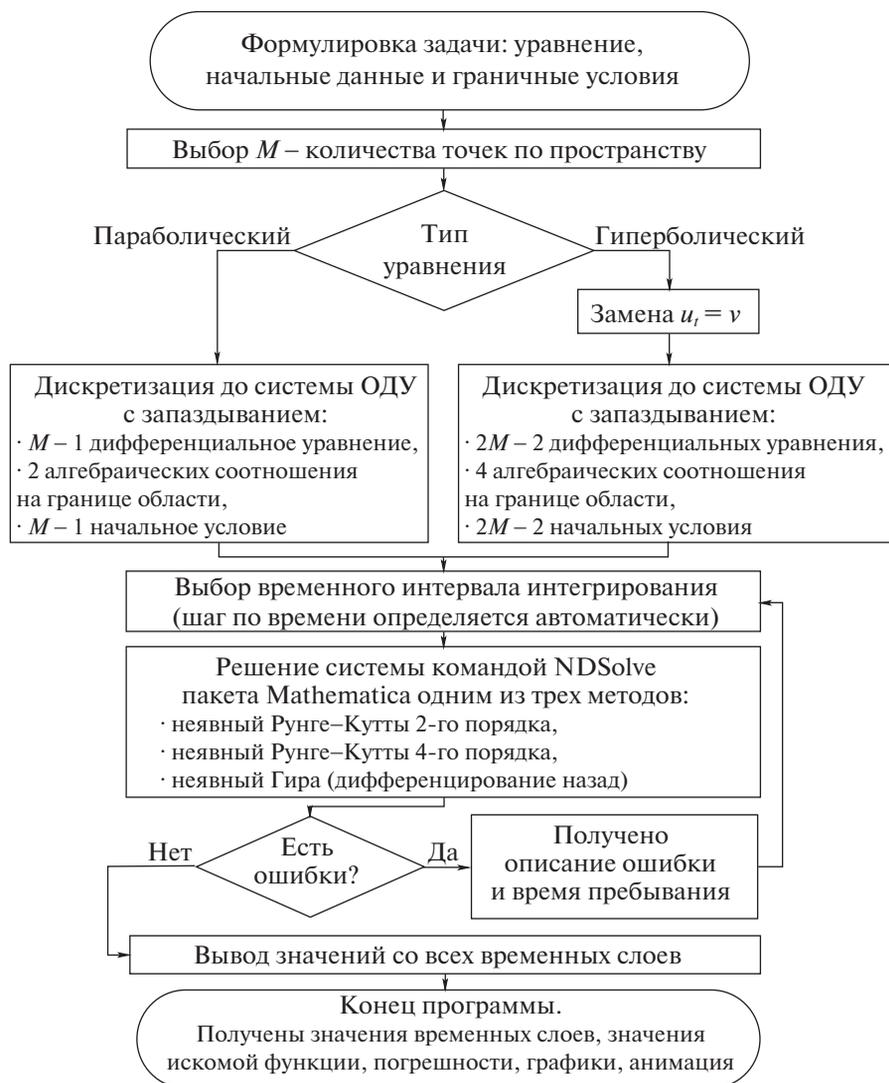


Рис. 1. Процедура численного интегрирования начально-краевых задач с запаздыванием (общая схема).

Общая схема численного интегрирования задач с запаздыванием методом прямых. Процедура численного интегрирования начально-краевой задачи (2) схематически изображена на рис. 1 и может быть описана в виде последовательности действий:

- 1) формулируем задачу, состоящую из уравнения, начальных данных и граничных условий;
- 2) выбираем количество точек сетки по пространству M , определяющее количество уравнений в системе ОДУ, которая будет получена из исходного уравнения с помощью метода прямых;
- 3) если рассматривается уравнение гиперболического типа, то вводим новую переменную $v = u_t$;
- 4) применяем метод прямых и получаем систему ОДУ с запаздыванием, состоящую, если рассматривается параболическое уравнение, из

$M - 1$ уравнения и $M - 1$ начального условия (плюс два алгебраических соотношения на границе области), или, если рассматривается гиперболическое уравнение, из $2M - 2$ уравнений и $2M - 2$ начальных условий (плюс четыре алгебраических соотношения на границе области);

- 5) выбираем временной интервал интегрирования;
- 6) решаем систему ОДУ из пункта 4 с помощью одного из методов команды NDSolve;
- 7) в случае возникновения ошибок в процессе расчета, пробуем сократить временной интервал вычислений из пункта 5 и пытаемся получить удовлетворительное решение на более коротком временном интервале;
- 8) в итоге получаем значения искомой функции на всех временных слоях, значения абсолютных и относительных погрешностей на точном

решении (если точное решение известно), графики и анимации численного решения (вместе с точным решением).

Отметим, что вместо постоянного коэффициента σ в уравнении (2) может стоять функция $\sigma = \sigma(x, u)$.

Интегрирование систем ОДУ с запаздыванием в среде Mathematica. Основным методом численного интегрирования ОДУ и систем ОДУ, в том числе с запаздыванием, в среде Mathematica является команда (встроенная функция) NDSolve [28, 27]. На текущий момент с помощью команды NDSolve можно решать только системы с постоянным запаздыванием (в том числе с несколькими запаздываниями) [23]. Без дополнительных опций команда NDSolve решает систему комплексным методом, при котором в процессе вычисления происходит автоматическая смена методов решения системы ОДУ и выбор значений параметров метода. В ранних версиях Mathematica такой подход не удавалось применять для решения жестких задач, однако в более поздних версиях (например, Mathematica 11.2.0) комплексный метод уже давал некоторые результаты. Тем не менее, мы будем использовать команду NDSolve вместе с опцией Method, которая позволяет пользователю самостоятельно выбирать один из встроенных методов решения жестких систем ОДУ: метод из класса неявных методов Рунге–Кутты [29, 30] или неявный многошаговый метод Гира, основанный на формуле дифференцирования назад (BDF – Backward differentiation formula [31]).

Шаг по времени выбирается командой NDSolve автоматически. Максимальное количество шагов, за которое программа обязана построить решение, по умолчанию оценивается по величине начального шага [32], что может оказаться несостоятельным, если, например, решение неограниченно возрастает по экспоненциальному закону. Снять это ограничение можно с помощью опции MaxSteps $\rightarrow \infty$ внутри команды NDSolve.

Приведем краткое описание применяемых методов. Для начала запишем систему (4) в общем виде в векторной форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_t &= F(t, \mathbf{u}, \mathbf{w}), \quad \mathbf{w} = \mathbf{u}(x, t - \tau), \quad 0 < t \leq T; \\ \mathbf{u}(t) &= \varphi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Входящие в (5) векторы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}(t) = (u_0(t), v_0(t), \dots, u_M(t), v_M(t)); \\ \varphi(t) &= (\varphi_0(x_0, t), \varphi_1(x_0, t), \dots, \varphi_0(x_M, t), \varphi_1(x_M, t)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_0 &= (\psi_0)'_t + u_0(t) - \psi_0(t), \\ F_1 &= (\psi_0)''_t + v_0(t) - (\psi_0)'_t, \\ F_m &= \delta_x [p_m \delta_x u_m] + q_m \delta_x u_m + f_m, \quad m = 2, \dots, 2M - 1, \\ F_{2M} &= (\psi_1)'_t + u_M(t) - \psi_1(t), \\ F_{2M+1} &= (\psi_1)''_t + v_M(t) - (\psi_1)'_t. \end{aligned}$$

Метод Гира встроен в Mathematica как часть пакета IDA, входящего в библиотеку методов SUNDIALS, которая разрабатывается Ливерморской национальной лабораторией им. Э. Лоуренса, США (IDA – Implicit Differential-Algebraic solver – неявный дифференциально-алгебраический решатель, SUNDIALS – SUite of Nonlinear and Differential/ALgebraic equation Solvers – набор нелинейных и дифференциальных/алгебраических решателей) [31]. Программный код методов IDA (см. руководство пользователя [33]) основан на DASPK [34, 35] – программах на языке Фортран, позволяющих решать дифференциально-алгебраические системы больших размерностей. Опишем работу метода Гира, руководствуясь материалами [31, 33].

Метод Гира основан на аппроксимации временной производной с помощью формулы дифференцирования назад порядка r с переменным шагом, которая имеет вид

$$(\mathbf{u}_n)'_t = s_n^{-1} \sum_{i=0}^r \alpha_{n,i} \mathbf{u}_{n-i}, \quad (6)$$

где $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}(t_n)$, $s_n = t_n - t_{n-1}$ – шаг по времени, $\sum s_n = T$, t_n – текущий временной слой; коэффициенты $\alpha_{n,i}$ однозначно определяются порядком r и значениями предыдущих шагов s_n [33].

Применяя формулу (6) к системе (5), получаем систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}_n) \equiv \mathbf{F}(t_n, \mathbf{u}_n, \tilde{\mathbf{w}}_n) - s_n^{-1} \sum_{i=0}^r \alpha_{n,i} \mathbf{u}_{n-i} = 0, \quad (7)$$

которая на каждом слое t_n решается итерационным методом Ньютона

$$\mathbf{J}_n(\mathbf{u}_n^{(j+1)} - \mathbf{u}_n^{(j)}) = -\mathbf{G}(\mathbf{u}_n^{(j)}).$$

Здесь на каждой итерации j решается линейная система, \mathbf{J}_n – аппроксимация Якобиана системы (7), которая вычисляется по формуле

$$\mathbf{J}_n = \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{u}_n)}{\partial \mathbf{u}_n} \equiv \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u}_n, \tilde{\mathbf{w}}_n)}{\partial \mathbf{u}_n} - \frac{\alpha_{n,0}}{s_n}.$$

Функция $\tilde{\mathbf{w}}_n = \mathbf{u}(t_n - \tau)$ вычисляется с помощью интерполяции, если значение $t_n - \tau$ лежит

вне точек сетки, и является известной функцией \mathbf{u}_* , значения которой были вычислены ранее на слое t_* , если $t_n - \tau = t_*$.

На каждом временном слое метод Гира вычисляет оценку E_n локальной погрешности и автоматически выбирает размер шага s_n и порядок r таким образом, чтобы выполнялось соотношение $\|E_n/\omega_n\| < 1$, где m -я компонента $\omega_{n,m}$ вектора ω_n определяется по формуле

$$\omega_{n,m} = \frac{1}{10^{-p}|u_{n,m}| + 10^{-q}}.$$

Значения констант p и q определяются с помощью опций `PrecisionGoal` $\rightarrow p$ и `AccuracyGoal` $\rightarrow q$ команды `NDSolve`. Норма $\|\cdot\|$ по умолчанию автоматически выбирается командой `NDSolve` в зависимости от метода решения (но может быть задана вручную). Для метода Гира это норма вида $\|x\|_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2}$ [36].

Методы Рунге–Кутты основаны на использовании квадратурных формул. Интегрируя уравнения системы (5) по времени от t_{n-1} до t_n , получаем:

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{F}(t, \mathbf{u}, \mathbf{w}) dt. \quad (8)$$

Интеграл в формуле (8) аппроксимируем некоторой квадратурной формулой и получаем выражения, описывающие неявный r -стадийный метод Рунге–Кутты [29, 30, 37]:

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n-1} + s_n \sum_{i=1}^r b_i \mathbf{K}_n^i, \quad (9)$$

$$\mathbf{K}_n^i = \mathbf{F}\left(t_n + c_i s_n, \mathbf{u}_{n-1} + s_n \sum_{j=1}^r a_{ij} \mathbf{K}_n^j, \tilde{\mathbf{w}}_n\right), \quad (10)$$

где s_n – шаг сетки, b_i – веса квадратурной формулы, c_i – коэффициенты, определяющие узлы квадратурной формулы, a_{ij} – коэффициенты, подчиняющиеся условию $c_i = \sum_{j=1}^r a_{ij}$ ($i = 1, \dots, r$).

Функция $\tilde{\mathbf{w}}_n = \mathbf{u}(t_n - \tau)$ вычисляется с помощью интерполяции, если значение $t_n - \tau$ лежит вне точек сетки, и является известной функцией \mathbf{u}_* , значения которой были вычислены ранее на слое t_* , если $t_n - \tau = t_*$. Различные методы Рунге–Кутты порождаются различными квадратурными формулами, которые определяются наборами коэффициентов a_{ij} , b_i и c_i . Система нелинейных алгебраических уравнений (10) относительно значений \mathbf{K}_n^i по умолчанию в Mathematica решается методом Ньютона.

Мы далее будем использовать методы Рунге–Кутты с коэффициентами Лобатто ПС, которые основаны на квадратурных формулах Лобатто и хорошо подходят для решения жестких задач [38, 39]. Первый и последний узлы квадратурной формулы Лобатто совпадают с началом и концом отрезка интегрирования, поэтому $c_1 = 0$, $c_r = 1$; остальные коэффициенты c_i являются нулями производных многочленов Лежандра

$$\frac{d^{r-2}}{dx^{r-2}}(x^{r-1}(x-1)^{r-1}).$$

В результате получаются квадратурные формулы порядка $2r - 2$. Веса b_1, \dots, b_r квадратурных формул Лобатто определяются так, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{i=1}^r b_i c_i^{\beta-1} = \frac{1}{\beta}, \quad \beta = 1, \dots, 2r - 2.$$

Отличие формул Лобатто ПС от ПШ и ПВ заключается в выражениях для определения коэффициентов a_{ij} . Для Лобатто ПС коэффициенты a_{ij} определяются из следующих условий:

$$\sum_{j=1}^r a_{ij} c_j^{\beta-1} = \frac{c_i^\beta}{\beta}, \quad i = 1, \dots, r, \quad \beta = 1, \dots, r - 1;$$

$$a_{i1} = b_i, \quad i = 1, \dots, r.$$

В Mathematica значения коэффициентов метода Рунге–Кутты (коэффициентов квадратурных формул) определяются автоматически. Выбрать вид коэффициентов (например, коэффициенты Лобатто ПС) можно с помощью свойства `Coefficients` опции `Method` команды `NDSolve` [30]. Методы Рунге–Кутты с коэффициентами Лобатто ПС при r стадиях имеют порядок $2r - 2$ (см. [39]). Размер шага s_n метода (9)–(10) определяется в Mathematica автоматически исходя из оценки локальной погрешности решения [29]. Для этого решения, полученные основным методом порядка p с весами b_i , сравниваются с решениями вспомогательного метода порядка \hat{p} с весами \hat{b}_i (по умолчанию $\hat{p} = p - 1$). Коэффициенты c_i и a_{ij} обоих методов совпадают, а значит, совпадают и значения функций \mathbf{K}_n^i , что отменяет необходимость второй раз решать нелинейную систему (10).

Замечание 4. В задачах с решениями, достигающими абсолютных значений высоких порядков команде `NDSolve` с выбранным методом Рунге–Кутты могут потребоваться минуты и десятки минут для построения решения. Существенно сократить время работы метода до нескольких секунд можно увеличением допустимых абсолютной и относительной погрешностей с помощью опций `AccuracyGoal` $\rightarrow q$ и `PrecisionGoal` $\rightarrow p$. При заданных значениях q и p программа попытается

сделать так, чтобы погрешность численного решения x не превысила значения $10^{-q} + 10^{-p}|x|$.

Замечание 5. В работе [40] показано, что команда NDSolve дает адекватные результаты при решении одиночных ОДУ с запаздыванием, что позволяет перейти к тестированию команды NDSolve для решения жестких систем ОДУ вида (4). Там же проводится обширное сопоставление численных решений с точными решениями модельных тестовых задач реакционно-диффузионного типа (уравнение (2) при $\varepsilon = 0, \sigma = 1$); показано, что методы Рунге–Кутты и Гира, встроенные в команду NDSolve, обеспечивают высокую точность полученных результатов.

3. ФОРМУЛИРОВКИ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КЛЕЙНА–ГОРДОНА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Предварительные замечания. Задачи для уравнений в частных производных с запаздыванием могут иметь негладкие или неустойчивые решения, что осложняет их численное интегрирование. Дело в том, что теоретические оценки точности численных решений нелинейных уравнений в частных производных даже при отсутствии запаздывания содержат константы, которые зависят от гладкости рассматриваемого решения и обычно не могут быть вычислены априорно. Практическая сходимость численных методов, основанная на измельчении расчетной сетки, также не может в полной мере гарантировать надежность используемых схем и точность расчетов (особенно вблизи значений параметров задачи, соответствующих быстро осциллирующим или неустойчивым решениям). Эти и другие качественные особенности дифференциальных уравнений с запаздыванием рассматриваются в [18, 41–43].

Наиболее наглядным и весьма эффективным способом оценки области применимости и точности численных методов является прямое сравнение численных и точных решений тестовых задач. Много точных решений уравнений вида (1) и других нелинейных уравнений с запаздыванием (а также систем таких уравнений), полученных в последние годы, приведено в [10, 19, 44–58]. Методы построения точных решений описываются в [2, 59–62]. Эти уравнения и их точные решения содержат ряд свободных параметров (которые можно варьировать) и могут быть полезны для оценки точности соответствующих численных методов.

Формулировки тестовых задач для уравнений типа Клейна–Гордона с запаздыванием. Воспользуемся результатами работ [45, 53, 56] и сформулируем несколько модельных тестовых задач типа Клейна–Гордона с запаздыванием, которые содержат произвольные постоянные.

Тестовая задача 1. Нелинейное уравнение типа Клейна–Гордона с запаздыванием

$$u_{tt} = au_{xx} + u(u - kw), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (11)$$

где $a > 0, k > 0$ – произвольные постоянные, с начальными данными

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U_1(x, t) \equiv \exp(ct + cx/\sqrt{a}), \\ u_t(x, t) &= c \exp(ct + cx/\sqrt{a}), \\ c &= (\ln k)/\tau, \quad -\tau \leq t \leq 0, \end{aligned} \quad (12)$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = \exp(ct), \quad u(1, t) = \exp(ct + c/\sqrt{a}), \quad t > 0, \quad (13)$$

имеет в области $0 < x < 1, t > 0$ точное решение $u = U_1(x, t)$.

Тестовая задача 2. Нелинейное уравнение типа Клейна–Гордона с запаздыванием

$$u_{tt} = au_{xx} + u(u - w), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (14)$$

где $a > 0$ – произвольная постоянная, с начальными данными

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U_2(x, t) \equiv \sin(\beta x/\sqrt{a}) \cos(\beta t), \\ u_t(x, t) &= -\beta \sin(\beta x/\sqrt{a}) \sin(\beta t), \\ \beta &= 2\pi/\tau, \quad -\tau \leq t \leq 0; \end{aligned} \quad (15)$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = \sin(\beta/\sqrt{a}) \cos(\beta t), \quad t > 0, \quad (16)$$

имеет в области $0 < x < 1, t > 0$ точное решение $u = U_2(x, t)$.

Тестовая задача 3. Нелинейное уравнение типа Клейна–Гордона с запаздыванием

$$u_{tt} = au_{xx} + bu - s(u - kw)^2, \quad w = u(x, t - \tau), \quad (17)$$

где $a > 0, \tau > 0$ – произвольные постоянные,

$$\begin{aligned} k > 0, \quad k \neq 1, \quad b &= (\ln k)^2/\tau^2 - a, \\ s &= b/(1 - k)^2, \end{aligned} \quad (18)$$

с начальными данными

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U_3(x, t) \equiv 1 + \frac{e^{ct+1}}{e^2 - 1} (e^x - e^{-x}), \\ c &= \frac{\ln k}{\tau}, \quad -\tau \leq t \leq 0, \end{aligned} \quad (19)$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = 1, \quad t > 0; \quad u(1, t) = 1 + e^{ct}, \quad t > 0, \quad (20)$$

имеет в области $0 < x < 1, t > 0$ точное решение $u = U_3(x, t)$.

Тестовая задача 4. Нелинейное уравнение типа Клейна–Гордона с запаздыванием

$$u_{tt} = au_{xx} + bu[1 - s(u - kw)], \quad w = u(x, t - \tau), \quad (21)$$

где $a > 0$, $\tau > 0$, s – произвольные постоянные,

$$k > 0, \quad b = (\ln k)^2/\tau^2 + a\pi^2/4, \quad (22)$$

с начальными данными

$$u(x, t) = U_4(x, t) \equiv e^{ct} [\cos(\pi x/2) + 2 \sin(\pi x/2)], \quad (23)$$

$$c = (\ln k)/\tau, \quad -\tau \leq t \leq 0,$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = e^{ct}, \quad t > 0; \quad u(1, t) = 2e^{ct}, \quad t > 0, \quad (24)$$

имеет в области $0 < x < 1$, $t > 0$ точное решение $u = U_4(x, t)$.

4. СОПОСТАВЛЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ И ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА КЛЕЙНА–ГОРДОНА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Предварительные замечания. Численные решения всех тестовых задач были получены путем применения метода прямых в комбинации с методом Рунге–Кутты второго или четвертого порядка или с методом Гира. Расчеты проводились на интервале $0 \leq t \leq T = 50\tau$ для трех времен запаздывания $\tau = 0.05$, $\tau = 0.1$, $\tau = 0.5$ (иногда дополнительно брались более высокие значения $\tau \geq 1$). Некоторые тестовые задачи не удалось решить на столь большом интервале: процедура интегрирования прерывалась с ошибкой и указанием времени прерывания расчета. Тем не менее, в большинстве случаев адекватное численное решение задачи можно получить, если подходящим образом сократить рассматриваемый временной интервал вычислений.

Под абсолютной и относительной погрешностями численного решения u_m^n тестовой задачи для уравнения типа Клейна–Гордона с запаздыванием будем соответственно понимать величины

$$\sigma_a = \max_{\substack{1 \leq n \leq N \\ 1 \leq m \leq M}} |u_e - u_m^n|, \quad \sigma_r = \max_{\substack{1 \leq n \leq N \\ 1 \leq m \leq M}} |(u_e - u_m^n)/u_e|,$$

где $u_e = u_e(x_m, t_n)$ – значение точного решения этой задачи на временном слое t_n для уравнения m , N – количество шагов по времени, выбираемое командой NDSolve автоматически, M – количество уравнений системы ОДУ, выбираемое вручную.

Сопоставление точных и численных решений тестовых задач.

Тестовая задача 1. Решение $u = U_1$ тестовой задачи (11)–(13) при $a = 1$, $k = 0.5$ является экспоненциально убывающей функцией. В табл. 1 указаны абсолютные погрешности численных решений, полученных комбинацией метода прямых с тремя методами решения системы ОДУ на отрезке $0 \leq t \leq 50\tau$ для различных M и τ . Из таблицы можно сделать вывод, что все методы хорошо справились с решением задачи, причем метод Рунге–Кутты четвертого порядка дал чуть лучшую аппроксимацию точного решения. С увеличением M абсолютные погрешности уменьшаются; все методы дали второй порядок аппроксимации по пространству. Отметим также, что абсолютные погрешности уменьшаются при увеличении времени запаздывания.

На рис. 2 представлены графики точного решения (сплошная линия) и численного решения, полученного методом Рунге–Кутты второго порядка (кружочки) при $a = 1$, $k = 0.5$ и $\tau = 0.05$, $\tau = 0.5$ для $M = 100$ в моменты времени $\bar{t} \approx 0.1$, $\bar{t} \approx 1$, $\bar{t} \approx 3$, где $\bar{t} = t/\tau$. Графики, полученные другими методами выглядят аналогично и здесь не приводятся.

Тестовая задача 2. Решение $u = U_2$ тестовой задачи (14)–(16) при $a = 1$ представляет собой незатухающий колебательный процесс с периодом τ по обоим переменным. Важно отметить, что это решение быстро осциллирует при малых τ и является сингулярным относительно параметра запаздывания (поскольку решение $u = U_2$ не имеет предела при $\tau \rightarrow 0$). Указанное обстоятельство ограничивает возможность используемых здесь численных методов при малых τ , поскольку требует для таких τ большого числа точек сетки по x (например, при $\tau = 0.05$ для достижения приемлемой точности требуется брать более 1000 точек, а при $\tau = 0.1$ и $M = 1000$ абсолютная погрешность вычислений для метода Рунге–Кутты 2-го порядка довольно велика и равна 4.1×10^{-2}).

В табл. 2 указаны абсолютные погрешности численных решений, полученных комбинацией метода прямых с методом Гира и с методом Рунге–Кутты второго порядка на интервале времени $0 \leq t \leq 50\tau$ для трех умеренных времен запаздывания $\tau = 0.5$, $\tau = 1$, $\tau = 2$ при различном количестве точек сетки по пространственной переменной ($M = 50$, $M = 100$, $M = 200$). Видно, что при увеличении τ и увеличении количества уравнений M уменьшается погрешность численного решения. Погрешность также уменьшается, если уменьшается рассматриваемый интервал времени T (например, при $\tau = 0.5$ оба метода показывают приемлемую аппроксимацию точного реше-

Таблица 1. Абсолютные погрешности численных решений задачи (11)–(13) при $a = 1, k = 0.5$ на интервале $0 \leq t \leq T = 50\tau$

Метод	M	$\tau = 0.05$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 1$
Рунге–Кутты 2-го порядка	10	4.0×10^{-2}	1.2×10^{-2}	2.5×10^{-4}	2.7×10^{-5}
	50	2.0×10^{-3}	5.0×10^{-4}	1.0×10^{-5}	1.9×10^{-6}
	100	5.0×10^{-4}	1.2×10^{-4}	2.6×10^{-6}	9.5×10^{-7}
	200	1.2×10^{-4}	3.0×10^{-5}	7.2×10^{-7}	6.0×10^{-7}
Рунге–Кутты 4-го порядка	10	4.0×10^{-2}	1.2×10^{-2}	2.5×10^{-4}	2.7×10^{-5}
	50	2.0×10^{-3}	5.0×10^{-4}	9.8×10^{-6}	1.1×10^{-6}
	100	5.0×10^{-4}	1.2×10^{-4}	2.5×10^{-6}	2.7×10^{-7}
	200	1.2×10^{-4}	3.0×10^{-5}	6.1×10^{-7}	6.7×10^{-8}
Гира	10	4.0×10^{-2}	1.2×10^{-2}	2.5×10^{-4}	2.7×10^{-5}
	50	2.0×10^{-3}	5.0×10^{-4}	9.8×10^{-6}	1.3×10^{-6}
	100	5.0×10^{-4}	1.2×10^{-4}	2.5×10^{-6}	3.0×10^{-7}
	200	1.2×10^{-4}	3.1×10^{-5}	6.5×10^{-7}	1.3×10^{-7}

ния для $M = 100$ с абсолютной погрешностью 0.08 на интервале $0 \leq t \leq T = 20\tau$, а при $M = 200$ абсолютная погрешность на этом же интервале времени будет меньше в четыре раза). Погрешности решений, полученных методом Рунге–Кутты четвертого порядка, совпадают с погрешностями решений, полученных методом Гира, и отдельно в таблице не приводятся. Колебания по x имеют период τ , то есть с увеличением времени запазды-

вания частота колебаний уменьшается, и поэтому для достижения приемлемой погрешности можно использовать меньшее количество точек сетки по пространству. Тестирование методов для умеренных и больших времен запаздывания при больших M не проводилось, так как такие вычисления требуют больших затрат оперативной памяти, но, ввиду сказанного выше, не являются необходимыми. Отметим, что метод Рунге–Кут-

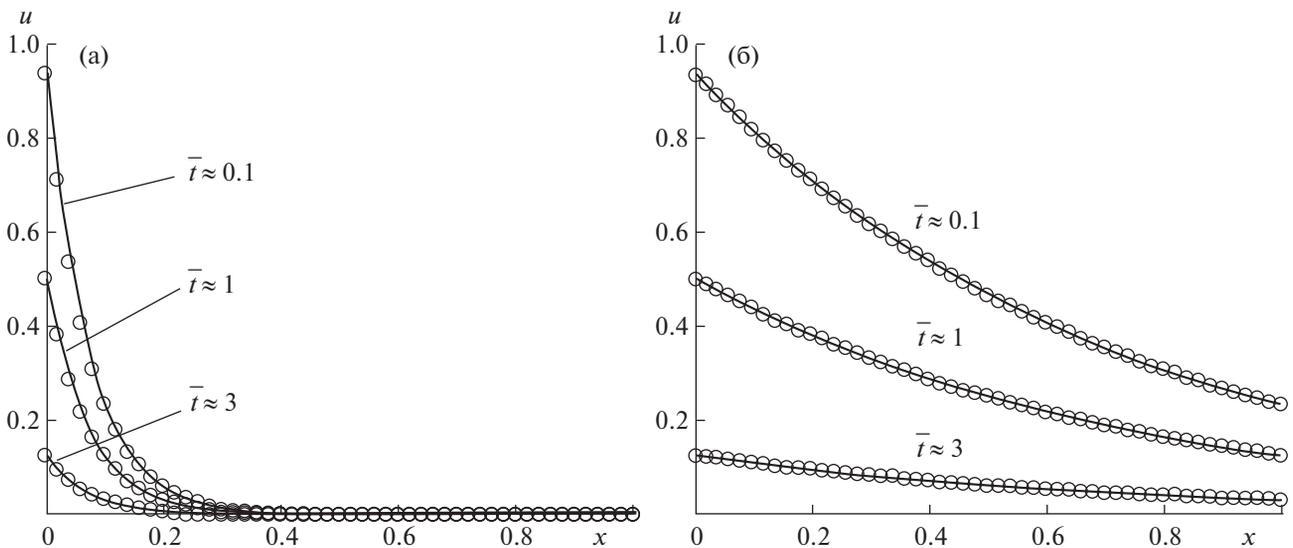


Рис. 2. Точные решения (сплошные линии) и численные решения (кружочки), полученные комбинацией метода прямых и метода Рунге–Кутты второго порядка тестовой задачи (11)–(13) при $a = 1, k = 0.5$ и (а) $\tau = 0.05$, (б) $\tau = 0.5$ для $M = 100$ в различные моменты времени $\bar{t} = t/\tau$.

Таблица 2. Абсолютные погрешности численных решений задачи (14)–(16) при $a = 1$ и умеренных временах запаздывания τ на интервале $0 \leq t \leq T = 50\tau$

Метод	M	$\tau = 0.5$	$\tau = 1$	$\tau = 2$
Рунге–Кутты 2-го порядка	50	0.79	0.2	4.6×10^{-2}
	100	0.2	4.4×10^{-2}	7.7×10^{-3}
	200	4.3×10^{-2}	5.7×10^{-3}	1.9×10^{-3}
Гира	50	0.8	0.2	5.1×10^{-2}
	100	0.2	5.1×10^{-2}	1.3×10^{-2}
	200	5.1×10^{-2}	1.3×10^{-2}	3.2×10^{-3}

ты второго порядка дает чуть более хорошую аппроксимацию точного решения.

На рис. 3 представлены графики точного решения (сплошная линия) и численного решения, полученного методом Рунге–Кутты второго порядка (кружочки) при $a = 1$, $\tau = 0.5$ для $M = 100$ и $M = 200$ в некоторый промежуточный момент времени $t = 15.91$ (момент времени выбран так, чтобы была заметна погрешность численного решения) и в момент времени с максимальной амплитудой $t = 16.00$. Видно, что с увеличением количества уравнений M уменьшается погрешность численного решения. Графики решений, полученных методом Гира, выглядят аналогично и здесь не приводятся.

Тестовая задача 3. Решение $u = U_3$ тестовой задачи (17)–(20) при $a = 1$, $k = 0.5$ является монотонно затухающим по обеим переменным. Все три метода (методы Рунге–Кутты второго и четвертого порядка и метод Гира) адекватно работают на всем интервале вычислений $0 \leq t \leq T = 50\tau$ при всех рассматриваемых временах запаздывания. Графики численных решений, полученных

методом Гира, при $M = 100$ для времен запаздывания $\tau = 0.05$ и $\tau = 0.5$ представлены на рис. 4. Графики решений, полученных другими методами, выглядят аналогично и здесь не приводятся. Абсолютные погрешности численных решений представлены в табл. 3.

Тестовая задача 4. Решение $u = U_4$ тестовой задачи (21)–(24) при $a = 1$, $k = 0.5$, $s = 0.2$ является монотонно затухающим во времени. При малых временах запаздывания ($\tau = 0.05$ и $\tau = 0.1$) все три метода (методы Рунге–Кутты второго и четвертого порядка и метод Гира) адекватно работают на начальном участке $0 \leq t \leq 10\tau$, а после выхода на асимптоту $u = 0$ начинают сильно отклоняться от точного решения, что связано с неустойчивостью при малых τ стационарного решения $u = 0$ (в линейном приближении доказательство данного факта приведено далее). Поведение методов проиллюстрировано на рис. 5 при $M = 200$ на середине отрезка $x = 0.5$. Графики численных решений, полученных методом Рунге–Кутты четвертого порядка, качественно аналогичны графикам численных решений, полученных методом Гира,

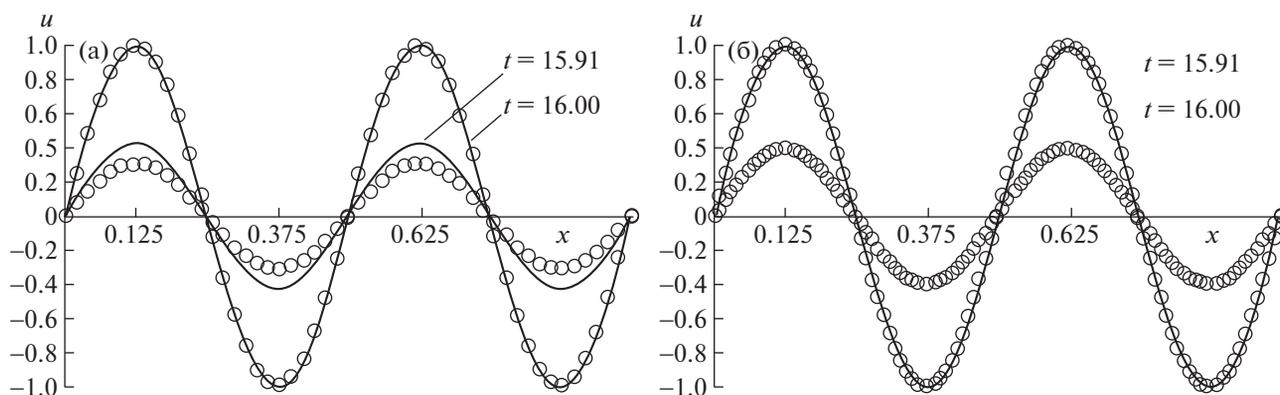


Рис. 3. Точные решения (сплошные линии) и численные решения (кружочки), полученные комбинацией метода прямых и метода Рунге–Кутты второго порядка тестовой задачи (14)–(16) при $a = 1$, $\tau = 0.5$ и (а) $M = 100$, (б) $M = 200$ в моменты времени $t = 15.91$ и $t = 16.00$.

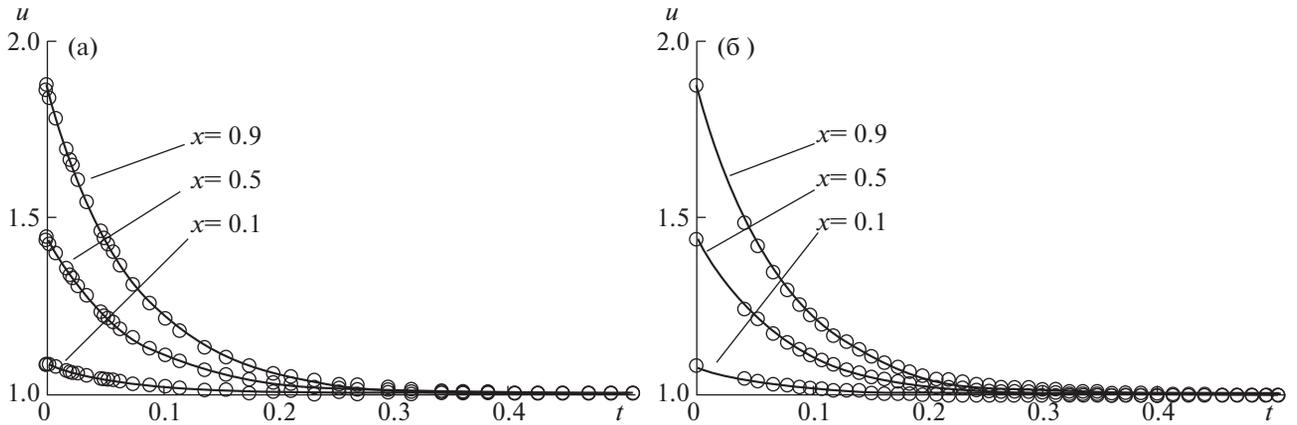


Рис. 4. Точные решения (сплошные линии) и численные решения (кружочки), полученные комбинацией метода прямых и метода Гира, тестовой задачи (17)–(20) при $a = 1, k = 0.5$ для $M = 100$ и двух времен запаздывания (а) $\tau = 0.05$, (б) $\tau = 0.5$ при $x = 0.1, x = 0.5, x = 0.9$.

и здесь опускаются. Из рис. 5 видно, что метод Гира (и метод Рунге–Кутты четвертого порядка) имеет немного больший диапазон применимости по t . В табл. 4 представлены абсолютные погрешности численных решений на интервале $0 \leq t \leq 10\tau$, когда методы работают хорошо.

При умеренных временах запаздывания ($\tau = 0.5$ и $\tau = 1$) все три метода адекватно работают на всем интервале вычислений $0 \leq t \leq T = 50\tau$. Абсолютные погрешности численных решений представлены в табл. 4.

Покажем теперь, что при малых значениях $\tau = 0.05$ и $\tau = 0.1$ предельное стационарное состояние рассматриваемого решения ($u \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$) является неустойчивым в линейном приближении. В работе [63] описана общая схема исследования линейной неустойчивости решений нелинейных уравнений с запаздыванием; выведено характеристическое уравнение для задач типа Клейна–Гордона:

$$-\lambda^2 - a(\pi n/L)^2 + f_u(u_0, u_0) + f_w(u_0, u_0)e^{\lambda\tau} = 0, \quad (25)$$

где $n = 1, 2, \dots, L$ – правая граница рассматриваемого отрезка $0 < x < L$. Стационарное решение

Таблица 3. Абсолютные погрешности численных решений задачи (17)–(20) при $a = 1, k = 0.5$ на интервале $0 \leq t \leq T = 50\tau$

Метод	M	$\tau = 0.05$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 1$
Рунге–Кутты 2-го порядка	10	2.1×10^{-6}	5.3×10^{-6}	4.9×10^{-5}	2.2×10^{-3}
	50	9.4×10^{-7}	1.8×10^{-6}	2.5×10^{-6}	6.6×10^{-5}
	100	1.7×10^{-6}	1.2×10^{-6}	1.0×10^{-6}	1.1×10^{-5}
	200	1.3×10^{-6}	1.2×10^{-6}	6.5×10^{-7}	1.4×10^{-6}
Рунге–Кутты 4-го порядка	10	1.2×10^{-6}	4.5×10^{-6}	4.8×10^{-5}	2.3×10^{-3}
	50	5.5×10^{-8}	2.8×10^{-7}	1.9×10^{-6}	7.9×10^{-5}
	100	1.5×10^{-8}	5.6×10^{-8}	4.8×10^{-7}	2.0×10^{-5}
	200	3.4×10^{-9}	1.2×10^{-8}	1.2×10^{-7}	4.9×10^{-6}
Гира	10	1.2×10^{-6}	4.5×10^{-6}	4.8×10^{-5}	2.3×10^{-3}
	50	8.4×10^{-8}	3.2×10^{-7}	1.9×10^{-6}	8.0×10^{-5}
	100	5.0×10^{-8}	9.4×10^{-8}	4.7×10^{-7}	2.1×10^{-5}
	200	6.3×10^{-8}	3.6×10^{-8}	1.3×10^{-7}	5.3×10^{-6}

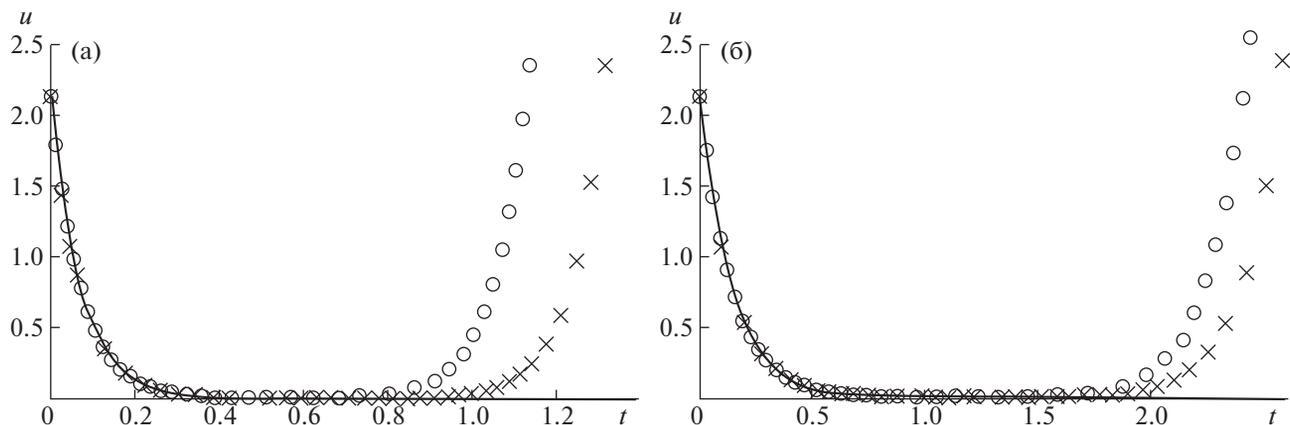


Рис. 5. Точные решения (сплошные линии) и численные решения (метод Рунге–Кутты второго порядка – кружочки, метод Гира – крестики) тестовой задачи (21)–(24) при $a = 1, k = 0.5, s = 0.2$ в точке $x = 0.5$ для $M = 200$ и двух времен запаздывания (а) $\tau = 0.05$, (б) $\tau = 0.1$.

будет неустойчиво в линейном приближении, если действительная часть хотя бы одного корня λ будет отрицательной. Учитывая, что в задаче (21)–(24) функция $f = bu[1 - s(u - kw)]$, параметры $L = 1, a > 0, \tau > 0, k > 0, b = (\ln k)^2/\tau^2 + a\pi^2/4$, и взяв $n = 1$, запишем условие существования отрицательного корня уравнения (25):

$$\tau < \frac{2|\ln k|}{\sqrt{3a\pi}}. \tag{26}$$

Подставляя в (26) используемые значения параметров $a = 1, k = 0.5$, получаем, что стационарное решение $u_0 = 0$ задачи (21)–(24) является неустойчивым в линейном приближении при $\tau < 0.254768$.

8. КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Сопоставление численных и точных решений рассмотренных тестовых задач типа Клейна–Гордона с запаздыванием показывает, что при

Таблица 4. Абсолютные погрешности численных решений задачи (21)–(24) при $a = 1, k = 0.5, s = 0.2$

Метод	M	0 ≤ t ≤ 10τ		0 ≤ t ≤ 50τ	
		τ = 0.05	τ = 0.1	τ = 0.5	τ = 1
Рунге–Кутты 2-го порядка	10	1.3 × 10 ⁻²	4.1 × 10 ⁻²	2.2 × 10 ⁻³	2.4 × 10 ⁻³
	50	9.4 × 10 ⁻⁴	1.8 × 10 ⁻³	8.8 × 10 ⁻⁵	9.6 × 10 ⁻⁵
	100	5.6 × 10 ⁻⁴	6.0 × 10 ⁻⁴	2.3 × 10 ⁻⁵	2.5 × 10 ⁻⁵
	200	4.8 × 10 ⁻⁴	2.9 × 10 ⁻⁴	6.8 × 10 ⁻⁶	7.2 × 10 ⁻⁶
Рунге–Кутты 4-го порядка	10	1.3 × 10 ⁻²	4.1 × 10 ⁻²	2.2 × 10 ⁻³	2.4 × 10 ⁻³
	50	5.4 × 10 ⁻⁴	1.6 × 10 ⁻³	8.6 × 10 ⁻⁵	9.4 × 10 ⁻⁵
	100	1.4 × 10 ⁻⁴	4.1 × 10 ⁻⁴	2.2 × 10 ⁻⁵	2.4 × 10 ⁻⁵
	200	3.4 × 10 ⁻⁵	1.0 × 10 ⁻⁴	5.4 × 10 ⁻⁶	5.9 × 10 ⁻⁶
Гира	10	1.3 × 10 ⁻²	4.1 × 10 ⁻²	2.2 × 10 ⁻³	2.4 × 10 ⁻³
	50	5.4 × 10 ⁻⁴	1.6 × 10 ⁻³	8.6 × 10 ⁻⁵	9.4 × 10 ⁻⁵
	100	1.4 × 10 ⁻⁴	4.1 × 10 ⁻⁴	2.2 × 10 ⁻⁵	2.4 × 10 ⁻⁵
	200	3.5 × 10 ⁻⁵	1.0 × 10 ⁻⁴	5.4 × 10 ⁻⁶	6.1 × 10 ⁻⁶

умеренных значениях τ (порядка единицы) метод прямых в комбинации со встроенными в программный пакет Mathematica методами Рунге–Кутты и Гира обеспечивает высокую точность полученных результатов. Увеличение числа ОДУ в аппроксимирующей системе уравнений приводит к увеличению точности расчетов. При достаточно малых временах запаздывания и значительном временном интервале интегрирования $0 \leq t \leq 50\tau$ возможны ситуации с прерыванием вычислений, которые могут быть обусловлены как неустойчивостью решения (или неустойчивостью его предельного стационарного состояния), так и качественными особенностями решений, связанными с быстро осциллирующими колебаниями или сингулярностями погранслоного типа. Тем не менее, в большинстве случаев адекватное численное решение задачи можно получить, если подходящим образом сократить рассматриваемый временной интервал вычислений.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит А.Д. Полянина за внимание к работе и полезные замечания.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310385-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брацун Д.А., Захаров А.П. К вопросу о численном расчете пространственно-распределенных динамических систем с запаздыванием по времени // Вестник Пермского универ. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2012. Вып. 4. № 12. С. 32–41.
2. Полянин А.Д., Журов А.И. Метод функциональных связей: Точные решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2013. Т. 2. № 4. С. 425–431.
3. Vocharov G.A., Rihan F.A. Numerical modelling in biosciences using delay differential equations // J. Comp. & Appl. Math. 2000. V. 125. P. 183–199.
4. Faria T., Trofimchuk S. Nonmonotone travelling waves in a single species reaction–diffusion equation with delay // J. Dif. Equations. 2006. V. 228. P. 357–376.
5. Herz A.V.M. et al. Viral dynamics in vivo: limitations on estimates of intracellular delay and virus decay // Proc. Nat. Acad. Sci. 1996. V. 93. P. 7247–7251.
6. Huang J., Zou X. Traveling wavefronts in diffusive and cooperative Lotka–Volterra system with delays // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 271. P. 455–466.
7. Kyrychko Y.N., Hogan S.J. On the use of delay equations in engineering applications // J. Vibration and Control. 2010. V. 16. № 7–8. P. 943–960.
8. Mittler J.E. et al. Influence of delayed viral production on viral dynamics in HIV-1 infected patients // Mathematical Biosciences. 1998. V. 152. P. 143–163.
9. Nelson P.W., Perelson A.S. Mathematical analysis of delay differential equation models of HIV-1 infection // Mathematical Biosciences. 2002. V. 179. P. 73–94.
10. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2014. V. 19. P. 409–416.
11. Shakeri F., Dehghan M. Solution of delay differential equations via a homotopy perturbation method // Mathematical and Computer Modelling. 2008. V. 48. P. 486–498.
12. Walter H.O. Topics in Delay Differential Equations // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 2014. V. 116. № 2. P. 87–114.
13. Wu J.H. Introduction to neural dynamics and signal transmission delay. Berlin: de Gruyter, 2002.
14. Wu J., Zou X. Travelling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay // J. Dynamics & Dif. Equations. 2001. V. 13. № 3. P. 651–687.
15. Lu J.G. Global exponential stability and periodicity of reaction–diffusion delayed recurrent neural networks with Dirichlet boundary conditions // Chaos, Solitons and Fractals. 2008. V. 35. P. 116–125.
16. Wu J., Campbell S. A., Bélair J. Time-Delayed Neural Networks: Stability and Oscillations // Encyclopedia of Computational Neuroscience. N.Y.: Springer, 2014. P. 1–8.
17. Wang L., Gao Y. Global exponential robust stability of reaction–diffusion interval neural networks with time-varying delays // Phys. Lett. A. 2006. V. 350. P. 342–348.
18. Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: математические модели и качественные особенности // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2017. Т. 6. № 1. С. 41–55.
19. Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: численные методы и тестовые задачи // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2017. Т. 6. № 2. С. 126–142.
20. Van der Houwen P.J., Sommeijer B.P., Baker C.T.H. On the stability of predictor-corrector methods for parabolic equations with delay // IMA J. Numerical Analysis. 1986. V. 6. P. 1–23.
21. Пименов В.Г. Численные методы решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Вестн. Удмурт. ун-та. матем. мех. компьют. науки. 2008. № 2. С. 113–116.
22. Rihan F.A. Computational methods for delay parabolic and time-fractional partial differential equations // Numerical Methods for Partial Differential Equations. 2010. V. 26. P. 1556–1571.
23. Wolfram Language Documentation [Электронный ресурс] // Delay Differential Equations. URL: <http://reference.wolfram.com/mathematica/tutorial/NDSolveDelayDifferentialEquations.html> (дата обращения 20.02.2019).
24. Maple Programming Help [Электронный ресурс] // Numeric Delay Differential Equation Examples. URL: <http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=examples/NumericDDEs> (дата обращения 20.02.2019).
25. MATLAB Documentation [Электронный ресурс] // Delay Differential Equations. URL: <http://www.>

- mathworks.com/help/matlab/delay-differential-equations.html (дата обращения 20.02.2019).
26. *Крайнов А.Ю., Миньков Л.Л.* Численные методы решения задач тепло- и массопереноса. Томск: STT, 2016. 92 с.
 27. Wolfram Language Documentation [Электронный ресурс] // The Numerical Method of Lines. URL: <http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDSolveMethodOfLines.html> (дата обращения 20.02.2019).
 28. Wolfram Language Documentation [Электронный ресурс] // NDSolve. URL: <http://reference.wolfram.com/language/ref/NDSolve.html> (дата обращения 20.02.2019).
 29. Wolfram Language Documentation [Электронный ресурс] // “ExplicitRungeKutta” Method for NDSolve. URL: <http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDSolveExplicitRungeKutta.html> (accessed: 20.02.2019).
 30. Wolfram Language Documentation [Электронный ресурс] // “ImplicitRungeKutta” Method for NDSolve. URL: <http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDSolveImplicitRungeKutta.html> (accessed: 20.02.2019).
 31. Wolfram Language Documentation [Электронный ресурс] // IDA Method for NDSolve. URL: <http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDSolveIDAMethod.html> (дата обращения 20.02.2019).
 32. Wolfram Language Documentation [Электронный ресурс] // Numerical Solution of Differential Equations. URL: <http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NumericalSolutionOfDifferentialEquations.html> (дата обращения 20.02.2019).
 33. *Hindmarsh A., Taylor A.* User Documentation for IDA: A Differential-Algebraic Equation Solver for Sequential and Parallel Computers. 1999.
 34. *Brown P.N., Hindmarsh A.C., Petzold L.R.* Using Krylov Methods in the Solution of Large-Scale Differential-Algebraic Systems // *SIAM J. Scientific Computing*. 1994. V. 15. P. 1467–1488.
 35. *Brown P.N., Hindmarsh A.C., Petzold L.R.* Consistent Initial Condition Calculation for Differential-Algebraic Systems // *SIAM J. Scientific Computing*. 1998. V. 19. P. 1495–1512.
 36. Wolfram Language Documentation [Электронный ресурс] // Norms in NDSolve. URL: <http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDSolveVectorNorm.html> (accessed: 20.02.2019).
 37. *Bellen A., Zennaro M.* Numerical Methods for Delay Differential Equations. Oxford: Oxford University Press, 2013.
 38. *Liu H., Sun G.* Implicit Runge–Kutta methods based on Lobatto quadrature formula // *Int. J. Computer Mathematics*. 2005. V. 82. № 1. P. 77–88.
 39. *Хайпер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.
 40. *Сорокин В.Г., Полянин А.Д.* Численное интегрирование нелинейных задач реакционно-диффузионного типа с запаздыванием методом прямых // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2018. Т. 7. № 3. С. 211–227.
 41. *Paul C.A.H.* Developing a delay differential equation solver // *Appl. Numer. Math.* 1992. V. 9. P. 403–414.
 42. *Baker C.T.H., Paul C.A.H.* Issues in the numerical solution of evolutionary delay differential equations // *Adv. Comput. Math.* 1995. V. 3. P. 171–196.
 43. *Shampine L.F., Thompson S.* Numerical Solutions of Delay Differential Equations. In: *Delay Differential Equations: Recent Advances and New Directions*. N.Y.: Springer, 2009. P. 245–271.
 44. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Non-linear instability and exact solutions to some delay reaction-diffusion systems // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 2014. V. 62. P. 33–40.
 45. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Вязьмин А.В.* Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения гиперболического типа с запаздыванием: точные решения, глобальная неустойчивость // *Мат. моделирование и числ. методы*. 2014. № 4. С. 53–73.
 46. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction-diffusion equations // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 2014. V. 59. P. 16–22.
 47. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions // *Appl. Math. Lett.* 2014. V. 37. P. 43–48.
 48. *Полянин А.Д., Журов А.И.* Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием и переменными коэффициентами переноса: решения с обобщенным и функциональным разделением переменных // *Мат. моделирование и числ. методы*. 2015. № 4 (8). С. 3–37.
 49. *Polyanin A.D.* Exact generalized separable solutions to nonlinear delay reaction-diffusion equations // *Theor. Found. Chem. Eng.* 2015. V. 49. № 1. P. 107–114.
 50. *Polyanin A.D.* Exact solutions to new classes of reaction-diffusion equations containing delay and arbitrary functions // *Theor. Found. Chem. Eng.* 2015. V. 49. № 2. P. 169–175.
 51. *Сорокин В.Г.* Точные решения некоторых нелинейных обыкновенных дифференциально-разностных уравнений // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2015. Т. 4. № 6. С. 493–500.
 52. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Nonlinear delay reaction-diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions // *Appl. Math. Lett.* 2015. V. 46. P. 38–43.
 53. *Сорокин В.Г.* Точные решения некоторых нелинейных уравнений и систем уравнений в частных производных с запаздыванием // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2016. Т. 5. № 3. С. 199–219.
 54. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 2013. V. 54. P. 115–126.
 55. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact solutions of nonlinear differential-difference equations of a viscous fluid with finite relaxation time // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 2013. V. 57. P. 116–122.

56. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Vyazmin A.V.* Exact solutions and qualitative features of nonlinear hyperbolic reaction-diffusion equations with delay // *Theor. Found. Chem. Eng.* 2015. V. 49. № 5. P. 622–635.
57. *Polyanin A.D.* Functional separable solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with variable coefficients // *Appl. Math. and Comput.* 2019. V. 347. P. 282–292.
58. *Polyanin A.D.* Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay and variable coefficients // *Appl. Math. Lett.* 2019. V. 90. P. 49–53.
59. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction–diffusion equations and more complex nonlinear equations // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2014. V. 19. № 3. P. 417–430.
60. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients // *Int. J. Non-Linear Mechanics.* 2014. V. 67. P. 267–277.
61. *Полянин А.Д., Журов А.И.* Некоторые методы построения точных решений нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздывающим аргументом и переменными коэффициентами переноса // *Вестник НИЯУ “МИФИ”.* 2015. Т. 4. № 2. С. 107–118.
62. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* The generating equations method: Constructing exact solutions to delay reaction–diffusion systems and other non-linear coupled delay PDEs // *Int. J. Non-Linear Mechan.* 2015. V. 71. P. 104–115.
63. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г.* Об устойчивости и неустойчивости решений реакционно-диффузионных и более сложных нелинейных уравнений с запаздыванием // *Вестник НИЯУ “МИФИ”.* 2018. Т. 7. № 5. С. 389–404.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta “MIFI”, 2019, vol. 8, no. 3, pp. 232–247

Numerical Integration of Nonlinear Klein–Gordon Type Equations with Delay by the Method of Lines

V. G. Sorokin[#]

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia

[#]*e-mail: vsesor@gmail.com*

Received March 2, 2019; revised March 2, 2019; accepted March 12, 2019

Abstract—Qualitative features of numerical integration of initial-boundary value problems for partial differential equations with delay by the method of lines have been described. The method of lines is based on the approximation of spatial derivatives by corresponding finite differences, which allows reducing the initial equation to an approximate system of ordinary differential equations with delay. The system is then solved by the Runge–Kutta methods of the second and fourth orders and by the BDF method, which are built into Wolfram Mathematica. Test problems for nonlinear Klein–Gordon type equations with a constant delay τ whose solutions are expressed in terms of elementary functions have been formulated. The extensive comparison of numerical and exact solutions of the test problems on a significant time interval from 0 to 50τ has been made. It has been found that the numerical method under consideration with moderate delay times ensures high accuracy of the results obtained.

Keywords: nonlinear hyperbolic equations, Klein–Gordon type equations, differential-difference equations, equations with delay, numerical integration, method of lines

DOI: 10.1134/S2304487X19030131

REFERENCES

1. Bratsun D.A., Zakharov A.P., K voprosu o chislenom raschete prostranstvenno-raspredeleennyh dinamicheskikh sistem s zapazdyvaniem po vremeni (On the numerical calculation of spatially extended dynamical systems with time delay), *Vestnik Permskogo Universiteta. Ser. Matematika, Mekhanika, Informatika*, 2012, vol. 4, no. 12, pp. 32–41 (in Russian).
2. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Metod funktsional'nykh svyazei: Tochnye resheniya reaktsionno-diffuzionnykh uravnenii s zapazdyvaniem (Method of functional relations: Exact solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay), *Vestnik NIYaU MIFI*, 2013, vol. 2, no. 4, pp. 425–431 (in Russian).
3. Bocharov G.A., Rihan F.A. Numerical modelling in biosciences using delay differential equations, *J. Comp. Appl. Math.*, 2000, vol. 125, pp. 183–199.
4. Faria T., Trofimchuk S., Nonmonotone travelling waves in a single species reaction–diffusion equation with delay, *J. Diff. Equations*, 2006, vol. 228, pp. 357–376.
5. Herz A.V.M. et al., Viral dynamics in vivo: limitations on estimates of intracellular delay and virus decay, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1996, vol. 93, pp. 7247–7251.

6. Huang J., Zou X., Traveling wavefronts in diffusive and cooperative Lotka–Volterra system with delays, *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, vol. 271, pp. 455–466.
7. Kyrychko Y.N., Hogan S.J., On the use of delay equations in engineering applications, *J. Vibration and Control*, 2010, vol. 16, no. 7–8, pp. 943–960.
8. Mittler J.E. et al., Influence of delayed viral production on viral dynamics in HIV-1 infected patients, *Math. Biosci.*, 1998, vol. 152., pp. 143–163.
9. Nelson P.W., Perelson A.S., Mathematical analysis of delay differential equation models of HIV-1 infection, *Math. Biosci.*, 2002, vol. 179, pp. 73–94.
10. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other non-linear partial functional-differential equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, vol. 19, pp. 409–416.
11. Shakeri F., Dehghan M., Solution of delay differential equations via a homotopy perturbation method. *Mathematical and Computer Modelling*, 2008, vol. 48, pp. 486–498.
12. Walter H.O., Topics in Delay Differential Equations, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 2014, vol. 116, no. 2, pp. 87–114.
13. Wu J.H. *Introduction to Neural Dynamics and Signal Transmission Delay*, Berlin: De Gruyter, 2002.
14. Wu J., Zou X., Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay, *J. Dynamics Dif. Equations*, 2001, vol. 13. no. 3, pp. 651–687.
15. Lu J.G., Global exponential stability and periodicity of reaction–diffusion delayed recurrent neural networks with Dirichlet boundary conditions. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, vol. 35, pp. 116–125.
16. Wu J., Campbell S.A., Bélair J., Time-Delayed Neural Networks: Stability and Oscillations, In: *Encyclopedia of Computational Neuroscience*, N.Y.: Springer, 2014, pp. 1–8.
17. Wang L., Gao Y., Global exponential robust stability of reaction–diffusion interval neural networks with time-varying delays, *Phys. Lett. A*, 2006, vol. 350, pp. 342–348.
18. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Reakcionno-diffuzionnye uravneniya s zapazdyvaniem: Matematicheskie modeli i kachestvennye osobennosti (Reaction-diffusion equations with delay: Mathematical models and qualitative features), *Vestnik NIYaU MIFI*, 2017, vol. 6, no. 1, pp. 41–55 (in Russian).
19. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Reakcionno-diffuzionnye uravneniya s zapazdyvaniem: Chislennyye metody i testovyye zadachi (Reaction-diffusion equations with delay: Numerical methods and test problems), *Vestnik NIYaU MIFI*, 2017, v. 6, no. 2, pp. 126–142 (in Russian).
20. Van der Houwen P.J., Sommeijer B.P., Baker C.T.H., On the stability of predictor-corrector methods for parabolic equations with delay, *IMA J. Numerical Analysis*, 1986, vol. 6, pp. 1–23.
21. Pimenov V.G., Chislennyye metody resheniya uravneniya teploprovodnosti s zapazdyvaniem (Numerical methods of solution for heat equation with delay), *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Ser. Matematika, Mekhanika, Kompjuternyye Nauki*, 2008, no. 2, pp. 113–116.
22. Rihan F.A., Computational methods for delay parabolic and time-fractional partial differential equations, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2010, vol. 26, pp. 1556–1571.
23. Wolfram Language Documentation [electronic resource] // Delay Differential Equations. URL: <http://reference.wolfram.com/mathematica/tutorial/NDSolveDelayDifferentialEquations.html> (date of the application 20.02.2019).
24. Maple Programming Help [electronic resource] // Numeric Delay Differential Equation Examples. URL: <http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=examples/NumericDDEs> (date of the application 20.02.2019).
25. MATLAB Documentation [electronic resource] // Delay Differential Equations. URL: <http://www.mathworks.com/help/matlab/delay-differential-equations.html> (date of the application 20.02.2019).
26. Krainov A.Yu., Min'kov L.L., *Chislennyye metody resheniya zadach teplo- i massoperenosa* (Numerical methods of solving heat-mass transfer problems), Tomsk: STT, 2016, 92 p. (in Russian).
27. Wolfram Language Documentation [electronic resource] // The Numerical Method of Lines. URL: <http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDSolveMethodOfLines.html> (date of the application 20.02.2019).
28. Wolfram Language Documentation [electronic resource] // NDSolve. URL: <http://reference.wolfram.com/language/ref/NDSolve.html> (date of the application 20.02.2019).
29. Wolfram Language Documentation [electronic resource] // “ExplicitRungeKutta” Method for NDSolve. URL: <http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDSolveExplicitRungeKutta.html> (date of the application 20.02.2019).
30. Wolfram Language Documentation [electronic resource] // “ImplicitRungeKutta” Method for NDSolve. URL: <http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDSolveImplicitRungeKutta.html> (date of the application 20.02.2019).
31. Wolfram Language Documentation [electronic resource] // IDA Method for NDSolve. URL: <http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDSolveIDAMethod.html> (date of the application 20.02.2019).
32. Wolfram Language Documentation [electronic resource] // Numerical Solution of Differential Equations. URL: <http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NumericalSolutionOfDifferentialEquations.html> (date of the application 20.02.2019).
33. Hindmarsh A., Taylor A., *User Documentation for IDA: A Differential-Algebraic Equation Solver for Sequential and Parallel Computers*, 1999.
34. Brown P.N., Hindmarsh A.C., Petzold L.R., Using Krylov Methods in the Solution of Large-Scale Differential-Algebraic Systems, *SIAM J. Scientific Computing*, 1994, vol. 15, pp. 1467–1488.
35. Brown P.N., Hindmarsh A.C., Petzold L.R. Consistent Initial Condition Calculation for Differential-Algebraic Systems, *SIAM J. Scientific Computing*, 1998, vol. 19, pp. 1495–1512.
36. Wolfram Language Documentation [electronic resource] // Norms in NDSolve. URL: <http://reference.wolfram.com/language/ref/Norms.html> (date of the application 20.02.2019).

- wolfram.com/language/tutorial/NDSolveVectorNorm.html (date of the application 20.02.2019).
37. Bellen A., Zennaro M., *Numerical Methods for Delay Differential Equations*, Oxford: Oxford University Press, 2013.
 38. Liu H., Sun G., Implicit Runge–Kutta methods based on Lobatto quadrature formula, *Int. J. Computer Mathematics*, 2005, vol. 82, no. 1, pp. 77–88.
 39. Hairer E., Wanner G., *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Berlin: Springer, 1996.
 40. Sorokin V.G., Polyanin A.D., Chislennoe integrirovanie nelinejnykh zadach reakcionno-diffuzionnogo tipa s zapazdyvaniem metodom pryamykh (Numerical Integration of Nonlinear Reaction–Diffusion Problems with Delay by the Method of Lines), *Vestnik NIYaU MIFI*, 2018, vol. 7, no 3, pp. 211–227 (in Russian).
 41. Paul C.A.H., Developing a delay differential equation solver, *Appl. Numer. Math.*, 1992, vol. 9, pp. 403–414.
 42. Baker C.T.H., Paul C.A.H., Issues in the numerical solution of evolutionary delay differential equations, *Adv. Comput. Math.*, 1995, vol. 3, pp. 171–196.
 43. Shampine L.F., Thompson S., Numerical Solutions of Delay Differential Equations, In: *Delay Differential Equations: Recent Advances and New Directions*, N.Y.: Springer, 2009, pp. 245–271.
 44. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Non-linear instability and exact solutions to some delay reaction-diffusion systems, *Int. J. Non-Linear Mechan.*, 2014, vol. 62, pp. 33–40.
 45. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Vyazmin A.V., Nelinejnye reakcionno-diffuzionnye uravnenija giperbolicheskogo tipa s zapazdyvaniem: tochnye reshenija, global'naja neustojchivost' (Nonlinear delay reaction-diffusion equations of hyperbolic type: Exact solutions and global instability), *Mat. modelir. i chisl. metody*, 2014, no. 4, pp. 53–73 (in Russian).
 46. Polyanin A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction-diffusion equations, *Int. J. Non-Linear Mechan.*, 2014, vol. 59, pp. 16–22.
 47. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions, *Appl. Math. Lett.*, 2014, vol. 37, pp. 43–48.
 48. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Nelinejnye reakcionno-diffuzionnye uravnenija s zapazdyvaniem i peremennymi koeffficientami perenosa: reshenija s obobshhennym i funkcional'nym razdeleniem peremennykh (Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: generalized and functional separable solutions), *Mat. modelir. i chisl. metody*, 2015, vol. 8, pp. 3–37 (in Russian).
 49. Polyanin A.D., Exact generalized separable solutions to nonlinear delay reaction-diffusion equations, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2015, vol. 49, no. 1, pp. 107–114.
 50. Polyanin A.D., Exact solutions to new classes of reaction-diffusion equations containing delay and arbitrary functions, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2015, vol. 49, no. 2, pp. 169–175.
 51. Sorokin V.G., Tochnye reshenija nekotorykh nelinejnykh obyknovennykh differencial'no-raznostnykh uravnenij (Exact solutions of some nonlinear ordinary differential-difference equations), *Vestnik NIYaU MIFI*, 2015, vol. 4, no. 6, pp. 493–500 (in Russian).
 52. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Nonlinear delay reaction-diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions, *Appl. Math. Lett.*, 2015, vol. 46, pp. 38–43.
 53. Sorokin V.G., Tochnye reshenija nekotorykh nelinejnykh uravnenij i sistem uravnenij v chastnykh proizvodnykh s zapazdyvaniem (Exact solutions of some nonlinear partial differential equations with delay and systems of such equations), *Vestnik NIYaU MIFI*, 2016, vol. 5, no. 3, pp. 199–219 (in Russian).
 54. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time, *Int. J. Non-Linear Mechan.*, 2013, vol. 54, pp. 115–126.
 55. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Exact solutions of nonlinear differential-difference equations of a viscous fluid with finite relaxation time, *Int. J. Non-Linear Mechan.*, 2013, vol. 57, pp. 116–122.
 56. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Vyazmin A.V., Exact solutions and qualitative features of nonlinear hyperbolic reaction-diffusion equations with delay, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2015, vol. 49, no. 5, pp. 622–635.
 57. Polyanin A.D., Functional separable solutions of nonlinear reaction-diffusion equations with variable coefficients, *Appl. Mathematics and Computation*, 2019, vol. 347, pp. 282–292.
 58. Polyanin A.D., Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction-diffusion equations with delay and variable coefficients, *Appl. Math. Lett.*, 2019, vol. 90, pp. 49–53.
 59. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 417–430.
 60. Polyanin A.D., Zhurov A.I., The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients, *Int. J. Non-Linear Mechan.*, 2014, vol. 67, pp. 267–277.
 61. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Nekotorye metody postroenija tochnykh reshenij nelinejnykh reakcionno-diffuzionnykh uravnenij s zapazdyvajushhim argumentom i peremennymi koeffficientami perenosa (Some methods for the construction of exact solutions of nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients), *Vestnik NIYaU MIFI*, 2015, vol. 4, no. 2, pp. 107–118 (in Russian).
 62. Polyanin A.D., Zhurov A.I., The generating equations method: Constructing exact solutions to delay reaction-diffusion systems and other non-linear coupled delay PDEs, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2015, vol. 71, pp. 104–115.
 63. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Ob ustojchivosti i neustojchivosti reshenij reakcionno-diffuzionnykh i bolee slozhnykh nelinejnykh uravnenij s zapazdyvaniem (On the Stability and Instability of Solutions of Reaction–Diffusion and More Complex Nonlinear Equations with Delay), *Vestnik NIYaU MIFI*, 2018, vol. 7, no. 5, pp. 389–404 (in Russian).

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9 + 532.5

БАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ
ДВУМЕРНОЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ
В ЛАГРАНЖЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

© 2019 г. А. В. Аксенов^{a,b,c,*}, К. П. Дружков^{a,b,d,**}

^a Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия

^b Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 125047, Россия

^c Научно-исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия

^d Московский физико-технический институт (государственный университет),
г. Долгопрудный, Московская обл., 141701, Россия

*e-mail: aksenov@mech.math.msu.su

**e-mail: Konstantin.Druzhkov@gmail.com

Поступила в редакцию 06.03.2019 г.

После доработки 06.03.2019 г.

Принята к публикации 26.03.2019 г.

В статье рассматриваются системы уравнений двумерной мелкой воды над неровным дном как в эйлеровых, так и в лагранжевых переменных. Введена в рассмотрение промежуточная система уравнений. Ее решения одновременно являются как решениями системы уравнений двумерной мелкой воды в эйлеровых переменных, так и решениями в неявном виде системы уравнений двумерной мелкой воды, записанной в лагранжевых переменных. Найдены все базовые гидродинамические законы сохранения промежуточной системы уравнений. Базовые гидродинамические законы сохранения промежуточной системы уравнений были получены без использования симметрий. Получена связь между законами сохранения промежуточной системы уравнений и системой уравнений двумерной мелкой воды, записанной в лагранжевых переменных. Базовые гидродинамические законы сохранения промежуточной системы уравнений были использованы для построения базовых законов сохранения первого порядка системы уравнений двумерной мелкой воды в лагранжевых переменных.

Ключевые слова: мелкая вода, эйлеровы и лагранжевы переменные, законы сохранения, накрывающая система

DOI: 10.1134/S2304487X19030039

ВВЕДЕНИЕ

Существуют различные подходы для построения законов сохранения уравнений математической физики [1–6]. Наиболее широко известен способ построения законов сохранения на основании теоремы Нетер с использованием вариационных симметрий [1].

В работах [7, 8] были получены гидродинамические законы сохранения системы уравнений одномерной мелкой воды над неровным дном в эйлеровых переменных.

В настоящей работе получены базовые законы сохранения первого порядка уравнения мелкой воды в лагранжевых переменных, справедливых для всех профилей дна, без использования симметрий.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В работах [7, 8] была рассмотрена система уравнений одномерной мелкой воды над неровным дном и были найдены все гидродинамические законы сохранения.

В безразмерных переменных система уравнений двумерной мелкой воды над неровным дном имеет следующий вид [9]:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + \eta_x &= 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + \eta_y &= 0, \\ \eta_t + [u(\eta + h)]_x + [v(\eta + h)]_y &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $h = h(x, y)$, $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$ – компоненты средней по глубине горизонтальной скорости, $\eta = \eta(x, y, t)$ – отклонение свободной

поверхности, $\eta + h \geq 0$. Профиль дна имеет вид $z = -h(x, y)$.

Запишем систему уравнений (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y &= -\rho_x + h_x, \\ v_t + uv_x + vv_y &= -\rho_y + h_y, \\ \rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\rho = \eta + h$, $\rho \geq 0$.

Замечание 1. Система уравнений (2) аналогична системе уравнений двумерной газовой динамики [10, 11] для политропного газа с $\gamma = 2$.

Введем новые переменные $a = a(x, y, t)$, $b = b(x, y, t)$ и рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y &= -\rho_x + h_x, \\ v_t + uv_x + vv_y &= -\rho_y + h_y, \\ a_t + ua_x + va_y &= 0, \\ b_t + ub_x + vb_y &= 0, \\ a_x b_y - a_y b_x &= \rho. \end{aligned} \tag{3}$$

Третье и четвертое уравнения системы уравнений (3) означают, что введенные переменные a и b являются лагранжевыми.

Последние три уравнения системы уравнений (3) можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} -a_t b_y + b_t a_y &= \rho u, \\ a_t b_x - b_t a_x &= \rho v, \\ a_x b_y - a_y b_x &= \rho, \end{aligned}$$

откуда следует справедливость третьего уравнения системы уравнений (2).

Система уравнений (3) является промежуточной системой уравнений между системами уравнений двумерной мелкой воды, записанных в эйлеровых и лагранжевых переменных. Ее решения одновременно являются как решениями системы уравнений (2), так и решениями в неявном виде системы уравнений двумерной мелкой воды, записанной в лагранжевых переменных.

Замечание 2. Закон сохранения массы (третье уравнение системы уравнений (2)) является тривиальным законом сохранения для промежуточной системы уравнений (3).

Запишем в следующем виде систему уравнений двумерной мелкой воды (2) в лагранжевых переменных:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{\tilde{t}\tilde{t}} &= -\frac{\tilde{y}_{\tilde{b}}\tilde{\rho}_{\tilde{a}} - \tilde{y}_{\tilde{a}}\tilde{\rho}_{\tilde{b}}}{\tilde{x}_{\tilde{a}}\tilde{y}_{\tilde{b}} - \tilde{x}_{\tilde{b}}\tilde{y}_{\tilde{a}}} + h_{\tilde{x}}, \\ \tilde{y}_{\tilde{t}\tilde{t}} &= -\frac{-\tilde{x}_{\tilde{b}}\tilde{\rho}_{\tilde{a}} + \tilde{x}_{\tilde{a}}\tilde{\rho}_{\tilde{b}}}{\tilde{x}_{\tilde{a}}\tilde{y}_{\tilde{b}} - \tilde{x}_{\tilde{b}}\tilde{y}_{\tilde{a}}} + h_{\tilde{y}}, \\ \tilde{\rho}(\tilde{x}_{\tilde{a}}\tilde{y}_{\tilde{b}} - \tilde{x}_{\tilde{b}}\tilde{y}_{\tilde{a}}) &= 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Справедливо следующее предложение.

Предложение 1. Взаимно-однозначное соответствие между решениями систем уравнений (3) и (4) дается соотношениями

$$\begin{aligned} u &= \tilde{x}_{\tilde{t}}, \quad v = \tilde{y}_{\tilde{t}}, \quad \rho = \tilde{\rho}, \\ x &= \tilde{x} \quad y = \tilde{y}, \quad t = \tilde{t}, \\ a &= \tilde{a}, \quad b = \tilde{b}. \end{aligned} \tag{5}$$

Замечание 3. Промежуточная система уравнений (3) является накрывающей системой уравнений [3] для системы уравнений (2).

Ниже, для сокращения записи, в системе уравнений (4) не будет использоваться знак тильда.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ЗАКОНАМИ СОХРАНЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И ЗАКОНАМИ СОХРАНЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ В ЭЙЛЕРОВЫХ И ЛАГРАНЖЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Под законами сохранения промежуточной системы уравнений (3) будем понимать тройки функций (P, Q, R) , для которых на решениях системы уравнений (3) выполнено соотношение

$$D_x(P) + D_y(Q) + D_t(R) = 0. \tag{6}$$

Здесь P, Q, R – гладкие функции от независимых и зависимых переменных и их производных;

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + a_x \frac{\partial}{\partial a} + b_x \frac{\partial}{\partial b} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + v_x \frac{\partial}{\partial v} + \rho_x \frac{\partial}{\partial \rho} + \dots,$$

$$D_y = \frac{\partial}{\partial y} + a_y \frac{\partial}{\partial a} + b_y \frac{\partial}{\partial b} + u_y \frac{\partial}{\partial u} + v_y \frac{\partial}{\partial v} + \rho_y \frac{\partial}{\partial \rho} + \dots,$$

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + a_t \frac{\partial}{\partial a} + b_t \frac{\partial}{\partial b} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + v_t \frac{\partial}{\partial v} + \rho_t \frac{\partial}{\partial \rho} + \dots$$

– операторы полного дифференцирования в переменных x, y, t соответственно. Порядком закона сохранения будем называть максимальный порядок производных, входящих в функции P, Q, R . Законы сохранения нулевого порядка будем называть гидродинамическими. Аналогично определяются законы сохранения $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R})$ системы уравнений (4), для которых на решениях системы уравнений (4) выполнено соотношение

$$D_a(\tilde{P}) + D_b(\tilde{Q}) + D_t(\tilde{R}) = 0.$$

Здесь $\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}$ – гладкие функции от соответствующих независимых и зависимых переменных и их производных;

$$\begin{aligned} \tilde{D}_a &= \frac{\partial}{\partial a} + x_a \frac{\partial}{\partial x} + y_a \frac{\partial}{\partial y} + \rho_a \frac{\partial}{\partial \rho} + \dots, \\ \tilde{D}_b &= \frac{\partial}{\partial b} + x_b \frac{\partial}{\partial x} + y_b \frac{\partial}{\partial y} + \rho_b \frac{\partial}{\partial \rho} + \dots, \\ \tilde{D}_t &= \frac{\partial}{\partial t} + x_t \frac{\partial}{\partial x} + y_t \frac{\partial}{\partial y} + \rho_t \frac{\partial}{\partial \rho} + \dots \end{aligned}$$

– операторы полного дифференцирования в переменных a, b, t соответственно. Тривиальными законами сохранения будем называть законы сохранения двух типов (или их комбинации) [2]. Тривиальным законам первого типа соответствуют тройки функций, обращающиеся в нуль на решениях системы уравнений, а тривиальным законам второго типа соответствуют тройки функций, для которых соотношение (6) выполнено тождественно.

Предложение 2. Гидродинамический закон сохранения промежуточной системы уравнений (3) с функциями $P = P(a, b, x, y, t, u, v, \rho)$, $Q = P(a, b, x, y, t, u, v, \rho)$, $R = P(a, b, x, y, t, u, v, \rho)$ определяет закон сохранения первого порядка системы уравнений (4) с функциями $\tilde{P} = y_b P - x_b Q + (x_b y_t - x_t y_b) R$, $\tilde{Q} = -y_a P + x_a Q - (x_a y_t - x_t y_a) R$, $\tilde{R} = (x_a y_b - x_b y_a) R$ с учетом соотношений (5). Верно и обратное.

Доказательство. Обозначим ограничения операторов полного дифференцирования \tilde{D}_a, \tilde{D}_b и \tilde{D}_t на систему уравнений (4) как \hat{D}_a, \hat{D}_b и \hat{D}_t . Ограничения операторов D_x, D_y и D_t на промежуточную систему уравнений (3) обозначим как \bar{D}_x, \bar{D}_y и \bar{D}_t . В силу соотношений (5) эти операторы связаны следующим образом

$$\begin{aligned} \bar{D}_x &= \frac{y_b}{x_a y_b - x_b y_a} \hat{D}_a - \frac{y_a}{x_a y_b - x_b y_a} \hat{D}_b, \\ \bar{D}_y &= -\frac{x_b}{x_a y_b - x_b y_a} \hat{D}_a + \frac{x_a}{x_a y_b - x_b y_a} \hat{D}_b, \\ \bar{D}_t &= \frac{x_b y_t - x_t y_b}{x_a y_b - x_b y_a} \hat{D}_a + \frac{x_t y_a - x_a y_t}{x_a y_b - x_b y_a} \hat{D}_b + \hat{D}_t. \end{aligned}$$

Тогда выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \bar{D}_x(P) + \bar{D}_y(Q) + \bar{D}_t(R) &= \frac{y_b}{x_a y_b - x_b y_a} \hat{D}_a(P) - \\ &- \frac{y_a}{x_a y_b - x_b y_a} \hat{D}_b(P) - \frac{x_b}{x_a y_b - x_b y_a} \hat{D}_a(Q) + \\ &+ \frac{x_a}{x_a y_b - x_b y_a} \hat{D}_b(Q) + \frac{x_b y_t - x_t y_b}{x_a y_b - x_b y_a} \hat{D}_a(R) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{x_t y_a - x_a y_t}{x_a y_b - x_b y_a} \hat{D}_b(R) + \hat{D}_t(R) = \\ &= \frac{1}{x_a y_b - x_b y_a} (\hat{D}_a(y_b P - x_b Q + (x_b y_t - x_t y_b) R) + \\ &+ \hat{D}_b(-y_a P + x_a Q - (x_a y_t - x_t y_a) R) + \\ &+ \hat{D}_t((x_a y_b - x_b y_a) R)), \end{aligned}$$

откуда следует справедливость доказываемого предложения.

Справедливо также предложение

Предложение 3. Если функции P, Q и R в некотором законе сохранения промежуточной системы уравнений (3) не зависят от переменных a и b , то они определяют закон сохранения системы уравнений (2). Все законы сохранения системы уравнений (2), кроме закона сохранения

$$D_t(\rho) + D_x(\rho u) + D_y(\rho v) = 0,$$

получаются из законов сохранения промежуточной системы уравнений (3).

Отметим, что нахождение гидродинамических законов сохранения промежуточной системы уравнений (3) проще, чем нахождение законов сохранения первого порядка уравнения (4).

БАЗОВЫЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Соотношение (6) на решениях промежуточной системы уравнений (3) принимает вид

$$\begin{aligned} &(P_u - u R_u - \rho R_\rho) u_x + (Q_u - v R_u) u_y + \\ &+ (P_v - u R_v) v_x + (Q_v - v R_v - \rho R_\rho) v_y + \\ &+ (P_\rho - R_u - u R_\rho) \rho_x + (Q_\rho - R_v - v R_\rho) \rho_y + \\ &+ (P_a - u R_a) a_x + (Q_a - v R_a) a_y + \\ &+ (P_b - u R_b) b_x + \frac{b_x a_y + \rho}{a_x} (Q_b - v R_b) + \\ &+ h_x R_u + h_y R_v + P_x + Q_y + R_t = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая к нулю коэффициенты при производных, получим следующую переопределенную систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} P_u - u R_u - \rho R_\rho &= 0, \\ Q_u - v R_u &= 0, \\ P_v - u R_v &= 0, \\ Q_v - v R_v - \rho R_\rho &= 0, \\ P_\rho - R_u - u R_\rho &= 0, \\ Q_\rho - R_v - v R_\rho &= 0, \\ P_a - u R_a &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} Q_a - vR_a &= 0, \\ P_b - uR_b &= 0, \\ Q_b - vR_b &= 0, \\ h_x R_u + h_y R_v + P_x + Q_y + R_t &= 0. \end{aligned}$$

Переопределенная система уравнений (7) была исследована на совместность.

Найдем базовые гидродинамические законы сохранения системы уравнений (3), зависящие от функции $h = h(x, y)$ и ее производных, и справедливые при любом профиле дна.

Предложение 4. *Промежуточная система уравнений (3) обладает одним базовым гидродинамическим законом сохранения*

$$\begin{aligned} P_1 &= \rho \left(\frac{u^2 + v^2}{2} + \rho - h \right), \\ Q_1 &= \nu \rho \left(\frac{u^2 + v^2}{2} + \rho - h \right), \\ R_1 &= \rho \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{(\rho - h)^2}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

БАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ В ЛАГРАНЖЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Используя предложение 2, найдем функции \tilde{P} , \tilde{Q} , \tilde{R} , соответствующие базовому закону сохранения (8).

Предложение 5. *Система уравнений (4) обладает следующим базовым законом сохранения первого порядка*

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1 &= (x_b y_t - x_t y_b) \frac{h^2 - \rho^2}{2}, \\ \tilde{Q}_1 &= -(x_a y_t - x_t y_a) \frac{h^2 - \rho^2}{2}, \\ \tilde{R}_1 &= (x_a y_b - x_b y_a) \frac{\rho(x_t^2 + y_t^2) + (\rho - h)^2}{2}. \end{aligned}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе была введена в рассмотрение промежуточная система уравнений (3). Базовые гидродинамические законы сохранения промежуточной системы уравнений были получены без использования симметрий. Полученные законы сохранения были использованы для нахождения базовых законов сохранения первого порядка системы уравнений мелкой воды в лагранжевых переменных. Было показано, что с использованием

законов сохранения промежуточной системы уравнений могут быть получены гидродинамические законы сохранения системы уравнений одномерной мелкой воды в эйлеровых переменных.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 18-01-00890 и Фонда развития теоретической физики и математики "БАЗИС" (стипендиат К.П. Дружков).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Noether E.* Invariante Variationsprobleme // *Nachr. D. König. Gesellsch. D. Wissen. Zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse.* 1918. P. 235–257 (English translation: *Transport Theory and Stat. Phys.* 1971. V. 1. № 3. P. 186–207).
2. *Олвер П.* Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 639 с.
3. Симметрия и законы сохранения уравнений математической физики. Под ред. Виноградова А.М., Красильщика И.С. М.: Факториал, 1997. 464 с.
4. *Bluman G.W., Cheviakov A.F., Anco S.C.* Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations, Springer. 2010. 398 pp.
5. *Шмыглевский Ю.Д.* Аналитические исследования динамики жидкости и газа. М.: Эдиториал УРСС. 1999. 232 с.
6. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton. 2012. 1840 p.
7. *Аксенов А.В., Дружков К.П.* Законы сохранения, симметрии и точные решения системы уравнений мелкой воды над неровным дном // *Вестник НИЯУ МИФИ.* 2016. Т. 5. № 1. С. 38–46.
8. *Aksenov A.V., Druzhkov K.P.* Conservation laws and symmetries of the shallow water system above rough bottom // *Journal of Physics: Conference Series.* 2016. V. 722. P. 1–7.
9. *Стокер Дж.* Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Государственное издательство иностранной литературы. 1959. 620 с.
10. *Курант Р., Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Изд-во ИЛ. 1950. 426 с.
11. *Черный Г.Г.* Газовая динамика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1988. 424 с.

Basic Conservation Laws of the System of Equations of Two-Dimensional Shallow Water over an Uneven Bottom in the Lagrangian Variables

A. V. Aksenov^{a,b,c,#} and K. P. Druzhkov^{a,b,d,##}

^a Moscow State University, Moscow, 119991 Russia

^b Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 125047 Russia

^c National Research Nuclear University MPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

^d Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Dolgoprudnyi, Moscow region, 141701 Russia

[#]e-mail: aksenov@mech.math.msu.su

^{##}e-mail: Konstantin.Druzhkov@gmail.com

Received March 6, 2019; revised March 6, 2019; accepted March 26, 2019

Abstract—Systems of equations of two-dimensional shallow water over an uneven bottom have been considered in both the Eulerian and Lagrangian variables. An intermediate system of equations has been introduced. Its solutions are simultaneously solutions of the system of equations of two-dimensional shallow water in the Eulerian variables and implicit solutions of the system of equations of two-dimensional shallow water in the Lagrangian variables. All basic hydrodynamic conservation laws of the intermediate system of equations have been found without using symmetries. A relationship has been obtained between the conservation laws of the intermediate system of equations and the system of equations of two-dimensional shallow water in the Lagrangian variables. The basic hydrodynamic conservation laws of the intermediate system of equations have been used to construct the basic conservation laws of the first order for the system of equations of two-dimensional shallow water in the Lagrangian variables.

Keywords: shallow water, Eulerian and Lagrangian variables, conservation laws, covering system

DOI: 10.1134/S2304487X19030039

REFERENCES

- Noether E. Invariante Variationsprobleme // *Nachr. D. Königl. Gesellsch. D. Wissen. Zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse.*, 1918, p. 235–257 (English translation: *Transport Theory and Stat. Phys.*, 1971, v. 1, 3, p. 186–207).
- Olver P.J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, 2nd ed., Springer, 1993, 513 pp.
- Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics*, Editors: A.M. Vinogradov and I.S. Krasil'shchik, American Mathematical Society, 1999, v. 182, 333 pp.
- Bluman G.W., Cheviakov A.F., Anco S.C. *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations*, Springer, 2010, 398 pp.
- Shmyglevski Yu.D., *Analytical Study of Gas Dynamics and Fluid*, Editorial URSS, Moscow, 1999, 232 pp. (in Russian).
- Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, 2012, 1840 pp.
- Aksenov A.V., Druzhkov K.P. Zakony sokhraneniya, simmetrii i tochnye resheniya sistemy uravnenij melkoj vody nad nerovnym dnom [Conservation Laws, Symmetries, and Exact Solutions of the System of Equations of Shallow Water over an Irregular Bottom] // *Vestnik Nacional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta MIFI*, 2016, v. 5, 1, p. 38–46.
- Aksenov A.V., Druzhkov K.P. Conservation laws and symmetries of the shallow water system above rough bottom // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2016, v. 722, p. 1–7.
- Stoker J.J. *Water Waves. The Mathematical Theory With Applications*. Interscience Publishers, Inc., New York, 1957, 609 pp.
- Courant R., Friedrichs K.O. *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience Publ, New York, 1948, 464 pp.
- Cherny G.G. *Gas dynamics*, Nauka, Moscow, 1988, 424 pp. (in Russian).

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.951

ОБ АСИМПТОТИКЕ ПРОСТОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ
СТЕКЛОВА, ВОЗМУЩЕННОГО НА МАЛОМ УЧАСТКЕ ГРАНИЦЫ
ОДНОРОДНЫМ УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ

© 2019 г. Ю. О. Королева^{1,*}, Т. П. Чечкина^{2,**}

¹ *Российский государственный университет нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина, кафедра высшей математики, Москва, 119991, Россия*

² *Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, кафедра высшей математики, Москва, 115409, Россия*

*e-mail: koroleva.y@gubkin.ru

**e-mail: chechkina@mail.ru

Поступила в редакцию 22.10.2018 г.

После доработки 21.11.2018 г.

Принята к публикации 04.12.2018 г.

В настоящей работе мы рассматриваем спектральную задачу типа Стеклова для оператора Лапласа и соответствующую ей краевую задачу в ограниченной области с гладкой границей. Предполагается, что на малой части границы выставлено однородное условие Дирихле, а на всей остальной части границы – условие Стеклова (или соответствующее условие Неймана). Известно, что задача Стеклова, возмущенная на малом участке границы условием Дирихле, имеет счетный набор конечнократных собственных значений. При этом предельной задачей является задача для оператора Лапласа с условием Стеклова на всей границе. Также известно, что задача для оператора Лапласа с условием Стеклова на всей границе имеет счетный набор конечнократных собственных значений. В работе строится двучленная асимптотика собственных значений и соответствующих им собственных функций исходной задачи при стремлении малого параметра, характеризующего размер участка границы с условием Дирихле, к нулю. Показано, что асимптотика собственного значения имеет второе слагаемое порядка минус первой степени логарифма малого параметра. При этом асимптотика строго обоснована с оценкой остаточного члена порядка минус второй степени логарифма малого параметра.

Ключевые слова: спектр, краевые задачи, асимптотики, задача Стеклова

DOI: 10.1134/S2304487X19010073

ВВЕДЕНИЕ

История исследования задачи Стеклова восходит к работам, появившимся на рубеже XIX–XX веков (см., например, [1]). Недавно интерес к этим задачам возник с новой силой, появились такие работы, как [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11] и [22].

Работы [4], [5], [6] посвящены структуре спектра, в частности, непрерывного, задачи Стеклова в областях с пиком различного заострения, в том числе для упругих тел.

В работе [7] исследуется сингулярно возмущенная задача типа Стеклова с малым параметром в ограниченной двумерной области. Изучается асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций такой задачи при стремлении малого параметра к нулю в случае невырожденной предельной задачи. Постановка задачи включает в себя быструю смену типа гранич-

ных условий. В статьях [8] и [9] рассматривается вырождающаяся задача типа Стеклова, возмущенная чередованием условий Дирихле и условий Стеклова в случае предельной задачи Дирихле. В работе [10] рассматривается аналогичная задача с непериодическим чередованием условий Стеклова и Дирихле для системы теории упругости.

В статье [11] авторы рассматривают усреднение спектральной задачи Стеклова для дивергентного эллиптического оператора в периодически перфорированной области в предположении, что весовая спектральная функция меняет знак. Доказывается, что предельное поведение спектра зависит от среднего значения весовой функции по границе полостей.

Сингулярные возмущения краевых и спектральных задач на малых участках как внутри области, так и на границе, изучались многими авто-

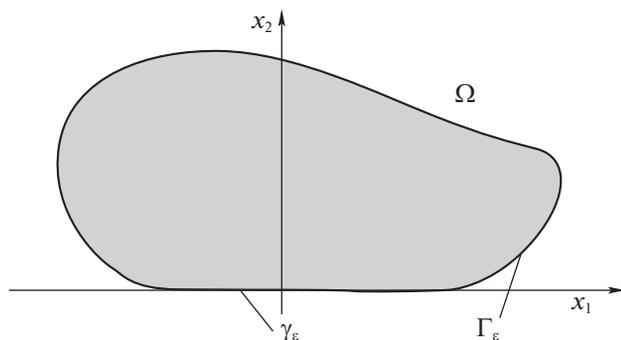


Рис. 1. Структура области Ω и границы Γ .

рами (см., например, [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20]). В работе [12] выведена оценка собственного значения для оператора Лапласа в трехмерной области с малым отверстием. Полное асимптотическое разложение собственных чисел спектральной задачи в областях с малыми отверстиями построено в [15]. В [17] рассмотрена задача, где условие Дирихле возмущается однородным условием Неймана на малом участке границы. В работе [21] аналогичная задача рассмотрена для кратного собственного значения. В работах [4], [5] и [6] рассматриваются задачи, в которых спектральное условие Стеклова выставляется на всей границе, за исключением точки пика.

В статьях [27], [28], [29], [30] изучались спектральные свойства задач в областях с малыми отверстиями. В работе [22] построена асимптотика собственных значений и собственных функций в задаче Стеклова на интерфейсе с неоднородной микроструктурой.

Аналогичные задачи в областях с микронеоднородностями см. [24], [31], [32], [33], [34].

В настоящей статье рассматривается краевая и спектральная задача Стеклова для оператора Лапласа, возмущенная однородным условием Дирихле на одном малом участке границы. Известно, что в ограниченной области спектральная задача с условиями Стеклова на всей границе, за исключением малого фиксированного участка, где функция удовлетворяет однородному условию Дирихле, имеет счетный набор собственных значений. При стремлении малого параметра, определяющего длину участка границы, где выставляется условие Дирихле, к нулю, собственные значения стремятся к соответствующим собственным значениям задачи Стеклова. Наша задача заключается в построении двучленной асимптотики собственных значений возмущенной задачи к собственным значениям задачи Стеклова во всей области.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обозначим через Ω область в \mathbb{R}^2 , лежащую в верхней полуплоскости, граница которой является гладкой и состоит из двух частей: $\partial\Omega = \Gamma_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon$, где γ_ε — отрезок $\left[-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}\right]$ на оси абсцисс. Здесь и далее ε — малый положительный параметр.

Пусть $H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$ — множество функций из $H^1(\Omega)$ с нулевым следом на γ_ε .

Обозначим через $\|u\|_0$ и $\|u\|_1$ нормы функции u , в пространствах $L_2(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$ соответственно, через $\|u\|_{0,\partial\Omega}$ — норму в пространстве $L_2(\partial\Omega)$.

Нашей целью является построение асимптотики при $\varepsilon \rightarrow 0$ собственных пар следующей спектральной задачи:

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon = 0 & \text{при } x \in \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{при } x \in \gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon & \text{при } x \in \Gamma_\varepsilon. \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим также задачу

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0 & \text{при } x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = \lambda_0 u_0 & \text{при } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

В работе [23] было доказано, что задача (2) является предельной для задачи (1). А именно, справедливо следующее утверждение:

Теорема 1.1. Пусть λ_0 — собственное значение кратности N спектральной задачи (2). Тогда к λ_0 сходятся N собственных значений задачи (1) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Если $\lambda_{\varepsilon,1}, \dots, \lambda_{\varepsilon,N}$ собственные значения, сходящиеся к λ_0 , то соответствующие им собственные функции $u_{\varepsilon,1}, \dots, u_{\varepsilon,N}$, ортонормированные в $L_2(\Omega)$, также сходятся (по подпоследовательности $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$) к ортонормированным в $L_2(\Omega)$ собственным функциям $u_{0,1}, \dots, u_{0,N}$ спектральной задачи (2), соответствующим λ_0 :

$$\|u_{\varepsilon,j} - u_{0,j}\|_1 \rightarrow 0, \quad \varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$$

2. ФОРМАЛЬНЫЙ АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ПОСТРОЕНИЕ ВЕДУЩИХ ЧЛЕНОВ

Для построения асимптотик мы воспользуемся методом согласования асимптотических разложений (см. [35]–[37], а также [17] и [19]).

Предполагается, что в спектральной задаче (2) собственное значение λ_0 — простое, и для опреде-

ленности всюду далее в этой главе считаем, что u_0 нормирована в $L_2(\partial\Omega)$.

Естественно искать разложение решения в форме

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \dots, \tag{3}$$

а также разложение собственных значений в виде

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \dots \tag{4}$$

Функция $u_0(x)$ не удовлетворяет граничным условиям исходной задачи в окрестности множества γ_ε , поэтому ее необходимо “подправить” в этой окрестности. Следуя терминологии метода согласования, разложение (3) назовем *внешним*, а разложение в малой окрестности γ_ε назовем *внутренним*.

Отметим, что внешним разложением мы будем пользоваться во всей области за исключением малой окрестности участка границы γ_ε , в котором будем строить внутреннее разложение. Поэтому нас интересуют в первую очередь не сами граничные условия на функции внешнего разложения, а асимптотическое поведение членов ряда при стремлении $x \rightarrow 0$.

Собственную функцию $u_0(x)$ разложим в ряд Тейлора в нуле. В силу краевой задачи (2) (уравнения и граничных условий) имеем

$$u_0(x) = u_0(0) + \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + O(|x|^2), \tag{5}$$

где

$$\alpha_1 = \left. \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right|_{x=0}, \quad \beta_1 = \left. \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right|_{x=0}.$$

В силу краевых условий

$$\beta_1 = -\lambda_0 u_0(0).$$

Сделаем замену $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$. Обозначим

$$\gamma = \left\{ \xi: \xi_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right], \xi_2 = 0 \right\},$$

$$\Gamma = \left\{ \xi: \xi_1 \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right], \xi_2 = 0 \right\}.$$

Получаем в силу (5)

$$u_0(x_1, \varepsilon \xi_2) = u_0(0) + \varepsilon \alpha_1 \xi_1 + \varepsilon \beta_1 \xi_2 + O(\varepsilon^2 |\xi|^2). \tag{6}$$

Следуя методу согласования асимптотических разложений (см. [19]), найдем граничные условия и асимптотику для главного члена внутреннего разложения. Внутреннее разложение должно иметь структуру

$$u_\varepsilon(x) = v_0(\xi, \varepsilon) + \varepsilon v_1(\xi) + \dots, \tag{7}$$

где $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$, $v_0(\xi, \varepsilon) \sim u_0(0)$, $v_1(\xi) \sim \alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \xi_2$ при $|\xi| \rightarrow +\infty$. В переменных ξ оператор Лапласа сохраняется, а граничные условия на Γ_ε имеют вид

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = -\varepsilon^{-1} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \xi_2} = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon. \tag{8}$$

Подставляем (4), (7) в (1) и, учитывая (8), собираем члены с минимальными степенями ε (в уравнении с ε^{-1} , в граничных условиях с ε^0). Получается задача

$$\begin{cases} \Delta_\xi v_0 = 0 & \text{при } \xi_2 > 0, \\ v_0 = 0 & \text{на } \gamma, \\ \frac{\partial v_0}{\partial \xi_2} = 0 & \text{на } \Gamma, \\ v_0 \sim u_0(0) & \text{при } |\xi| \rightarrow +\infty \end{cases} \tag{9}$$

и задача

$$\begin{cases} \Delta_\xi v_1 = 0 & \text{при } \xi_2 > 0, \\ v_1 = 0 & \text{на } \gamma, \\ -\frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} = \lambda_0 v_{0,1} & \text{на } \Gamma, \\ v_1 \sim \alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \xi_2 & \text{при } |\xi| \rightarrow +\infty. \end{cases} \tag{10}$$

Для построения функции $v_{0,1}$ необходима следующая вспомогательная задача:

$$\begin{cases} \Delta_\xi X = 0 & \text{при } \xi_2 > 0, \\ X = 0 & \text{на } \gamma, \\ \frac{\partial X}{\partial \xi_2} = 0 & \text{на } \Gamma, \\ X \sim 1 & \text{при } |\xi| \rightarrow +\infty, \end{cases} \tag{11}$$

но нетривиального решения эта задача не имеет. В связи с этим рассмотрим задачу, которая имеет отличное от нуля решение, но с другой асимптотикой на бесконечности.

$$\begin{cases} \Delta_\xi X = 0 & \text{при } \xi_2 > 0, \\ X = 0 & \text{на } \gamma, \\ \frac{\partial X}{\partial \xi_2} = 0 & \text{на } \Gamma, \\ X \sim \ln |\xi| & \text{при } |\xi| \rightarrow +\infty. \end{cases} \tag{12}$$

Решение задачи (12) существует (см. [17]). Его можно выписать явно:

$$X(\xi) = \operatorname{Re} \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \tag{13}$$

где $z = \xi_1 + i\xi_2$. Учитывая, что

$$\ln |\xi| \sim \ln \frac{1}{\varepsilon} = -\ln \varepsilon \text{ при } \xi \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0,$$

делаем вывод о том, что

$$v_0(\xi, \varepsilon) = -\frac{u_0(0)}{\ln \varepsilon} X(\xi) \tag{14}$$

удовлетворяет задаче (9). Удобнее написать

$$v_0(\xi, \varepsilon) = -\frac{u_0(0)}{\ln \varepsilon} X(\xi) = -\frac{1}{\ln \varepsilon} v_{0,1}(\xi), \quad (15)$$

$$v_{0,1} = u_0(0)X(\xi).$$

Функция $v_{0,1}$ также удовлетворяет задаче (9). Асимптотика такой функции на бесконечности при $|\xi| \rightarrow +\infty$ в силу (13) и (14) выглядит следующим образом:

$$v_0(\xi, \varepsilon) = -\frac{u_0(0)}{\ln \varepsilon} \left[\ln|x| - \ln \varepsilon + \ln 2 + C_0 \frac{\xi_1}{|\xi|^2} + \dots \right] = \quad (16)$$

$$= u_0(0) - \frac{u_0(0)}{\ln \varepsilon} (\ln|x| + \ln 2) + \dots$$

Обозначим $\mu := -\frac{1}{\ln \varepsilon}$.

Теперь видно, что устраняя невязку в граничных условиях у функции $u_0(x)$, мы построили $v_{0,1}(\xi)$, но при этом оказалось, что поведение на бесконечности у функции $v_{0,1}(\xi)$ не совсем то, которое нам было нужно. Появилась новая невязка, но другого порядка (порядка $-\frac{1}{\ln \varepsilon}$). Эту невязку приходится устранять введением еще одного (промежуточного) члена во внешнем разложении.

Переписывая асимптотику v_0 в бесконечности во внешних переменных с учетом (16), заключаем, что внешнее разложение должно иметь вид

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \mu u_{0,1}(x) + \dots, \quad (17)$$

где

$$u_{0,1}(x_1, x_2) \sim u_0(0)\ln|x| + u_{0,1}(0) + \dots \quad \text{при } |x| \rightarrow 0.$$

Таким образом, функция $u_\varepsilon(x)$ имеет следующую асимптотку в нуле:

$$u_\varepsilon(x) = u_0(0) + \mu(u_0(0)\ln|x| + u_{0,1}(0)) + \dots$$

Поскольку уточненное внешнее разложение имеет вид (17), то, естественно, разложение собственного значения в уточненном виде будет иметь следующий член порядка μ , т.е.

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \mu\lambda_{0,1} + \dots, \quad (18)$$

где константу $\lambda_{0,1}$ мы вычислим ниже. Внутреннее разложение должно иметь вид

$$u_\varepsilon = \mu v_{0,1}(\xi) + \dots$$

с асимптотикой на бесконечности

$$u_\varepsilon = u_0(0) + \mu(u_0(0)\ln|x| + u_0(0)\ln 2) + \dots$$

Слагаемое $\mu u_0(0)\ln 2$ нужно устранить подправкой нового члена во внутреннем асимптотическом разложении u_ε :

$$u_\varepsilon = \mu v_{0,1}(\xi) + \mu^2 v_{0,2}(\xi) + \dots,$$

$$v_{0,2} \sim u_{0,1}(0) - u_0(0)\ln 2 \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty.$$

Подставляя ряд (17) и разложение (18) для λ_ε в задачу (1), приравнявая члены при μ^1 , получаем краевую задачу для $u_{0,1}$:

$$\begin{cases} -\Delta u_{0,1} = 0 & \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial u_{0,1}}{\partial \nu} = \lambda_0 u_{0,1} + \lambda_{0,1} u_0 & \text{на } \partial\Omega \setminus \{0\}, \\ u_{0,1}(x_1, x_2) \sim u_0(0)\ln|x| & \text{при } |x| \rightarrow 0. \end{cases} \quad (19)$$

Записываем условие разрешимости задачи (19). Обозначим через K_ε полукруг радиуса ε с центром в нуле, лежащий в верхней полуплоскости и рассмотрим область $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{K_\varepsilon}$. Домножим уравнение на u_0 и проинтегрируем по области Ω_ε , таким образом вырезая особенность функции $u_{0,1}$. Имеем

$$-\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u_{0,1}(x) u_0(x) dx = 0. \quad (20)$$

Применяя дважды формулу Грина, выводим

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u_{0,1} u_0 dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_{0,1} \nabla u_0 dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_{0,1}}{\partial \nu} u_0 ds - \\ &- \int_{\partial K_\varepsilon} \frac{\partial u_{0,1}}{\partial \nu} u_0 ds = -\int_{\Omega_\varepsilon} u_{0,1} \Delta u_0 dx - \\ &- \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_{0,1}}{\partial \nu} u_0 ds + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial \nu} u_{0,1} ds - \\ &- \int_{\partial K_\varepsilon} \frac{\partial u_{0,1}}{\partial \nu} u_0 ds + \int_{\partial K_\varepsilon} \frac{\partial u_0}{\partial \nu} u_{0,1} ds. \end{aligned} \quad (21)$$

Используя уравнения и краевые условия задач (2) и (19), вспоминая условие нормировки функции u_0 , переходим к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial K_\varepsilon} \frac{\partial u_{0,1}}{\partial \nu} u_0 ds = -u_0(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial K_\varepsilon} \frac{d \ln \varepsilon}{d\varepsilon} u_0 ds = -\pi u_0^2(0), \quad (22)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial K_\varepsilon} \frac{\partial u_0}{\partial \nu} u_{0,1} ds = u_0(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial K_\varepsilon} \ln \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial \nu} ds = 0.$$

Имея в виду (20), (21) и (22), окончательно имеем

$$\lambda_{0,1} = \pi u_0^2(0). \quad (23)$$

Для однозначной разрешимости задачи (19) будем считать, что

$$\int_{\partial\Omega} u_0(x) u_{0,1}(x) dx = 0.$$

Далее, подставляя внутреннее разложение в исходную задачу и приравнявая слагаемые с одина-

ковыми степенями, получаем уточненную задачу на $v_{0,1}$:

$$\begin{cases} \Delta_{\xi} v_{0,2} = 0 & \text{при } \xi_2 > 0, \\ v_{0,2} = 0 & \text{на } \gamma, \\ \frac{\partial v_{0,2}}{\partial \xi_2} = 0 & \text{на } \Gamma, \\ v_{0,2} \sim u_{0,1} - u_0(0) \ln 2 & \text{при } |\xi| \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (24)$$

Решение (24) задается аналогичной формулой:

$$v_{0,2} = (u_0(0) \ln 2 - u_{0,1}(0))X(\xi). \quad (25)$$

В силу (25) асимптотика такой функции при $|\xi| \rightarrow +\infty$ имеет вид

$$v_{0,2} = (-u_0(0) \ln 2 + u_{0,1}(0)) + \mu(-u_0(0) \ln 2 + u_{0,1}(0))(\ln |x| + \ln 2) + \dots \quad (26)$$

Суммируя, мы рассматриваем следующие приближения:

внешнее разложение

$$u_{\epsilon}(x) = u_0(x) + \mu u_{0,1}(x) + \dots \equiv \hat{u}_{\epsilon} + \dots,$$

разложение собственного значения

$$\lambda_{\epsilon} = \lambda_0 + \mu \lambda_{0,1} + \dots \equiv \hat{\lambda}_{\epsilon} + \dots, \quad (27)$$

внутреннее разложение

$$u_{\epsilon}(x) = \mu v_{0,1}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \mu^2 v_{0,2}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \dots \equiv \hat{v}_{\epsilon} + \dots$$

с асимптотикой

$$\begin{cases} -\Delta \hat{v}_{\epsilon} = 0 & \text{при } x \in \Omega_{\epsilon} \cap \{|x| < h\}, \\ \hat{v}_{\epsilon} = 0 & \text{на } \gamma_{\epsilon}, \\ \frac{\partial \hat{v}_{\epsilon}}{\partial \xi_2} = 0 & \text{на } \Gamma_{\epsilon} \cap \{x_2 < h\}, \\ \hat{v}_{\epsilon} \sim u_0(0) + \mu(u_{0,1}(0) + u_0(0) \ln |x|) + \mu^2(-u_0(0) \ln 2 + u_{0,1}(0)) \ln |x| & \text{при } \{x_2 < h\}. \end{cases} \quad (29)$$

Легко видеть, что функции \hat{u}_{ϵ} и \hat{v}_{ϵ} являются достаточно гладкими.

Лемма 3.1. Пусть $0 < \beta < 1$. Тогда при $\mu^{\beta} < |x| < 2\mu^{\beta}$ ($\mu^{\beta-1} < |\xi| < 2\mu^{\beta-1}$) справедливы следующие оценки:

$$\hat{v}_{\epsilon} - \hat{u}_{\epsilon} = O(\mu^2 \ln \mu), \quad \frac{\partial}{\partial x_2}(\hat{v}_{\epsilon} - \hat{u}_{\epsilon}) = O(\mu^{2-\beta}).$$

Доказательство. В силу асимптотик (29), (24) и (17) верно следующее:

$$\begin{aligned} \hat{v}_{\epsilon} - \hat{u}_{\epsilon} &= u_0(0) + \mu v_{0,1} - u_0(0) - \\ &- \mu u_{0,1}(0) = O(\mu^2 \ln |x|) = O(\mu^2 \ln \mu). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{v}_{\epsilon} &= u_0(0) + \mu(u_0(0) \ln |x| + \\ &+ u_0(0) \ln 2) + \mu(-u_0(0) \ln 2 + u_{0,1}(0)) + \\ &+ \mu^2(u_0(0) \ln 2 + u_{0,1}(0)) \ln |x| \end{aligned}$$

при $|\xi| \rightarrow +\infty$. Пусть $\chi(t)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, тождественно равная нулю при $t < 1$ и единице при $t > 2$,

$$\chi_{\beta}(x_2) = \chi\left(\frac{x_2}{\mu^{\beta}}\right).$$

Составляем функцию

$$U_{\epsilon} = \chi_{\beta}(x_2)\hat{u}_{\epsilon} + (1 - \chi_{\beta}(x_2))\hat{v}_{\epsilon}.$$

Далее будет показано, что данная функция является приближением к решению исходной возмущенной задачи.

3. ОБОСНОВАНИЕ ПОСТРОЕННОЙ АСИМПТОТИКИ

В силу краевых задач (9), (10) построенные приближения удовлетворяют граничным задачам

$$\begin{cases} -\Delta \hat{u}_{\epsilon} = 0 & \text{при } x \in \Omega, \\ \hat{u}_{\epsilon} = 0 & \text{на } \gamma_{\epsilon}, \\ \frac{\partial \hat{u}_{\epsilon}}{\partial \nu} = \lambda_0 \hat{u}_{\epsilon} + \lambda_{0,1} \mu u_0 \equiv \hat{\lambda}_{\epsilon} \hat{u}_{\epsilon} - \mu^2 \lambda_{0,1} u_{0,1} & \text{на } \Gamma_{\epsilon}. \end{cases} \quad (28)$$

и для достаточно малого $h > 0$

Аналогично,

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(\hat{v}_{\epsilon} - \hat{u}_{\epsilon}) = O\left(\mu^2 \frac{1}{x}\right) = O(\mu^{2-\beta}) \text{ при } \mu^{\beta} < x_2 < 2\mu^{\beta}.$$

Лемма 3.2. Пусть $0 < \beta < \frac{2}{3}$. Тогда функция

$$U_{\epsilon}(x) = \chi_{\beta}(x_2)\hat{u}_{\epsilon}(x) + (1 - \chi_{\beta}(x_2))\hat{v}_{\epsilon}(x).$$

является решением краевой задачи

$$\begin{cases} -\Delta U_{\epsilon} = f_{\epsilon} & \text{в } \Omega_{\epsilon}, \\ U_{\epsilon} = 0 & \text{на } \gamma_{\epsilon}, \\ \frac{\partial U_{\epsilon}}{\partial \nu} = \hat{\lambda}_{\epsilon} U_{\epsilon} + g_{\epsilon} & \text{на } \Gamma_{\epsilon}, \end{cases} \quad (30)$$

где

$$\|f_\varepsilon\|_0 = O\left(\mu^{2-3\beta}\right), \quad \|g_\varepsilon\|_{0,\Gamma_\varepsilon} = O(\mu^2). \quad (31)$$

Доказательство. Подействуем оператором Лапласа на функцию U_ε :

$$\begin{aligned} \Delta U_\varepsilon &= \hat{u}_\varepsilon \Delta \chi_\beta + 2\nabla \chi_\beta \nabla \hat{u}_\varepsilon + \chi_\beta \Delta \hat{u}_\varepsilon + \\ &+ \hat{v}_\varepsilon \Delta(1 - \chi_\beta) + 2\nabla(1 - \chi_\beta) \nabla \hat{u}_\varepsilon + (1 - \chi_\beta) \Delta \hat{v}_\varepsilon = \\ &= \hat{u}_\varepsilon \varepsilon^{-2\beta} \chi_\beta'' + 2\varepsilon^{-\beta} \chi_\beta' \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial x_2} - \hat{v}_\varepsilon \varepsilon^{-2\beta} \chi_\beta'' - 2\varepsilon^{-\beta} \chi_\beta' \frac{\partial \hat{v}_\varepsilon}{\partial x_2} = \\ &= (\hat{u}_\varepsilon - \hat{v}_\varepsilon) \mu^{-2\beta} \chi_\beta'' + 2\mu^{-\beta} \chi_\beta' \frac{\partial}{\partial x_2} (\hat{u}_\varepsilon - \hat{v}_\varepsilon) \equiv f_\varepsilon. \end{aligned}$$

Заметим, что носитель функции f_ε лежит в полосе $\mu^\beta < |x| < 2\mu^\beta$. В силу леммы 3.1 и определения функции χ_β мы получаем следующую оценку для правой части уравнения:

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon\|_0^2 &= \int_{\Omega_\varepsilon \cap \{\mu^\beta < |x| < 2\mu^\beta\}} O(\mu^{4-4\beta}) dx = O(\mu^{4-3\beta}) \\ &\text{при } 0 < \beta < \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

В силу определения U_ε и граничных задач (28), (29), мы получаем, что

$$U_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \gamma_\varepsilon.$$

Кроме того, на Γ_ε :

$$\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \nu} = (\chi_\beta \hat{u}_\varepsilon + (1 - \chi_\beta) \hat{v}_\varepsilon) \hat{\lambda}_\varepsilon + g_\varepsilon = \hat{\lambda}_\varepsilon U_\varepsilon + g_\varepsilon,$$

где

$$g_\varepsilon = -\mu^2 \lambda_{0,1} u_{0,1} = O(\mu^2).$$

Таким образом,

$$\|g_\varepsilon\|_{0,\Gamma_\varepsilon} = O(\mu^2).$$

Сходимость собственных функций спектральных задач (1) и (2) следует из результатов статьи [23] (см. также [38]). Покажем правомерность разложения (27).

Лемма 3.3. *Для решения задачи (30) справедливо представление:*

$$U_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_\varepsilon, u_\varepsilon^n)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^n)_{0,\Gamma_\varepsilon}}{\lambda_\varepsilon^n - \lambda} u_\varepsilon^n. \quad (32)$$

Доказательство. Система функций

$$\frac{u_\delta^1}{\sqrt{\lambda_\delta^1}}, \dots, \frac{u_\delta^s}{\sqrt{\lambda_\delta^s}}, \dots, \quad \delta \geq 0 \quad (33)$$

образует ортонормированный базис в $L_2(\Gamma_\varepsilon)$. Как известно, пространство $H^1(\Omega)$ вложено в $L_2(\Gamma_\varepsilon)$.

Следовательно, функция U_ε может быть разложена по этому базису (33). Имеем

$$U_\delta = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(U_\delta, u_\delta^s)_{1,\delta}}{\lambda_\delta^s} u_\delta^s = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(U_\delta, u_\delta^s)_{1,0}}{\lambda_\delta^s} u_\delta^s, \quad \delta \geq 0 \quad (34)$$

Решение задачи (30) понимается в обобщенном смысле – как решение интегрального тождества

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla U_\varepsilon \nabla \bar{v} dx - \lambda \int_{\partial\Omega} U_\varepsilon \bar{v} ds &= \int_{\partial\Omega} g_\varepsilon \bar{v} ds + \\ &+ \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon \bar{v} dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon). \end{aligned}$$

Обозначив для краткости,

$$(\varphi, \psi)_{1,0} = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \varphi \nabla \bar{\psi} dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi \bar{\psi} dx \quad \forall \psi = 0 \text{ на } \gamma_\varepsilon,$$

$$(\varphi, \psi)_0 = \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi \bar{\psi} dx,$$

$$(\varphi, \psi)_{0,\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} \varphi \bar{\psi} ds, \quad \forall \psi = 0 \text{ на } \partial\Omega,$$

перепишем интегральное тождество в виде

$$(U_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_{1,0} - \lambda (U_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_{0,\partial\Omega} = (f_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_{0,\partial\Omega}. \quad (35)$$

Подставляя разложение (34) в уравнение (35), получаем:

$$(U_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_{1,0} = \frac{\lambda}{\lambda_\varepsilon} (U_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_{0,\partial\Omega} + (f_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_{0,\partial\Omega}.$$

Следовательно,

$$(U_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_{1,0} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_\varepsilon}\right) = (f_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_{0,\partial\Omega}.$$

Отсюда

$$(U_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_{1,0} = \frac{(f_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_{0,\partial\Omega}}{\lambda_\varepsilon^n - \lambda} \lambda_\varepsilon^n.$$

Тогда окончательно выводим:

$$U_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_\varepsilon, u_\varepsilon^n)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^n)_{0,\partial\Omega}}{\lambda_\varepsilon^n - \lambda} u_\varepsilon^n.$$

Докажем следующую вспомогательную оценку.

Лемма 3.4. *Пусть λ_0 – собственное значение кратности N задачи (2):*

$$\lambda_0 = \lambda_0^{p+1} = \dots = \lambda_0^{p+N} < \lambda_0^{p+1+N}.$$

При λ , близких к λ_0 , справедлива оценка:

$$\|U_\varepsilon\|_1 \leq C \sum_{j=1}^N \frac{\|f_\varepsilon\|_0 + \|g_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega}}{|\lambda_\varepsilon^{p+j} - \lambda|}. \quad (36)$$

Доказательство. Очевидно, что для доказательства леммы достаточно показать справедливость представления

$$U_\varepsilon = \sum_{j=1}^N \frac{(u_\varepsilon^{p+j}, f_\varepsilon)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_{0,\partial\Omega}}{\lambda_\varepsilon^{p+j} - \lambda} u_\varepsilon^{p+j} + \tilde{u}_\varepsilon, \quad (37)$$

где функция \tilde{u}_ε ортогональна в $L_2(\partial\Omega)$ собственным функциям u_ε^{p+j} , $j = 1, \dots, N$ и для нее справедлива равномерная по ε и λ оценка

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_1 \leq C_1(\|f_\varepsilon\|_0 + \|g_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega}). \quad (38)$$

Из представления (32) следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{u}^\varepsilon &= \sum_{j=1}^p \frac{(f_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_{0,\partial\Omega}}{\lambda_\varepsilon^j - \lambda} u_\varepsilon^j + \\ &+ \sum_{j=p+1+N}^\infty \frac{(f_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_{0,\partial\Omega}}{\lambda_\varepsilon^j - \lambda} u_\varepsilon^j. \end{aligned} \quad (39)$$

Из (39) и ортогональности в $L_2(\partial\Omega)$ системы функций u_ε^j , $j = 1, 2, \dots$ следует, что \tilde{u}_ε ортогональна в $L_2(\partial\Omega)$ функциям u_ε^{p+i} , $i = 1, \dots, N$.

Установим справедливость оценки (38) для \tilde{u}^ε . В силу представления (39) и ортогональности u_ε^j , справедливо равенство:

$$\begin{aligned} \|\nabla \tilde{u}_\varepsilon\|_0^2 &= \sum_{j=1}^p \left| \frac{(f_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_{0,\partial\Omega}}{\lambda_\varepsilon^j - \lambda} \right|^2 \|\nabla u_\varepsilon^j\|_0^2 + \\ &+ \sum_{j=p+1+N}^\infty \left| \frac{(f_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_{0,\partial\Omega}}{\lambda_\varepsilon^j - \lambda} \right|^2 \|\nabla u_\varepsilon^j\|_0^2 = \\ &= \sum_{j=1}^p \left| \frac{(f_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_{0,\partial\Omega}}{\lambda_\varepsilon^j - \lambda} \right|^2 \lambda_\varepsilon^j + \\ &+ \sum_{j=p+1+N}^\infty \left| \frac{(f_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_{0,\partial\Omega}}{\lambda_\varepsilon^j - \lambda} \right|^2 \lambda_\varepsilon^j. \end{aligned} \quad (40)$$

Очевидно, что при λ , близких к λ_0 , существует число $a > 0$ такое, что для любых достаточно малых ε выполнено неравенство

$$|\lambda_\varepsilon^j - \lambda| > a, \quad j \neq p+1, \dots, p+1+N. \quad (41)$$

В силу (41) и равенства Парсеваля–Стеклова из (40) выводим

$$\begin{aligned} \|\nabla \tilde{u}_\varepsilon\|_0^2 &\leq a^{-1} \sum_{j=1}^\infty |(f_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_{0,\partial\Omega}|^2 \leq \\ &\leq C_1(\|f_\varepsilon\|_0^2 + \|g_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega}^2). \end{aligned}$$

Отсюда и из эквивалентности норм $\|\nabla \tilde{u}_\varepsilon\|$ и $\|\tilde{u}_\varepsilon\|_1$ вытекает оценка (38). Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Собственное значение задачи (1) имеет асимптотику*

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 - \frac{1}{\ln \varepsilon} \pi u_0^2(0) + O\left(\left(\frac{1}{\ln \varepsilon}\right)^2\right). \quad (42)$$

Доказательство. Заметим, что в силу определения функции U_ε справедливо неравенство

$$\|U_\varepsilon\|_1 \geq 1.$$

Отсюда, используя асимптотику (31) и оценку (36) для $\lambda = \hat{\lambda}_\varepsilon$ получаем (42). Таким образом, мы доказали сходимость разложения для собственного значения с асимптотикой (42).

Теперь обоснуем сходимость построенного приближения U_ε к решению задачи (1).

Теорема 3.2. *Функция U_ε сходится к решению задачи (1). Кроме того, справедлива оценка*

$$\|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_1^2 = O\left(\left(\frac{1}{\ln \varepsilon}\right)^2\right). \quad (43)$$

В силу задач (30) и (1), функция $U_\varepsilon - u_\varepsilon$ удовлетворяет граничной задаче

$$\begin{cases} -\Delta(U_\varepsilon - u_\varepsilon) = f_\varepsilon & \text{в } \Omega_\varepsilon, \\ U_\varepsilon - u_\varepsilon = 0 & \text{на } \gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial(U_\varepsilon - u_\varepsilon)}{\partial \nu} = \hat{\lambda}_\varepsilon U_\varepsilon + g_\varepsilon - \lambda_\varepsilon u_\varepsilon & \text{на } \Gamma_\varepsilon. \end{cases} \quad (44)$$

Перепишав эквивалентно

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \nu} &= \hat{\lambda}_\varepsilon U_\varepsilon + g_\varepsilon - \lambda_\varepsilon u_\varepsilon = \\ &= \hat{\lambda}_\varepsilon (U_\varepsilon - u_\varepsilon) + u_\varepsilon (\hat{\lambda}_\varepsilon - \lambda_\varepsilon) + g_\varepsilon, \end{aligned}$$

умножив уравнение задачи (44) на $(U_\varepsilon - u_\varepsilon)$ и проинтегрировав по частям, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon (U_\varepsilon - u_\varepsilon) dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(U_\varepsilon - u_\varepsilon)|^2 dx - \\ &- \hat{\lambda}_\varepsilon \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (U_\varepsilon - u_\varepsilon)^2 ds - (\hat{\lambda}_\varepsilon - \lambda_\varepsilon) \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon (U_\varepsilon - u_\varepsilon) ds - \\ &- \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g_\varepsilon (U_\varepsilon - u_\varepsilon) ds. \end{aligned}$$

Неравенство Фридрихса для функции $U_\varepsilon - u_\varepsilon$ влечет оценку

$$\|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_1^2 \leq C \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(U_\varepsilon - u_\varepsilon)|^2 dx.$$

Используя полученное интегральное тождество, оценку

$$\|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega} \leq C \|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_0,$$

а также неравенство Коши–Буняковского, выводим:

$$\begin{aligned} \|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_0^2 &\leq C \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(U_\varepsilon - u_\varepsilon)|^2 dx \leq \\ &\leq \|f_\varepsilon\|_0 \|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_0 + \hat{\lambda}_\varepsilon \|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega}^2 + \\ &\quad + |\hat{\lambda}_\varepsilon - \lambda_\varepsilon| \|u_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega} \|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega} + \\ &\quad + \|g_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega} \|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega} \leq \\ &\leq C(\|f_\varepsilon\|_0 + \|g_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega} + |\hat{\lambda}_\varepsilon - \lambda_\varepsilon|) \|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_0 + \\ &\quad + \hat{\lambda}_\varepsilon \|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_0^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$|1 - \hat{\lambda}_\varepsilon| \|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_0 \leq C(\|f_\varepsilon\|_0 + \|g_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega} + |\hat{\lambda}_\varepsilon - \lambda_\varepsilon|),$$

что эквивалентно

$$\|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_0^2 \leq K_1(\|f_\varepsilon\|_0 + \|g_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega} + |\hat{\lambda}_\varepsilon - \lambda_\varepsilon|)^2,$$

где $K_1 = \frac{C}{|1 - \hat{\lambda}_\varepsilon|}$. Далее, с учетом уже полученного неравенства

$$\begin{aligned} \|\nabla(U_\varepsilon - u_\varepsilon)\|_0^2 &\leq C(\|f_\varepsilon\|_0 + \|g_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega} + \\ &\quad + |\hat{\lambda}_\varepsilon - \lambda_\varepsilon|) \|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_0 + \\ &\quad + \hat{\lambda}_\varepsilon \|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_0^2, \end{aligned}$$

имеем:

$$\|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_1^2 \leq K_2(\|f_\varepsilon\|_0 + \|g_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega} + |\hat{\lambda}_\varepsilon - \lambda_\varepsilon|)^2.$$

Применяя теперь асимптотику (31) и (42), получаем (43). Теорема доказана.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность профессорам Чечкину Г.А. и Борисову Д.И. за обсуждение данной задачи и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. *Стеклов В.А.* Общие методы решения основных задач математической физики. Диссертация на соискание ученой степени д.ф.-м.н., Харьков: Харьковский Императорский университет, 1901.
2. *Mel'nyk T.A.* Asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of the Steklov problem in a thick periodic junction // *Nonlinear Oscillations*. 2001. V. 4. № 1. P. 91–105.
3. *Pérez E.* On periodic Steklov type eigenvalue problems on half-bands and the spectral homogenization problem // *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*. 2007. V. 7. № 4. P. 859–883.
4. *Назаров С.А., Таскинин Я.* О спектре задачи Стеклова в области с пиком // *Вестн. С.-Петербур. ун-та*. 2008. Сер. 1. № 1. С. 56–65.
5. *Назаров С.А.* О спектре задачи Стеклова в пикообразных областях // *Тр. Санкт-Петербур. мат. о-ва*. 2008. Т. 14. С. 103–168.
6. *Назаров С.А.* Асимптотика решения спектральной задачи Стеклова в области с затупленным пиком // *Мат. заметки*. 2009. Т. 86. № 4. С. 642–656.
7. *Чечкина А.Г.* О сходимости решений и собственных элементов краевой задачи типа Стеклова с быстро меняющимся типом граничных условий // *Проблемы мат. анализа*. 2009. Вып. 42. С. 129–143.
8. *Чечкина А.Г.* О сингулярном возмущении задачи типа Стеклова с вырождающимся спектром // *Докл. Академии наук*. 2011. Т. 440. № 5. С. 603–606.
9. *Чечкина А.Г.* Усреднение спектральных задач с сингулярным возмущением условия Стеклова // *Известия РАН*. 2017. Т. 81. № 1. С. 203–240.
10. *Chechkina A.G., D'Apice C., De Maio U.* Rate of Convergence of Eigenvalues to Singularly Perturbed Steklov-Type Problem for Elasticity System // *Applicable Analysis*. 2019. V. 98. № 1–2. P. 32–44. Online first doi 10.1080/00036811.2017.1416104
11. *Chiado Piat V., Nazarov S., Piatnitski A.* Steklov problems in perforated domains with a coefficient of indefinite sign. // *Networks Heter. Media*. 2012. V. 7. № 1. P. 151–178.
12. *Самарский А.А.* О влиянии закрепления на собственные частоты замкнутых объемов // *Докл. АН СССР*. 1948. Т. 63. № 6. С. 631–634.
13. *Swanson C.A.* Asymptotic Variational Formulae for Eigenvalues // *Canad. Math. Bul.* 1963. V. 6. № 1. P. 1525.
14. *Ozawa Sh.* Singular Hadamard's Variation of Domains and Eigenvalues of Laplacian 1 // *Proc. Japan Acad. Ser. A*. 1981. V. 57. № 5. P. 242–246.
15. *Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями // *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1984. Т. 48. № 2. С. 347–371.
16. *Гадьльшин Р.Р.* Сингулярно возмущенная задача для оператора Гельмгольца. В сборнике статей: “Дифференциальные уравнения с малым параметром”. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. С. 18–35.
17. *Гадьльшин Р.Р.* Асимптотика собственного значения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с малым параметром в граничном условии // *Дифференц. уравнения*. 1986. Т. 22. № 4. С. 640–652.
18. *Гадьльшин Р.Р.* Спектр эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении граничных условий. В сборнике статей: Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений. Уфа. БНЦ УрО АН СССР, 1988. С. 3–15.
19. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
20. *Гадьльшин Р.Р., Королева Ю.О., Чечкин Г.А.* О собственном значении лапласиана в области, перфорированной вдоль границы // *Докл. АН*. 2010. Т. 432. № 1. С. 7–11.
21. *Гадьльшин Р.Р.* Расщепление кратного собственного значения в краевой задаче для мембраны, закрепленной на малом участке границы // *Сиб. матем. ж.* 1993. Т. 34. № 3. С. 43–61.
22. *Гадьльшин Р.Р., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А.* Об асимптотическом поведении собственных пар

- краевой задачи в плоской области типа сита Стеклова // Известия РАН. 2018. Т. 82. № 6. С. 37–64.
23. Абдуллазаде Н.Н., Чечкин Г.А. О возмущении задачи Стеклова на малом участке границы // Проблемы математического анализа. 2013. Т. 74. С. 3–16.
 24. Chechkin G.A., D'Apice C., De Maio U., Gadyl'shin R.R. On Singularly Perturbed Steklov problem in Domain Perforated Along the Boundary // C R Mécanique. 2016. Т. 344. № 1. P. 12–18.
 25. Борисов Д.И. О краевой задаче в цилиндре с частой сменой типа граничных условий // Мат. сборник. 2002. Т. 193. № 7. С. 37–68.; translated in Sb. Math. 2002. V. 193. № 7. P. 977–1008.
 26. Borisov D.I. On a model boundary value problem for Laplacian with frequently alternating type of boundary condition // Asymptotic Analysis. 2003. V. 35. № 1. P. 1–26.
 27. Борисов Д.И. О РТ-симметричном волноводе с парой малых отверстий // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 2. С. 22–37.
 28. Borisov D., Cardone G., Durante T. Homogenization and uniform resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section: A Mathematics. 2016. V. 146. № 6. P. 1115–1158.
 29. Borisov D. Creation of spectral bands for a periodic domain with small windows // Russian Journal of Mathematical Physics. 2016. V. 23. № 1. P. 19–34.
 30. Борисов Д.И., Мухаметрахимова А.И. О равномерной резольвентной сходимости для эллиптических операторов в многомерных областях с малыми отверстиями // Проблемы математического анализа. 2018. Т. 92. С. 69–81.
 31. Chechkin G.A. On Vibration of Partially Fastened Membrane with Many “light” Concentrated Masses on the Boundary // C R Mécanique. 2004. Т. 332. № 12. P. 949–954.
 32. Amirat Y., Chechkin G.A., Gadyl'shin R.R. Asymptotics of Simple Eigenvalues and Eigenfunctions for the Laplace Operator in a Domain with Oscillating Boundary // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46. № 1. С. 102–115.
 33. Мельник Т.А., Чечкин Г.А. Асимптотический анализ краевых задач в густых трехмерных многоуровневых соединениях // Математический сборник. 2009. Т. 200. № 3. С. 49–74.
 34. Amirat Y., Chechkin G.A., Gadyl'shin R.R. Asymptotics of the Solution of a Dirichlet Spectral Problem in a Junction with Highly Oscillating Boundary // C R Mécanique. 2008. Т. 336. № 9. P. 693–698.
 35. Ильин А.М. Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. I. Двумерный случай // Матем. сб. 1976. Т. 99. С. 514–537.
 36. Ильин А.М. Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. II. Область с малым отверстием // Матем. сб. 1977. Т. 103. С. 265–284.
 37. Ильин А.М. Исследование асимптотики решения эллиптической краевой задачи в области с малым отверстием // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 1981. № 6. С. 57–82.
 38. Chechkin G.A. Asymptotic Expansion of Eigenvalues and Eigenfunctions of an Elliptic Operator in a Domain with Many “Light” Concentrated Masses Situated on the Boundary. Two-Dimensional Case. // Izvestia: Mathematics. 2005. Т. 69. № 4. С. 805–846 (Translated from Izvestija RAN. Ser. Mat. 2005. Т. 69. № 4. С. 161–204).
 39. Борисов Д.И. Асимптотики и оценки собственных элементов лапласиана с частой неперIODической сменой граничных условий // Известия РАН. Серия математическая. 2003. Т. 67. № 6. С. 23–70.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta “MIFI”, 2019, vol. 8, no. 3, pp. 253–263

On the Asymptotic Behavior of a Simple Eigenvalue of the Steklov Problem Perturbed on a Small Part of the Boundary by the Homogeneous Dirichlet Condition

Yu. O. Koroleva^{a,#} and T. P. Chechkina^{b,##}

^a Department of Higher Mathematics, Gubkin Russian State University of Oil and Gas, Moscow, 119991 Russia

^b Department of Higher Mathematics, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: koroleva.y@gubkin.ru

^{##}e-mail: chechkina@mail.ru

Received October 22, 2018; revised November 21, 2018; accepted November 4, 2018

Abstract—The Steklov type spectral problem for the Laplace operator and the corresponding boundary value problem in a bounded domain with a smooth boundary has been considered. It is assumed that the homogeneous Dirichlet condition is set on a small part of the boundary, and the Steklov condition (or the corresponding Neumann condition) is imposed on the rest of the boundary. It is known that the Steklov problem perturbed on a small part of the boundary by the Dirichlet condition has a countable set of eigenvalues with

finite multiplicity. Moreover, the limit problem is a problem for the Laplace operator with the Steklov condition on the entire boundary. It is also known that the problem for the Laplace operator with the Steklov condition on the entire boundary has a countable set of eigenvalues with finite multiplicity. A two-term asymptotic expressions have been constructed for the eigenvalues and the corresponding eigenfunctions of the original problem as the small parameter characterizing the size of the boundary part with the Dirichlet condition tends to zero. It has been shown that the asymptotic expression for the eigenvalue has the second term inversely proportional to the logarithm of the small parameter. Moreover, the asymptotic expression is strictly justified with the estimate of the rest term inversely proportional to the square of the logarithm of the small parameter.

Keywords: spectrum, boundary value problems, asymptotic expressions, the Steklov problem

DOI: 10.1134/S2304487X19010073

REFERENCES

1. Stekloff, W. Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique. (French) *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 1902, vol. (3) 19, p. 191–259, 455–490.
2. Mel'nyk T.A. Asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of the Steklov problem in a thick periodic junction. *Nonlinear Oscillations*, 2001, vol. 4, no. 1, p. 91–105.
3. Pérez E. On periodic Steklov type eigenvalue problems on half-bands and the spectral homogenization problem. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B.*, 2007, vol. 7, no. 4, p. 859–883.
4. Nazarov S.A., Taskinen J. On the spectrum of the Steklov problem in a domain with a peak. *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*, 2008, vol. 41, no. 1, p. 45–52.
5. Nazarov S.A. On the spectrum of the Steklov problem in peak-shaped domains. *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society*, 2008, vol. XIV, p. 103–168.
6. Nazarov S.A. Asymptotics of the Solution of the Steklov Spectral Problem in a Domain with a Blunted Peak. *Math. Notes*, 2009, vol. 86, no. 4, p. 542–555.
7. Chechkina A.G. Convergence of Solutions and Eigenvalues of Steklov Type Boundary Value Problems with Boundary Conditions of Rapidly Varying Type. *Journal of Mathematical Science*, 2009, vol. 162, no. 3, p. 443–458.
8. Chechkina A.G. On Singular Perturbations of a Steklov-Type Problem with Asymptotically Degenerate Spectrum. *Doklady Mathematics*, 2011, vol. 84, no. 2, p. 695–698.
9. Chechkina A.G. Homogenization of Spectral Problems with Singular Perturbation of the Steklov Condition. *Izvestiya: Mathematics*, 2017, vol. 81, no. 1, p. 199–236.
10. Chechkina A.G., D'Apice C., De Maio U. Rate of Convergence of Eigenvalues to Singularly Perturbed Steklov-Type Problem for Elasticity System. *Applicable Analysis*, 2019, vol. 98, no. 1–2, p. 32–44. Online first 10.1080/00036811.2017.1416104
11. Chiado Piat V., Nazarov S., Piatnitski A. Steklov problems in perforated domains with s coefficient of indefinite sign. *Networks Heter. Media*, 2012, vol. 7, no. 1, p. 151–178.
12. Samarskii A.A. О влиянии закрепления на собственные частоты замкнутых областей [On the Influence of clamping to Eigenvalues of Closed Domains]. *Doklady SSSR. Mathematics*. 1948, vol. 63, no. 6, p. 631–634. In Russian.
13. Swanson C.A. Asymptotic Variational Formulae for Eigenvalues. *Canad. Math. Bul.* 1963, vol. 6, no. 1, p. 1525.
14. Ozawa Sh. Singular Hadamard's Variation of Domains and Eigenvalues of Laplacian I. *Proc. Japan Acad. Ser. A*, 1981, vol. 57, no. 5, p. 242–246.
15. Maz'ya V.G., Nazarov S.A., Plamenevskii B.A., Asymptotic expansions of the eigenvalues of boundary value problems for the Laplace operator in domains with small holes. *Math. USSR-Izvestia*, 1985, vol. 24, no. 2, p. 321–345.
16. Gadyl'shin R.R. Singuljarno vozmushchennye zadachi dlja operatora Helmholtza. *Singularly Perturbed problem for the Helmholtz Operator*. In: Differential Equations with Small Parameter. Sverdlovsk, UrO AN SSSR, 1984, p. 18–35. In Russian.
17. Gadyl'shin R.R. Asymptotic properties of an eigenvalue of a problem for a singularly perturbed self-adjoint elliptic equation with a small parameter in the boundary conditions. *Differ. Equations*, 1985, vol. 22, p. 474–483.
18. Gadyl'shin R.R. *Spektr ellipticheskoy kraevoy zadachi s singuljarnym vozmushcheniem kraevykh uslovij Spectrum of Elliptic Boundary Value Problems with Singular Perturbation of Boundary Conditions*. In: Asymptotic Properties of Solutions to Differential Equations. Ufa. BNC UrO AN SSSR, 1988, p. 3–15. In Russian.
19. Il'in A.M. Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems, Translations of Math. Monographs 102, AMS, Providence, 1992.
20. Gadyl'shin R.R., Koroleva Yu.O., Chechkin G.A. On the eigenvalue of the Laplacian in a domain perforated along the boundary. *Doklady Mathematics*, 2010, vol. 81, no. 3, p. 337–341.
21. Gadyl'shin R.R. Splitting a multiple eigenvalue in the boundary value problem for a membrane clamped on a small part of the boundary. *Sib. Math. J.*, 1993, vol. 34, no. 3, p. 433–450.
22. Gadyl'shin R.R., Piatnitski A.L., Chechkin G.A. On Asymptotic Behavior of Eigenvalues of a Boundary Value Problem in Plane Domain of the Steklov Sieve Type. *Izvestia RAS*, 2018, vol. 82, no. 6, p. 37–64.
23. Abdullazade N.N., Chechkin G.A. On Perturbation of a Steklov problem on a Small Part of the Boundary.

- Journal of Mathematical Sciences*, 2014, vol. 196, no. 4, p. 441–451.
24. Chechkin G.A., D'Apice C., De Maio U., Gadyl'shin R.R. On Singularly Perturbed Steklov problem in Domain Perforated Along the Boundary. *C R Mécanique*, 2016, t. 344, no. 1, p. 12–18.
 25. Borisov D.I. Boundary-value problem in a cylinder with frequently changing type of boundary. *Sb. Math.*, 2002, vol. 193, no. 7, p. 977–1008.
 26. Borisov D.I. On a model boundary value problem for Laplacian with frequently alternating type of boundary condition. *Asymptotic Analysis*, 2003, vol. 35, no. 1, p. 1–26.
 27. Borisov D.I. O RT-simmetrichnom volnovode s paroj malen'kikh otverstij On RT-symmetric waveguide with couple of small holes. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics UrO RAS*, 2012, vol. 18, no. 2, p. 22–37. In Russian.
 28. Borisov D., Cardone G., Durante T. Homogenization and uniform resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section: A Mathematics*, 2016, vol. 146, no. 6, p. 1115–1158.
 29. Borisov D. Creation of spectral bands for a periodic domain with small windows. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 2016, vol. 23, no. 1, p. 19–34.
 30. Borisov D.I., Mukhametrakhimova A.I. On norm resolvent convergence for elliptic operators in multi-dimensional domains with small holes. *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 232, no. 3, p. 283–298.
 31. Chechkin G.A. On Vibration of Partially Fastened Membrane with Many “Light” Concentrated Masses on the Boundary. *C R Mécanique*, 2004, vol. 332, no. 12, p. 949–954.
 32. Amirat Y., Chechkin G.A., Gadyl'shin R.R. Asymptotics of Simple Eigenvalues and Eigenfunctions for the Laplace Operator in a Domain with Oscillating Boundary. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2006, vol. 46, no. 1, p. 97–110.
 33. Mel'nyk T.A., Chechkin G.A. Homogenization of a Boundary-Value Problem in a Thick 3-Dimensional Multilevel Junction. *Russian Academy of Sciences. Sbornik. Mathematics*, 2009, vol. 200, no. 3, p. 357–383.
 34. Amirat Y., Chechkin G.A., Gadyl'shin R.R. Asymptotics of the Solution of a Dirichlet Spectral Problem in a Junction with Highly Oscillating Boundary. *C R Mécanique*, 2008, vol. 336, no. 9, p. 693–698.
 35. Il'in A.M., A boundary value problem for the elliptic equation of second order in a domain with a narrow slit. 1. The two-dimensional case. *Math. USSR-Sb.*, 1976, vol. 28, no. 4, p. 459–480.
 36. Il'in A.M., A boundary value problem for the second order elliptic equation in a domain with a narrow slit. 2. Domain with a small cavity. *Math. USSR-Sb.*, 1977, vol. 32, no. 2, p. 227–244.
 37. Il'in A.M. Issledovanie asimptotiki reshenij ellipticheskoy kraevoy zadachi v oblasti s malym otverstiem An investigation of the asymptotics for a solution of an elliptic boundary value problem in a domain with a small hole. *Trudy Semin. I.G. Petrovskogo*, 1981, vol. 6, p. 57–82. In Russian.
 38. Chechkin G.A. Asymptotic Expansion of Eigenvalues and Eigenfunctions of an Elliptic Operator in a Domain with Many “Light” Concentrated Masses Situated on the Boundary. Two-Dimensional Case. *Izvestia: Mathematics*, 2005, vol. 69, no. 4, p. 805–846.
 39. Borisov D.I. Asymptotics and estimates for the eigenvalues of the Laplacian with frequently alternating nonperiodic boundary conditions. *Izvestia: Mathematics*, 2003, vol. 67, no. 6, p. 1101–1148.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОДНОГО ОБЫКНОВЕННОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

© 2019 г. Ю. Е. Семенова^{1,*}, Д. И. Синельщиков^{1,**}, Н. А. Кудряшов^{1,***}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия

*e-mail: uesemenova@gmail.com

**e-mail: DISinelshchikov@mephi.ru

***e-mail: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию 11.03.2019 г.

После доработки 29.03.2019 г.

Принята к публикации 26.04.2019 г.

В работе находятся первые интегралы для одного автономного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка, полученного как частный случай одного из высших аналогов уравнения Пенлеве. С помощью алгоритма С.В. Ковалевской рассматриваемое уравнение исследуется на наличие свойства Пенлеве. Показано, что с помощью теста Пенлеве нельзя установить условия, необходимые для отсутствия критических подвижных особых точек у общего решения. Подробно рассматриваются два частных случая исследуемого уравнения, с конкретными значениями входящих в него параметров. Для нахождения первых интегралов полученных уравнений используется предположение об их линейной зависимости от старшей производной.

Показано, что одно из полученных уравнений третьего порядка также имеет первый интеграл аналогичного вида, а наличие у него свойства Пенлеве не может быть установлено используемыми в работе подходами. Найденный первый интеграл этого уравнения используется для приведения уравнения к уравнению второго порядка. Показано, что полученное уравнение не обладает первым интегралом вида, аналогичного случаям уравнения третьего и четвертого порядка.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, высший аналог уравнения Пенлеве, первые интегралы, свойство Пенлеве

DOI: 10.1134/S2304487X1903012X

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка, полученное в [1], которое при условии $\alpha = 0$ становится автономным:

$$u_{xxxx} - 3 \frac{u_x u_{xxx}}{u} - \frac{7u_{xx}^2}{2u} + \frac{17u_x^2 u_{xx}}{2u^2} - \frac{27u_x^4}{8u^3} + \left(\beta - \frac{5\sigma}{u^2}\right) u_{xx} - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{u} - \frac{15\sigma}{u^3}\right) u_x^2 + \quad (1.1)$$
$$+ 2\nu u^2 - 2\alpha x u + \frac{\beta\sigma}{u} - \frac{3\sigma^2}{2u^3} = 0.$$

Целью работы является нахождение первых интегралов данного уравнения в случае $\alpha = 0$.

2. ТЕСТ НА НАЛИЧИЕ У УРАВНЕНИЯ (1.1) СВОЙСТВА ПЕНЛЕВЕ

Рассмотрим (1.1) с помощью алгоритма С.В. Ковалевской, усовершенствованного в работе М. Абловица, А. Рамани и Х. Сигура [2, 3]. Данный алгоритм представлен в ряде работ. Подробнее с ним можно ознакомиться, например, в книге [4]. Порядок полюса уравнения (1.1) равен четырем, поэтому ищем решение в виде:

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^{j-4}. \quad (2.1)$$

Полагая

$$u(x) = a_0 (x - x_0)^{-p} + a_r (x - x_0)^{r-p}, \quad a_0 = \frac{72}{\nu}, \quad (2.2)$$

найдем значение r для индексов Фукса

$$r_1 = -3, \quad r_2 = -1, \quad r_3 = 6, \quad r_4 = 8. \quad (2.3)$$

Далее получаем значения для a_j , где $j = 0, \dots, 8$:

$$a_0 = \frac{72}{v}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{12\beta}{5v}, \quad (2.4)$$

$$a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{1}{350} \frac{\beta^2}{v}, \quad a_5 = \frac{\alpha}{v}, \quad a_7 = -\frac{2}{75} \frac{\alpha\beta}{v},$$

где a_6, a_8 – произвольные коэффициенты. Поскольку один из индексов Фукса имеет отрицательное значение, нельзя определенно сказать, имеет ли общее решение уравнения критические подвижные особые точки.

3. ПЕРВЫЙ ИНТЕГРАЛ УРАВНЕНИЯ (3.1)

Полагая в уравнении (1.1) $\alpha = 0$ и $\delta = 0$, получаем уравнение

$$E(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{xxxx}) = u_{xxxx} - 3 \frac{u_x u_{xxx}}{u} - \frac{7u_{xx}^2}{2u} + \frac{17u_x^2 u_{xx}}{2u^2} - \frac{27u_x^4}{8u^3} + \beta u_{xx} - \frac{1}{2u} \beta u_x^2 + 2vu^2 = 0. \quad (3.1)$$

Введем обозначение:

$$D_x = \frac{\partial}{\partial u} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + u_{xxxx} \frac{\partial}{\partial u_{xxxx}}. \quad (3.2)$$

Тогда

$$D_x I|_{E=0} = 0. \quad (3.3)$$

Предположим, что $I(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx})$ имеет вид

$$I(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}) = A(u, u_x, u_{xx}) u_{xxx} + B(u, u_x, u_{xx}). \quad (3.4)$$

Подставляя (3.4) в (3.1) и приводим подобные члены относительно u_{xxx} . В результате получим

$$A_{u_{xxx}} u_{xxx}^2 + \left(u_x A_u + u_{xx} A_{u_x} + B_{u_{xx}} + \frac{3u_x}{u} A \right) u_{xxx} + u_x B_u + u_{xx} B_{u_x} + \frac{7u_{xx}^2}{2u} - \frac{17u_x^2 u_{xx}}{2u^2} + \frac{27u_x^4}{8u^3} - \beta u_{xx} + \frac{1}{2u} \beta u_x^2 - 2vu^2. \quad (3.5)$$

Приравняем коэффициенты при степенях u_{xxx} к нулю, находим выражения для $A(u, u_x, u_{xx})$ и $B(u, u_x, u_{xx})$:

$$A = \frac{u_x}{u}, \quad B = u^2 v + Cv + \frac{1}{2u^3} \times \left(\beta u_x^2 u^2 + \frac{25u_x^4}{4} \right) - \frac{1}{2u} \left(u_{xx} + \frac{2u_x^2}{u} \right)^2. \quad (3.6)$$

Тогда первый интеграл уравнения (3.1) имеет вид

$$\frac{u_x u_{xxx}}{u} + \frac{1}{2u^3} \left(\beta u_x^2 u^2 + \frac{25u_x^4}{4} \right) - \frac{1}{2u} \left(u_{xx} + \frac{2u_x^2}{u} \right)^2 + u^2 v + C_0 = 0, \quad (3.7)$$

где C_0 – произвольная постоянная.

Далее положим в уравнении (1.1) $\alpha = 0$ и получим уравнение

$$u_{xxxx} - 3 \frac{u_x u_{xxx}}{u} - \frac{7u_{xx}^2}{2u} + \frac{17u_x^2 u_{xx}}{2u^2} - \frac{27u_x^4}{8u^3} + \left(\beta - \frac{5\sigma}{u^2} \right) u_{xx} - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{u} - \frac{15\sigma}{u^3} \right) u_x^2 + 2vu^2 + \frac{\beta\sigma}{u} - \frac{3\sigma^2}{2u^3} = 0. \quad (3.8)$$

Действуя по аналогии со случаем нахождения первого интеграла для уравнения (3.1), получим первый интеграл для уравнения (3.8):

$$\frac{2u_x u_{xxx}}{u} + 2vu^2 - \frac{1}{u} (-u_x^2 \beta + u_{xx}^2 + 2\beta\sigma) - \frac{4u_x^2 u_{xx}}{u^2} + \frac{1}{u^3} \left(\frac{9u_x^4}{4} - 5u_x^2 \sigma + \delta^2 \right) + C_1 = 0, \quad (3.9)$$

где C_1 – произвольная постоянная.

4. ТЕСТ НА НАЛИЧИЕ СВОЙСТВА ПЕНЛЕВЕ ДЛЯ ПЕРВОГО ИНТЕГРАЛА УРАВНЕНИЯ (3.1)

Полученное в предыдущем разделе уравнение

$$\frac{u_x u_{xxx}}{u} + \frac{1}{2u^3} \left(\beta u_x^2 u^2 + \frac{25u_x^4}{4} \right) - \frac{1}{2u} \left(u_{xx} + \frac{2u_x^2}{u} \right)^2 + u^2 v + C_0 v = 0, \quad (4.1)$$

которое является первым интегралом для уравнения (3.1), будем рассматривать в соответствии с алгоритмом С.В. Ковалевской, усовершенствованном в работе М. Абловица, А. Рамани и Х. Сигура [2, 3]. Все действия выполняются аналогично случаю, описанному в предыдущем разделе работы. Предполагаем, что $u(x)$ выглядит как:

$$u(x) = a_0 x^{-p} + bx^{-r-p} = \frac{72}{v} x^{-4} + bx^{-r-4}, \quad (4.2)$$

откуда найдем значение r для индексов Фукса

$$r_1 = -3, \quad r_2 = -1, \quad r_3 = 6 \tag{4.3}$$

Далее проверим, действительно ли коэффициент a_6 будет независимым. Для этого найдем коэффициенты a_j , где $j = 0, \dots, 7$. Получаем следующие значения для a_j , где $j = 0, \dots, 7$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{72}{v}, & a_1 &= 0, & a_2 &= -\frac{12\beta}{5v}, \\ a_3 &= 0, & a_4 &= \frac{1}{350} \frac{\beta^2}{v}, & a_5 &= \frac{\alpha}{v}, & a_7 &= 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

a_6 – произвольный коэффициент.

5. ПЕРВЫЙ ИНТЕГРАЛ УРАВНЕНИЯ (3.8)

Далее найдем первый интеграл уравнения (3.8). На первом шаге приведем рассматриваемое уравнение к виду

$$\begin{aligned} E_1 &= u_{xxx} + \frac{1}{2}\beta u_x + \frac{9u_x^3}{8u^2} - \\ &- \frac{1}{2} \frac{u_{xx}^2}{u_x} - \frac{2u_x u_{xx}}{u} + \frac{u^3 v}{u_x} + \frac{C_0 v u}{u_x} = 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Последующие шаги произведем аналогично. Пусть

$$I_2 = I_2(u, u_x, u_{xx}) \tag{5.2}$$

– первый интеграл уравнения (5.1).

$$DI_2|_E = u_x I_{2u} + u_{xx} I_{2u_x} + f(u, u_x, u_{xx}) I_{2u_{xx}} = 0. \tag{5.3}$$

Предположим, что $I_2(u, u_x, u_{xx})$ имеет вид

$$\begin{aligned} I_2(u, u_x, u_{xx}) &= A_0(u, u_x) u_{xx}^4 + \\ &+ A_1(u, u_x) u_{xx}^3 + A_2(u, u_x) u_{xx}^2 + \\ &+ A_3(u, u_x) u_{xx} + A_4(u, u_x) = 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Подставим (5.4) в (5.3) и приведем подобные относительно степеней u_{xx} . В получившемся уравнении приравняем коэффициенты при u_{xx}^m (где $m = 0, \dots, 4$) к нулю, в результате чего получим систему дифференциальных уравнений, из которой найдем значения функций A_n , где $n = 0, \dots, 5$

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{u_x^2 u^2}, & A_1 &= -\frac{4}{u^3}, \\ A_2 &= \frac{2\beta}{u^2} + \frac{11u_x^2}{2u^4} - \frac{4v}{u_x^2} \left(u + \frac{C_0}{u} \right), \\ A_3 &= 16v - \frac{4u_x^2 \beta}{u^3} - \frac{3u_x^4}{u^5}, \\ A_4 &= \frac{4u^4 v^2}{u_x^2} + \frac{8v^2 C_0 u^2}{u_x^2} + 4u\beta v - \\ &- \frac{15u_x^2 v}{u} + \frac{4\beta C_0 v}{u_x^2 u} + \frac{\beta^2 u_x^2}{u^2} + \frac{v C_0 u_x^2}{u^3} + \frac{3\beta u_x^4}{2u^4} + \\ &+ \frac{9u_x^6}{16u^6} + \frac{4C_2}{u^6 u_x^2} + \frac{16v^2 C_0^2}{u^6 u_x^4}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

где C_2 – произвольная константа. Таким образом

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{u_{xx}^4}{2u_x^2 u^2} - \frac{4u_{xx}^3}{u^3} + \left(\frac{2\beta}{u^2} + \frac{11u_x^2}{2u^4} - \frac{4v}{u_x^2} \left[u + \frac{C_0}{u} \right] \right) u_{xx}^2 + \\ &+ \left(16v - \frac{4u_x^2 \beta}{u^3} - \frac{3u_x^4}{u^5} \right) u_{xx} + \frac{4u^4 v^2}{u_x^2} + \\ &+ \frac{8v^2 C_0 u^2}{u_x^2} + 4u\beta v - \frac{15u_x^2 v}{u} + \frac{4\beta C_0 v}{u_x^2 u} + \\ &+ \frac{\beta^2 u_x^2}{u^2} + \frac{v C_0 u_x^2}{u^3} + \frac{3\beta u_x^4}{2u^4} + \frac{9u_x^6}{16u^6} + \frac{4C_2}{u^6 u_x^2} + \frac{16v^2 C_0^2}{u^6 u_x^4}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Для уравнения (3.9) аналогично может быть получен первый интеграл, являющийся полиномом четвертой степени от u_{xx} . Однако, в данной работе он не приводится, так как имеет громоздкий вид.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе уравнение (1.1) исследовано на наличие свойства Пенлеве с помощью алгоритма С.В. Ковалевской. Установлено, что с помощью данного метода нельзя определить, выполняется ли для уравнения (1.1) свойство Пенлеве. Для более точного анализа наличия свойства требуется производить дополнительные исследования, используя алгоритм Конта–Форди–Пикеринга.

Также были найдены первые интегралы для частных случаев уравнения (1.1) в случаях $\alpha = 0$ (3.9) и $\alpha = \delta = 0$ (3.7). Также для (3.7) был произведен тест на наличие свойства Пенлеве и найден первый интеграл.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-29-10039.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kudryashov N.A.* Fourth-order analogies to the Painlevé equations // *J. Phys. A: Math. and Theor.* 2002. V. 35. P. 4617–4632. doi: 10.1088/0305-4470/35/21/310
2. *Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H.* A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type // *J. Math. Phys.* 1980. V. 21. P. 715–721, 1006–1015.
3. *Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H.* Nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of Painlevé type // *Lett. al Nuovo Cim.* 1978. V. 23. P. 333–338.
4. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Интеллект, 2010, 364 с.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2019, vol. 8, no. 3, pp. 264–267

First Integrals of One Fourth Order Ordinary Differential Equation

Yu. E. Semenova^{a,#}, D. I. Sinelshchikov^{a,##}, and N. A. Kudryashov^{a,###}

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: uesemenova@gmail.com,

^{##}e-mail: DISinelshchikov@mephi.ru,

^{###}e-mail: nakudr@gmail.com

Received March 11, 2019; revised March 29, 2019; accepted April 26, 2019

Abstract—First integrals for one fourth-order ordinary differential equation that is a special case of one of the higher analogues of the Painlevé equation have been found. The equation has been studied for the presence of the Painlevé property using the Kovalevskaya algorithm. It has been shown that the method used does not allow to accurately determining whether the general solution of the equation has critical moving singular points or not. Two particular cases of the equation under study with certain values of its parameters contained have been considered in detail. To find the first integrals of the resulting equations, their linear dependence on the highest derivative is assumed. The found first integrals are used to reduce the order of the equations under study. This equation does not have any first integral of a similar form. The found first integral of this equation is used to reduce the equation to a second order equation. It has been shown that the resulting equation does not have a first integral of the form similar to the cases of the third and fourth order equations.

Keywords: nonlinear differential equation, higher analog of the Painlevé equation, first integrals, Painlevé property

DOI: 10.1134/S2304487X1903012X

REFERENCES

1. *Kudryashov N.A.*, Fourth-order analogies to the Painlevé equations. *J. Phys. A: Math. and Theor.*, 2002, vol. 35, pp. 4617–4632. doi: 10.1088/0305-4470/35/21/310
2. *Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H.*, A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. *J. Math. Phys.*, 1980, vol. 21, pp. 715–721, 1006–1015.
3. *Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H.*, differential equations of Painlevé type. *Lett. al Nuovo Cim.*, 1978, vol. 23, pp. 333–338.
4. *Kudryashov N.A.*, *Methods of Nonlinear Mathematical Physics*, Dolgoprudny: Intellekt, 2010, 364 p. (in Russian).

УДК 621.314

РАСЧЕТНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕПЛООВОГО СОСТОЯНИЯ ИСПЫТАТЕЛЬНЫХ СТЕНДОВ БМ-П И БМ-ЛР

© 2019 г. А. А. Рякин^{1,2,*}, Е. С. Горбачева^{1,2}, О. В. Койнов^{1,2}, М. В. Никульшин^{1,2}

¹ Снежинский физико-технический институт –
филиал Национального исследовательского ядерного университета “МИФИ”,
Снежинск, 456776, Россия

² Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики имени акад. Е.И. Забабахина,
Снежинск, 456770, Россия

*e-mail: artemryakin@mail.ru

Поступила в редакцию 29.01.2019 г.

После доработки 29.03.2019 г.

Принята к публикации 09.04.2019 г.

В настоящее время в РФЯЦ ВНИИТФ проводятся исследования реактора водорода на основе высокопористых ячеистых материалов. Рекомбинатор служит для беспламенного сжигания водорода. В реакторе при протекании через пористый катализатор происходят различные физико-химические процессы, основными из которых являются экзотермическая химическая реакция окисления водорода на каталитических поверхностях реактора и конвективное течение газовой смеси через каталитический блок. Эти процессы определяют технические характеристики реактора, наиболее важной является производительность, измеряемая при заданном составе входящего газа. Для проведения испытаний по определению диапазона концентраций водорода, в котором осуществляется режим беспламенной работы реактора при атмосферном давлении, повышенных температурах и влажностях, характерных для сценария тяжелых аварий на АЭС, используются камеры БМ-ЛР и БМ-П. Камера БМ-ЛР представляет собой внутреннюю камеру (пятитонный железнодорожный контейнер), и внешний термос (слой минеральной ваты и стекломаневная плита). Внутренняя камера обеспечивает герметичность, одна из стенок камеры для возможности видеофиксации результатов эксперимента закрыта листом поликарбоната, который вылетит при повышении давления во время воспламенения водорода и сохранит целостность металлической части камеры. Необходимая температура для проведения эксперимента поддерживается при помощи тепловых пушек. Камера БМ-П представляет собой стальной цилиндр высотой 4 м и диаметром 2 м. На стенках камеры имеются окна для возможности скоростной видеосъемки процессов конденсации и распространения пламени. Конструкция камеры позволяет сохранять герметичность при высоких давлениях, и способна выдерживать значительные взрывные нагрузки, возникающие вследствие воспламенения пароводяной смеси. В данной статье представлена информация о результатах расчетных исследований температурных полей камер БМ-ЛР и БМ-П при различных режимах работы реактора. Определены максимальные значения температуры, и поля скоростей газовой смеси, движущейся в камерах при работе реактора.

Ключевые слова: водородная безопасность, реактор, температурное поле, поле скоростей

DOI: 10.1134/S2304487X19030118

В настоящее время в РФЯЦ ВНИИТФ проводятся исследования реактора водорода на основе высокопористых ячеистых материалов. Рекомбинатор (рис. 1) служит для беспламенного сжигания водорода. В реакторе при протекании через пористый катализатор происходят различные физико-химические процессы, основными из которых являются экзотермическая химическая реакция окисления водорода на каталитических поверхностях реактора и конвективное течение газовой смеси через каталитический блок. Эти процессы определяют технические характери-

сти реактора, наиболее важной является производительность, измеряемая при заданном составе входящего газа.

Для проведения испытаний по определению диапазона концентраций водорода, в котором осуществляется режим беспламенной работы реактора при атмосферном давлении, повышенных температурах и влажностях, характерных для сценария тяжелых аварий на АЭС, используются камеры БМ-ЛР и БМ-П.

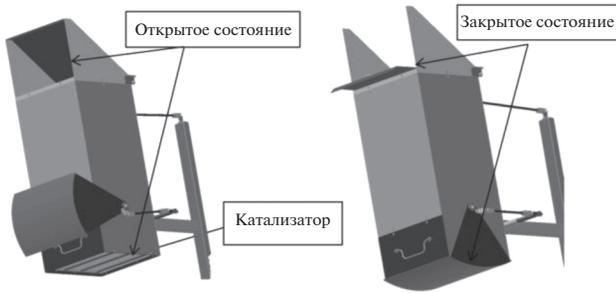


Рис. 1. Конструкция рекомбинатора.

Камера БМ-ЛР представляет собой внутреннюю камеру (пятитонный железнодорожный контейнер), и внешний термос (слой минеральной ваты и стекломagneвная плита). Внутренняя камера обеспечивает герметичность, одна из стенок камеры для возможности видео фиксации результатов эксперимента закрыта листом поликарбоната, который вылетит при повышении давления во время воспламенения водорода и сохранит целостность металлической части камеры. Необходимая температура для проведения эксперимента поддерживается при помощи тепловых пушек.

Камера БМ-П представляет собой стальной цилиндр высотой 5 м и диаметром 2 м. На стенках камеры имеются окна для возможности скоростной видеосъемки процессов конденсации и распространения пламени. Конструкция камеры позволяет сохранять герметичность при высоких давлениях, и способна выдерживать значительные взрывные нагрузки, возникающие вследствие воспламенения пароводяной смеси.

Предварительные расчеты необходимы для прогнозирования процессов, вероятных при проведении экспериментов, оценки температурных

режимов и обеспечивающих необходимые условия для тестирования рекомбинатора.

Цели расчетов камеры БМ-П: расчетное обоснование достаточности системы охлаждения для поддержания постоянной температуры газовой смеси внутри камеры.

Цели расчетов камеры БМ-ЛР: определение времени, за которое температура поликарбонатного листа превысит температуру плавления поликарбоната 150°C.

Задачи расчетов камеры БМ-П и БМ-ЛР:

- Моделирование работы блока катализаторов;
- Определение максимальных температур в камерах при работе рекомбинатора;
- Расчет полей скоростей газовой смеси, движущейся в установке при работе рекомбинатора;

При концентрации водорода 3% энерговыделение катализатора составляет 9.6 кВт. Для концентрации водорода до 8% повышает энерговыделение до 24 кВт.

Конечно-элементная модель камеры БМ-П представлена на рис. 4.

Расчеты камеры БМ-П проводились для четырех вариантов начальных условий с включенной и выключенной системой охлаждения. Температура теплоносителя в системе охлаждения принималась равной 20°C.

Газовая смесь моделировалась при помощи типа элемента соответствующего газу/жидкости, катализатор моделировался типом элемента пористое тело.

В расчетах использовалась модель турбулентности $k-\epsilon$ и учитывалась гравитация.

Максимальная температура в камере БМ-П при давлении $P = 500$ кПа и $T = 110^\circ\text{C}$ на момент времени 1710 с, с включенной системой охлаждения составляет 455.6°C.



Рис. 2. Камера БМ-ЛР.

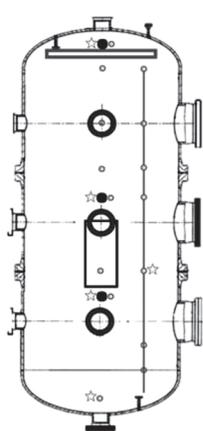


Рис. 3. Камера БМ-П.

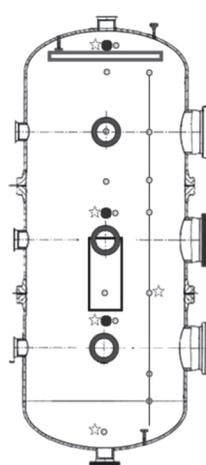


Рис. 4. Конечно-элементная модель камеры БМ-П.

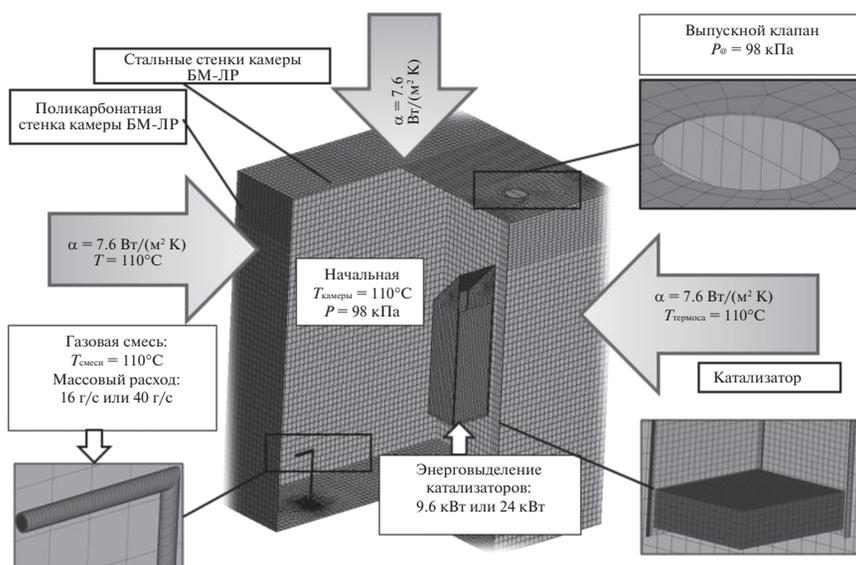
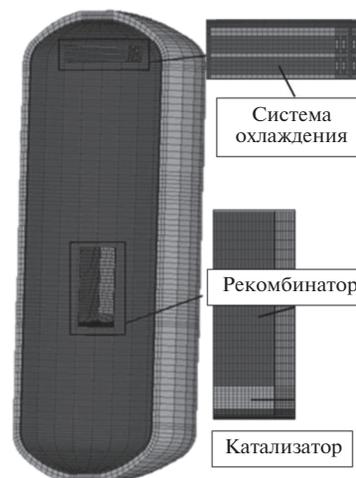


Рис. 5. Конечно-элементная модель и граничные условия БМ-ЛР.

Сравнение результатов расчетов с включенной и выключенной системой охлаждения показывает:

- Выключенная система охлаждения в камере благодаря своей значительной теплоемкости влияет на температурное поле внутри камеры, понижая максимальную температуру газовой смеси, проходящей через нее;
- Включенная система охлаждения понижает максимальную температуру газовой смеси в камере до 20°С , а среднюю температуру газовой смеси до 40°С ;
- Для увеличения эффективности работы системы охлаждения следует понизить температуру воздуха в теплообменнике или увеличить его размеры.

Конечно-элементная модель камеры БМ-ЛР и граничные условия представлены на рис. 5.

Установка предварительно прогревается тепловыми пушками до 110°С , затем заполняется смесью водород–пар–воздух. Начальная температура 110°С соответствует возможной температуре при развитии сценария тяжелой аварии “малая течь”. Для предотвращения окисления водорода на поверхности катализатора до начала эксперимента рекомбинатор находится в закрытом состоянии. Эксперимент начинается в момент открытия входов рекомбинатора. После начала работы рекомбинатора в установку непрерывно подается смесь водорода, пара и воздуха с концентрациями газов, соответствующими стартовому составу.

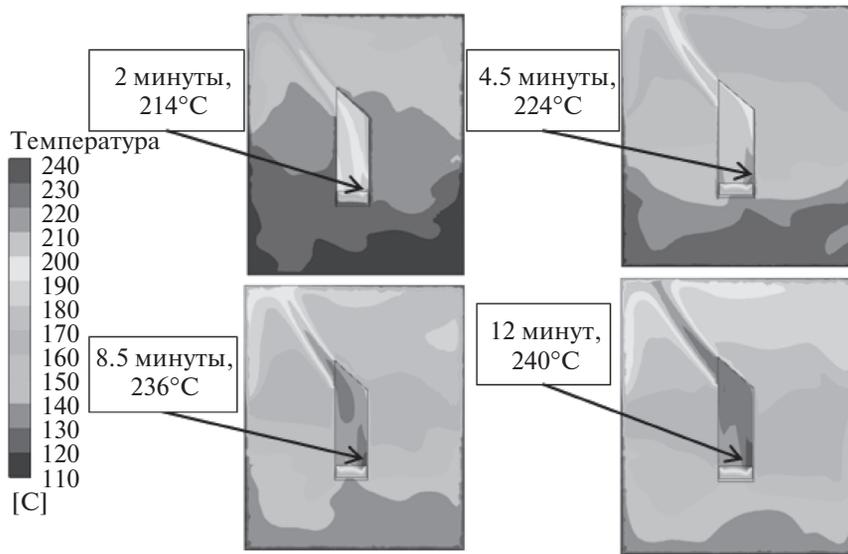


Рис. 6. Температурные поля камеры БМ-ЛР и рекомбинатора на различные моменты времени при режиме энерговыделения 9.6 кВт (°C).

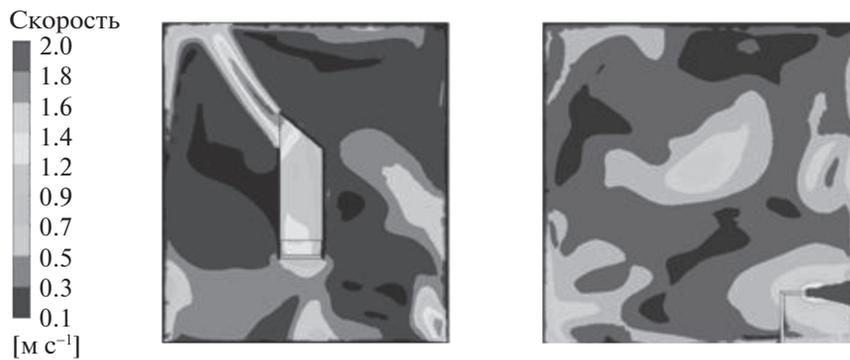


Рис. 7. Поля скоростей воздуха в камере БМ-ЛР и рекомбинаторе на момент времени 8.5 мин при режиме энерговыделения 9.6 кВт (м/с).

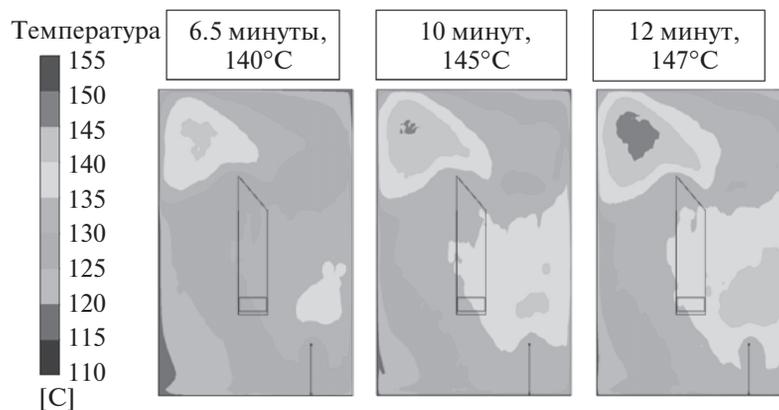


Рис. 8. Температурные поля поликарбонатной стенки камеры БМ-ЛР на различные моменты времени при режиме энерговыделения 9.6 кВт (°C).

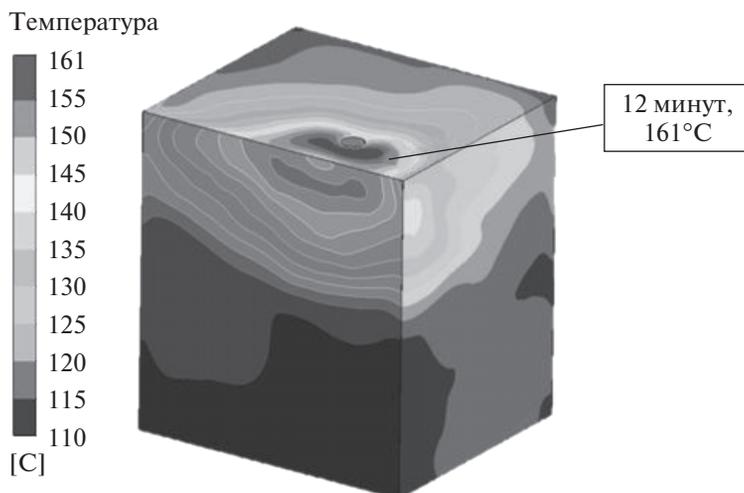


Рис. 9. Температурное поле металлических стенок камеры БМ-ЛР при режиме энерговыделения 9.6 кВт ($^{\circ}\text{C}$).

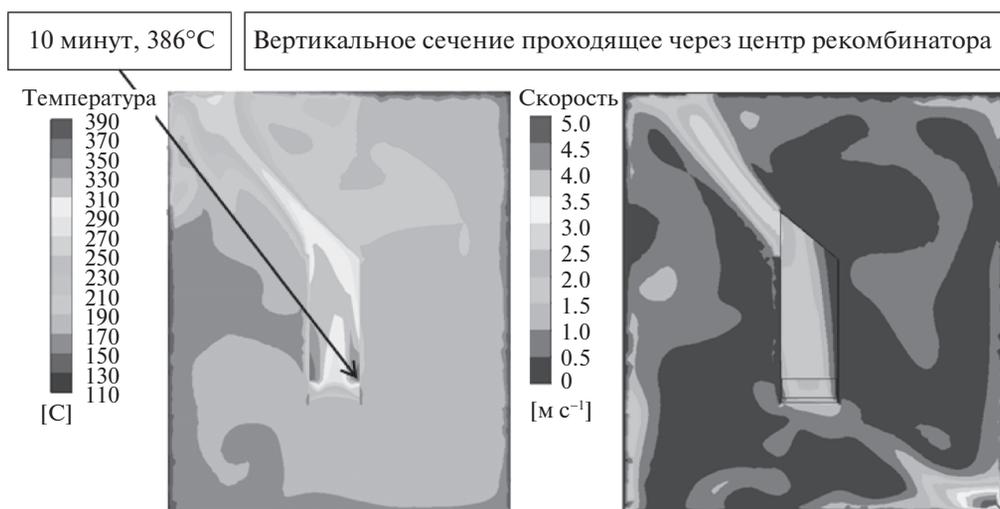


Рис. 10. Температурное поле и камеры БМ-ЛР и рекомбинатора и поле скоростей воздуха при режиме энерговыделения 24 кВт ($^{\circ}\text{C}$).

БМ-ЛР непрерывно обдувается тепловыми пушками (температура воздуха 110°C).

Эксперимент продолжается до момента:

1) превышения температуры смеси в установке значения 140°C (плавление поликарбоната начинается при 150°C);

2) воспламенения смеси в установке.

После завершения эксперимента подачу газов прекращают, установка продувается воздухом или азотом.

Результаты расчетов камеры БМ-ЛР представлены на рис. 6–9.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены результаты расчетных исследований температурных полей камер БМ-ЛР и БМ-П при различных режимах работы рекомбинатора. Определены максимальные значения температуры, и поля скоростей газовой смеси, движущейся в камерах при работе рекомбинатора.

При режиме энерговыделения в катализаторе 9.6 кВт максимальная температура катализатора составляет 245°C на момент времени 12 мин, максимальная температура воздуха – 240°C . Металлические стенки камеры нагреваются до 161°C , стенка из поликарбоната не достигает температуры плавления.

При режиме энерговыделения в катализаторе 24 кВт максимальная температура катализатора

составляет 386°C, значение температуры воздуха 383°C. Температура плавления 150°C на поликарбонатной стенке достигается через 3 мин.

ция на VI Всероссийской научно-практической конференции “Научная сессия НИЯУ МИФИ”, декабрь 2017, Снежинск.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рякин А.А., Горбачева Е.С., Койнов О.В., Никольшин М.В., Путилин О.С.* Расчетные исследования теплового состояния испытательных стендов БМ-П и БМ-ЛР. 2017. С. 1, 19. Тезисы доклада, презентация на VI Всероссийской научно-практической конференции “Научная сессия НИЯУ МИФИ”, декабрь 2017, Снежинск.
2. *Лавренюк И.В., Симоненко В.А., Безгоднов Е.В.* Экспериментальное исследование стратификации и горения ВПГС. 2016. С. 1, 8. Тезисы доклада, презентация доклада на Международную конференцию “XIII Забабакхинские научные чтения”, март 2017, Снежинск.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta “MIFI”, 2019, vol. 8, no. 3, pp. 268–273

Computational Analysis of the Thermal States of BM-P and BM-LR Experimental Facilities

A. A. Ryakin^{a,b,#}, E. S. Gorbacheva^{a,b}, O. V. Koinov^{a,b}, and M. V. Nikulshin^{a,b}

^a *Snezhinsk Physical–Technical Institute, National Research Nuclear University MEPHI (Moscow Engineering Physics Institute), Snezhinsk, Chelyabinskaya oblast, 456776 Russia*

^b *Russian Federal Nuclear Center VNIITF, Snezhinsk, Chelyabinskaya oblast, 456776 Russia*

[#]*e-mail: artemryakin@mail.ru*

Received January 29, 2019; revised March 29, 2019; accepted April @, 2019

Abstract—A hydrogen recombiner based on high-porosity cellular materials is currently studied at the Russian Federal Nuclear Center VNIITF. The hydrogen recombiner is used for flameless hydrogen combustion. Hydrogen flowing through a porous catalyst in the recombiner induces various physical and chemical processes essentially including the exothermal chemical reaction of hydrogen oxidation on the catalyzing surfaces of the recombiner and a convective flow of a gas mixture through the catalyst unit. These processes determine the technical characteristics of the recombiner including the most important efficiency measured at a given input gas composition. The BM-LR and BM-P chambers are used to conduct experiments to estimate the hydrogen concentration range within which the recombiner operates in a flameless mode at atmospheric pressure, high temperatures, and humidity, which are characteristic of severe nuclear power plant accidents [1, 2]. The BM-LR chamber includes an internal chamber (5-t railway container) and a thermally insulated external shell consisting of a mineral wool layer and a glass–magnesium plate. The internal chamber is airtight, one of the walls being covered with a polycarbonate sheet to provide video recording of experimental results. The sheet is pushed away when pressure increases during hydrogen ignition to preserve the integrity of the metal part of the chamber. Heat guns maintain the temperatures required for the experiments. The BM-P chamber is a 4-m-high steel cylinder 2 m in diameter. The walls of the chamber are equipped with windows for high-speed video recording of condensation and flame propagation processes. The chamber is designed to keep air-tightness at high pressures and to withstand high explosive loads produced by an ignited vapor–water mixture. The temperature fields in the BMLR and BM-P chambers for different recombiner operation modes have been computationally analyzed. The maximum temperatures and velocity fields are determined for the gas mixture flowing within the chambers when the recombiner is in operation.

Keywords: hydrogen safety, recombiner, current stabilization, velocity field, temperature field

DOI: 10.1134/S2304487X19030118

REFERENCES

1. Ryakin A.A., Gorbacheva E.S., Koinov O.V., Nikulshin M.V., Computational Analysis of the Thermal States of “BM-P” and “BM-LR” Experimental Facilities, *Tesisi i presentacia doklada VI Vserossiskoi nauchno-prakticheskoi konferencii “Nauchnaia sessia NIAY MIFI”* (Report theses, presentation at VI All-Russian scientifically-practical conference “Scientific session NRNU MEPHI”), Snezhinsk, 2017, 17 p. (in Russian).
2. Lavrenyuk I.V., Simonenko V.A., Bezgodov E.V., Hydrogen–Air–Steam Mixtures Stratification and Deflagration Experimental Research, *Tesisi i presentacia doklada na mezhdunarodnoi konferencii “XIII Zababakhin scientific talks”* (Report theses, presentation at XIII Zababakhin scientific talks), Snezhinsk, 2017, pp. 254–255 (in Russian).

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ ПОМЕХ В ДВУХФАЗНЫХ КМОП ИНВЕРТОРАХ ПРИ СБОРЕ ЗАРЯДА С ТРЕКА ИОНИЗИРУЮЩЕЙ ЧАСТИЦЫ

© 2019 г. В. Я. Стенин^{1,2,*}, Ю. В. Катунин^{2,**}

¹ *Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия*

² *НИИ системных исследований РАН Москва, 117218, Россия*

*e-mail: vystenin@mephi.ru

**e-mail: katunin@cs.niisi.ras.ru

Поступила в редакцию 29.01.2019 г.

После доработки 29.01.2019 г.

Принята к публикации 26.02.2019 г.

Приводятся результаты моделирования сбора заряда с треков одиночных ионизирующих частиц двухфазными КМОП инверторами с проектной нормой 65 нм на двух взаимно связанных каналах (фазах), образующих цепочку. Анализируется возникновение импульсных помех, вызванных сбором заряда с треков, направленных по нормали к поверхности приборной части кристалла, с точками входа трека как в стоковые области транзисторов, так и на расстоянии 0.3–0.7 мкм от них через слой диоксида кремния, изолирующего между собой транзисторы. Длительности импульсов помех на узлах элементов при сборе заряда с трека составляют от 120 до 300 пс, а амплитуды помех относительно напряжений на шине питания или общей шины находятся в пределах от 0.05 до 1.0 В. Распространение импульсов помех по цепочке двухфазных КМОП инверторов происходит только для треков с точками входа в стоковые области транзисторов. При линейной передаче энергии на трек 60 МэВ см²/мг помеха может распространиться на два инвертора, если импульсы помех образовались на двух выходах двухфазного КМОП инвертора и сумма их амплитуд превышает напряжение питания.

Ключевые слова: двухфазный инвертор, импульс помехи, моделирование, одиночная ядерная частица, помехоустойчивость, трек частицы

DOI: 10.1134/S2304487X19030143

1. ВВЕДЕНИЕ

К микропроцессорным КМОП СБИС, используемым в авионике и космической технике, предъявляются высокие требования по устойчивости к воздействиям одиночных ядерных частиц, которые вызывают импульсные помехи и возможные сбои в работе элементов. Как элементы сбоеустойчивых комбинационных схем, были предложены варианты двухфазных 4-транзисторных КМОП инверторов на 2-транзисторных [1, 2] конверторах и 4-транзисторных элементах с экранирующими транзисторами, включенными между двумя выходными транзисторами двухвходного конвертора [3]. Двухфазные КМОП инверторы [2] заимствованы из триггерной структуры DICE [4], 4-транзисторные инверторы и логические элементы на их основе [5, 6] используются в последовательностных элементах, таких как D- и RS-триггеры с перекрестными связями входов образующих их элементов. Двухпортовые эле-

менты [3] не нашли применения из-за их худших характеристик.

Двухфазная логика дает возможность разработки топологии логических элементов с разделением транзисторов на такие группы, когда воздействие только на одну из групп транзисторов не приводит к сбою данных, а дополнительное взаимное разнесение групп на кристалле СБИС повышает порог устойчивости [7].

Практический интерес представляет изучение топологических структур, снижающих уровень импульсных помех при сборе заряда транзисторами с трека частицы, в частности, процессов распределения заряда между транзисторами в цепочке двухфазных инверторов с чередованием их конверторов. Реальный эксперимент с наблюдением такого процесса неосуществим, но виртуальный при моделировании средствами ТСАД позволяет провести такое исследование.

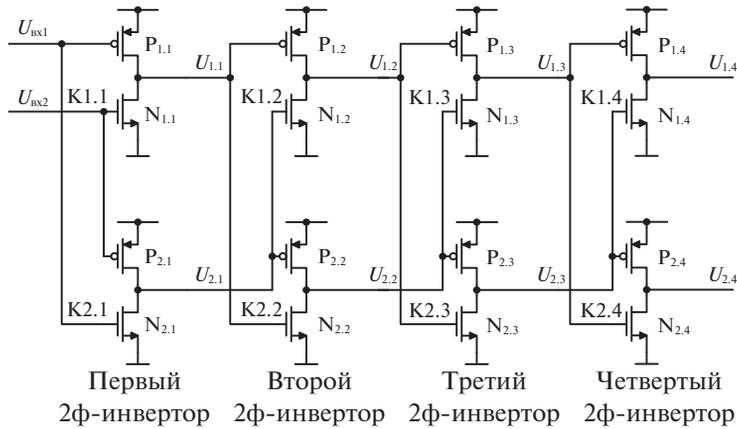


Рис. 1. Каскадное соединение (цепочка) четырех КМОП двухфазных инверторов.

2. ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОМЕХ В ЦЕПОЧКЕ ДВУХФАЗНЫХ ИНВЕРТОРОВ

К двухфазной логике относятся КМОП элементы из двух каналов (фаз), взаимодействующих между собой так, что синфазные составляющие сигналов на входах воспринимаются как информационные, а дифференциальные – как помехи. Воздействия отдельных ядерных частиц приводят к возникновению вдоль трека частицы неравно-

весных носителей заряда, сбор которых через обратно смещенные *pn*-переходы транзисторов приводит к образованию импульсов тока и сопровождающих их импульсных помех на узлах элемента, которые вызывают временные изменения их состояния (single event transients – SET).

На рис. 1 приведена схема цепочки из четырех двухфазных КМОП инверторов (2ф-инверторов) с перекрестными связями входов образующих их конверторов. Конверторы обозначены как K1.1 и K2.1, где первая цифра означает номер конвертора, а вторая цифра – номер его 2ф-инвертора.

Приборное моделирование КМОП транзисторов по объемной 65-нм технологии (с длиной канала 65 нм) проведено на основе 3-D TCAD моделей работы [8]. Эскиз 3-D приборной структуры приведен на рис. 2. КМОП структура соответствует планарной объемной технологии с двойными охранными кольцами и взаимной изоляцией элементов неглубокими канавками (shallow trench isolation – STI). Для наглядности на рис. 2 убрано изображение областей изоляции раздельным оксидом, охватывающим до глубины 400 нм кремниевые области транзисторов. Активные области КМОП транзисторов, собирающих заряд с трека частицы, на рис. 2 представлены кремниевыми “параллелепипедами”, в верхних частях которых выполнены диффузионные *pn*-переходы истоков и стоков транзисторов и их затворы.

3-D приборная структура на рис. 2 включает восемь пар КМОП транзисторов; каждая пара, начиная с первой $N_{1,1}P_{1,1}$, образует двухтранзисторный КМОП конвертор. Четыре транзистора $N_{1,1}P_{1,1}$ и $N_{2,1}P_{2,1}$ (два конвертора K1.1 и K2.1) образуют первый 2ф-инвертор (см. рис. 1 и 2). Транзисторы $N_{1,2}P_{1,2}$ и $N_{2,2}P_{2,2}$ (два конвертора K1.2 и K2.2) образуют второй 2ф-инвертор. В приборной структуре на рис. 2 использовано чередова-

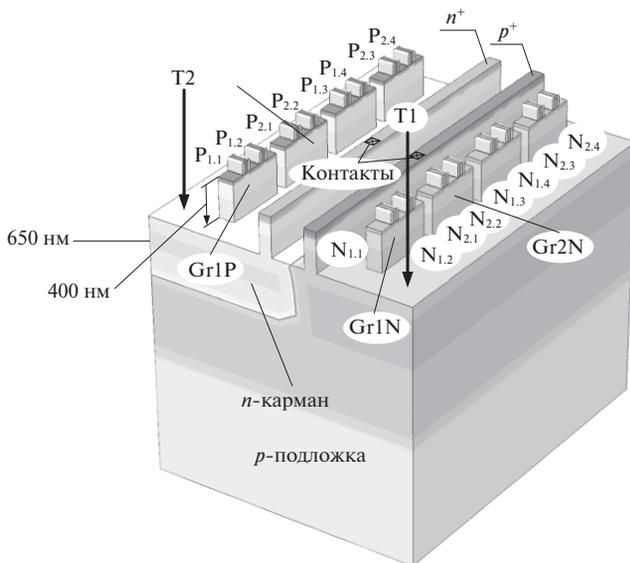


Рис. 2. Приборная 3-D структура модели, включающая все транзисторы цепочки двухфазных инверторов; n^+ и p^+ области – элементы защитных полос, изолирующих области нахождения *N*- и *P*МОП транзисторов; Gr1N – Gr2P – группы из двух транзисторов смежных двухфазных инверторов; даны примеры треков для двух точек входа трека I_n и I_p с направлениями по нормали к поверхности кристалла – трек T1 (в область *N*МОП транзисторов) и трек T2 (в область *P*МОП транзисторов).

ние 2-транзисторных конверторов смежных 2ф-инверторов для разнесения взаимно чувствительных к сбору заряда транзисторов. Поэтому за транзисторами $N_{1,1}P_{1,1}$ первого конвертора из первого 2ф-инвертора на рис. 2 следуют транзисторы $N_{1,2}P_{1,2}$ первого конвертора второго 2ф-инвертора.

Конструктивными группами являются каждый из кремниевых “параллелепипедов” с двумя транзисторами, обозначенные на рис. 2, например, как Gr1N и Gr1P, где цифра соответствует номеру группы, а латинская буква N или P – типу проводимости канала МОП транзисторов в группе. В группы объединены пары транзисторов одного типа проводимости, находящиеся одновременно в разных состояниях (запертом и открытым), которые меняются при смене логических уровней синфазных сигналов U_{BX1} , U_{BX2} на входах первого 2-ф инвертора.

Кремниевый кристалл [9] легирован бором с концентрацией 10^{16} см $^{-3}$, кроме того, приборная часть легирована бором по гауссу с пиковой концентрацией 5×10^{18} см $^{-3}$ на глубине 1.25 мкм и зоной легирования ± 0.4 мкм. Приборные слои легированы по гауссу с пиковой концентрацией 2×10^{18} см $^{-3}$ на глубинах 0.65 мкм бором для ЛМОП транзисторов и мышьяком в *n*-кармане для РМОП транзисторов. Таким образом, под кремниевыми “параллелепипедами” высотой 400 нм образован проводящий слой *p*-типа под ЛМОП транзисторами и *n*-типа под РМОП транзисторами толщиной 200 нм на глубине до 650 нм (рис. 2) от поверхности.

Тестовым воздействием в работе принят сбор заряда с трека, направленного по нормали к поверхности приборной части структуры инверторов. На рис. 2 приведены примеры треков для двух точек входа трека – трек Т1 (в область ЛМОП транзисторов) и трек Т2 (в область РМОП транзисторов). Неравновесные носители заряда, генерируемые вдоль трека, могут образовываться как в кремниевых “параллелепипедах”, в которых выполнены группы из двух транзисторов, так и в тонком слое под ними и слое изолирующего оксида. Величина заряда, генерируемого на треке, зависит от передачи энергии частицей на трек. Энергетическая составляющая генерации носителей заряда характеризуется линейной передачей энергии частицей [10] – (linear energy transfer – LET).

На рис. 3 приведен эскиз топологии цепочки четырех КМОП 2ф-инверторов, на котором дано расположение вариантов точек входа трека частицы, отмеченных маркером “звездочка”, это точки 1n, 2n, 1nC, 2nC при сборе заряда ЛМОП транзисторами и 1p, 2p, 1pC, 2pC при сборе заряда РМОП транзисторами. Дополнительная буква С

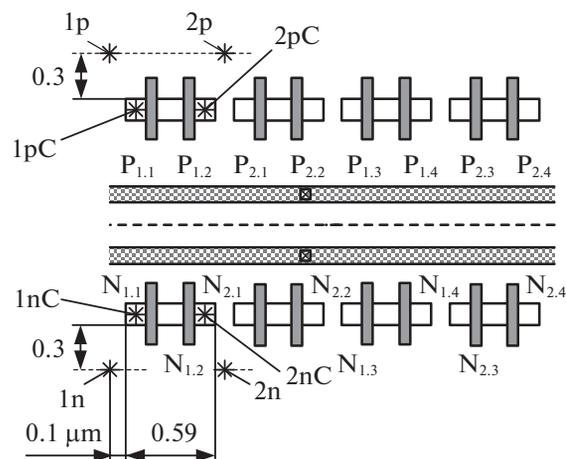


Рис. 3. Эскиз топологии КМОП элемента из четырех двухфазных инверторов; показано расположение вариантов точек входа трека частицы, отмеченных маркером “звездочка”.

означает, что точка входа трека находится на области стока транзистора.

Результаты исследования получены при моделировании средствами 3-D TCAD с использованием симулятора Sentaurus Device при температуре 25°C и напряжении питания 1.0 В для КМОП структур по объемной 65-нм КМОП технологии с шириной каналов транзисторов 150 нм. Трехмерная приборная структура имела размеры 10.9 мкм \times 6.4 мкм при толщине подложки 3.0 мкм.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ ПОМЕХ ПРИ СБОРЕ ЗАРЯДА С ТРЕКА ЧАСТИЦЫ

Неравновесные носители заряда, генерируемые вдоль трека одиночной ионизирующей частицы, могут образовываться как в активных кремниевых “параллелепипедах”, содержащих группы транзисторов из смежных инверторов, так и в тонком кремниевом слое под ними. Первая группа ЛМОП транзисторов Gr1N состоит из транзисторов $N_{1,1}$ и $N_{1,2}$, а вторая, Gr2N, – из $N_{2,1}$ и $N_{2,2}$, которые принадлежат конверторам К2.1 и К2.2 первого и второго 2ф-инверторов (рис. 2 и 3). Подобным образом первая Gr1P и вторая Gr2P группы РМОП транзисторов содержат соответственно транзисторы $P_{1,1}$, $P_{1,2}$ и $P_{2,1}$, $P_{2,2}$ первого и второго 2ф-инверторов.

При точках входов треков, использованных в данной работе, сбор заряда осуществлялся транзисторами первого и второго 2ф-инверторов (рис. 3), поэтому импульсные помехи образовывались на выходных узлах этих инверторов. В табл. 1 приведены результаты определения амплитуд импульсных помех на узлах этих 2ф-инверторов при сборе заряда с треков с точками вхо-

Таблица 1. Значения амплитуд импульсных помех на узлах первого и второго 2ф-инверторов при сборе заряда с трека с направлением по нормали к поверхности приборной модели при LET = 60 МэВ см²/мг

Точка входа трека	1n	2n	1p	2p	1nC	2nC	1pC	2pC
Амплитуда помехи, В (при $U_{ВХ1} = U_{ВХ2} = 0$)	0.302 N _{1.1}	0.283 N _{2.1}	0.029 P _{1.2}	0.05 P _{1.2}	1.0 N _{1.1}	1.0 N _{1.1}	0.889 P _{1.2}	1.0 P _{1.2}
Амплитуда помехи, В (при $U_{ВХ1} = U_{ВХ2} = 1$ В)	0.126 N _{1.2}	0.339 N _{1.2}	0.049 P _{1.1}	0.042 P _{2.1}	1.0 N _{1.2}	1.0 N _{1.2}	1.0 P _{1.1}	0.853 P _{1.1}

Примечание: в таблице рядом со значением амплитуды помещено обозначение транзистора, собиравшего заряд с трека, с номером узла, на котором образована импульсная помеха.

да 1n, 2n, 1p, 2p, 1nC, 2nC, 1pC, 2pC при линейной передаче энергии на трек LET = 60 МэВ см²/мг. Точки входа с добавочным индексом С являются точками входов треков в стоковые области транзисторов. Амплитуды импульсных помех при сборе заряда с треков, точки входа которых 1n, 2n, 1p, 2p находятся вне стоков транзисторов (рис. 3), меньше 0.34 В (табл. 1) и не могут вызвать изменения логического состояния 2ф-инвертора, поэтому детальное их исследование не приводится.

Изменить логическое состояние 2ф-инвертора может сбор заряда с трека, проходящего через область стока транзистора с точками входа 1nC, 2nC, 1pC, 2pC. У этих двух типов трека разные длины отрезков трека, в которых могут генерироваться неравновесные носители заряда (электроны и дырки). В варианте трека с точкой входа в сток транзистора – это отрезки трека длиной 650 нм, а для треков через слой изолирующего оксида – это отрезки трека длиной 250 нм. Пропорционально этим длинам и возникают генерируемые заряды.

Когда точки входа трека находятся снаружи от “островков” активного кремния, где выполнены транзисторы, сбор заряда с таких треков и амплитуда импульса помехи существенно меньше, чем с трека, проходящего через сток транзистора (табл. 1). Благодаря диффузии носителей заряда, с трека по тонкому слою кремния происходит “растекание” заряда в две смежные группы транзисторов, когда вход трека находится вне групп, например, в случае групп Gr1N и Gr2N и трека с входной точкой 2n.

3.1. Сбор заряда НМОП транзисторами с треков с точкой входа трека 2n

На рис. 4а приведены зависимости напряжений на узлах цепочки инверторов при сборе заряда с трека с точкой входа 2n для случая, когда на входах первого 2ф-инвертора напряжения равны нулю $U_{ВХ1} = U_{ВХ2} = 0$. Линейная передача энергии частицей на трек 60 МэВ см²/мг. Точка входа трека 2n расположена на равном расстоянии от границ первой и второй групп транзисторов Gr1N и Gr2N (рис. 2 и 3). Генерируемые на треке носите-

ли заряда (электроны) с трека 2n диффундируют в области обеих групп Gr1N и Gr2N.

При $U_{ВХ1} = U_{ВХ2} = 0$ (табл. 1) заперты транзисторы первого 2ф-инвертора, а именно, N_{1.1} в группе Gr1N и N_{2.1} в группе Gr2N. Они и собирают заряд через свои обратно смещенные стоковые рn-переходы. Транзистор N_{2.1} ближе к точке трека 2n, чем N_{1.1}, он собирает заряд более активно, и амплитуда помехи на узле 2.1 больше (Вых. 2 инв. 1 на рис. 4а), чем помехи на узле 1.1 (Вых. 1 инв. 1): $U_{МАКС.2.1} = 0.28$ В и $U_{МАКС.1.1} = 0.14$ В. Открытые транзисторы N_{1.2} и N_{2.2} собирают заряд незначительно, импульсы помех на узлах 1.2 и 2.2 в диапазоне 0.05–0.14 В.

На рис. 4б приведены зависимости амплитуд импульсных помех на обоих выходах 1.1 и 2.1 первого 2ф-инвертора $U_{МАКС.1.1}(LET)$ и $U_{МАКС.2.1}(LET)$ в зависимости от линейной передачи энергии LET на трек в диапазоне 10–80 МэВ×см²/мг для трека с той же точкой входа 2n. Как уже отмечалось, транзистор N_{2.1} находится ближе к треку, чем N_{1.1} (см. рис. 3), поэтому собираемый им заряд больше и больше амплитуда импульса помехи на узле 2.1 во всем диапазоне передачи энергии частицей на трек.

3.2. Сбор заряда РМОП транзисторами с трека с точкой входа 2pC

На рис. 5 приведены зависимости напряжений на узлах цепочки инверторов при сборе заряда с трека с точкой входа 2pC непосредственно в область стока РМОП транзистора P_{1.2} (рис. 3) для случая, когда на входах первого 2ф-инвертора напряжения $U_{ВХ1} = U_{ВХ2} = 0$ (рис. 5а) и $U_{ВХ1} = U_{ВХ2} = 1$ В (рис. 5б). В обоих случаях линейная передача энергии на трек была 60 МэВ см²/мг.

При $U_{ВХ1} = U_{ВХ2} = 0$ (рис. 5а) заперты транзистор P_{1.2} в группе Gr1P и транзистор P_{2.2} в группе Gr2P. Трек с входной точкой 2pC проходит через стоковую область транзистора P_{1.2}, поэтому транзистор P_{1.2} в основном и собирает заряд. Практически моментально с появлением неравновесных носителей заряда на треке транзистор P_{1.2} из ис-

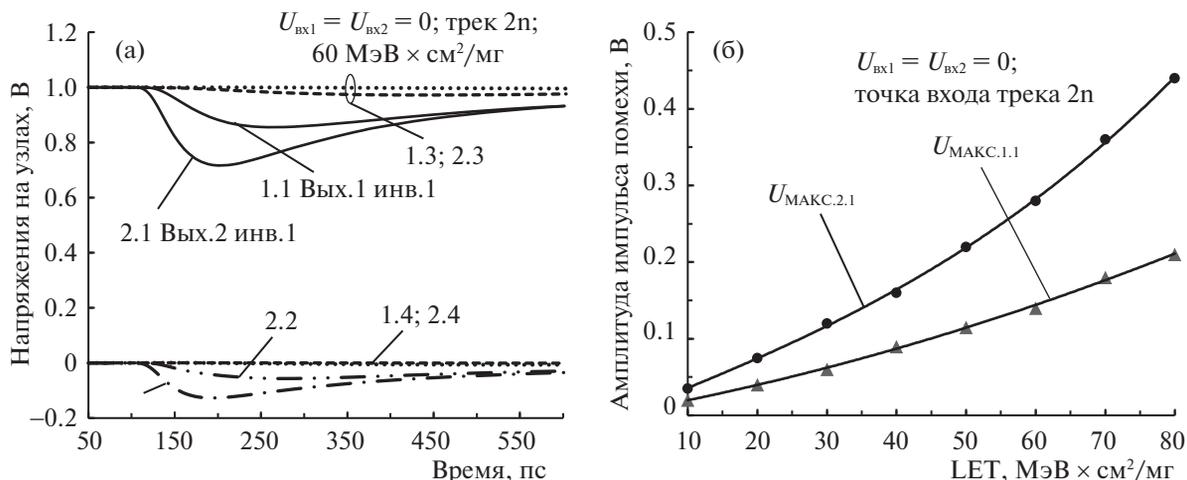


Рис. 4. Импульсные помехи на узлах цепочки 2φ-инверторов, точка входа трека 2п, напряжения на входах первого 2φ-инвертора $U_{ВХ1} = U_{ВХ2} = 0$: (а) импульсные помехи на узлах при $LET = 60 \text{ МэВ} \times \text{см}^2/\text{мг}$; (б) амплитуды импульсных помех $U_{МАКС.1.1}$ и $U_{МАКС.2.1}$ на выходах 1.1 и 2.1 первого 2φ-инвертора при диффузии заряда с трека с точкой входа 2п в сток транзистора $N_{1.1}$ в группе Gr1N и в сток транзистора $N_{2.1}$ в группе Gr2N.

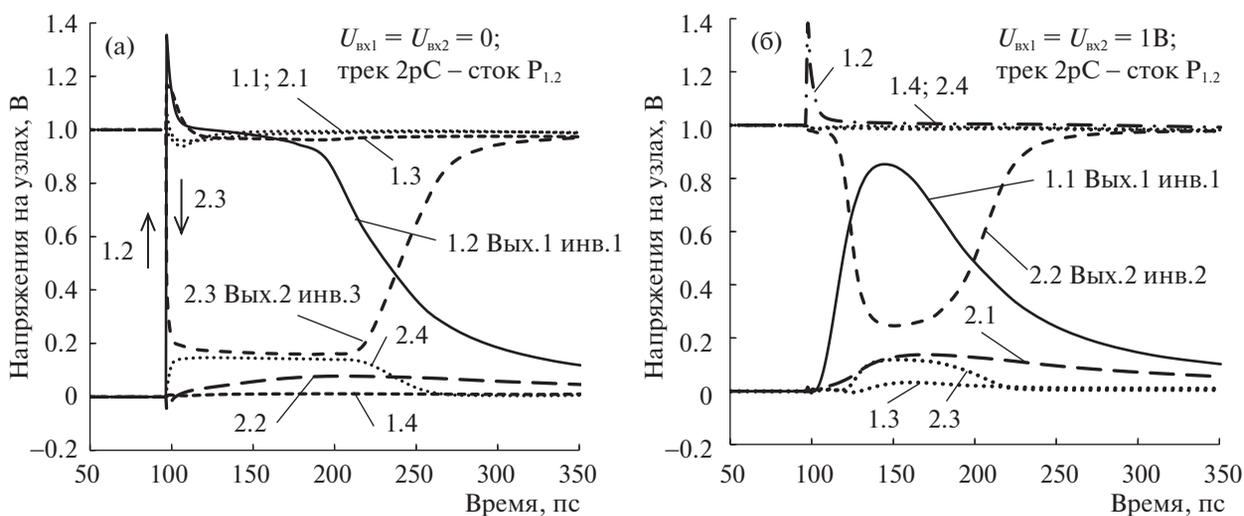


Рис. 5. Зависимости импульсов напряжений на узлах цепочки 2φ-инверторов во время сбора заряда, трек по нормали к поверхности, точка входа трека 2pC в сток транзистора $P_{1.2}$ при $LET = 60 \text{ МэВ} \times \text{см}^2/\text{мг}$, исходное состояние напряжений на входах первого 2φ-инвертора: (а) $U_{ВХ1} = U_{ВХ2} = 0$; (б) $U_{ВХ1} = U_{ВХ2} = 1 \text{ В}$.

ходного состояния с напряжением $U_{1.2} = 0$ на узле 1.2 (Вых. 1 инв. 2), переходит в состояние с инверсным режимом смещения на 10 пс и напряжением узла $U_{1.2} = 1.35 \text{ В}$. Затем в течение 100 пс напряжение на узле 1.2 поддерживается постоянным $U_{1.2} = 1 \text{ В}$, после чего снижается. В итоге амплитуда импульса помехи $U_{1.2}(t)$ на выходном узле 1.2 второго инвертора имеет значение $U_{МАКС.1.2} \approx 1 \text{ В}$ (рис. 5а), а длительность импульса 150 пс. Импульсная помеха $U_{1.2}(t)$ воздействует на затвор транзистора $N_{2.3}$ третьего 2φ-инвертора, инициируя на его выходном узле 2.3 (Вых. 2 инв. 3) импульс амплитудой $U_{МАКС.2.3} = 0.83 \text{ В}$. Сумма при-

ражений напряжений на выходных узлах второго 2φ-инвертора при сборе заряда $\Delta U_{1.2} + \Delta U_{2.2} \approx U_{И.П}$ оказывается недостаточной для полного переключения третьего инвертора по обоим выходам.

При напряжениях на входе двухфазной цепочки $U_{ВХ1.1} = U_{ВХ2.1} = 1 \text{ В}$ транзистор $P_{1.1}$ в группе Gr1N заперт и напряжение на его стоке и узле 1.1 равно $U_{1.1} = 0$, а транзистор $P_{1.2}$ открыт. В группе Gr2N заперт транзистор $P_{2.1}$, а открыт транзистор $P_{1.2}$. В данном случае трек с точкой входа 2pC проходит через стоковую область открытого транзистора $P_{1.2}$, которого собираемый им заряд перево-

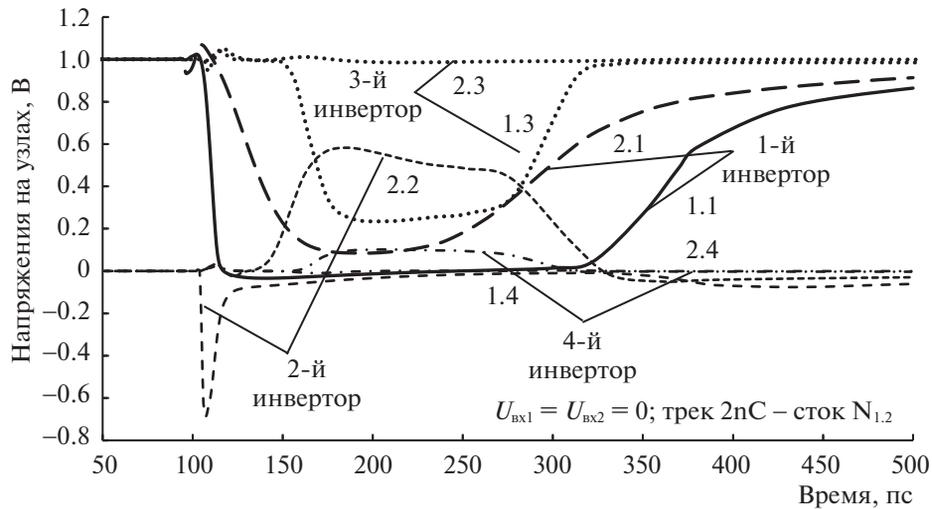


Рис. 6. Зависимости импульсов напряжений на узлах цепочки 2φ-инверторов во время сбора заряда транзисторами первого 2φ-инвертора с трека по нормали к поверхности, точка входа трека 2nC в сток транзистора $N_{1,2}$ при $LET = 60 \text{ МэВ см}^2/\text{мг}$, исходное состояние напряжений на входах первого 2φ-инвертора $U_{вх1} = U_{вх2} = 0$.

дит на 10 пс из исходного состояния с напряжением на его стоке $U_{C1,2} = U_{и.п} = 1 \text{ В}$ в инверсное состояние с напряжением $U_{C1,1} = 1.38 \text{ В}$ (рис. 5б), после чего транзистор $P_{1,2}$ возвращается в исходное состояние.

В итоге сбора заряда с трека 2pC запертым транзистором $P_{1,1}$ амплитуда импульсной помехи $U_{1,1}(t)$ на выходном узле 1.1 (Вых. 1 инв. 1 на рис. 5б) достигает значения $U_{МАКС.1,1} = 0.84 \text{ В}$ с длительностью помехи 100 пс. Импульс помехи $U_{1,1}(t)$ воздействует на затвор транзистора $N_{2,2}$ второго 2φ-инвертора (рис. 1), инициируя на его выходном узле 2.2 (Вых. 2 инв. 2) импульс амплитудой $U_{МАКС.2,2} = 0.75 \text{ В}$. Транзистор $P_{2,1}$ первого 2φ-инвертора в группе Gr2N собирает незначительное количество заряда и амплитуда импульса на его выходном узле 2.1 незначительна $U_{МАКС.2,1} = 0.1 \text{ В}$ (рис. 5б). Приращения напряжения на выходных узлах 1.1 и 2.1 первого 2φ-инвертора при сборе заряда составляют $\Delta U_{1,1} + \Delta U_{2,1} = 0.92 \text{ В} < U_{и.п} = 1 \text{ В}$, что недостаточно для полного переключения второго 2φ-инвертора по обоим его выходам.

3.3. Сбор заряда NМОП транзисторами с треков с точкой входа трека 2nC

На рис. 6 приведены зависимости импульсов напряжений на узлах цепочки инверторов при сборе заряда с трека с точкой входа 2nC в группе Gr1N (рис. 3) в область стока транзистора $N_{1,2}$ второго 2φ-инвертора для случая, когда напряжения на входах первого в цепочке 2φ-инвертора $U_{вх1} = U_{вх2} = 0$, а линейная передача энергии на трек $60 \text{ МэВ см}^2/\text{мг}$. При напряжениях $U_{вх1} = U_{вх2} = 0$ транзистор $N_{1,2}$ открыт и несмотря на то, что

трек проходит через его стоковую область, практически не собирает заряд.

В группе Gr1N заряд собирает изначально запертый транзистор $N_{1,1}$ первого 2φ-инвертора, причем электроны диффундируют и в группу Gr2N, расположенную рядом (рис. 3), где заряд собирает транзистор $N_{1,1}$ также первого 2φ-инвертора. Оба выходных узла 1.1 и 2.1 (рис. 6) первого 2φ-инвертора в итоге переходят на 180–250 пс из логического состояния “1” в состояние “0”, что незначительно изменяет напряжения на втором выходе 2.2 второго 2φ-инвертора и на первом выходе 1.3 третьего 2φ-инвертора, не меняя их логического состояния (см. рис. 6).

Транзистор $N_{1,2}$ второго 2φ-инвертора, сток которого является точкой входа трека 2nC, находясь в исходном открытом состоянии при напряжении на стоке $U_{1,2} = 0$ собирает заряд только так, что на 10 пс (рис. 6) переходит в инверсное смещение с напряжением на стоке -0.6 В . Затем транзистор $N_{1,2}$ возвращается в исходное состояние с напряжением $0–0.1 \text{ В}$ на узле 1.2 до конца сбора заряда. Длительность нестационарного состояния цепочки инверторов составляет 275 пс. Сумма приращений напряжений на выходных узлах первого 2φ-инвертора $\Delta U_{1,1} + \Delta U_{2,1} > U_{и.п}$ оказывается достаточной для неполного логического перехода следующего второго 2φ-инвертора только по одному второму выходу 2.2 (рис. 6).

На рис. 7 приведены зависимости импульсов напряжений на узлах инверторов при сборе заряда с трека с точкой входа 2nC в группе Gr1N в область стока транзистора $N_{1,2}$ (рис. 3) для случая напряжений на входах первого 2φ-инвертора

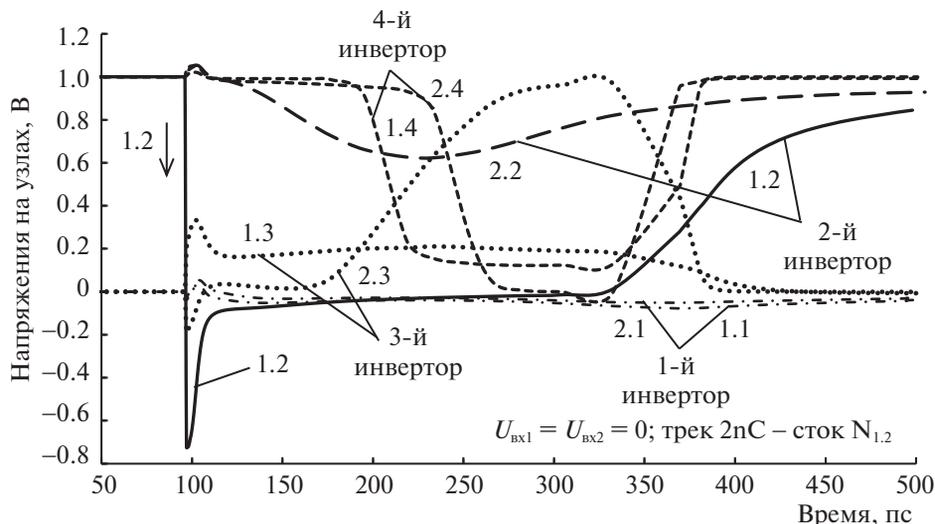


Рис. 7. Зависимости импульсов напряжений на узлах цепочки 2ф-инверторов во время сбора заряда транзисторами второго 2ф-инвертора с трека по нормали к поверхности, точка входа трека 2нС в сток транзистора $N_{1,2}$ при $LET = 60 \text{ МэВ} \times \text{см}^2/\text{мг}$, исходное состояние напряжений на входах первого 2ф-инвертора $U_{\text{вх1}} = U_{\text{вх2}} = 1 \text{ В}$.

$U_{\text{вх1}} = U_{\text{вх2}} = 1 \text{ В}$, когда заперты транзисторы второго 2ф-инвертора $N_{1,2}$ в группе Gr1N и $N_{2,2}$ в группе Gr2N. Эти транзисторы и собирают заряд с трека с входной точкой 2нС в группе Gr1N, часть которого диффундирует и в группу Gr2N. Транзистор $N_{1,2}$ из исходного запертого состояния с напряжением на узле 1.2, равным $U_{1,2} = U_{\text{и.п}} = 1 \text{ В}$, переходит в инверсный режим смещения на длительность 10 пс с напряжением на узле $U_{1,2} = -0.6 \text{ В}$, после чего в течение 250 пс сохраняет на узле 1.2 значение $U_{1,2} \approx 0$ (рис. 7), а затем возвращается в исходное стационарное состояние $U_{1,2} = 1 \text{ В}$.

Транзисторы $N_{1,1}$ и $N_{2,1}$ первого инвертора в исходном состоянии открыты и не собирают заряды, оставаясь практически при нулевых напряжениях на выходных узлах 1.1 и 2.1 первого 2ф-инвертора $U_{1,1} \approx U_{2,1} \approx 0$ (рис. 7). Импульсы напряжения помех выходных узлов второго 2ф-инвертора переключают третий и четвертый 2ф-инверторы. Длительность нестационарного состояния цепочки инверторов 275 пс. Сумма приращений напряжений на выходных узлах второго 2ф-инвертора при сборе заряда $\Delta U_{1,2} + \Delta U_{2,2} = 1.35 \text{ В} > U_{\text{и.п}}$ достаточна для переключения следующих 2ф-инверторов.

4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Тестовыми воздействиями были треки с направлениями по нормали к поверхности приборной модели. Вариантами треков с образованием наибольших импульсных помех были треки с точ-

ками входов в области стоков транзисторов в двух группах транзисторов, причем первая группа Gr1N включает NМОП транзисторы $N_{1,1}$ и $N_{1,2}$ первых конверторов первого и второго 2ф-инверторов, и вторая группа Gr1P включает PМОП транзисторы $P_{1,1}$ и $P_{1,2}$ тех же конверторов (рис. 2 и 3). Кроме того, были треки с малыми помехами при точках входа треков, отстоящих на расстояние около 330 нм от стоков транзисторов, с прохождением треков через слой изолирующего диоксида кремния толщиной 400 нм.

При треках, использованных в работе, сбор заряда осуществлялся транзисторами первых двух 2ф-инверторов, импульсы помех образовывались на выходных узлах только этих инверторов, а далее импульсы ошибки могли передаваться по цепочке, если их амплитуды позволяли это. Полученные данные справедливы для других пар смежных 2ф-инверторов.

Результаты моделирования импульсных помех, возникающих при сборе заряда с треков одиночных частиц при линейной передаче энергии на трек $60 \text{ МэВ} \text{ см}^2/\text{мг}$, следующие:

1) заметные импульсные помехи образуются при сборе заряда с треков, проходящих близко от транзисторов, расположенных в группах типа Gr1N и Gr2N двух 2ф-инверторов;

2) амплитуды импульсных помех максимальны для треков с входной точкой в стоковую область транзистора. Для треков, проходящих через слой оксида толщиной 400 нм в случае точек входа трека рядом с областью стоков транзисторов, амплитуды импульсов помех в 3 раза меньше при сборе заряда NМОП транзисторами и в 20 раз

меньше (табл. 1) при сборе заряда РМОП транзисторами. Генерация заряда и сбор его РМОП транзисторами в *n*-кармане происходит менее интенсивно, чем генерация заряда и сбор его НМОП транзисторами;

3) импульсы напряжения на выходах 2ф-инверторов, следующих за инвертором, собирающим заряд, являются результатом электрического взаимодействия инверторов. Передача импульса по цепочке двухфазных инверторов происходит только для треков с точками входа в стоковые области транзисторов;

4) при линейной передаче энергии на трек 60 МэВ см²/мг и менее в случае точек входа трека 1рС или 2рС в сток РМОП транзистора, импульсная помеха возникает только на одном выходе 2ф-инвертора и передается только на один выход следующего инвертора.

При линейной передаче энергии на трек 60 МэВ см²/мг и менее в случае точек входа трека 1нС НМОП транзистора, импульсная помеха возникает только на одном выходе 2ф-инвертора и не передается на выход следующего инвертора;

5) при линейной передаче энергии на трек 60 МэВ см²/мг импульсные помехи образовывались на двух выходах 2-ф инвертора только при треках с входной точкой 2нС в сток НМОП транзистора и передавались на оба выхода следующих двух инверторов только в случае, если трек с входной точкой 2нС проходил в сток запертого транзистора и когда сумма амплитуд импульсных помех на выходах этого инвертора превышала напряжение питания;

6) длительности нахождения двух первых 2ф-инверторов в нестационарных состояниях с образованием импульсных помех не превышала 120–150 пс при сборе заряда РМОП транзисторами, а при сборе заряда НМОП транзисторами 270–300 пс.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Моделирование сбора заряда с трека частицы на основе средств TCAD является виртуальной экспериментальной базой исследования элементов микроэлектронных систем. Использование каскадных цепей двухфазных КМОП инверторов с перекрестными связями входов инверторов позволяет повысить помехоустойчивость микроэлектронных систем к воздействиям одиночных ядерных частиц. Изолирующий слой диоксида кремния по планарной объемной технологии с взаимной изоляцией транзисторов канавками (shallow trench isolation – STI) с заполнением диоксидом кремния, разделяя активные области транзисторов, снижает длину трека, на которой происходит генерация носителей заряда, так и их диффузионный перенос к собирающим заряд

транзисторам. Импульсные помехи максимальны для треков с входной точкой в стоковую область транзистора. Перекрестные связи двухфазных инверторов минимизируют распространение таких помех по цепочке. Треки через слой изолирующего транзисторы диоксида кремния вызывают минимальные импульсные помехи, не влияющие на функционирование цепочки двухфазных инверторов. Разделение заряда с таких треков между собирающими заряд транзисторами соседних двухфазных КМОП инверторов дополнительно снижает импульсные помехи.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ № 19-07-00651.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Canaris J., Whitaker S.* Circuit techniques for the radiation environment of space // IEEE 1995 Custom Integrated Circuits Conference. 1995. P. 77–80.
2. *Knowles K.R.* Logic architecture for single event upset immunity // US Patent № 6614257 B2, Sep. 2, 2003.
3. *Zhang M., Shanbhag R.* Design of soft error tolerant logic circuits // Proceedings of the Workshop on System Effects of Soft Logic Errors, Univ. of Illinois, USA, Apr. 2005. P. 1–4.
4. *Calin T., Nicolaidis M., Velazco R.* Upset hardened memory design for submicron CMOS technology // IEEE Transactions on Nuclear Science. 1996. V. 43. № 6. P. 2874–2878.
5. *Ольчев С.И., Стенин В.Я.* Двухфазные КМОП логические элементы с повышенной сбоеустойчивостью к воздействию отдельных ядерных частиц // Микроэлектроника. 2011. Т. 40. № 3. С. 170–183.
6. *Катунин Ю.В., Стенин В.Я.* Моделирование эффектов локальных воздействий ядерных частиц на КМОП элементы двухфазной логики с проектными нормами 65 нм // Микроэлектроника. 2012. Т. 41. № 4. С. 262–274.
7. *Катунин Ю.В., Стенин В.Я., Степанов П.В.* Моделирование характеристик триггерных элементов КМОП двухфазной логики с учетом разделения заряда при воздействии отдельных ядерных частиц // Микроэлектроника. 2014. Т. 43. № 2. С. 104–117.
8. *Garg R., Khatri S.P.* Analysis and design of resilient VLSI circuits: mitigating soft errors and process variations. N.Y.: Springer, 2010. P. 194–205.
9. *Катунин Ю.В., Стенин В.Я.* TCAD моделирование эффектов воздействия одиночных ядерных частиц на ячейки памяти STG DICE // Микроэлектроника. 2018. Т. 47. № 1. С. 23–37.
10. *Soft errors in modern electronic systems / Ed. M. Nicolaidis.* N.Y.: Springer, 2011. P. 35–37.

Simulation of Error Pulses in Two-Phase CMOS Inverters at Charge Collection from the Track of an Ionizing Particle

V. Ya. Stenin^{a,b,#} and Yu. V. Katunin^{b,##}

^a National Research Nuclear University MEPHI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

^b Scientific Research Institute of System Analysis, Russian Academy of Sciences, Moscow, 117218 Russia

[#]e-mail: vystenin@mephi.ru,

^{##}e-mail: katunin@cs.niisi.ras.ru

Received January 29, 2019; revised January 29, 2019; accepted February 26, 2019

Abstract—Charge collection from the tracks of single ionizing particles by two-phase CMOS inverters with a design norm of 65 nm on two mutually connected channels (phases) forming a chain has been simulated. The occurrence of error pulses caused by charge collection from tracks directed along the normal to the surface of the device part of the crystal has been analyzed. The input points of particle tracks are at the drain areas of transistors or at a distance of 0.3–0.7 μm from them. The durations of error pulses on the nodes of the elements which collecting the charge from the track are from 120 to 300 ps. The amplitudes of pulses relative to the voltage on the power bus or common bus range from 0.05 to 1.0 V. The propagation of noise pulses along the chain of two-phase CMOS inverters occurs only for tracks with entry points into the drain area of transistors. If the linear energy transfer to the track is 60 MeV cm^2/mg , an error pulse can be transferred only to the next inverter if error pulses are formed at two outputs of the two-phase CMOS inverter and the sum of their amplitudes exceeds the supply voltage of the element.

Keywords: two-phase inverter, error pulse, simulation, unsteady state, single nuclear particle, failure tolerance, track of a particle

DOI: 10.1134/S2304487X19030143

REFERENCES

1. Canaris J., Whitaker S., Circuit techniques for the radiation environment of space, IEEE 1995 Custom Integrated Circuits Conference, 1995, pp. 77–80.
2. Knowles K.R., Logic architecture for single event upset immunity, US Patent № 6614257 B2, Sep. 2, 2003.
3. Zhang M., Shanbhag R., Design of soft error tolerant logic circuits, Proceedings of the Workshop on System Effects of Soft Logic Errors, Univ. of Illinois, USA, Apr. 2005, pp. 1–4.
4. Calin T., Nicolaidis M., Velazco R., Upset hardened memory design for submicron CMOS technology, IEEE Trans. Nucl. Sci., 1996, vol. 43, no. 6, pp. 2874–2878.
5. Ol'chev S.I., Stenin V.Ya., CMOS Logic Elements with Increased Failure Resistance to Single-Event Upsets, Russ. Microelectron., 2011, vol. 40, no. 3, pp. 156–169.
6. Katunin Yu.V., Stenin V.Ya., Simulation of the Local Effect of Nuclear Particles on 65-nm CMOS Elements of Two-Phase Logics, Russian Microelectronics, 2012, vol. 41, no. 4, pp. 239–250.
7. Katunin Yu.V., Stenin V.Ya., Stepanov P.V., Modeling the characteristics of trigger elements of two-phase CMOS logic, taking into account the charge sharing effect under exposure to single nuclear particles, Russ. Microelectron., 2014, vol. 43, no. 2, pp. 112–124.
8. Garg R., Khatri S.P., Analysis and design of resilient VLSI circuits: mitigating soft errors and process variations. N.Y.: Springer, 2010, pp. 194–205.
9. Katunin Yu.V., Stenin V.Ya., Simulation of Single Event Effects in STG DICE Memory Cells, Russ. Microelectron., 2018, vol. 47, no. 1, pp. 20–33.
10. Nicolaidis M., Soft Errors in Modern Electronic Systems, N.Y.: Springer, 2011, pp. 35–37.

УДК 517.91

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПОСТРОЕНИЯ МНОГОУГОЛЬНИКОВ НЬЮТОНА, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ВИДА

© 2019 г. Н. А. Кудряшов^{1,*}, А. А. Кутуков^{1,**}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия

*e-mail: nakudr@gmail.com

**e-mail: alexkutuk@gmail.com

Поступила в редакцию 13.03.2019 г.

После доработки 13.03.2019 г.

Принята к публикации 09.04.2019 г.

В работе представлено описание программы ACNP (automatic construction of Newton polygons), предназначенной для автоматического построения многоугольников Ньютона, соответствующих дифференциальным уравнениям полиномиального вида. Многоугольник Ньютона обыкновенного дифференциального уравнения представляет собой выпуклый многоугольник, вершинами которого являются внешние точки носителя дифференциального уравнения (носителем называется множество точек на плоскости, соответствующих по определенному правилу мономам дифференциального уравнения). Многоугольники Ньютона для обыкновенных дифференциальных уравнений полиномиального вида полезны при исследовании свойства интегрируемости нелинейных уравнений при помощи алгоритма Ковалевской, при построении асимптотических решений и при нахождении точных решений нелинейных дифференциальных уравнений. Автоматизация процесса построения многоугольников Ньютона позволяет в ряде случаев находить порядок полюса решения уравнения, выделять ведущие члены уравнения, ускорять процесс нахождения степенных асимптотических решений дифференциальных уравнений и упростить выбор простейшего уравнения при нахождении точных решений нелинейных дифференциальных уравнений. Программа ACNP написана в среде компьютерной алгебры Maple. В работе приведен алгоритм работы программы и примеры ее применения.

Ключевые слова: многоугольники Ньютона, точные решения дифференциальных уравнений, тест на свойство Пенлеве, степенные асимптотики

DOI: 10.1134/S2304487X19030088

1. ВВЕДЕНИЕ

Использование ломаных, соответствующих алгебраическим уравнениям вида $f(x, y) = \sum_{m,n} a_{m,n} x^m y^n = 0$ для нахождения решений в виде ряда в окрестности нуля было впервые использовано Ньютоном [1]. Согласно его подходу, однокленам уравнения $f(x, y) = 0$, для которых $a_{m,n} \neq 0$, ставятся в соответствие точки на плоскости m, n с координатами (m, n) . Выпуклая граница множества таких точек называется ломаной Ньютона, соответствующей алгебраическому уравнению. Ньютон в своей работе рассматривал одно ребро ломаной. Целиком выпуклая ломаная была впервые рассмотрена Пуизе [2]. Для анализа решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности особых точек графическая иллюстрация, схожая с ломаными Ньютона, была использована Брюно [3]. В даль-

нейшем графический подход для анализа решений обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных применялся в работах [4–7].

Если рассматривать обыкновенное дифференциальное уравнение полиномиального вида

$$M_n[y(z), y_z(z), y_{zz}(z), \dots, z] = 0, \quad (1)$$

то каждому члену (моному) дифференциального уравнения (1) можно поставить в соответствие точку на плоскости по правилу

$$C_1 z^{q_1} y^{q_2} \mapsto (q_1, q_2), \quad C_2 \frac{d^k y}{dz^k} \mapsto (-k, 1). \quad (2)$$

При умножении мономов координаты точек складываются. Множество точек на плоскости, соответствующее дифференциальному уравнению (1), называется носителем [7]. Выпуклая граница носителя уравнения называется много-

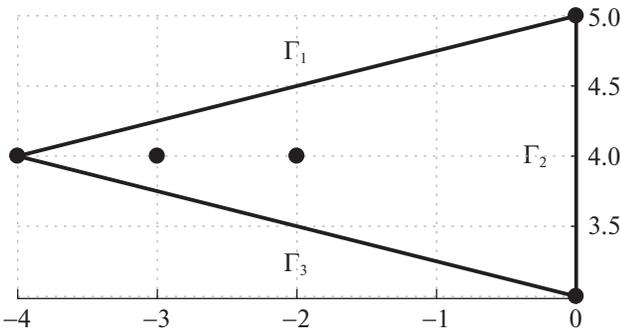


Рис. 1. Многоугольник Ньютона, соответствующий уравнению (4).

угольником Ньютона. Правило (2) позволяет поставить в соответствие каждому уравнению (1) многоугольник Ньютона на плоскости.

Для анализа дифференциальных уравнений, состоящих из большого количества мономов, представляется удобным автоматизировать процесс построения многоугольников Ньютона. В данной работе представлен алгоритм автоматизации построения многоугольников Ньютона, соответствующих дифференциальным уравнениям полиномиального вида (1), а также примеры применения программы.

2. АЛГОРИТМ ПРОГРАММЫ ПОСТРОЕНИЯ МНОГУГОЛЬНИКОВ НЬЮТОНА

Программа АСНР написана в системе компьютерной алгебры Maple. Входные данные представляют собой обыкновенное дифференциальное уравнение *ode* полиномиального вида (1). Алгоритм программы состоит из следующих шагов:

1. С помощью функции *op* выделяются мономы дифференциального уравнения *ode* и записываются в векторную переменную *monoms*.

2. В каждом мономе *monoms* дифференциального уравнения *ode* осуществляется замена

$$y(z) = w \ln z, \tag{3}$$

а затем подстановка $\ln z = 1$, в результате чего дифференциальные мономы *monoms* переходят в алгебраические.

3. При помощи функции *degree* определяются степени *w* и *z* каждого из мономов *monoms* и записываются в вектор *monoms2* в виде пар $[m, n]$. Таким образом, получен носитель дифференциального уравнения *ode*.

4. При помощи функции *convexhull* пакета *geometry* находятся точки, соответствующие выпуклой границе носителя *monoms2*, что и представляет собой многоугольник Ньютона. Отдельно рассматриваются случаи, когда многоугольник Ньютона вырождается в прямую и точку.

5. При помощи команды *polygon* (пакет *plot-tools*) для точек, соответствующих вершинам многоугольника Ньютона формируется объект *pic1* типа *plot data*. Построение многоугольника Ньютона *pic1* и носителя *monoms2* уравнения *ode* на одной системе координат осуществляется при помощи команд *draw* и *display* (пакеты *geometry* и *plots* соответственно). Результат работы программы в виде графического представления многоугольника Ньютона и его носителя сохраняется в файл “*NewtonPolygon.png*”.

3. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОГРАММЫ АСНР

3.1. Построение многоугольников Ньютона при анализе уравнений на свойство Пенлеве

Многоугольники Ньютона бывают полезны при анализе свойства интегрируемости дифференциальных уравнений, в частности, при использовании алгоритма Ковалевской, теста на свойство Пенлеве для обыкновенного дифференциального уравнения [8]. Первый шаг теста заключается в выделении ведущих членов уравнения и нахождении порядка полюса решения. На втором шаге вычисляются индексы Фукса, при помощи которых можно определить отсутствие критических подвижных алгебраических особых точек решения уравнения. Третий шаг заключается в нахождении коэффициентов разложения уравнения в ряд Лорана. Если число произвольных постоянных в разложении решения равно порядку уравнения, то уравнение проходит тест на свойство Пенлеве. Многоугольники Ньютона в ряде случаев позволяют оценить порядок полюса решения и определить ведущие члены уравнения. Продемонстрируем использование программы для автоматического построения многоугольников Ньютона при анализе на свойство Пенлеве нелинейного уравнения четвертого порядка в переменных бегущей волны для описания динамики дислокаций в кристалле [9]

$$\begin{aligned}
 & -i\alpha v^2 v_z v_{zz} + i\alpha v v_z^3 + \frac{1}{2} \delta v^5 + C_0 v^3 v_{zz} - C_0 v^2 v_z^2 - \\
 & - \gamma v^3 v_{zzzz} + 4\gamma v^2 v_z v_{zzz} + 3\gamma v^2 v_{zz}^2 + 3\beta v v_z^2 v_{zz} - \\
 & - 12\gamma v v_z^2 v_{zz} - 3\beta v_z^4 + 6\gamma v_z^4 - \frac{1}{2} \delta v^3 = 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

С помощью программы АСНР строится многоугольник Ньютона и носитель, соответствующие уравнению (4) (рис. 1).

Из рис. 1 определяется порядок полюса решения как величина, обратная коэффициенту угла наклона грани Γ₁. В данном случае порядок полюса решения $p = 4$. Уравнение, состоящее из ведущих членов уравнения (4), строится из моно-

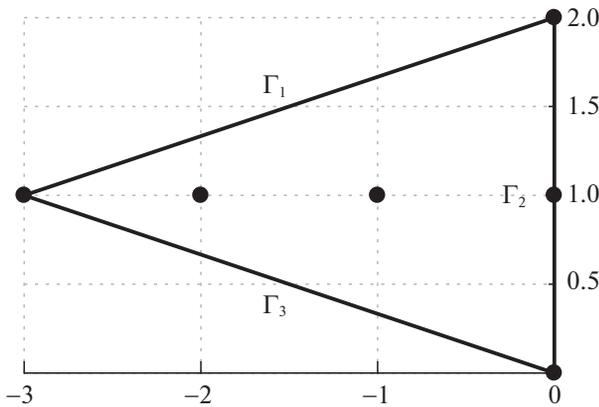


Рис. 2. Многоугольник Ньютона, соответствующий уравнению (6).

мов, для которых соответствующие координаты лежат на грани Γ_1 :

$$\frac{1}{2} \delta v^5 - \gamma v^3 v_{zzz} + 4\gamma v^2 v_z v_{zz} + 3\gamma v^2 v_{zz}^2 + 3\beta v v_z^2 v_{zz} - 12\gamma v v_z^2 v_{zz} - 3\beta v_z^4 + 6\gamma v_z^4 = 0. \quad (5)$$

Следующие шаги теста на свойство Пенлеве для уравнения (4) приводятся в работе [9].

3.2. Применение многоугольников Ньютона при нахождении точных решений дифференциальных уравнений методом простейших уравнений

Метод простейших уравнений заключается в поиске точных решений дифференциального уравнения с использованием общего решения дифференциального уравнения меньшего порядка [10].

Уравнение Курамото–Сивашинского в переменных бегущей волны имеет вид [8, 11, 12]

$$y_{zzz} + \sigma y_{zz} + y_z + \frac{1}{2} y^2 + C_0 y - C_1 = 0. \quad (6)$$

Многоугольник Ньютона для уравнения (6) представлен на рис. 2, из которого видно, что порядок полюса решения $p = 3$. В качестве простейшего уравнения можно взять уравнение для функции Вейерштрасса, общее решение которого имеет второй порядок полюса

$$R_z^2 = -4R^3 + aR^2 + 2bR + c. \quad (7)$$

Поскольку порядки полюсов решений должны быть равны, решение уравнения (6) можно искать в виде

$$y(z) = A_0 + A_1 R + A_2 R_z. \quad (8)$$

После подстановки (8) получается уравнение, порядок полюса решения которого $p = 2$ (рис. 3).

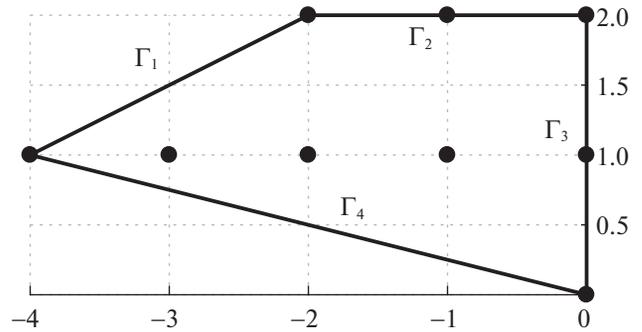


Рис. 3. Многоугольник Ньютона, соответствующий уравнению (6) при подстановке (8).

Если в качестве простейшего уравнения выбрать уравнение Риккати

$$Y_z = -Y^2 + b, \quad (9)$$

решение которого имеет первый порядок полюса, то для соответствия порядков полюсов необходимо воспользоваться разложением

$$y(z) = A_0 + A_1 Y + A_2 Y^2 + A_3 Y^3. \quad (10)$$

В результате подстановки (10) в (6) получается уравнение, порядок полюса решения которого $p = 1$ (рис. 4).

Таким образом, для избранного простейшего уравнения следует подставлять в исходное уравнение такое разложение, чтобы грани многоугольников полученного уравнения и простейшего уравнения, соответствующие ведущим членам уравнений, были параллельны.

3.3. Применение многоугольников Ньютона при нахождении асимптотик нелинейных дифференциальных уравнений

Многоугольники Ньютона используются при построении степенных асимптотик обыкновенных дифференциальных уравнений полиномиального вида [7]. Каждой грани и каждой вершине многоугольника Ньютона соответствует укороченное уравнение. Степенные решения укороченных уравнений представляют собой асимптотики исходного уравнения в нуле или бесконечности. В работе [6] рассматривается уравнение, представляющее собой обобщение второго и третьего уравнений Пенлеве:

$$y^3 y_{zzz} - 4y^2 y_z y_{zz} + \frac{21}{2} y y_z^2 y_{zz} - 3y^2 y_{zz}^2 - \frac{9}{2} y_z^4 + 72\gamma y^5 - 72\mu y^3 + \frac{1}{2} z y^3 y_{zz} - \frac{1}{2} z y^2 y_z^2 + \frac{1}{2} y^3 y_z = 0. \quad (11)$$

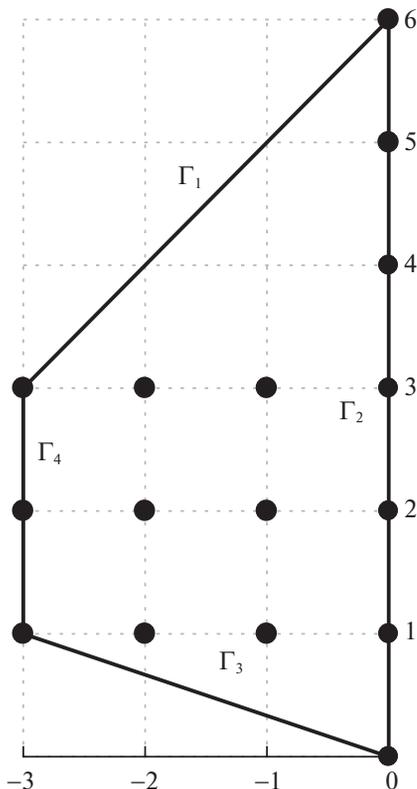


Рис. 4. Многоугольник Ньютона, соответствующий уравнению (6) при подстановке (10).

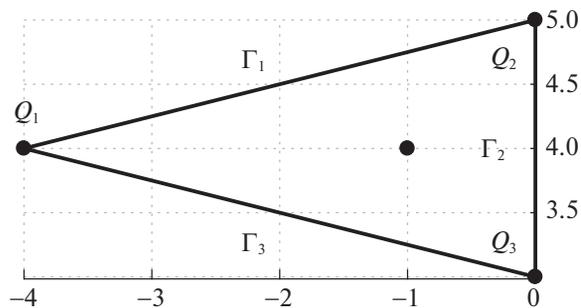


Рис. 5. Многоугольник Ньютона, соответствующий уравнению (11).

Многоугольник Ньютона, соответствующий уравнению (11), изображен на рис. 5.

Граням $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ соответствуют уравнения

$$\begin{aligned}
 & y_{zzzz} - \frac{4}{y} y_z y_{zz} + \frac{21}{2y^2} y_z^2 y_{zz} - \\
 & - \frac{3}{y} y_{zz}^2 - \frac{9}{2y^3} y_z^4 + 72\gamma y^2 = 0, \\
 & 72\gamma y^2 - 72\mu = 0,
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 & y_{zzzz} - \frac{4}{y} y_z y_{zzz} + \frac{21}{2y^2} y_z^2 y_{zz} - \\
 & - \frac{3}{y} y_{zz}^2 - \frac{9}{2y^3} y_z^4 - 72\mu = 0.
 \end{aligned}$$

Вершине Q_1 соответствует уравнение

$$y_{zzzz} - \frac{4}{y} y_z y_{zzz} + \frac{21}{2y^2} y_z^2 y_{zz} - \frac{3}{y} y_{zz}^2 - \frac{9}{2y^3} y_z^4 = 0. \tag{13}$$

Вершинам Q_2, Q_3 соответствуют укороченные уравнения, имеющие тривиальные решения. Степенные асимптотики уравнения (11) представлены в работе [6].

Таким образом, автоматическое построение многоугольника Ньютона позволяет ускорить процесс построения укороченных уравнений, ис-

пользуемых при нахождении степенных асимптотик дифференциальных уравнений.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Автоматизация процесса построения многоугольников Ньютона позволяет упростить выполнение теста на свойство Пенлеве. Представленная программа может использоваться при нахождении точных решений нелинейных дифференциальных уравнений методом простейших уравнений в качестве наглядного пособия для выбора простейшего уравнения. Программа позволяет ускорить процесс построения степенных асимптотик обыкновенных дифференциальных уравнений.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00209).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ньютон И.* Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых // Математические работы. М.-Л.: ОНТИ, 1937. С. 33–44.
2. *Puiseux V.* Recherches sur les fonctions algebriques // J. de math. pures et appl. 1850. P. 365–480.
3. *Брюно А.Д.* Асимптотика решений нелинейных систем дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1962. Т. 143. Вып. 4. С. 763–766.
4. *Дёмина М.В., Кудряшов Н.А., Синельщиков Д.И.* Метод многоугольников для построения точных решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений для описания волн на воде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 12. С. 2151–2162.
5. *Kudryashov N.A., Demina M.V.* Polygons of differential equations for finding exact solutions // Chaos, Solitons & Fractals. 2007. V. 33. I. 5. P. 1480–1496.
6. *Кудряшов Н.А., Синельщиков Д.И.* Степенные и нестепенные асимптотики решений обобщения второго и третьего уравнений Пенлеве // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2013. Т. 2. № 2. С. 152–160.

7. Брюно А.Д. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Успехи мат. Наук. 2004. Т. 59. Вып. 3. С. 31–80.
8. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики // Издательский дом “Интеллект”, 2010. 368 с.
9. Кудряшов Н.А., Кутуков А.А. Применение теста Пенлеве для нелинейного уравнения четвертого порядка при описании дислокаций // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2018. Т. 7. № 3. С. 249–252.
10. Kudryashov N.A. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // Chaos, Solitons & Fractals. 2005. V. 24. I. 5. P. 1217–1231.
11. Kuramoto Y., Tsuzuki T. Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium // Prog. Theor. Phys. 1976. V. 55. № 2. P. 356–369.
12. Sivashinsky G.I. Instabilities, pattern formation, and turbulence in flames // Annu. Rev. Fluid Mech. 1983. V. 15. № 1. P. 179–199.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta “MIFI”, 2019, vol. 8, no. 3, pp. 283–288

Automatic Construction of Newton Polygons Corresponding to Polynomial Ordinary Differential Equations

N. A. Kudryashov^{a,#} and A. A. Kutukov^{a,#}

^a National Research Nuclear University MEPHI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: nakudr@gmail.com

^{##}e-mail: alexkutuk@gmail.com

Received March 13, 2019; revised March 13, 2019; accepted April 9, 2019

Abstract—The ACNP (automatic construction of Newton polygons) program designed to automatically construct Newton polygons corresponding to polynomial differential equations has been described. A Newton polygon of an ordinary differential equation is a convex polygon whose vertices are the outer points of the carrier of this equation (the carrier is the set of points on the plane corresponding to the monomials of the differential equation according to a certain rule). Newton polygons for polynomial ordinary differential equations are useful for studying the integrability of nonlinear equations using the Kovalevskaya algorithm, for constructing asymptotic solutions, and for finding exact solutions of nonlinear differential equations. Automatic construction of Newton polygons in some cases allows finding the order of the pole of the equation, select the leading terms of the equation, speed up the process of finding the power asymptotic behavior of solutions of differential equations, and simplify the choice of the simplest equation when finding exact solutions of nonlinear differential equations. The ACNP program is written in the Maple computer algebra environment. The algorithm of the program and examples of its application have been presented.

Keywords: Newton polygons, exact solutions of differential equations, Painlevé property test, power-law asymptotic behavior

DOI: 10.1134/S2304487X19030088

REFERENCES

1. Newton I., Metod flyuksij i beskonechnyh ryadov s prilozheniem ego k geometrii krivyh (Fluxions and infinite series method with its application to the geometry of curves), *Matematicheskie raboty M.-L.: ONTI*, 1937, pp. 33–44 (in Russian).
2. Puiseux V., Recherches sur les fonctions algebriques, *J. de math. pures et appl.*, 1850, pp. 365–480.
3. Bruno A.D., Asimptotika reshenij nelinejnyh sistem differencialnyh uravnenij (Asymptotics of solutions of nonlinear systems of differential equations), *DAN USSR*, 1962, vol. 143, no. 4. pp. 763–766 (in Russian).
4. Demina M.V., Kudryashov N.A., Sinelshchikov D.I., Metod mnogougolnikov dlya postroeniya tochnyh reshenij nekotoryh nelinejnyh differencialnyh uravnenij dlya opisaniya voln na vode (Polygon method for constructing exact solutions of some nonlinear differential equations for describing waves on water), *Zhurn. vychisl. matem. i matem. fiz.*, 2008, vol. 48, no. 12, pp. 2151–2162 (in Russian).
5. Kudryashov N.A., Demina M.V., Polygons of differential equations for finding exact solutions, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2007, vol. 33, issue 5, pp. 1480–1496.
6. Kudryashov N.A., Sinelshchikov D.I., Stepennye i n-stepennye asimptotiki reshenij obobshcheniya vtorogo i tret'ego uravnenij Penleve (Power and non-power asymptotics of solutions of the generalization of the second and third Painleve equations), *Vestnik NIYaU MIFI*, 2013, vol. 2, no. 2, pp. 152–160 (in Russian).

7. Bruno A.D., Asimptotiki i razlozheniya reshenij obyknovennogo differencialnogo uravneniya (Asymptotics and expansions of solutions of an ordinary differential equation), *Uspekhi mat. nauk*, 2004, vol. 59, no. 3, pp. 31–80 (in Russian).
8. Kudryashov N.A., *Metody nelinejnoj matematicheskoj fiziki* (Methods of nonlinear mathematical physics), Izdatelskij dom Intellekt, 2010, 368 p.
9. Kudryashov N.A., Kutukov A.A., Primenenie testa Penleve dlya nelinejnogo uravneniya chetvertogo porjadka pri opisanii dislokacij (Application of the Painleve test for a fourth-order nonlinear equation in the description of dislocations), *Vestnik NIYaU MIFI*, 2018, vol. 7, no. 3, pp. 249–252 (in Russian).
10. Kudryashov N.A., Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, vol. 24, issue 5, pp. 1217–1231.
11. Kuramoto Y., Tsuzuki T., Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium, *Prog. Theor. Phys.*, 1976, vol. 55, no. 2, pp. 356–369.
12. Sivashinsky G.I., Instabilities, pattern formation, and turbulence in flames, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1983, vol. 15, no. 1, pp. 179–199.

УДК 539.26.01

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФРО И ПФ АКСИАЛЬНОЙ КОМПОНЕНТЫ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕКСТУРЫ

© 2019 г. В. Г. Попков^{1,*}, Т. И. Савелова^{1,**}, Т. М. Иванова¹

¹ Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

*e-mail: barsukkin@gmail.com

**e-mail: TISavelova@mephi.ru

Поступила в редакцию 21.03.2019 г.

После доработки 30.03.2019 г.

Принята к публикации 09.04.2019 г.

Аппроксимация стандартными функциями — один из методов восстановления функции распределения ориентаций зерен в поликристаллических материалах по набору экспериментально измеренных полюсных фигур. На практике для решения этой задачи часто используются центральное и каноническое нормальные распределения. Центральное распределение имеет круговой характер рассеяния, каноническое — неизотропный. Функция распределения ориентаций может иметь пиковые и аксиальные компоненты. Пиковая компонента имеет колоколообразную форму с единственным максимумом в ориентационном пространстве. Аксиальная является усреднением пиковой относительно вращений вокруг выделенной оси.

В данной работе вычислены функции распределения ориентаций для аксиальных компонент центрального и канонического нормальных распределений, построены полюсные фигуры для канонического нормального распределения с различными параметрами. Произведено количественное и качественное сравнение точного и аппроксимирующего выражений для аксиальной компоненты центрального нормального распределения. Сделан вывод о целесообразности применения аппроксимирующей функции для упрощения вычисления аксиальной компоненты для нормального распределения с круговым и некруговым характером рассеяния текстуры поликристаллов. Поскольку реальные текстуры обычно включают в себя несколько аксиальных компонент с разными параметрами и весами, вычисления функции распределения по ориентациям сильно упростятся при использовании аппроксимирующего выражения.

Ключевые слова: функция распределения ориентаций, полюсная фигура, аксиальная текстура, нормальное распределение

DOI: 10.1134/S2304487X19030106

ВВЕДЕНИЕ

Восстановление функции распределения зерен по ориентациям (ФРО) поликристаллических материалов по полученным из рентгеновского или нейтронного эксперимента полюсным фигурам (ПФ) является основной задачей количественного текстурного анализа [1]. Одним из методов вычисления ФРО по ПФ является метод аппроксимации стандартными функциями, среди которых наиболее известны нормальные распределения (НР) ([2]–[5]).

В частности, в текстурном анализе используются центральное нормальное распределение (ЦНР), имеющее круговой характер рассеяния, и неизотропное каноническое нормальное распределение (КНР) ([4], [6]). Обычно функция распределения ориентаций представляется набором пиковых и аксиальных компонент. Пиковая компонента имеет колоколообразную форму с един-

ственным максимумом в ориентационном пространстве. Аксиальная является усреднением пиковой относительно вращений вокруг выделенной оси.

Центральные нормальные распределения представляются в виде ряда по характерам представлений группы вращений $SO(3)$, а канонические нормальные распределения — в виде ряда по обобщенным шаровым функциям, коэффициенты которого могут быть найдены только численно ([4], [6]). В [5] получена приближенная аналитическая формула для вычисления КНР. В [7] дан численный анализ аналитическому приближению канонических нормальных распределений.

Для аксиальной компоненты центральных нормальных распределений известно выражение в виде ряда по полиномам Лежандра [3]. В [8], [9] дано приближение для аксиальной компоненты

ЦНР и КНР в замкнутой форме, упрощающее вычисления соответствующих распределений.

В настоящей работе проведены вычисления аксиальной компоненты ЦНР и КНР и полюсных фигур для некоторого набора параметров. Дано сравнение точной и аппроксимирующей функций для случая аксиальной компоненты центрального нормального распределения.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть $g = (\varphi, \theta, \psi)$ – углы Эйлера вращения на группе $SO(3)$, $0 \leq \varphi, \psi < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Определение 1 ([4], [6]). Распределение вероятностей $\mu(g)$ на $SO(3)$ является нормальным, если $\mu(g)$ безгранично делимо, не является идемпотентной мерой и может быть представлено в виде

$$\int_{SO(3)} T_g d\mu(g) = \exp \left\{ \sum_{i,j=1}^3 \alpha_{ij} A_i A_j + \sum_{i=1}^3 \alpha_i A_i \right\}, \quad (1)$$

где T_g – неприводимое представление группы, A_i – инфинитезимальные операторы представления, (α_{ij}) – неотрицательно определенная симметричная матрица 3-го порядка, α_i – действительные числа. В этом случае $d\mu(g) = f(g)dg$.

Определение 2. Нормальное распределение называется каноническим (КНР), если в уравнении (1) $\alpha_{ij} = \alpha_{ii}\delta_{ij}$, $\alpha_i = 0$, $i, j = 1, 2, 3$. Каноническое нормальное распределение может быть представлено в виде ряда Фурье по обобщенным сферическим функциям:

$$f(g) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m,n=-l}^l C_{mn}^l t_{mn}^l(g), \quad (2)$$

где коэффициенты разложения C_{mn}^l могут быть найдены численно из уравнения (1).

Определение 3. Нормальное распределение называется центральным (ЦНР), если в (1) $\alpha_{ij} = \varepsilon^2 \delta_{ij}$, $\alpha_i = 0$, $i, j = 1, 2, 3$. Центральное нормальное распределение имеет вид

$$f(g) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \exp\{-l(l+1)\varepsilon^2\} \frac{\sin((l+1/2)\omega)}{\sin(\omega/2)}, \quad (3)$$

где $g = [\mathbf{n}, \omega]$ – представление вращения через мгновенную ось \mathbf{n} и угол поворота, $\omega \in [0, \pi]$, $\cos \omega = \frac{1}{2}(\text{Sp}(g) - 1)$.

2. АКСИАЛЬНАЯ КОМПОНЕНТА ЦЕНТРАЛЬНОГО НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Для ЦНР (3) при наличии аксиальной компоненты текстуры с осью \mathbf{n}_A выражение для ФРО имеет вид ([6], с. 106)

$$f^{\text{axial}}(g, g_0, \mathbf{n}_A, \varepsilon^2) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \exp\{-l(l+1)\varepsilon^2\} P_l((g\mathbf{n}_A, g_0\mathbf{n}_A)), \quad (4)$$

где g_0 – центр НР, $P_l(z)$ – полиномы Лежандра.

В [8] получено аппроксимирующее выражение для аксиальной компоненты ЦНР (4) в виде

$$f_{\text{approx}}^{\text{axial}}(g, g_0, \mathbf{n}_A, \varepsilon^2) = \frac{\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{2} \left(1 - [\mathbf{n}_A, \mathbf{n}]^2 \left(\sin \frac{\omega}{2} \right)^2 \right)}{\left(1 - [\mathbf{n}_A, \mathbf{n}]^2 \left(\sin \frac{\omega}{2} \right)^2 \right)^{3/2}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{[\mathbf{n}_A, \mathbf{n}]^2 \left(\sin \frac{\omega}{2} \right)^2}{1 - [\mathbf{n}_A, \mathbf{n}]^2 \left(\sin \frac{\omega}{2} \right)^2} \right\}, \quad (5)$$

где ω – угол поворота вокруг мгновенной оси \mathbf{n} , представляющие $g_0^{-1}g$.

В частном случае вращения вокруг оси OZ $\mathbf{n}_A = (0, 0, 1)$, и из (5) находим

$$f_{\text{approx}}^{\text{axial}}(g, g_0, (0, 0, 1), \varepsilon^2) = \frac{\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^2}{\left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^3} \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon^2} \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^2 \right\}, \quad (6)$$

где θ – второй угол Эйлера для вращения $g_0^{-1}g$.

3. АППРОКСИМАЦИЯ ДЛЯ АКСИАЛЬНОЙ КОМПОНЕНТЫ КАНОНИЧЕСКОГО НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В работе [9] аппроксимация аксиальной компоненты для канонического нормального распределения (2) с осью $\mathbf{n}_A = (0, 0, 1)$ и параметрами рассеяния $\varepsilon_i^2 = \alpha_{ii}$, $i = 1, 2, 3$ имеет вид

$$f_{\text{approx}}^{\text{axial}}(g, g_0, (0, 0, 1), \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \sqrt{A} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^4} \exp \left\{ -\frac{AC - B^2}{A} \right\}, \quad (7)$$

где

$$A = \left(\frac{(\cos \psi)^2}{\varepsilon_1^2} + \frac{(\sin \psi)^2}{\varepsilon_2^2} \right) \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon_3^2},$$

$$B = \left(\frac{1}{\varepsilon_2^2} - \frac{1}{\varepsilon_1^2} \right) \sin \psi \cos \psi \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^2,$$

$$C = \left(\frac{(\sin \psi)^2}{\varepsilon_1^2} + \frac{(\cos \psi)^2}{\varepsilon_2^2} \right) \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^2.$$

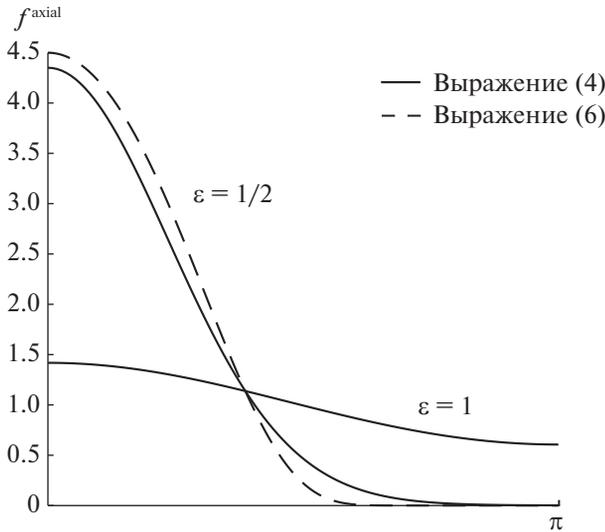


Рис. 1. Точное выражение (4) и аппроксимирующее выражение (6) аксиальной компоненты ЦНР для $\epsilon = 1$ и $\epsilon = 1/2$.

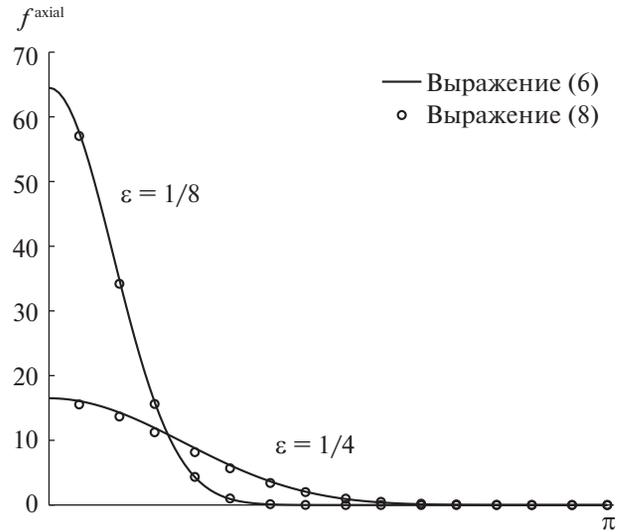


Рис. 2. Аппроксимирующие выражения (6) и (8) аксиальной компоненты ЦНР для $\epsilon = 1/4$ и $\epsilon = 1/8$.

При изотропном рассеянии $\epsilon_i = \epsilon, i = 1, 2, 3$, и распределение (7) переходит в (6).

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФРО ДЛЯ АКСИАЛЬНОЙ КОМПОНЕНТЫ ЦНР

В работе проведены вычисления аксиальной компоненты ЦНР с осью $\mathbf{n}_A = (0, 0, 1)$ и параметрами рассеяния $\epsilon = 2^{-k}, k = 0, 1, 2, 3$ для сравнения с аксиальной компонентой, определяемой выражением (6). Результаты приведены на рис. 1 (для значений $\epsilon = 1$ и $\epsilon = 1/2$), рис. 2 (для значений $\epsilon = 1/4$ и $\epsilon = 1/8$). При $\epsilon = 1$ и $\epsilon = 1/2$ в выражении (4) количество слагаемых выбиралось по формуле $l_{\max} = \frac{\sqrt{-\ln \delta}}{\epsilon}$, где $\delta = 10^{-3}$ – погрешность вычисления. При $\epsilon = 1/4$ и $\epsilon = 1/8$ суммирование ряда (4) заменялось аппроксимирующим выражением ([6], с. 266)

$$f_{\text{approx}}^{\text{axial}}(g, g_0, (0, 0, 1), \epsilon^2) = \frac{1}{\epsilon^2} \exp\left(-\frac{\theta^2}{4\epsilon^2}\right). \quad (8)$$

Можно заключить, что при значениях $\epsilon < 1/2$ аппроксимирующее распределение (6) дает результаты, практически совпадающие с таковыми для аксиальной компоненты ЦНР (4).

Для сравнения точности приближения $f^{\text{axial}} = f_1(\theta)$ (4) аппроксимирующей функцией $f_{\text{approx}}^{\text{axial}} = f_2(\theta)$ (6) вычислены величины

$$\Delta_1 = \max_{0 \leq \theta \leq \pi} |f_1(\theta) - f_2(\theta)| \frac{1}{2} \sin \theta,$$

$$\Delta_2 = \left(\int_0^\pi [f_1(\theta) - f_2(\theta)]^2 \frac{1}{2} \sin \theta d\theta \right)^{1/2}.$$

Результаты для различных значений ϵ занесены в таблицу 1.

Из табл. 1 видим, что с уменьшением ϵ погрешность аппроксимации уменьшается с 0.23 до 0.03 в норме Δ_1 и с 0.38 до 0.05 в норме Δ_2 .

В работе были выполнены вычисления аксиальной компоненты аппроксимирующего распределения (5) с осью текстуры $\mathbf{n}_A = (1, 0, 0)$ и $g_0 = (0, 0, 0)$ $\epsilon = 1$ и $\epsilon = 1/8$ по формуле

$$f_{\text{approx}}^{\text{axial}}(g, g_0, (1, 0, 0), \epsilon^2) = \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1 + \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta}{4} \times \left(\frac{1 + \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta}{2} \right)^{3/2} \times \exp \left\{ -\frac{1}{\epsilon^2} \frac{1 - (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta)}{1 + \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta} \right\}.$$

Таблица 1

ϵ	1	1/2	1/4	1/8
Δ_1	0.2338	0.1237	0.0662	0.0331
Δ_2	0.3792	0.1950	0.0962	0.0478

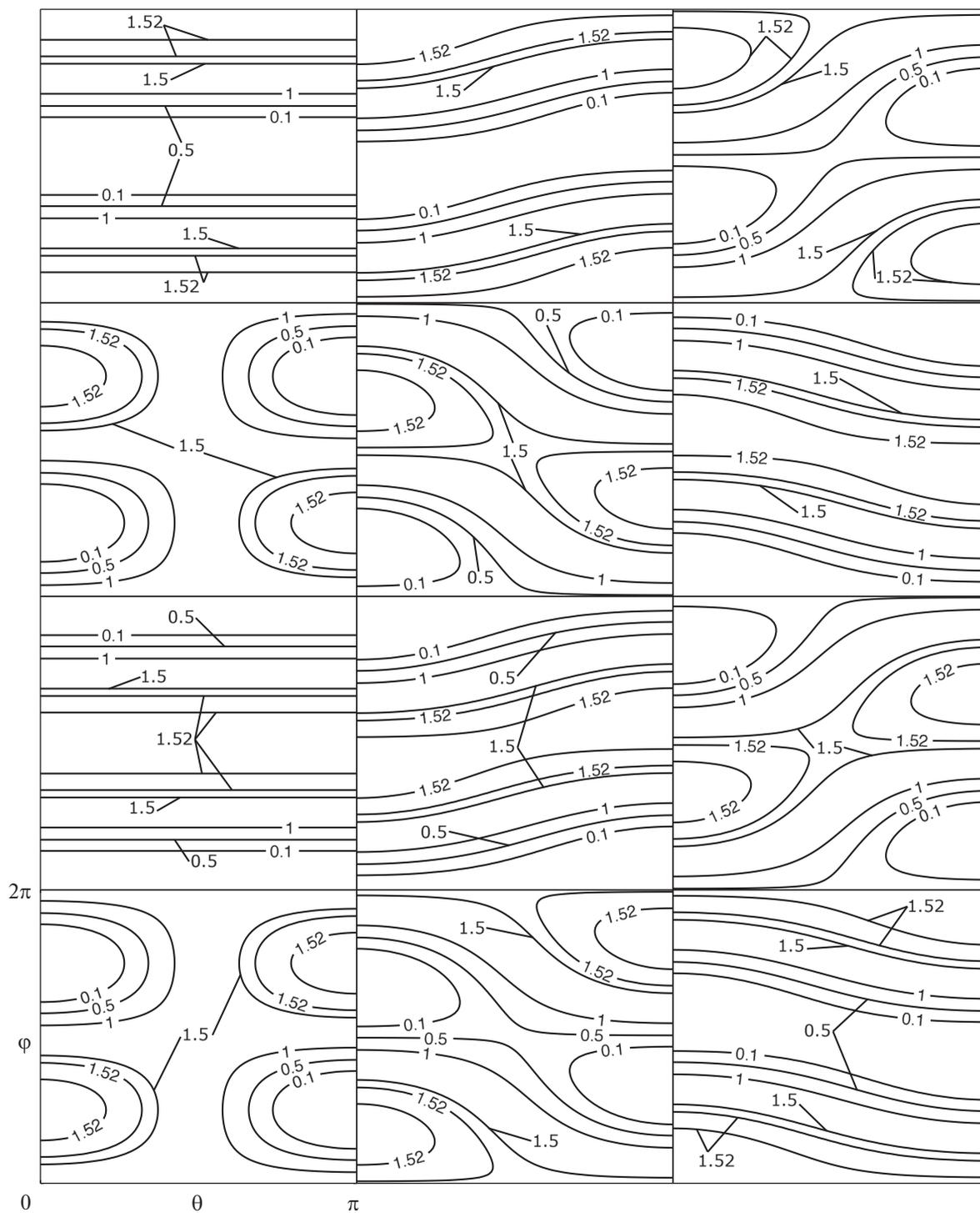


Рис. 3. Сечения аппроксимирующего выражения аксиальной компоненты ЦНР ($\epsilon = 1$) для $k = 0, 1, \dots, 11$ слева направо и сверху вниз.

Сечения полученных ФРО приведены на рис. 3 ($\epsilon = 1$) и рис. 4 ($\epsilon = 1/8$). Данные сечения построены для значений $\psi_k = \frac{\pi}{6}k$, $k = 0, 1, \dots, 11$, угол $\theta \in [0, \pi]$ отсчитывается по горизонтали, а угол $\varphi \in [0, 2\pi]$ – по вертикали.

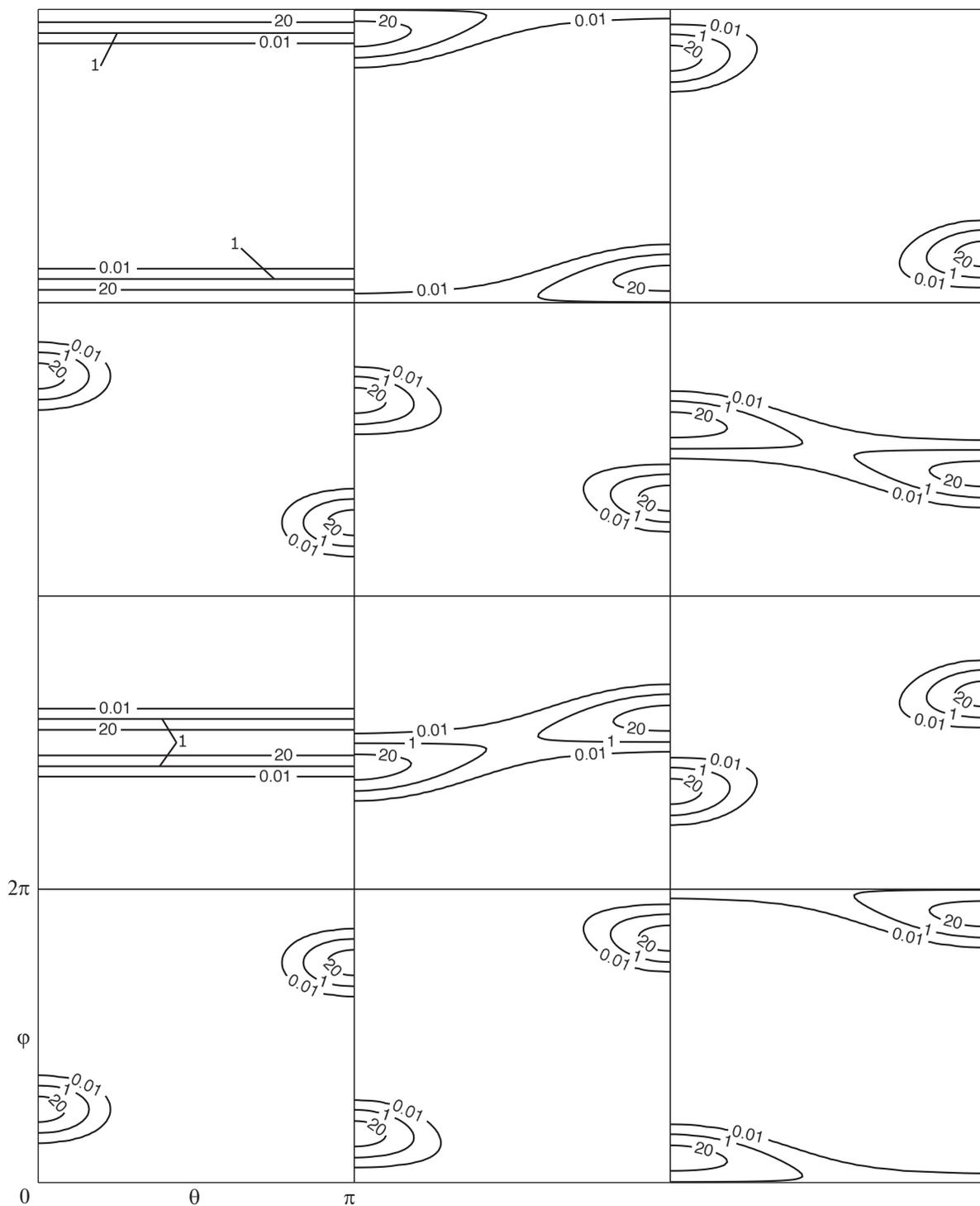


Рис. 4. Сечения аппроксимирующего выражения аксиальной компоненты ЦНР ($\epsilon = 1/8$) для $k = 0, 1, \dots, 11$ слева направо и сверху вниз.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФРО И ПФ
ДЛЯ АКСИАЛЬНОЙ КОМПОНЕНТЫ КНР

В работе проведены вычисления аксиальной компоненты канонического нормального рас-

пределения по аппроксимирующей формуле (7) для оси вращения $\mathbf{n}_A = (0, 0, 1)$ и наборов параметров рассеяния $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = (1, \frac{1}{8}, \frac{1}{2})$ и $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = (\frac{1}{8}, 1, \frac{1}{2})$.

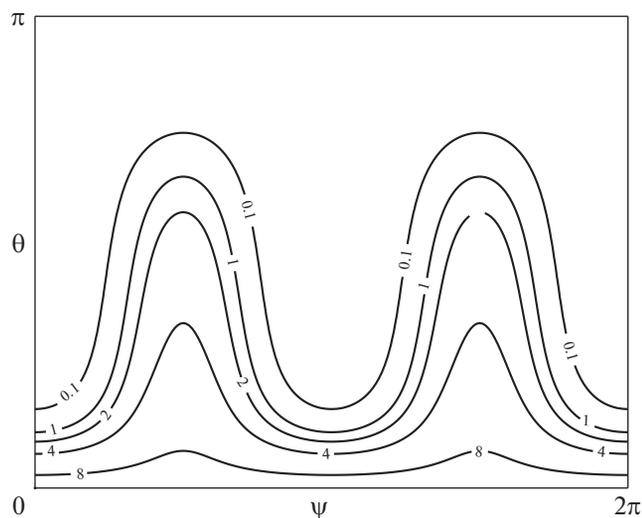


Рис. 5. Линии уровня аппроксимирующего выражения (7) аксиальной компоненты КНР при $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = (\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Результаты приведены на рис. 5 и рис. 6 соответственно. Угол $\psi \in [0, 2\pi]$ отсчитывается по горизонтали, а угол $\theta \in [0, \pi]$ – по вертикали.

Полюсная фигура, порожденная распределением (7) с осью $\mathbf{n}_A = (0, 0, 1)$ и параметрами рассе-

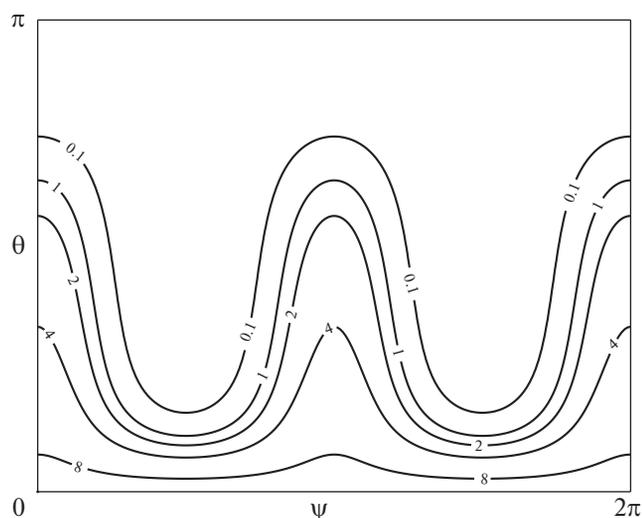


Рис. 6. Линии уровня аппроксимирующего выражения (7) аксиальной компоненты КНР при $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = (\frac{1}{8}, 1, \frac{1}{2})$.

яния $(\frac{1}{8}, 1, \frac{1}{2})$, вычислена с использованием уравнений связи $\pm \mathbf{y} = g\mathbf{h}$, где $\mathbf{y} \in S^2$ – направление в образце, $\mathbf{h} \in S^2$ – кристаллографическое направление. На рис. 7 приведена ПФ для $\mathbf{h} = (1, 0, 0)$, \mathbf{y} определяется полярным углом $\chi \in [0, \pi/2]$ и азимутальным углом $\eta \in [0, 2\pi]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрены и проиллюстрированы функция распределения ориентаций для аксиальной компоненты центрального и канонического нормального распределения и полюсная фигура, порождаемая аксиальной компонентой КНР. Полученные в ([8], [9]) аппроксимирующие выражения позволяют проще вычислять аксиальные компоненты для нормального распределения с круговым и некруговым характером рассеяния текстуры поликристаллов относительно оси вращения. Если учесть, что в реальных текстурах присутствуют, как правило, несколько аксиальных компонент с разными весами и параметрами ([3], [6]), то расчеты ФРО и ПФ для них заметно упростятся.

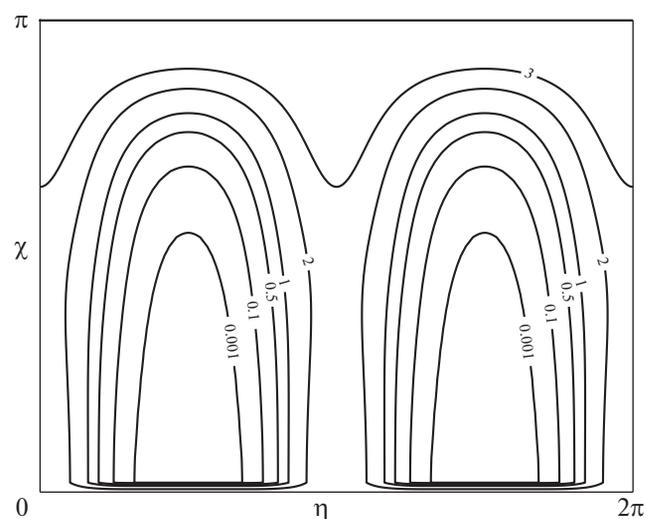


Рис. 7. Полюсная фигура аппроксимирующего выражения аксиальной компоненты КНР для рис. 6 для $\mathbf{h} = (1, 0, 0)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bunge H.J. *Texture Analysis in Material Science. Mathematical Methods*. London, Butterworths Publ., 1982.
2. Schaeben H. A Unified View of Methods to Resolve the Inverse Problem of Texture Goniometry. *Textures and Microstructures*, 1996. V. 25. № 2–4. P. 171–181.
3. Бухарова Т.И., Капчерин А.С., Николаев Д.И., Папиров И.И., Савелова Т.И., Шкуропатенко В.А. Новый метод восстановления функции распределения зерен по ориентациям. *Аксиальная текстура. ФММ*, 1988. Т. 65. № 5. С. 934–939.
4. Bucharova T.I., Savyolova T.I. Application of Normal Distribution on $SO(3)$ and S^n for Orientation Distribution Function Approximation. *Textures and Microstructures*. 1993. V. 21. P. 161–176.
5. Ivanova T.M., Nikolaev D.I. New Standard Function for Quantitative Texture Analysis. *Phys. stat. sol. (b)*. 2001. V. 228. № 3. P. 825–836.
6. Савелова Т.И., Иванова Т.М., Сыпченко М.В. Методы решения некорректных задач текстурного анализа и их приложения. М., НИЯУ МИФИ, 2012.
7. Попков В.Г., Савелова Т.И. Метод аналитических приближений вычисления канонических нормальных распределений на группе $SO(3)$. *Вестник НИЯУ МИФИ*, 2018. Т. 7. № 4. С. 360–366.
8. Ivanova T.M. Axial closed form texture component approximating the canonical normal distribution. 7th International conference “Problems of Mathematical Physics and Mathematical Modelling”: Books of abstracts (Moscow, NRNU MEPhI, 25–27 June). Moscow, 2018. P. 105–106.
9. Ivanova T.M. Axial closed-form texture component approximating the canonical normal distribution. *Journal of Physics: Conf. Series* 1205 (2019) 012021.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta “MIFI”, 2019, vol. 8, no. 3. pp. 289–296

Calculation of the Orientation Distribution Function and Pole Figures of the Axial Component of the Normal Texture Distribution

V. G. Popkov^{a,#}, T. I. Savyolova^{a,##}, and T. M. Ivanova^a

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: barsukkin@gmail.com

^{##}e-mail: TISavelova@mephi.ru

Received March 21, 2019; revised March 30, 2019; accepted April 9, 2019

Abstract—Approximation by standard functions is one of the methods to reconstruct the orientation distribution function of grains in polycrystalline materials from a set of experimentally measured pole figures. In practice, the central and canonical normal distributions are often used to solve this problem. The central distribution has a circular scattering character, whereas the canonical one is anisotropic. The orientation distribution function can have peak and axial components. The peak component is bell-shaped and has a single maximum in the orientational space. The axial component is the average of the peak component over rotations around the selected axis. The distribution functions for the orientations of the axial components of the central and canonical normal distributions have been calculated. Pole figures for the canonical normal distribution with different parameters are constructed. The exact and approximating expressions for the axial component of the central normal distribution have been compared quantitatively and qualitatively. It is appropriate to use an approximating function to simplify the calculation of the axial component for a normal distribution with circular and noncircular scattering patterns of the texture of polycrystals. Since real textures usually include several axial components with different parameters and weights, calculations of the orientation distribution function are greatly simplified when using the approximating expression.

Keywords: orientation distribution function, pole figure, axial texture, normal distribution

DOI: 10.1134/S2304487X19030106

REFERENCES

1. Bunge H.J. *Texture Analysis in Material Science. Mathematical Methods*. London, Butterworths Publ., 1982.
2. Schaeben H. A Unified View of Methods to Resolve the Inverse Problem of Texture Goniometry. *Textures and Microstructures*, 1996, vol. 25, no. 2–4, pp. 171–181.
3. Bukharova T.I., Kapcherin A.S., Nikolaev D.I., Papirov I.I., Savyolova T.I., Shкуропатенко В.А. Novyĭ metod vosstanovlenija funkcii raspredelenija zыoren po orientacijam. Aksial'naja tekstura [New method of restoring the distribution function of grains by orientations. Axial texture]. *Fiz. Met. i Metallov.*, 1988, vol. 65, no. 5, pp. 934–939 (in Russian).

4. Bucharova T.I., Savyolova T.I. Application of Normal Distribution on $SO(3)$ and S^n for Orientation Distribution Function Approximation. *Textures and Microstructures*. 1993, vol. 21, pp. 161–176.
5. Ivanova T.M., Nikolaev D.I. New Standard Function for Quantitative Texture Analysis. *Phys. stat. sol. (b)*, 2001, vol. 228, no. 3, pp. 825–836.
6. Savyolova T.I., Ivanova T.M., Sypchenko M.V. *Metody reshenija nekorrektnykh zadach teksturnogo analiza i ikh prilozhenija* [Methods for solving incorrect texture analysis tasks and their applications]. Moscow, NIYaU MIFI Publ., 2012 (in Russian).
7. Popkov V.G., Savyolova T.I. Metod analiticheskikh priblizhenij vychislenija kanonicheskikh normal'nykh raspredelenij na gruppe $SO(3)$ [Analytic Approximation Method for Calculations of Canonical Normal Distributions on $SO(3)$ Group]. *Vesntik NIYaU MIFI*, 2018, vol. 7, no. 4, pp. 360–366 (in Russian).
8. Ivanova T.M. Axial closed form texture component approximating the canonical normal distribution. *7th International conference "Problems of Mathematical Physics and Mathematical Modelling": Books of abstracts (Moscow, NRNU MEPhI, 25–27 June)*. Moscow, 2018, pp. 105–106.
9. Ivanova T.M. Axial closed-form texture component approximating the canonical normal distribution. *Journal of Physics: Conf. Series* 1205 (2019) 012021.