

Том 11, номер 4

ISSN 2304-487X

ИЮЛЬ – АВГУСТ 2022

<https://vestnikmephi.elpub.ru>

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ»



Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ»

Том 11 № 4 2022 ИЮЛЬ - АВГУСТ

Основан в июле 2012 г.
Выходит 6 раз в год
ISSN: 2304-487X

Главный редактор
М.Н. Стриханов

Редакционная коллегия:

А.В. Аксёнов, Pavel Bedrikovetsky,
А.М. Гальпер, С.Г. Гаранин, Vladimir S. Gerjikov, Н.Н. Евтихийев,
Yalchin Efendiev, Alexei I. Zhurov, Н.П. Калашников, Н.И. Каргин,
С.А. Кащенко, О.Н. Крохин,
Н.А. Кудряшов (*заместитель главного редактора*),
Raytcho Lazarov, А.И. Маймистов, О.В. Нагорнов, А.Д. Полянин,
В.В. Цегельник, Б.Н. Четверушкин,
М.А. Чмыхов (*ответственный секретарь*), William E. Schiesser

Адрес редакции: 115409, Москва, Каширское ш., 31,
Вестник НИЯУ МИФИ
Интернет: <https://vestnikmephi.elpub.ru>
Электронная почта: vestnik@mephi.ru

Москва
НИЯУ МИФИ

СОДЕРЖАНИЕ

Том 11, № 4, 2022

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

- Излучение, возникающее при захвате свободного электрона в каналированное состояние**
Н.П. Калашиников, А.С. Ольчак 281
- Акустические волны в разреженной высокотемпературной плазме**
Д.Б. Бембитов, С.Б. Дертеев, Н.К. Шивидов, Б.Б. Михалев 288
-

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

- Импульсы нейтронного и жесткого рентгеновского излучения камеры плазменного фокуса при разрядных токах 100-200 кА**
Д.И. Юрков, В.А. Лавренин, Б.Д. Лемешко, Ю.В. Михайлов, И.А. Прокуратов 296
-

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

- Представление решений уравнения Бюргерса тригонометрическими рядами**
С.П. Баутин, В.Е. Замыслов 305
-

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

- Аналитические решения обобщённого уравнения Трики-Бисваса**
А.А. Кутуков, Н.А. Кудряшов 319

Contents

Volume 11, Number 4, 2022

THEORETICAL AND EXPERIMENTAL PHYSICS

Radiation produced when a free electron is captured in a channeled state

N.P. Kalashnikov, A.S. Olchak 281

Acoustic waves in a rarefied high temperature plasma

D.B. Bembitov, S.B. Derteev, N.K. Shividov, B.B. Mikhalyaev 288

TECHNICAL PHYSICS

Neutron and hard x-ray pulses of the plasma focus chamber at discharge currents of 100–200 kA

D.I. Yurkov, V.A. Lavrenin, B.D. Lemeshko, Yu.V. Mikhailov, I.A. Prokuratov 296

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND DYNAMIC SYSTEMS

Representation of solutions to the Burgers equation trigonometric series

S.P. Bautin, V. E. Zamyslov 305

MATHEMATICAL MODELS AND NUMERICAL METHODS

Analytical solutions of the generalized Triki-Biswas equation

A.A. Kutukov, N.A. Kudryashov 319

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

УДК.539.412, 539.1.09

ИЗЛУЧЕНИЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЕ ПРИ ЗАХВАТЕ
СВОБОДНОГО ЭЛЕКТРОНА В КАНАЛИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

© 2022 Н.П. Калашиников*, А.С. Ольчак**

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

*e-mail: kalash@mephi.ru

**e-mail: asolchak@mephi.ru

Поступила в редакцию: 01.11.2022

После доработки: 02.11.2022

Принята к публикации: 08.11.2022

При влете заряженной частицы в монокристалл происходит перестройка плоской волновой функции свободного электрона в суперпозицию локализованных волновых функций дискретных состояний движения в режиме каналирования. Перестройка волновой функции электрона из свободного в каналированное состояние может произойти упруго, но может и сопровождаться квазихарактеристическим переходным электромагнитным излучением, возникающим на границе кристалла. Это переходное излучение дополняет хорошо известный тип излучения, возникающий в глубине кристалла при переходах каналированных частиц между дискретными состояниями квазисвязанного поперечного движения. Цель статьи – сравнение интенсивностей этих двух типов излучения.

Ключевые слова: когерентное взаимодействие, каналирование, монокристалл, электромагнитное излучение, квазихарактеристическое излучение, квантовая механика, гамма-излучение.

DOI: 10.26583/vestnik.2022.237

ВВЕДЕНИЕ

При движении релятивистского электрона в ориентированном монокристалле в режиме каналирования [1] возникает достаточно мощное жесткое электромагнитное излучение, что давно известно как экспериментаторам [2–6], так и теоретикам [7–13]. Процессы излучения, возникающего при каналировании (рис. 1), исследовались теоретически как в классическом [12], так и в квантовом [7] приближениях. Классическое приближение позволяет адекватно оценить интенсивность возникающего излучения, но не отражает его важных, характерных особенностей, связанных с дискретностью энергетического спектра квантовых каналированных состояний. В квантовом приближении эти особенности учитываются автоматически естественным образом, однако математические трудности квантового описания позволяют рассчитать спектральные и энергетические характеристики возникающего излучения только численно.

В недавнем цикле статей авторов [14–17] для исследования электромагнитных процессов, возникающих при каналировании, был применен квантово-классический подход, сочетающий преимущества обоих приближений. Этот

подход позволяет сохранить физическую прозрачность описания и использовать простые аналитические расчетные методы для получения количественных результатов. При квантово-классическом подходе авторы без особых математических трудностей смогли количественно оценить спектральные характеристики и интенсивность излучения, возникающего при плоскостном [16] и осевом [17] каналировании как отрицательно заряженных частиц (электронов), так и частиц, заряженных положительно (позитронов). За пределами рассмотрения, однако, пока осталась важная переходная компонента излучения, которая возникает при перестройке волновой функции свободного электрона в каналированное состояние на влете в кристалл [7, 18–20].

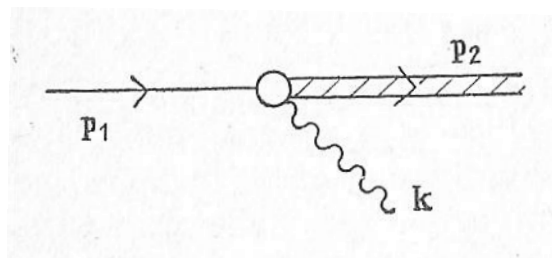


Рис. 1. Диаграмма перехода частицы из состояния непрерывного спектра в квазисвязанное каналированное состояние дискретного спектра

ИЗЛУЧЕНИЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЕ ПРИ ЗАХВАТЕ СВОБОДНОГО ЭЛЕКТРОНА В КАНАЛИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

Понятно, что для тонких кристаллических мишеней, когда излучение из объема кристалла невелико, эта переходная компонента может играть определяющую роль. Здесь авторы предлагают оценку интенсивности переходной компоненты излучения при перестройке электрона в каналированное состояние, основанную на уже зарекомендовавшем себя упрощенном квантово-классическом подходе.

ВЫБОР УСРЕДНЕННОГО ПОТЕНЦИАЛА ПОПЕРЕЧНОГО ДВИЖЕНИЯ

Если частица влетает в кристалл под углом к кристаллографической оси, меньшим, чем угол Линдхарда $\theta_L \approx \sqrt{2U/E}$, [1], она начинает двигаться в режиме каналирования и пролетает внутри каналов, образованных кристаллографическими осями, довольно большие расстояния. Движение поперек таких каналов ограничено расстояниями порядка радиуса атома (для отрицательно заряженной частицы) или порядка межатомного расстояния (для частицы положительно заряженной). В любом случае поперечное движение будет финитным, и по законам квантовой механики будет характеризоваться

дискретным набором возможных уровней энергии поперечного движения. Основная идея, существенно упрощающая теоретическое описание эффекта каналирования, заключается в замене истинного сложно устроенного потенциала осей (атомных цепочек) некоторым усредненным и потому гладким и непрерывным в осевом направлении.

В общем случае периодический потенциал кристаллической решетки можно представить в виде

$$V(\mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{g}} V_{\mathbf{g}} \exp(-i\mathbf{g}\mathbf{R}), \quad (1)$$

где $\mathbf{g}$ – вектор обратной решетки; $\mathbf{R}$ – радиус-вектор каналированной частицы в лабораторной системе отсчета (ЛСО), который можно представить в виде суммы $\mathbf{R} = \mathbf{v}t + \mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор частицы в сопутствующей системе отсчета (ССО), движущейся вдоль направления каналирования со скоростью $\mathbf{v}$, равной продольной скорости каналированной частицы. Обозначая поперечную и продольную компоненты вектора обратной решетки, соответственно, через $\mathbf{g}$ и g_z ($g_z = l/d$, $l = 0, 1, 2, \dots$), получаем

$$V(\mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{g}} \sum_{g_z} V_{\mathbf{g}, g_z} \exp(-2\pi i \mathbf{g} \mathbf{r} - 2\pi i g_z \mathbf{v} t) = i\hbar \sum_l F^l \exp(-2\pi i g_z \mathbf{v} t), \quad (2)$$

где

$$F^l = \frac{1}{i\hbar} \sum_{\mathbf{g}} V_{\mathbf{g}, 2\pi l/d} \exp(-2\pi i \mathbf{g} \mathbf{r} - 2\pi i l z/d), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Целочисленный коэффициент $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ определяет номера разрешенных в периодической структуре компонент векторов обратной решетки $g_z = l/d$, где d – расстояние между атомами в кристалле вдоль оси каналирования. Слагаемое с $l = 0$ в сумме (3) соответствует усредненному, не зависящему от z потенциалу, обуславливающему каналированное движение [1, 7].

Если предположить, что взаимодействие заряженной частицы с изолированным атомом описывается экранированным кулоновским потенциалом

$$U_0(\mathbf{r}) = (Z_1 Z_2 e^2 / r) \exp(-r/R_0), \quad (4)$$

где Z_1 – заряд ядра атома; Z_2 – заряд налетающей частицы ($-e$ для электрона или $+e$ для позитрона),

$R_0^{-1} = \frac{me^2 (Z_1^{2/3} + Z_2^{2/3})^{1/2}}{\hbar^2}$ – обратный радиус экранирования. Усредненный потенциал изолированной цепочки $U(\rho)$ будет иметь вид [7]

$$\langle U(\rho) \rangle = \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{d} K_0 \left(\frac{\rho}{R_0} \right). \quad (5)$$

После усреднения потенциал цепочки $\langle U(\rho) \rangle$ зависит только от расстояния ρ между частицей и осью этой цепочки. Функция $K_0(\rho)$ в (5) – нулевая специальная функция МакДоналда [7]. Дальнейшая работа с потенциалом (5) возможна только численно, а для аналитического исследования разумно аппроксимировать его более простыми математическими функциями, как это и делалось, например, в работах [14–17, 19–20].

Ненулевые слагаемые в сумме (3) можно рассматривать как возмущения на фоне непрерывного потенциала каналирования (5). Они могут служить причиной индуцированных переходов между уровнями квантованного поперечного движения каналированных частиц.

Волновая функция релятивистского электрона, движущегося в усредненном потенциале $\langle U(\rho) \rangle$ (потенциал типа (5) или его упрощенная аппроксимация), удовлетворяет квадрированному уравнению Дирака, которое, в пренебрежении градиентными и квадратичными по потенциалу слагаемыми, имеет вид [7]

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_r + \gamma \bar{U}(\rho) \right] \Psi(r) = E \Psi(r). \quad (6)$$

Как уже упоминалось в этой статье и в предшествующих работах [14–17], найти в аналитическом виде волновые функции, удовлетворяющие уравнению (6), весьма затруднительно не только с усредненным потенциалом (5), но и даже со многими его упрощенными аппроксимациями. Относительно несложно, используя квазиклассическое приближение, оценить число допустимых уровней энергии для электрона в усредненном потенциале. Для потенциала (5) расчет [7] дает значение

$$N_{\max} \approx \frac{\mu}{\hbar^2} \int_0^\infty (-\bar{U}(\rho)) \rho d\rho = \frac{2Z_1 \mu e^2}{d \hbar^2} \int_0^\infty K_0 \left(\frac{\rho}{R_0} \right) \rho d\rho = \frac{2Z_1^{1/3} \hbar^2}{\mu d e^2}. \quad (7)$$

Для ультрарелятивистского электрона нужно еще умножить выражение (7) на лоренц-фактор γ . Похожие выражения получаются и для многих реалистических аппроксимаций усредненного потенциала [7, 14–17, 19].

Явно решить уравнение (6) и найти его аналитические решения хотя бы в специальных функциях удастся только для не очень реалистичного, но очень простого потенциала

$$U(\rho) = \begin{cases} -V_0, & \rho < a; \\ 0, & \rho > a. \end{cases} \quad (8)$$

Решения уравнения (6) с потенциалом (8) имеют вид

$$\Psi(\rho, z) = \exp\left(\frac{ip_z z}{\hbar}\right) \Psi_{nm}(\rho), \quad (9)$$

$$\Psi_{nm}(\rho) = e^{im\phi} \begin{cases} C_1 J_m(k_n \rho), & \rho < a; \\ C_2 K_m(\eta_n \rho), & \rho > a, \end{cases}$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, – азимутальное квантовое число; $k_n = \sqrt{\frac{2\mu\gamma V_0}{\hbar^2} + \frac{2\mu E_{\perp n}}{\hbar^2}}$; $\eta_n = \sqrt{\frac{-2\mu E_{\perp n}}{\hbar^2}}$, а постоянные нормировки имеют вид

$$C_1 = \frac{k_n \eta_n}{\sqrt{\pi(k_n^2 + \eta_n^2) [a^2 k_n^2 J_m'^2(k_n a) - m^2 J_m^2(k_n a)]}}; \quad (10)$$

$$C_2 = \frac{k_n \eta_n}{\sqrt{\pi(k_n^2 + \eta_n^2) [a^2 k_n^2 J_m'^2(k_n a) - m^2 J_m^2(k_n a)]}} \frac{J_m(k_n a)}{K_m(\eta_n a)}.$$

Из условия сшивки волновой функции (8) на окружности $\rho = a$ получается трансцендентное уравнение для определения собственных значений энергии

$$kJ_m'(ka) K_m(\eta a) - \eta J_m(ka) K_m'(\eta a) = 0. \quad (11)$$

Стоит отметить, что при любой сколь угодно малой глубине V_0 в двумерной яме всегда имеется, по крайней мере, один дискретный уровень энергии [19–23]. Например, для монокристалла вольфрама ($Z = 74$, $d = 3,16$ Å) численный расчет дает следующие два уровня энергии в нерелятивистском случае: $\varepsilon_{\perp 1} \approx -102,80$ эВ, $\varepsilon_{\perp 1} \approx -3,74$ эВ.

КОЭФФИЦИЕНТЫ ЗАСЕЛЕННОСТИ УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ

Волновая функция электрона до влета в кристалл имеет вид плоской волны

$$\Psi(\mathbf{p}, z) = \exp\left(\frac{izp_z}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{ip_{\perp}\rho \cos(\varphi)}{\hbar}\right), \quad (12)$$

где $p_{\perp}$ – поперечная оси каналирования составляющая импульса частицы, а полярный угол отсчитывается от направления вектора $\vec{p}_{\perp}$. Раскладывая плоскую волну (13) по набору волновых функций внутри кристалла (9)

$$\exp\left(\frac{ip_{\perp}\rho \cos(\varphi)}{\hbar}\right) = \sum_{n,m} Q_{nm}(p_{\perp}) \Psi_{nm}(\mathbf{p}), \quad (13)$$

$$Q_{nm}(p_{\perp}) = 2\pi i^m k_0^2 a \frac{C_1 \left(\frac{p_{\perp}}{\hbar} J'_m \left(\frac{p_{\perp} a}{\hbar} \right) J_m(k_n a) - k_n J'_m(k_n a) J_m \left(\frac{p_{\perp} a}{\hbar} \right) \right)}{\left(\frac{p_{\perp}^2}{\hbar^2} - k_n^2 \right) \left(\frac{p_{\perp}^2}{\hbar^2} + \eta_n^2 \right)}, \quad (15)$$

где $k_0^2 = \frac{2\mu\gamma V_0}{\hbar^2}$, а $p_{\perp} \approx p_z \theta \approx p \theta$ (при $p_z \gg p_{\perp}$).

Подчеркнем, что приведенные квантово-механические вычисления проделаны для математически самой простой из всех, что могут быть аппроксимации усредненного потенциала (8) – и тем не менее, они уже имеют столь маловразумительный и громоздкий вид, что дальнейшая аналитическая работа с ними почти лишена практического смысла. Для рассмотрения эффекта переходного излучения, возникающего при перестройке волновой функции первоначально свободного электрона в квантовую суперпозицию волновых функций каналированных состояний типа (13), необходимо еще ввести в вычисляемые матричные элементы волновые функции испускаемых фотонов, определяемые их энергиями и импульсами, и, соответственно, проводить интегрирования и по этим дополнительным переменным. Запутанность подобных вычислений и сложно выражимые результаты совсем лишают их практического смысла. Разумнее рассмотреть задачу в упрощенном квантово-классическом приближении.

КЛАССИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ПЕРЕСТРОЙКЕ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ

Перестройка волновой функции электрона из свободного состояния, описываемого плоской

можно найти коэффициенты заселенности уровней энергии, которые сформируются после перестройки падающей плоской волны в каналированное состояние (в сумму (13)). По сути, это будут квадраты модулей коэффициентов разложения из выражения (13)

$$Q_{nm}(p_{\perp}) = \int \exp\left(\frac{ip_{\perp}\rho \cos(\varphi)}{\hbar}\right) \Psi_{nm}^*(\mathbf{p}) \rho d\rho d\varphi. \quad (14)$$

$$\text{Учитывая, что } \int_0^{2\pi} e^{i(x \cos \varphi - m\varphi)} d\varphi = 2\pi i^m J_m(x),$$

вычисление интеграла (14) дает результат

волной (12), в каналированное состояние, описываемое суперпозицией волновых функций типа (13), происходит не мгновенно на границе кристалла, но в некоторой переходной области, толщиной L_{nep} (см., например, [7]). Только в глубине кристалла, на расстояниях $z > L_{nep}$ от границы влета электрона, состояние электрона можно считать вполне каналированным и описывать волновой функцией типа (13).

Энергия движения, поперечного направления каналирования, у свободного электрона при влете в кристалл или равна нулю (электрон влетает строго параллельно оси каналирования), или положительна и не превышает величины глубины усредненного потенциала каналирования U_0 при влете под углами, не превышающими критического угла Линдхарда [1]. В переходной области $0 < z < L_{nep}$ энергия поперечного движения электрона ε_{tr} меняется от положительного значения $0 < \varepsilon_{tr} < U_0$ до некоторого нового, отрицательного $-U_0 < \varepsilon_{tr} < 0$, соответствующего отрицательным значениям поперечной энергии в каналированном состоянии. Характерное изменение поперечной энергии при такой перестройке, очевидно, будет порядка глубины потенциала каналирования $\Delta\varepsilon_{tr} \sim U_0$.

Перестройка волновой функции из исходного состояния (12) в каналированное (13) может произойти упруго, как это рассматривалось в предыдущем разделе статьи, но может сопровождаться и сбросом части энергии электрона в форме кванта электромагнитного излучения – фотона с энергией $\hbar\omega$. Хорошо известно (см., например, [3, 6–9, 11–13, 14–17]), что в случае когда релятивистская энергия свободного электрона E много больше его энергии покоя mc^2 ($E \gg mc^2$), релятивистский эффект Доплера приводит к тому, что характерные энергии фотонов, испускаемых даже при небольшом изменении поперечной энергии электрона $\Delta\epsilon_{tr}$, будут весьма значительны, превышая изменения поперечной энергии в гамма-фактор ($\gamma = E/mc^2$) в квадрате раз:

$$\hbar\omega \sim (E/mc^2)^2 < |\Delta\epsilon_{tr}| > \sim (E/mc^2)^2 U_0. \quad (16)$$

При всем разнообразии выбора химического состава и кристаллографических направлений в кристаллах средние значения внутрикристаллического потенциала для неметаллических кристаллов разнообразием не отличаются и составляют величины, близкие к значениям работы выхода электрона из данного материала (как правило, порядка десятка или нескольких десятков эВ, смотри оценку (7), а также оценки в работах [3–5, 7, 14–17]).

Интегральную интенсивность электромагнитного излучения, возникающего при изменении потенциальной энергии электрона на величину $\Delta\epsilon_{tr} \sim U_0$ на участке движения длины L_{nep} можно приближенно оценить с помощью классической электродинамической формулы для интенсивности дипольного излучения заряженной частицы, движущейся с ускорением $w = F/m \sim U_0/mL_{nep}$. С учетом большого лоренц-фактора ($\gamma = E/mc^2 \gg 1$) ультрарелятивистского электрона интенсивность [Вт] дипольного излучения составит:

$$I = (e^2/2\pi \epsilon_0 c^3)(F/m)^2 \sim (e^2/2\pi \epsilon_0 c^3)(\Delta U E/m^2 c^2 L_{nep})^2. \quad (17)$$

Умножая на время движения в переходном режиме $t \sim L_{nep}/c$, можно оценить интегральную энергию излучения, возникающего при переходе электрона в каналированное состояние:

$$W [\text{Дж}] \sim (e^2/2\pi \epsilon_0)(E/mc^2)^2 \times (\Delta U/mc^2)^2 (1/L_{nep}). \quad (18)$$

Поделив (18) на типичную энергию одного излучаемого кванта (16), оценим среднее число испускаемых квантов переходного излучения в расчете на один перестраивающийся в каналированное состояние электрон:

$$N \sim W/\hbar\omega \sim (e^2/2\pi \epsilon_0)(\Delta U/m^2 c^4)(1/L_{nep}) \sim 3 \cdot 10^{-15} \text{ м} / L_{nep}. \quad (19)$$

ВЫВОДЫ И ЗАВЕРШАЮЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Какие выводы можно сделать из численной оценки (19)?

1. Значение $3 \cdot 10^{-15}$ м в числителе выражения (19), полученное при подстановке оценочного значения $\Delta U \sim 10$ эВ и стандартных табличных значений остальных физических констант, заведомо много меньше межатомных расстояний в любом кристалле и тем более меньше ожидаемого значения длины перестройки волновой функции влетающего в кристалл электрона L_{nep} . Как следствие, число испускаемых при неупругой перестройке фотонов будет много меньше числа испытывающих перестройку волновой функции электронов. Таким образом, далеко не каждый электрон перестраивается в неупругом процессе. Подавляющее большинство электронов переходит в каналированное состояние упругим образом без сброса энергии.

2. При движении электрона внутри кристалла в каналированном состоянии количество испускаемых фотонов, очевидно, пропорционально толщине кристалла L (т.е. расстоянию, пройденному электроном в каналированном состоянии). В случае переходного излучения число фотонов (19) **обратно пропорционально** длине L_{nep} , на которой происходит процесс. Для тонких кристаллов переходное излучение должно быть преобладающим.

3. Интенсивность переходного излучения (18) и число испускаемых фотонов (19) зависят от характерной длины перестройки волновой функции L_{nep} , оценка которой требует существенно квантового рассмотрения.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках Программы стратегического академического лидерства «ПРИОРИТЕТ-2030».

ИЗЛУЧЕНИЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЕ ПРИ ЗАХВАТЕ
СВОБОДНОГО ЭЛЕКТРОНА В КАНАЛИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лундхард Й. Влияние кристаллической решетки на движение быстрых заряженных частиц // УФН. 1969. Т. 99. № 2. С. 249–296.
2. Andersen S.K., Bell F., Frandsen F., Uggerhoj E. Electron channeling in Si, Ag and Au crystals // Phys. Rev. 1973. V. 8B. № 11. P. 4913–4925.
3. Andersen J.U., Bonderup E., Loegsgaard E., et al. // NIM. 1982. V. 194. P. 209–224.
4. Воробьев С.А. Каналирование электронных пучков. М.: Энергоатомиздат, 1984. 96 с.
5. Оуки Е.Х. Взаимодействие заряженных частиц с твердыми телами. М.: Мир, 1985. 280 с.
6. Belkacem A., Bologna G., Chevallier M., et al. New Channeling Effects in the Radiative Emission of 150 GeV Electrons in a Thin Germanium Crystal // Phys. Lett. 1986. V. 177B. № 2. P. 211–216.
7. Калашиников Н.П. Когерентные взаимодействия заряженных частиц в монокристаллах. М.: Атомиздат, 1981. 224 с.
8. Барышевский В.Г. Каналирование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях. Минск: Изд. БГУ им. В.И. Ленина, 1982. 256 с.
9. Каган Ю.М., Кононец Ю.В. // ЖЭТФ. 1970. Т. 58. № 1. С. 226–254.
10. Рябов В.А. Эффект каналирования. М.: Энергоатомиздат, 1994. 240 с.
11. Базылев В.А., Живаго Н.К. Излучение быстрых частиц в веществе и во внешних полях. М.: ГРФМЛ. Наука, 1987. 272 с.
12. Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М. Электромагнитные процессы при высокой энергии в ориентированных кристаллах. Новосибирск: Наука СО РАН, 1989. 400 с.
13. Ахизер А.И., Шульга Н.Ф. Электродинамика высоких энергий в веществе. М.: ГРФМЛ. Наука. 1993. 344 с.
14. Калашиников Н.П., Ольчак А.С. Классическое и квантовое описание эффекта каналирования как взаимно дополняющие приближения // Поверхность, рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2022. № 10. С. 107–112.
15. Калашиников Н.П., Ольчак А.С. Явление каналирования как реализация модели 1D и 2D атомов в сопутствующей системе координат // Новые технологии науки, техники, педагогики. Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Наука-Общество-Технологии-2022». М.: МПУ, 2022. С. 5–13.
16. Калашиников Н.П., Ольчак А.С. Адиабатические инварианты при плоскостном каналировании в изогнутом кристалле (в сопутствующей системе отсчета) // Вестник НИЯУ «МИФИ». 2022. Т. 11. № 1. С. 5–8.
17. Калашиников Н.П., Ольчак А.С. Адиабатические инварианты при аксиальном каналировании в изогнутом кристалле (в сопутствующей системе отсчета) // Вестник НИЯУ «МИФИ». 2022. Т. 11. № 2. С. 91–100.
18. Калашиников Н.П., Ремизович В.С., Рязанов М.И. Столкновения быстрых заряженных частиц в твердых телах. М.: Атомиздат, 1980. 272 с.
19. Калашиников Н.П., Ольчак А.С. Взаимодействие ядерных излучений с монокристаллами. М.: МИФИ, 1979.
20. Коптелов Э.А., Калашиников Н.П. Характеристическое тормозное излучение ультрарелятивистских электронов в монокристаллах // Ин-т ядерных исследований АН СССР. Препринт П-0054. М.: Изд-во ИЯИ АН СССР. 1977.
21. Ambartsumov V.V., Kalashnikov N.P. Induced Resonance Evolution of the Channeling Electron Beam // NIM B. 2017. V. 402. P. 7174.
22. Dabagov S.B., Kalashnikov N.P. On Stimulated Resonance Radiation of Channeling Particles // NIM B. 2017. V. 402. P. 67–70.
23. Амбарцумов В.В., Калашиников Н.П. Вынужденная резонансная эволюция пучка канализированных электронов // Поверхность, рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2017. № 10. С. 90–96.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2022, vol. 11, no 4, pp. 281–287

**RADIATION PRODUCED WHEN A FREE ELECTRON IS CAPTURED
IN A CHANNLED STATE**

© 2022. N.P. Kalashnikov*, A.S. Olchak**

National Nuclear Research University MEPhI, Moscow, 115409, Russia

*e-mail: kalash@mephi.ru

**e-mail: asolchak@mephi.ru

Received November 1, 2022; revised November 2, 2022; accepted November 8, 2022

When a fast charged particle enters a single crystal, the plane wave function of the free particle is rearranged into a superposition of the localized wave functions, associated with bound transversal motion in channeling states. Transition of a free particle into the channeling state of bound transversal motion can be accompanied with quasi-

characteristic electromagnetic radiation. This type of radiation, emitted when a particle enters the crystal, amends the known radiation, associated with transitions between discrete levels of transversal motion, generated in the depth of the single crystal. Comparison of intensities of the two types of radiation is the objective of this note.

Keywords: coherent interaction, channeling, single crystal, electromagnetic radiation, quantum mechanics, gamma radiation.

REFERENCES

1. Lindhard J. Vliyanie kristallicheskoj reshetki na dvizhenie bystrykh zaryazhennykh chastic [Influence of the Crystal Lattice on the Motion of Fast Charged Particles]. UFN. 1969. Vol. 99. № 2. P. 249–296.
2. Andersen S.K., Bell F., Frandsen F., Uggerhoj E. Electron channeling in Si, Ag and Au crystals. Phys. Rev. 1973. Vol. 8B. № 11. P. 4913–4925.
3. Andersen J.U., Bonderup E., Loegsgaard E., e.a. NIM. 1982. Vol. 194. P. 209–224.
4. Vorob'ev S.A. Kanalirovanie elektronnykh puchkov [Channeling of electron beams]. M.: Energoatomizdat Publ., 1984. 96 p.
5. Ocuki E.H. Vzaimodejstvie zaryazhennykh chastic s tverdymi telami [Interaction of charged particles with solids]. M.: Mir Publ., 1985. 280 p.
6. Belkacem A., Bologna G., Chevallier M., e.a. New Channeling Effects in the Radiative Emission of 150 GeV Electrons in a Thin Germanium Crystal. Phys. Lett. 1986. Vol. 177B. № 2. P. 211–216.
7. Kalashnikov N.P. Kogerentnye vzaimodejstviya zaryazhennykh chastic v monokristallah. [Coherent interactions of charged particles in single crystals]. M.: Atomizdat Publ., 1981. 224 p.
8. Baryshevskij V.G. Kanalirovanie, izluchenie i reakcii v kristallah pri vysokikh energiyah. [Channeling, radiation and reactions in crystals at high energies]. Minsk: Izd. BGU im. V.I. Lenina Publ., 1982. 256 p.
9. Kagan YU.M., Kononec YU.V. ZHETF. 1970. Vol. 58. № 1. P. 226–254.
10. Ryabov V.A. Effekt kanalirovaniya. [Channeling effect]. M.: Energoatomizdat Publ., 1994. 240 p.
11. Bazylev V.A., Zhivago N.K. Izluchenie bystrykh chastic v veshchestve i vo vneshnih polyah [Radiation of fast particles in matter and in external fields]. M.: GRFML. Nauka Publ., 1987. 272 p.
12. Bajer V.N., Katkov V.M., Strahovenko V.M. Elektromagnitnye processy pri vysokoj energii v orientirovannykh kristallah [Electromagnetic processes at high energy in oriented crystals]. Novosibirsk: Nauka SO RAN Publ., 1989. 400 p.
13. Ahiezer A.I., Shul'ga N.F. Elektrodinamika vysokikh energij v veshchestve [Electrodynamics of high energies in matter]. M.: GRFML. Nauka Publ., 1993. 344 p.
14. Kalashnikov N.P., Ol'chak A.S. Klassicheskoe i kvantovoe opisaniya efekta kanalirovaniya kak vzaimno dopolnyayushchie priblizheniya [Classical and quantum descriptions of the channeling effect as complementary approximations]. Poverhnost', rentgenovskie, sinhrotronnye i nejtronnye issledovaniya. 2022. № 10. P. 107–112.
15. Kalashnikov N.P., Ol'chak A.S. Yavlenie kanalirovaniya kak realizatsiya modeli 1D i 2D atomov v soputstvuyushchej sisteme koordinat [The channeling phenomenon as a realization of the model of 1D and 2D atoms in the comoving coordinate system]. Novye tekhnologii nauki, tekhniki, pedagogiki. Materialy Vserossijskoj nauchno-prakticheskoy konferencii «Nauka-Obshchestvo-Tekhnologii-2022». [New technologies of science, technology, pedagogy. Materials of the All-Russian scientific and practical conference «Science-Society-Technologies-2022»]. M.: MPU Publ., 2022. P. 5–13.
16. Kalashnikov N.P., Ol'chak A.S. Adiabaticheskie invarianty pri ploskostnom kanalirovanii v izognutom kristalle (v soputstvuyushchej sisteme otscheta) [Adiabatic invariants for planar channeling in a curved crystal (in the comoving reference frame)]. Vestnik NIYaU MIFI. 2022. Vol. 11. № 1. P. 5–8 (in Russian).
17. Kalashnikov N.P., Ol'chak A.S. Adiabaticheskie invarianty pri aksial'nom kanalirovanii v izognutom kristalle (v soputstvuyushchej sisteme otscheta) [Adiabatic invariants for axial channeling in a curved crystal (in the comoving reference frame)]. Vestnik NIYaU MIFI. 2022. Vol. 11. № 2. P. 91–100 (in Russian).
18. Kalashnikov N.P., Remizovich V.S., Ryazanov M.I. Stolknoveniya bystrykh zaryazhennykh chastic v tverdyykh telah [Collisions of fast charged particles in solids]. M.: Atomizdat Publ., 1980. 272 p.
19. Kalashnikov N.P., Ol'chak A.S. Vzaimodejstvie yadernykh izluchenij s monokristallami [Interaction of nuclear radiation with single crystals]. M.: Izd-vo MIFI Publ., 1979.
20. Koptelov E.A., Kalashnikov N.P. Harakteristicheskoe» tormoznoe izluchenie ul'trarelyativistskikh elektronov v monokristallah [Characteristic bremsstrahlung of ultrarelativistic electrons in single crystals]. In: Yadernyye issledovaniya AN SSSR. Preprint P-0054. M.: Izd-vo IYAI AN SSSR Publ., 1977.
21. Ambartsumov V.V., Kalashnikov N.P. Induced Resonance Evolution of the Channeling Electron Beam. NIM B, 2017. Vol. 402. P. 71–74.
22. Dabagov S.B., Kalashnikov N.P. On Stimulated Resonance Radiation of Channeling Particles. NIM B. 2017. Vol. 402. P. 67–70.
23. Ambarcumov V.V., Kalashnikov N.P. Vynuzhennaya rezonansnaya evolyuciya puchka kanalirovannykh elektronov [Forced resonant evolution of a beam of channeled electrons]. Poverhnost', rentgenovskie, sinhrotronnye i nejtronnye issledovaniya. 2017. № 10. P. 90–96 (in Russian).

УДК 533.95; 534.28

АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В РАЗРЕЖЕННОЙ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЕ

© 2022 Д.Б. Бембитов*, С.Б. Дертеев, Н.К. Шивидов, Б.Б. Михалеев

Калмыцкий государственный университет имени Б.Б. Городовикова, Элиста, 358000, Россия

*e-mail: dbembitov@gmail.com

Поступила в редакцию 31.10.2022

После доработки: 07.11.2022

Принята к публикации: 08.11.2022

Изучается поведение акустических волн в разреженной высокотемпературной плазме, в качестве примера которой рассматривается плазма солнечной короны. Учитываются эффекты теплопроводности и нагрева/радиационных потерь, используются данные о температурном распределении интенсивности излучения. Для функции излучения построено аналитическое представление в виде интерполяции кубическими сплайнами. В приближении газовой динамики получено дисперсионное соотношение для акустических волн, из которого найдены частота, фазовая скорость и коэффициент затухания. Показано в целом превосходство в дисперсии и затухании эффекта теплопроводности, нагрев и радиационные потери проявляют себя при больших длинах волны.

Ключевые слова: плазма, теплопроводность и излучение плазмы, акустические волны, затухание и дисперсия волн, квазипериодические колебания.

DOI: 10.26583/vestnik.2022.3

ВВЕДЕНИЕ

В разреженной и сильно ионизованной плазме крайне незначительную роль в физических процессах играет вязкая и омическая диссипация, она существенна в исключительных ситуациях, например в токовых слоях. При изучении волновых явлений в высокотемпературной плазме солнечной короны обычно рассматривают такие эффекты, как теплопроводность и радиационные потери [1–3]. Волны сжатия наблюдаются повсеместно в нижней короне и рассматриваются как возможный источник ее нагрева [1, 4]. Диссипация волновой энергии сопровождается дисперсией, которая ведет к распаду волнового пакета и образованию квазипериодических колебаний [5–6]. Происхождение дисперсии в природной плазме может быть связано с потерей энергии волны, например, в оптически тонкой высокотемпературной плазме – вследствие ее излучения [7–8]. С этих позиций мы рассматриваем поведение акустических волн в разреженной плазме. Для волн, распространяющихся от основания солнечной короны, характерны периоды в 2–16 мин и скорости в 70–200 км · с⁻¹ [1, 4]. Температура плазмы оценивается здесь в 1–1.5 МК, а концентрация частиц – в 10⁹ см⁻³. Эти значения параметров мы берем в качестве ориентиров в своих расчетах. Нашей задачей является уточнение

роли упомянутых эффектов в затухании и дисперсии акустических волн. Работа направлена на развитие теоретических основ исследований космической плазмы, разработку методов формулирования и решения обратных задач для нахождения параметров плазмы.

ИЗЛУЧЕНИЕ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ РАЗРЕЖЕННОЙ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ

Для коэффициента теплопроводности высокотемпературной плазмы используем классическое выражение с кулоновским логарифмом $\Lambda_c = 19.3$ [9]

$$\kappa(T) \approx 2.28 \cdot 10^{-6} T^{5/2} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}.$$

Далее температура берется в масштабе $m(T) = 10^6 \text{ К}$, $\tilde{T}$ есть ее безразмерное значение: $T = m(T)\tilde{T}$. Аналогично через соответствующие масштабы определяются все остальные безразмерные величины, обозначенные знаком «тильда». Безразмерный коэффициент теплопроводности равен

$$\tilde{\kappa}(\tilde{T}) = 2.16 \tilde{T}^{5/2} \quad (1)$$

с масштабом $m(\kappa) = 10^9 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$. По этой формуле рассчитаны его значения, представленные в табл. 1.

Удельные энергетические потери на излучение разреженной высокотемпературной плазмы определяются выражением $\rho\Lambda(T)$, где ρ есть плотность [3, 4]. Для нахождения функции из-

лучения $\Lambda(T)$ плазмы солнечной короны имеется код CHIANTI с последней версией 10 [10]. Значения функции излучения приведены в табл. 1 (www.chiantidatabase.org).

Таблица 1. Значения коэффициента теплопроводности, функции излучения и ее производной в безразмерных величинах для ряда значений температуры от 0.5 до 3 МК

i	$\tilde{T}_i$	$\tilde{\kappa}(\tilde{T}_i)$	$\tilde{\Lambda}'(\tilde{T}_i)$	$\tilde{\Lambda}(\tilde{T}_i)/\tilde{T}_i$	$(\gamma - 1)\tilde{\Lambda}'(\tilde{T}_i) + \tilde{\Lambda}(\tilde{T}_i)/\tilde{T}_i$
0	0.5011872	0.3841083	1.6944206	3.9338643	5.0634780
1	0.5623413	0.5122167	0.9185398	3.6493067	4.2616666
2	0.6309573	0.6830520	0.5562137	3.3221151	3.6929243
3	0.7079457	0.9108644	0.8366417	3.0359288	3.5936899
4	0.7943282	1.2146573	0.9091272	2.8058128	3.4118976
5	0.8912509	1.6197715	0.4869861	2.5799847	2.9046421
6	1.0000000	2.1600000	-0.1518774	2.3168278	2.2155762
7	1.1220185	2.8804063	-0.5436842	2.0220692	1.6596131
8	1.2589254	3.8410835	-0.6187563	1.7379498	1.3254456
9	1.4125375	5.1221672	-0.7373520	1.4769723	0.9854043
10	1.5848932	6.8305197	-1.0297757	1.2211791	0.5346619
11	1.7782794	9.1086445	-1.3967444	0.9561163	0.0249533
12	1.9952623	12.146573	-1.5824227	0.6864101	-0.3685384
13	2.2387211	16.197715	-1.3081071	0.4500393	-0.4220322
14	2.5118864	21.600000	-0.7839322	0.2885310	-0.2340905
15	2.8183829	28.804063	-0.4002056	0.1951398	-0.0716638
16	3.1622777	38.410835	-0.1912866	0.1431106	0.0155862
17	3.5481339	51.221672	-0.0801279	0.1135040	0.0600854
18	3.9810717	68.305197	-0.0204270	0.0960697	0.0824517
19	4.4668359	91.086445	0.0110652	0.0853337	0.0927105
20	5.0118723	121.46573	0.0259607	0.0781900	0.0954971
21	5.6234133	161.97715	0.0307181	0.0728475	0.0933263
22	6.3095734	216.00000	0.0281228	0.0681803	0.0869288
23	7.0794578	288.04063	0.0198320	0.0634087	0.0766299
24	7.9432823	384.10835	0.0077292	0.0580227	0.0631755
25	8.9125094	512.21672	-0.0061839	0.0517903	0.0476678
26	10.000000	683.05197	-0.0200044	0.0447091	0.0313728
27	11.220185	910.86445	-0.0320510	0.0369820	0.0156147
28	12.589254	1214.6573	-0.0383280	0.0290409	0.0034890
29	14.125375	—	—	0.0218213	—

Ее аналитическое представление получено посредством интерполяции кубическими сплайнами (рис. 1)

$$\tilde{\Lambda}(\tilde{T}) = \tilde{A}_i(\tilde{T} - \tilde{T}_i)^3 + \tilde{B}_i(\tilde{T} - \tilde{T}_i)^2 + \tilde{C}_i(\tilde{T} - \tilde{T}_i) + \tilde{D}_i, \quad (2)$$

$$\tilde{T}_i < \tilde{T} < \tilde{T}_{i+1}, \quad i = 0, \dots, 15.$$

Функция $\tilde{\Lambda}$ и коэффициенты $\tilde{D}_i$ даны в масштабе $m(\Lambda) = 10^{26} \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-2} \cdot \text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$, другие коэффициенты – масштабах $m(A_i) = 10^8 \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-2} \cdot \text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{К}^{-3}$, $m(B_i) = 10^{14} \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-2} \cdot \text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{К}^{-2}$, $m(C_i) = 10^{20} \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-2} \cdot \text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$. Коэффициенты приведены в табл. 2, где под $\tilde{\Lambda}'$ понимается производная $\tilde{\Lambda}$ по $\tilde{T}$.

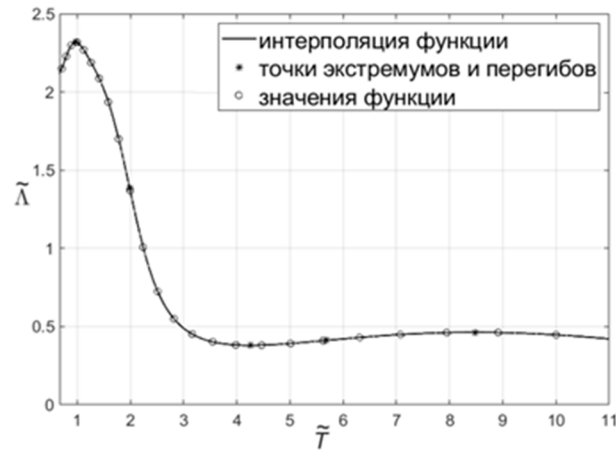


Рис. 1. Функция излучения, заданная по точкам, и ее интерполяция

Таблица 2. Значения безразмерных коэффициентов интерполяционных полиномов

i	$\tilde{A}_i$	$\tilde{B}_i$	$\tilde{C}_i$	$\tilde{D}_i$
0	-5.7435271	-5.8167934	1.6944206	1.9716026
1	41.100896	-6.8705139	0.9185399	2.0521560
2	2.0021047	1.5900257	0.5562138	2.0961129
3	-12.601951	2.0524425	0.8366417	2.1492730
4	-6.6334681	-1.2133198	0.9091272	2.2287364
5	1.2554399	-3.1421208	0.4869861	2.2994138
6	6.1576166	-2.7325371	-0.1518774	2.3168278
7	0.9950140	-0.4785085	-0.5436842	2.2687990
8	-1.3722335	-0.0698355	-0.6187563	2.1879492
9	-0.5651278	-0.7022106	-0.7373520	2.0862789
10	0.1572747	-0.9944195	-1.0297758	1.9354384
11	1.4603648	-0.9031752	-1.3967444	1.7002419
12	1.4127626	0.0474473	-1.5824227	1.3695682
13	-0.2924959	1.0792959	-1.3081071	1.0075124
14	-0.4646233	0.8395968	-0.7839323	0.7247572
15	-0.2105807	0.4123806	-0.4002056	0.5499789
16	-0.0882646	0.1951278	-0.1912866	0.4525556
17	-0.0369673	0.0929554	-0.0801279	0.4027274
18	-0.0171918	0.0449418	-0.0204270	0.3824603
19	-0.0076125	0.0198883	0.0110652	0.3811718
20	-0.0038714	0.0074410	0.0259607	0.3918783
21	-0.0021663	0.0003385	0.0307181	0.4096517
22	-0.0010942	-0.0041209	0.0281228	0.4301887
23	-0.0002758	-0.0066481	0.0198320	0.4488982
24	0.0001275	-0.0073627	0.0077292	0.4608911
25	0.0003910	-0.0069921	-0.0061839	0.4615819
26	0.0004262	-0.0057165	-0.0200044	0.4470908
27	0.0009076	-0.0041563	-0.0320510	0.4149451
28	0.0006945	-0.0004285	-0.0383280	0.3656036

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Невозмущенная плазма имеет однородные плотность ρ_0 и температуру T_0 , $C_s = \sqrt{\gamma R T_0 / M}$ – звуковая скорость. Она рассматривается как идеальный газ с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$ и молярной массой M , в рассматриваемом примере высокоионизованной водородной плазмы с гелиевой добавкой $M = 0,62 m_p N_A \approx 0,62 \text{ г} \cdot \text{моль}^{-1}$. Исходные уравнения записываем через плотность и температуру, считая их базовыми термодинамическими параметрами,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} &= -\frac{R}{M} \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + (\gamma - 1) T \frac{\partial v_x}{\partial x} &= \\ = -\frac{(\gamma - 1) M}{R \rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \\ - \frac{(\gamma - 1) M}{R} [\rho \Lambda(T) - H]. \end{aligned}$$

Эффект нагрева/радиационных потерь определяется выражением $\rho \Lambda(T) - H$, содержащим функцию нагрева H . Конкретные источники нагрева плазмы в условиях короны звезд трудно установить, поэтому при изучении волновых процессов считаем величину H постоянной [11], определяемой из условия теплового баланса в равновесном состоянии: $\rho_0 \Lambda(T_0) - H = 0$. Подобный подход оправдан, если процессы нагрева имеют большие временные и пространственные масштабы.

После линеаризации исходных уравнений относительно малых возмущений рассмотрим последние в виде монохроматических волн $\sim \exp(kx - \omega t)$. Для частоты и волнового числа введем безразмерные значения $\tilde{\omega}$, $\tilde{k}$ и соответствующие масштабы $m(\omega) = 0,1 \text{ с}^{-1}$, $m(k) = 10^{-8} \text{ см}^{-1}$. При этом периоды колебаний будут иметь масштаб около одной минуты, что соответствует данным наблюдений. Величина $m(\omega)/m(k) = m(C_s) = 10^7 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ будет рассматриваться как масштаб звуковой скорости, характерный для высокотемпературной плазмы. Дисперсионное соотношение в безразмерных величинах имеет следующий вид:

$$\tilde{\omega}^3 + iA\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}\tilde{C}_s^2\tilde{k}^2 + iB = 0, \quad (3)$$

$$A = A_1\tilde{k}^2 + A_2,$$

$$B = [-(A_1\tilde{k}^2 + A_2) + A_3] \tilde{C}_s^2\tilde{k}^2/\gamma,$$

где коэффициенты A_1, A_2 и A_3 определяются выражениями

$$S = (\gamma - 1)Mm(\rho)/(Rm(\omega)),$$

$$\begin{aligned} A_1 &= Sm(\kappa)m(k)^2\tilde{\kappa}(\tilde{T}_0)/((m(\rho))^2\tilde{\rho}_0) \approx \\ &\approx 5,01\tilde{\kappa}(\tilde{T}_0)/\tilde{\rho}_0, \end{aligned}$$

$$A_2 = Sm(\Lambda)\tilde{\rho}_0\tilde{\Lambda}'(\tilde{T}_0)/m(T) \approx 0,005\tilde{\rho}_0\tilde{\Lambda}'(\tilde{T}_0),$$

$$\begin{aligned} A_3 &= Sm(\Lambda)\tilde{\rho}_0\tilde{\Lambda}(\tilde{T}_0)/(m(T)\tilde{T}_0) \approx \\ &\approx 0,005\tilde{\rho}_0\tilde{\Lambda}(\tilde{T}_0)/\tilde{T}_0. \end{aligned}$$

При выборе масштаба плотности $m(\rho) = 10^{-15} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ ориентируемся на значение концентрации частиц $m(n) = 10^9 \text{ см}^{-3}$, характерное для нижней части солнечной короны. Соотношение между безразмерными величинами плотности и концентрации: $\tilde{\rho} = 1,037 \tilde{n}$. Параметр $A_1 \geq 0$ определяет влияние теплопроводности, A_2 и $A_3 \geq 0$ – нагрева/радиационных потерь. В пределе $\tilde{k} \rightarrow \infty$ асимптотическое поведение частоты есть

$$\tilde{\omega} \approx V_\infty \tilde{k} - i\delta_\infty,$$

$$V_\infty = \tilde{C}_s/\sqrt{\gamma}, \delta_\infty = (\gamma - 1)\tilde{C}_s^2/(2\gamma A_1), \quad (4)$$

где V_∞ есть предел фазовой скорости, δ_∞ – предел коэффициента затухания. В отсутствие теплопроводности аналогично можно найти асимптотику частоты, обусловленную действием нагрева/радиационных потерь:

$$V_\infty = \tilde{C}_s, \delta_\infty = ((\gamma - 1)A_2 + A_3)/2\gamma. \quad (5)$$

Дисперсия локализована в области конечных волновых чисел. Асимптотическое значение коэффициента затухания уменьшается с увеличением A_1 . Конкретные распределения будут получены из численных решений уравнения (3), рассматриваемых в следующем разделе.

 НЕУСТОЙЧИВОСТЬ
И ЗАТУХАНИЕ ВОЛН

Выражение (5) допускает отрицательные значения коэффициента затухания. Это возможно в интервале убывания функции излучения. Появление неустойчивости определяется величиной волнового числа из условия

$$(\gamma - 1)(A_1\tilde{k}^2 + A_2) + A_3 < 0.$$

Оно соответствует известному условию неустойчивости [12]. Поскольку $(\gamma - 1)A_2 + A_3 \sim (\gamma - 1)\tilde{\Lambda}'(\tilde{T}_i) + \tilde{\Lambda}(\tilde{T}_i)/\tilde{T}_i$, из табл. 1 можно определить температуры, при которых она возможна в рассматриваемом нами примере,

они лежат в небольшом интервале $\tilde{T}_0 = 2 - 2,8$ МК. Здесь мы рассматриваем примеры с температурой $\tilde{T}_0 = 1$. В отличие от температуры, концентрация частиц поддается нахождению труднее, и рассматриваемые значения обычно имеют оценочный характер. Это вносит неопределенность в результаты исследований и часто ведет к неадекватным выводам. Нашей задачей является уточнение ролей теплопроводности и нагрева/радиационных потерь в затухании волны. Традиционно считается, что

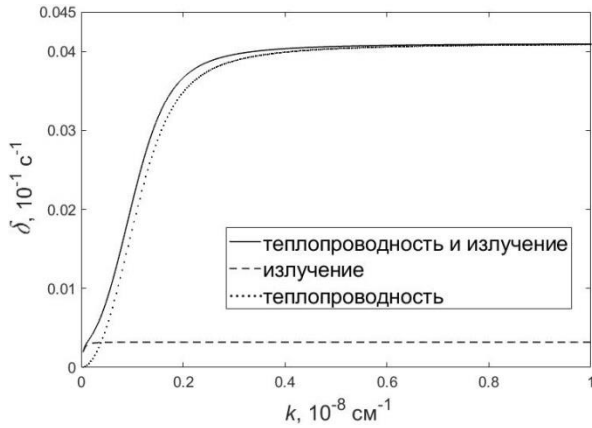


Рис. 2. Коэффициент затухания при $\tilde{n}_0 = 1$

Эффект нагрева/радиационных потерь может конкурировать только в области малых волновых чисел. Граничное волновое число, разделяющее области влияния одного и другого эффекта, равно $\tilde{k}_s \approx 0,04$ в случае $\tilde{\rho}_0 = 1$ и $\tilde{k}_s \approx 0,2$ в случае $\tilde{\rho}_0 = 5$. Соответствующие длины волны равны $\lambda \approx 1,5 \cdot 10^{10}$ см, $\lambda \approx 3,0 \cdot 10^9$ см или 150 тыс. км и 30 тыс. км, периоды равны около 600 и 200 с. Они близки к наблюдаемым значениям, что позволяет нам применить теоретическую модель к описанию наблюдаемых событий и оценивать плотность плазмы по параметрам наблюдаемых колебаний.

ДИСПЕРСИЯ ВОЛН

Дисперсия, обусловленная нагревом / радиационными потерями, эффективна только в небольшой области малых волновых чисел $\tilde{k}$ [2], причем эта область расширяется с увеличением $\tilde{n}_0$. Для больших $\tilde{k}$ дисперсия обусловлена теплопроводностью, это можно увидеть из рис. 4 и 5.

Рассматриваемые случаи различаются спектральной локализацией дисперсии: для $\tilde{n}_0 = 1$ она заметна только в интервалах $0 < \tilde{k} < 0,4$ и $0 < \tilde{\omega} < 0,6$, для $\tilde{n}_0 = 5$ она выходит в области

причиной затухания волн в нижней части солнечной короны является теплопроводность [1]. Рассматриваемые примеры должны выявить связь этих событий с локальными свойствами самой плазмы. Расчеты производим при помощи пакета Maple 18, сравниваем два примера с температурой $\tilde{T}_0 = 1$ и плотностями $\tilde{\rho}_0 = 1$, $\tilde{\rho}_0 = 5$. Рис. 2 и 3 показывают доминирующую роль теплопроводности в затухании для больших волновых чисел.

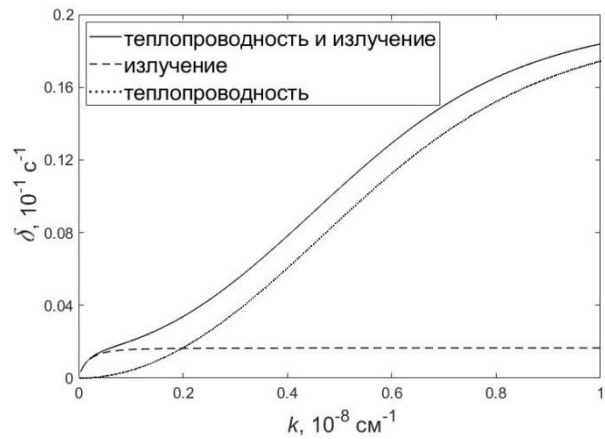


Рис. 3. Коэффициент затухания при $\tilde{n}_0 = 5$

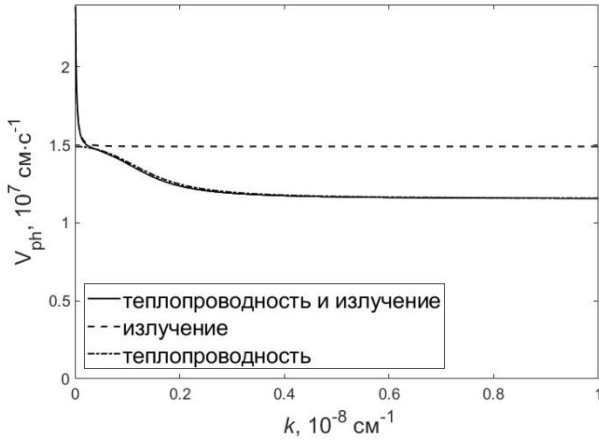
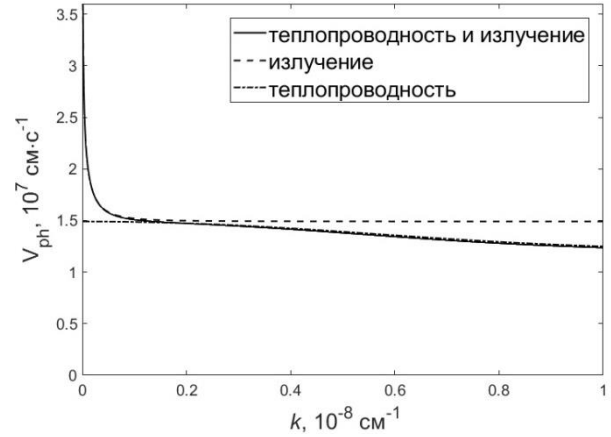
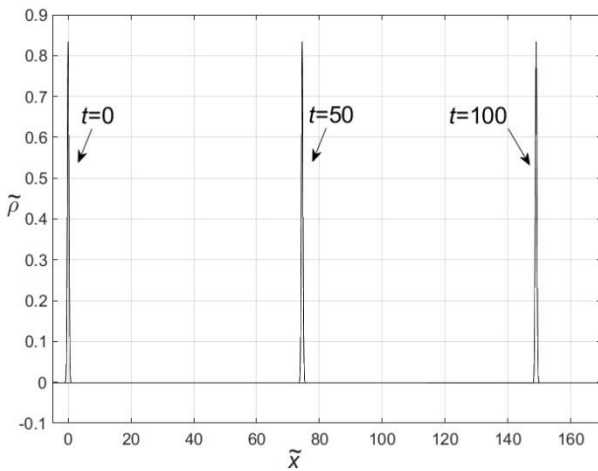
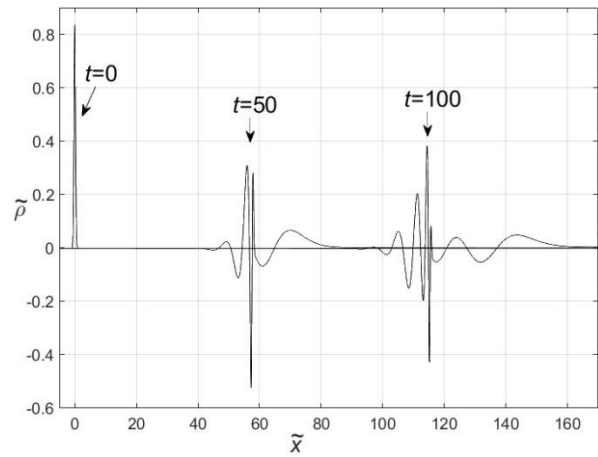
$\tilde{k} > 1$ и $\tilde{\omega} > 1,2$. Моделирование волнового пакета производим, рассматривая локализованный начальный импульс гауссовой формы

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}, 0) = \frac{1}{6} \int_0^{25} e^{-\tilde{k}^2/32} \cos(\tilde{k}\tilde{x}) d\tilde{k}.$$

В данном случае $\tilde{\rho}(\tilde{x}, 0)$ есть ненормированное распределение, представляющее относительную величину возмущения. Безразмерная пространственная переменная $\tilde{x}$ определяется из соотношения масштабов $m(k)m(x) = 1$ или $m(x) = 10^8$ см. Степень локализации импульса в данном примере — высокая, его пространственная протяженность составляет $\Delta x \approx m(x)$ или $\Delta \tilde{x} \approx 1$. При $\tilde{t} > 0$ поведение волнового пакета определяется косинус-интегралом Фурье

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{1}{6} \int_0^{25} e^{-\tilde{k}^2/32} \cos(\tilde{k}\tilde{x} - \tilde{\omega}\tilde{t}) d\tilde{k}.$$

Безразмерное время $\tilde{t}$ определяется из соотношения $m(\omega)m(t) = 1$ или $m(t) = 10$ с. В интеграле учитывается зависимость $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\tilde{k})$, полученная численным решением дисперсионного соотношения (3). Функция $\tilde{\omega}(\tilde{k})$ определена массивом значений, поэтому интеграл фактически вычисляется в виде суммы.


 Рис. 4. Фазовая скорость при $\tilde{n}_0 = 1$

 Рис. 5. Фазовая скорость при $\tilde{n}_0 = 5$

 Рис. 6. Волновой пакет при $\tilde{n}_0 = 1$

 Рис. 7. Волновой пакет при $\tilde{n}_0 = 5$

На рис. 6 и 7 показано поведение волнового пакета, во втором случае имеется разложение начального импульса на отдельные составляющие с различными длинами волны. Наблюдение подобных возмущений в практике показывает наличие квазипериодических осцилляций интенсивности излучения плазмы, вызванных изменением плотности [7–8]. Знание периодов может дать информацию о реальной зависимости $\tilde{\omega}(\tilde{k})$ и физических параметрах плазмы. В случае $\tilde{n}_0 = 1$ первоначальный импульс в течение первых 1000 с (17 мин) распространяется практически без изменения формы. Скорость его распространения близка к звуковой скорости $\tilde{C}_s = 1.49$. Дисперсия обусловлена, главным образом, действием теплопроводности. Из сравнения рис. 6 и 7 можно также сделать вывод, что дисперсия более значительна в случае плотной плазмы. На первый взгляд, он противоречит высказанному ранее замечанию, что эффект теплопроводности ослабевает с увеличением плотности.

Для разрешения данного противоречия обратимся к распределениям фазовой скорости (см. рис. 3 и 5). Из асимптотики частоты (4) следует, что предельное при $\tilde{k} \rightarrow \infty$ значение фазовой скорости не зависит от величины коэффициента $A_1 \sim \tilde{k}(\tilde{T}_0)/\tilde{\rho}_0$. Фазовая скорость волны под действием теплопроводности меняется в определенных пределах от $\tilde{C}_s$ при $\tilde{k} = 0$ до $\tilde{C}_s/\sqrt{\gamma}$ при $\tilde{k} \rightarrow \infty$. Область волновых чисел, в которой она меняется, при больших A_1 локализована вблизи нуля. С увеличением плотности коэффициент A_1 , определяющий действие теплопроводности, действительно уменьшается, но при этом расширяется область изменения фазовой скорости, как видно из рис. 4 и 5. Область дисперсии затрагивает большие значения волнового числа $\tilde{k}$. Это приводит к расплыванию узкого локализованного импульса, поскольку ширина его фурье-образа в пространстве волновых чисел велика.

ВЫВОДЫ

В частном примере разреженной высокотемпературной плазмы солнечной короны дисперсия акустической волны, вызванная действием процессов нагрева/радиационных потерь, мала в сравнении с дисперсией из-за обычной спитцеровской теплопроводности [9]. В реальности она будет малозаметна на фоне гораздо более сильной дисперсии, вызванной теплопроводностью. Речь идет о продольных волнах или волнах сжатия, генерируемых локальными импульсными источниками. Существование таких волн в нижней части солнечной короны подтверждается многочисленными наблюдениями [1, 4], их наиболее вероятным источником принято считать конвективные толчки в нижней атмосфере. Расплывание локализованного импульса или его распад на отдельные периодические составляющие ведет к образованию наблюдаемых квазипериодических осцилляций [7–8]. Нашими расчетами показано, что этот процесс обусловлен, главным образом, действием теплопроводности. Изучение спектра квазипериодических колебаний, генерируемых в результате дисперсии, позволит получать сведения о свойствах плазмы, используя зависимость $\tilde{\omega}(\tilde{k})$, которую можно установить с помощью фурье-разложения. Таким образом, можно формулировать обратную задачу, которая будет предметом нашего последующего исследования.

Для линейного анализа звуковых волн необходимо аналитическое представление физических характеристик, в данном случае для функции излучения оптически тонкой высокотемпературной плазмы солнечной короны по расчет-

ным значениям построена интерполяция кубическими сплайнами, дающая хорошее приближение. Результаты свидетельствуют о том, что и теплопроводность, и нагрев / радиационные потери могут играть важную роль в затухании звуковых волн. Конкретно, излучение может оказывать решающее влияние на затухание длинноволновых возмущений плотности. Проведенные расчеты позволяют установить числовые характеристики границы раздела влияния рассматриваемых физических эффектов. Можно утверждать, что прояснена ситуация с применением различных механизмов в описании конкретных событий. Представленная модель линейных колебаний с использованием адекватным аналитическим выражением функции излучения позволяет производить не только расчет длин волн и периодов для заданных параметров равновесной плазмы, но и, наоборот, по длинам волн и периодам рассчитывать параметры плазмы. В солнечной физике она формулируется как основная задача корональной сейсмологии. Нахождение температуры и плотности корональной плазмы важно с практической точки зрения для предсказания активных явлений, оказывающих прямое воздействие на околоземное космическое пространство.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ (№ 075-03-2022-119/1 «Разработка новых наблюдательных и теоретических подходов в прогнозе космической погоды по данным наземных наблюдений»).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. De Moortel I. Longitudinal waves in coronal loops // Space Sci. Rev. 2009. V. 149. P. 65.
2. Nakariakov V.M., Afanasyev A.N., Kumar S., Moon, Y.-J. Effect of local thermal equilibrium misbalance on long-wavelength slow magnetoacoustic waves // Astrophys. J. 2017. V. 849. P. 62.
3. Kolotkov D.Y., Nakariakov V.M., Zavershinskii D.I. Damping of slow magnetoacoustic oscillations by the misbalance between heating and cooling processes in the solar corona // Astron. Astrophys. 2019. V. 628. P. A133.
4. Wang T.J. Waves in solar coronal loops / Low-frequency waves in space plasmas. Ed. by Andreas Keiling, Dong-Hun Lee, Valery Nakariakov // Geophys. Monograph Series. 2016. V. 216. Wiley. P. 395.

5. Гинзбург В.Л. Об общей связи между поглощением и дисперсией звуковых волн // Акуст. журн. 1955. Т. 1. Вып. 1. С. 31.
6. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.
7. Zavershinskii D.I., Kolotkov D.Y., Nakariakov V.M., Molevich N.E., Ryashchikov D.S. Formation of quasi-periodic slow magnetoacoustic wave trains by the heating/cooling misbalance // Phys. Plasmas. 2019. V. 26. P. 082113.
8. Belov S.A., Molevich N.E., Zavershinskii D.L. Dispersion of slow magnetoacoustic waves in the active region fan loops introduced by thermal misbalance // Solar Phys. 2021. V. 296. P. 122.
9. Снитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. М.: Мир, 1965. 212 с.
10. Del Zanna G., Dere K.P., Young P.R., Landi E. CHIANTI – An atomic database for emission lines. XVI.

Version 10, further extensions // *Astrophys. J.* 2021. V. 909. P. 38.

11. *Mikhalyaev B.B., Veselovskii I.S., Khongorova O.V.* Radiation effects on the MHD wave behavior in

the solar corona // *Solar System Res.* 2013. V. 47. № 1. P. 50.

12. *Field G.B.* Thermal instability // *Astrophys. J.* 1965. V. 142. P. 531.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2022, vol. 11, no. 4, pp. 288–295

ACOUSTIC WAVES IN A RAREFIED HIGH TEMPERATURE PLASMA

D.B. Bembitov*, S.B. Derteev, N.K. Shvidov, B.B. Mikhalyaev

Kalmyk State University named after B.B. Gorodovikov, Elista, 358000, Russia

**e-mail: dbembitov@gmail.com*

Received October 31, 2022; revised November 7, 2022; accepted November 8, 2022

The behavior of acoustic waves in a rarefied high-temperature plasma is studied, as an example of which the plasma of the solar corona is considered. The effects of thermal conductivity and heating/radiation losses are taken into account, and data on the temperature distribution of radiation intensity are used. An analytical representation in the form of interpolation by cubic splines is constructed for the radiation function. In the gas dynamics approximation, the dispersion relation for acoustic waves is obtained, from which the frequency, phase velocity and damping coefficient are found. In general, the superiority in dispersion and in damping of the thermal conductivity effect is shown. Heating and radiation losses manifest themselves at large wavelengths.

Keywords: plasma, thermal conductivity and radiation of the plasma, acoustic waves, dispersion and damping of waves, quasi-periodic oscillations.

REFERENCES

1. *De Moortel I.* Longitudinal waves in coronal loops. *Space Sci. Rev.* 2009. V. 149. P. 65.

2. *Nakariakov V.M., Afanasyev A.N., Kumar S., Moon, Y.-J.* Effect of local thermal equilibrium misbalance on long-wavelength slow magnetoacoustic waves. *Astrophys. J.* 2017. V. 849. P. 62.

3. *Kolotkov D.Y., Nakariakov V.M., Zavershinskii D.I.* Damping of slow magnetoacoustic oscillations by the misbalance between heating and cooling processes in the solar corona // *Astron. Astrophys.* 2019. V. 628. P. A133.

4. *Wang T.J.* Waves in solar coronal loops / Low-frequency waves in space plasmas. Ed. by Andreas Keiling, Dong-Hun Lee, Valery Nakariakov. *Geophys. Monograph Series.* 2016. V. 216. Wiley. P. 395.

5. *Ginzburg V.L.* Ob obshchej svyazi mezhdru pogloshcheniem i dispersiej zvukovyh voln [On the General Relationship Between Absorption and Dispersion of Sound Waves]. *Akust. zhurn.* 1955. V. 1. № 1. P. 31.

6. *Uizem Dzh.* Linejnye i nelinejnye volny [Linear and non-linear waves]. Moscow, Mir Publ. 1977. 624 p.

7. *Zavershinskii D.I., Kolotkov D.Y., Nakariakov V.M., Molevich N.E., Ryashchikov D.S.* Formation of quasi-periodic slow magnetoacoustic wave trains by the heating/cooling misbalance. *Phys. Plasmas.* 2019. V. 26. P. 082113.

8. *Belov S.A., Molevich N.E., Zavershinskii D.L.* Dispersion of slow magnetoacoustic waves in the active region fan loops introduced by thermal misbalance. *Solar Phys.* 2021. V. 296. P. 122.

9. *Spitzer L.* Fizika polnost'yu ionizovannogo gaza [Physics of a fully ionized gas]. Moscow, Mir Publ. 1965. 212 p.

10. *Del Zanna G., Dere K.P., Young P.R., Landi E.* CHIANTI – An atomic database for emission lines. XVI. Version 10, further extensions. *Astrophys. J.* 2021. V. 909. P. 38.

11. *Mikhalyaev B.B., Veselovskii I.S., Khongorova O.V.* Radiation effects on the MHD wave behavior in the solar corona. *Solar System Res.* 2013. V. 47. № 1. P. 50.

12. *Field G.B.* Thermal instability. *Astrophys. J.* 1965. V. 142. P. 531.

УДК 533.952

ИМПУЛЬСЫ НЕЙТРОННОГО И ЖЕСТКОГО РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ КАМЕРЫ ПЛАЗМЕННОГО ФОКУСА ПРИ РАЗРЯДНЫХ ТОКАХ 100–200 КА

© 2022 Д.И. Юрков^{1,2}, В.А. Лавренин², Б.Д. Лемешко^{1,2}, Ю.В. Михайлов¹, И.А. Прокуратов¹

¹ФГУП ВНИИ автоматики им. Н.Л. Духова, Москва, 127030, Россия

²Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

e-mail: akdulatov@vniia.ru

Поступила в редакцию: 26.10.2022

После доработки: 07.11.2022

Принята к публикации: 08.11.2022

В работе рассмотрена генерация нейтронного и жесткого рентгеновского излучений (ЖРИ) камерами плазменного фокуса при работе в составе субкилоджоульного нейтронного генератора ИНГ-102Э с емкостью накопителя 4.4 мкФ и амплитудой разрядного тока через электроды камеры в диапазоне от 100 до 200 кА. Использована камера типа Т19-Л316, обеспечивающая выход нейтронов с энергией 2.5 МэВ на уровне 10^5 – 10^7 нейтр./имп. Проведено измерение уровня выхода нейтронов и ЖРИ камеры Т19-Л316, показано наличие режимов работы с генерацией ЖРИ без нейтронного излучения при дейтериевом наполнении камеры. Определена длительность импульсов нейтронов камеры Т19-Л316 и изучена зависимость длительности от уровня выхода нейтронов и от состава рабочего газа в камере ПФ. Экспериментально подтверждена работа камеры ПФ в безнейтронном режиме при заполнении объема камеры водородом и проведено сравнение уровня выхода ЖРИ при работе с водородом, дейтерием и дейтерием с примесью аргона. Также предложен вариант конструкции камеры Т19-Л316 для генерации нейтронов с пониженным до 100 раз выходом ЖРИ, реализуемый за счет изменения конструкции камеры.

Ключевые слова: плазменный фокус, генератор нейтронов, рентгеновское излучение, пинч.

DOI: 10.26583/vestnik.2022.4

ВВЕДЕНИЕ

Установки плазменного фокуса (ПФ) являются источниками проникающих излучений: нейтронов [1, 2] и рентгеновского излучения [3, 4]. Установки ПФ используются в качестве источников нейтронного излучения при наполнении камер ПФ дейтерием (D) или дейтерий-тритиевой (DT) смесью. Генерация нейтронов происходит в результате протекания ядерных реакций в плотной плазме пинча $D(d, n)He^3$, $D(t, n)He^4$, $T(t, 2n)He^4$. Различные установки ПФ обеспечивают выход нейтронов в диапазоне 10^6 – 10^{12} нейтр./имп. [5, 6].

Наряду с генерацией нейтронов в ПФ создаются условия для генерации рентгеновского излучения. Рентгеновское излучение камер ПФ можно разделить на мягкое рентгеновское излучение с энергией квантов 1–10 кэВ и жесткое рентгеновское излучение (ЖРИ) с энергией квантов до сотен кэВ. Мягкое рентгеновское излучение связывают с объемным излучением высокотемпературной плазмы пинча в камере ПФ, ему посвящено много исследований в рамках рентгенографии, рентгеновской литографии и других применений [7, 8].

ЖРИ в основном возникает при торможении на аноде камеры ПФ высокоэнергетического электронного пучка, формирующегося в пинче. Максимум спектра ЖРИ приходится на диапазон энергий 40–80 кэВ [12], энергия рентгеновских квантов достигает 250–300 кэВ. ЖРИ применяется для изучения радиационной стойкости электронных радиоизделий, для изучения дозовых и ионизационных эффектов в КМОП-приборах [9]. В работе были определены выход и длительность импульсов нейтронов и ЖРИ камер типа Т19-Л316. Предполагается использование импульсов нейтронов и ЖРИ камеры Т19-Л316 в ходе учебного процесса и проведения научных исследований.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБОРУДОВАНИЕ

Камера плазменного фокуса Т19-Л316 представляет собой электровакуумный газонаполненный прибор, изготовленный из бескислородной меди, состоящий из катода и анода, соединенных между собой изолятором из Al_2O_3 . Диаметр внешнего электрода – 40 мм, внутреннего – 20 мм, высота анода – 15 мм. Толщина

ИМПУЛЬСЫ НЕЙТРОННОГО И ЖЕСТКОГО РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ КАМЕРЫ ПЛАЗМЕННОГО ФОКУСА ПРИ РАЗРЯДНЫХ ТОКАХ 100-200 КА

стенок анода и катода составляет 2.5 мм. Камера снабжена вакуумным клапаном для заполнения объема камеры рабочим газом заданного состава.

Для регистрации нейтронов применялся прибор СИВН61 производства ВНИИА [14], использующий активационный метод регистрации нейтронов на основе активации нейтронами природной смеси изотопов серебра ^{107}Ag (51.84 %) и ^{109}Ag (48.16 %). Абсолютная погрешность измерения выхода 2.5 МэВ нейтронов составляет не более 20 % (при $P = 0.95$).

Для регистрации ЖРИ использован прибор измерения дозы ДКС-101 [10], который позволяет проводить измерение поглощенной дозы и мощности поглощенной дозы с относительной погрешностью 2.5 % (при $P = 0.95$). ДКС-101 оснащен рядом ионизационных камер, в экспериментах использовалась камера БМК-500 с диапазоном измерения интеграла мощности поглощенной дозы от 0.06 мкГр до 0.384 Гр.

Генерируемое ЖРИ отчасти поглощается медными стенками камеры Т19-Л316 перед тем, как попасть на детектор, при этом происходит ужесточение спектра. В отличие от нейтронного излучения МэВ диапазона, ЖРИ достаточно сильно поглощается медью. Кривая пропускания меди показывает, что 2.5 мм материала (толщина медного корпуса камеры ПФ) пропускают ЖРИ с энергиями 80 кэВ и более [11]. Поэтому регистрируемое с помощью ДКС-101 излучение относится к жесткому рентгеновскому излучению.

Эксперименты проведены на субкилоджоульном генераторе ИНГ-102Э с емкостным накопителем 4.4 мкФ и камерой Т19-Л316 при чистом дейтериевом заполнении камеры. Срабатывания проводились при зарядном напряжении $U = 18\div 20$ кВ. Амплитуда разрядного тока через камеры достигала 200 кА. В экспериментах ДКС-101 располагался на расстоянии 7 см от центра камеры Т19-Л316. Дополнительно использовался СИВН61 для регистрации уровня выхода нейтронного излучения.

Совместно с изучением уровня выхода ЖРИ и нейтронов проведено изучение формы импульса нейтронного и рентгеновского излучений камеры Т19-Л316. Для регистрации рентгеновского и нейтронного излучений использовались импульсные сцинтилляционные детекторы типа ССДИ8 и ССДИ38. Детектор ССДИ8 обладает большей чувствительностью, но меньшим временным разрешением – 10 нс. Временное разрешение ССДИ38 составляет 2.5 нс. По-

скольку чувствительности быстрого ССДИ38 не достаточно для регистрации выхода нейтронов на уровне 10^5 нейтр./имп., то в таких случаях применялся детектор ССДИ8 с более высокой чувствительностью. Сигналы с ССДИ8 и ССДИ38 регистрировались на цифровом осциллографе.

ИЗУЧЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РЕНТГЕНОВСКОГО И НЕЙТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЙ

Результаты срабатываний камеры Т19-Л316 приведены в табл. 1. Перед срабатываниями проведено измерение фоновых значений показаний прибора ДКС-101, которые составили 0.84 мкГр. При зарядном напряжении $U = 18$ кВ выход нейтронов отсутствовал, а выход ЖРИ по показаниям ДКС-101 лежал на уровне фона. При увеличении U до 19 кВ нейтронное излучение также не наблюдалось, а выход ЖРИ увеличился вдвое относительно фоновых значений. Это говорит о том, что при срабатываниях камеры происходило пинчевание плазмы и формирование электронного пучка (также это видно по появлению особенности, время t_{oc}). Дальнейшее увеличение напряжения до 20 кВ привело к появлению импульса нейтронов с выходом на уровне нескольких единиц на 10^6 нейтр./имп., а выход ЖРИ не увеличился. Это подтверждает факт, что уровни выхода нейтронного и рентгеновского излучений в камере ПФ напрямую не коррелируют друг с другом, поскольку генерация излучений связана с различными физическими процессами, протекающими в пинче.

Таблица 1. Выход нейтронов и ЖРИ при срабатывании камеры Т19-Л316

$U_{зар}, \text{кВ}$	$t_{oc}, \text{нс}$	$(Y_N) \text{ ср.,}$ $\times 10^6 \text{ нейтр./имп.}$	$(Y_{ЖРИ}) \text{ ср.,}$ мкГр
18	–	–	0.83
19	520	–	1.52
20	490	2.94	1.08

Достигаемые на камере Т19-Л316 значения выхода ЖРИ надежно регистрируются измерительной аппаратурой. Поэтому ЖРИ камеры Т19-Л316 может применяться в составе импульсного генератора ЖРИ при его использовании в учебных и практических целях. Совместно с изучением уровня выхода ЖРИ и нейтронов проведено изучение формы импуль-

са нейтронного и рентгеновского излучений камеры Т19-Л316. Характерная осциллограмма, зарегистрированная ССДИ38, приведена на рис. 1.

В серии из нескольких десятков срабатываний длительность импульсов ЖРИ лежала в диапазоне от 2 до 10 нс, средняя длительность импульсов ЖРИ составила $\langle t_{\text{ЖРИ}} \rangle = (3 \pm 1)$ нс.

Периодически наблюдалось несколько последовательных импульсов ЖРИ и/или нейтронов за одно срабатывание камеры. Поскольку для регистрации выхода нейтронов на уровне 10^5 нейтр./имп. детекторы располагаются доста-

точно близко к области генерации излучений (~ 10 см), то при формировании нескольких импульсов они могут накладываться друг на друга и сливаться с полезным нейтронным импульсом. Пример такого срабатывания приведен на рис. 2. Для устранения искажающего влияния ЖРИ на форму сцинтилляционного сигнала от нейтронов детекторы закрывались свинцовым экраном толщиной 10 мм. Толщина свинцовой защиты от ЖРИ выбиралась из условия полного поглощения рентгеновских квантов с энергией до 300 кэВ [14].

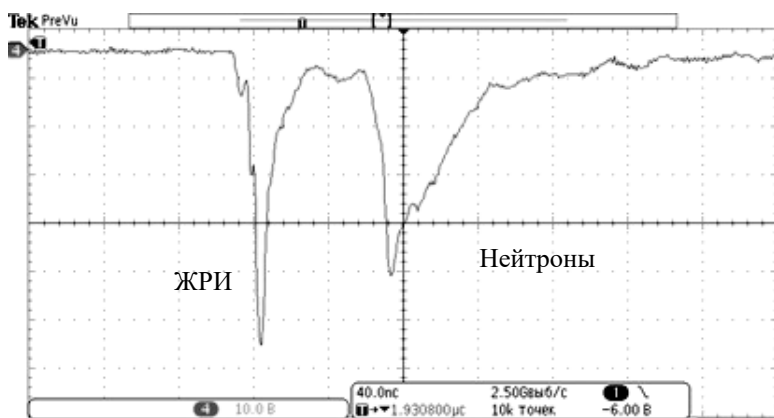


Рис. 1. Характерная осциллограмма сигнала с ССДИ38 при срабатывании камеры Т19-Л316 с дейтериевым наполнением: 10 В/дел., 40 нс/дел.

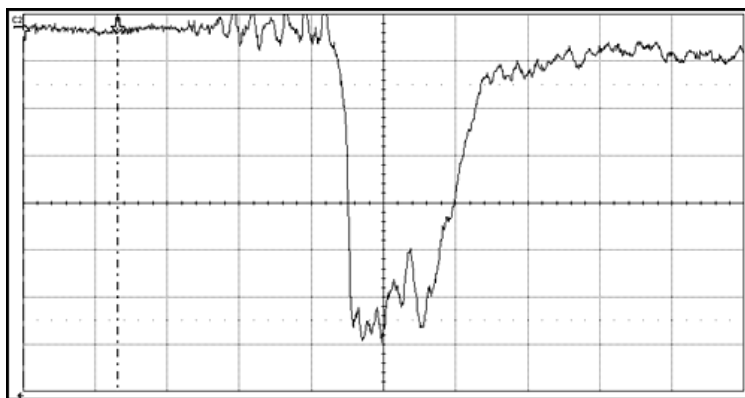


Рис. 2. Осциллограмма сигнала с ССДИ38 при наложении импульсов ЖРИ и нейтронов, 5 В/дел., 20 нс/дел.

Характерная осциллограмма нейтронного импульса камеры Т19-Л316 с сцинтилляционных детекторов ССДИ8 и ССДИ38, закрытых экранами из Рb, приведена на рис. 3.

Амплитуда сигнала с ССДИ8 составила 25 В, а с ССДИ38 – 1.7 В. Для экспериментального определения фактического диапазона длительностей нейтронного импульса камеры Т19-Л316 в составе генератора. Результаты срабатываний обобщены на гистограмме рис. 4. По рис. 4 видно, что по показани-

ям ССДИ8 длительность импульса нейтронов лежит в пределах от 7 до 21 нс, при этом в диапазоне от 10 до 20 нс лежит 97 % импульсов. Средняя длительность импульсов нейтронов по показаниям ССДИ38 $\langle \tau_{\text{ССДИ38}} \rangle = 13.2 \pm 0.3$ нс при $p = 0.95$. По показаниям с ССДИ8 значительная часть зарегистрированных импульсов имеет длительность больше 20 нс, а среднее значение $\langle \tau_{\text{ССДИ8}} \rangle = 17.4 \pm 0.4$ нс при $p = 0.95$. Это связано с недостаточным временным разрешением детектора ССДИ8, поскольку его временное разрешение

ИМПУЛЬСЫ НЕЙТРОННОГО И ЖЕСТКОГО РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ КАМЕРЫ ПЛАЗМЕННОГО ФОКУСА ПРИ РАЗРЯДНЫХ ТОКАХ 100-200 КА

фактически равно длительности регистрируемого нейтронного импульса.

Собственное временное разрешение детектора τ_0 увеличивает истинную длительность импульса $\tau_{\text{ист}}$ до наблюдаемой экспериментально длительности $\tau_{\text{эксп}}$ в соответствии с соотношением

$$(\tau_{\text{эксп}})^2 = (\tau_{\text{ист}})^2 + (\tau_0)^2.$$

Вычислим истинную длительность нейтронного импульса $\tau_{\text{ист}}$, используя значения $\tau_0 = 2.5$ нс для ССДИ38 и 10 нс для ССДИ8. Результаты расчетов приведены в табл. 2.

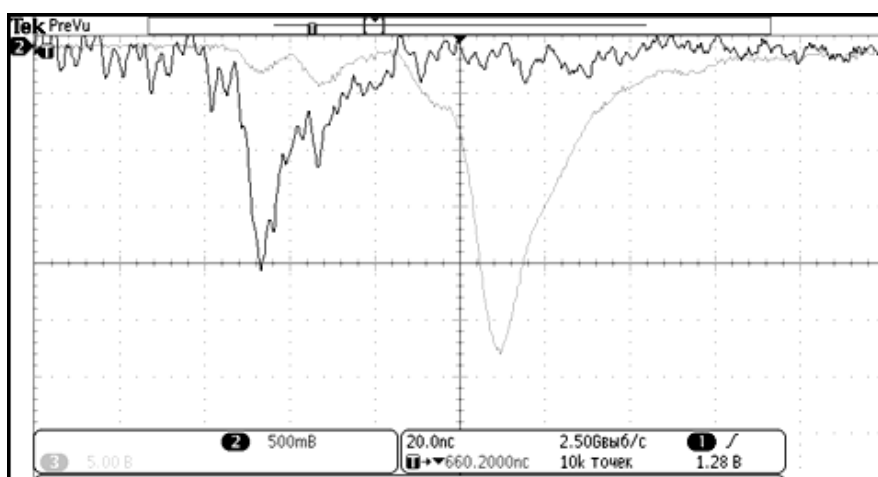


Рис. 3. Характерная осциллограмма нейтронного импульса камеры Т19-Л316: ССДИ38 – слева, ССДИ8 – справа

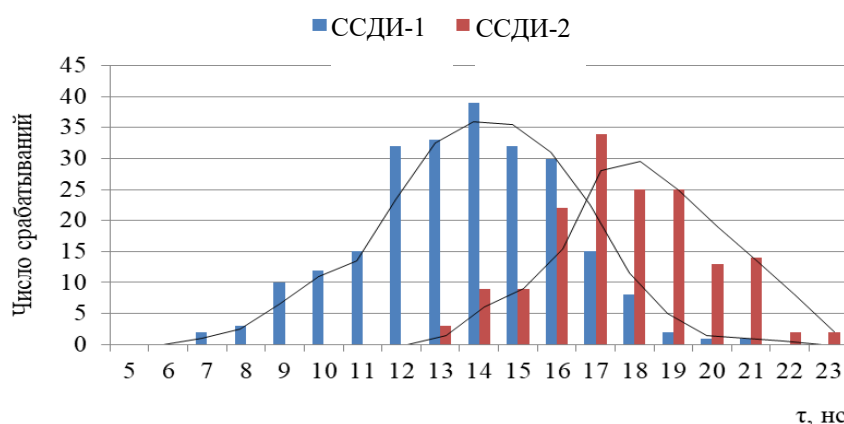


Рис. 4. Гистограмма распределения числа срабатываний по длительности импульса нейтронов (2.5 МэВ) в каждом срабатывании по сигналам с ССДИ8 и ССДИ38

Таблица 2. Длительности нейтронного импульса камеры Т19-Л316

Детектор	τ_0 , нс	$\tau_{\text{эксп}}$, нс	$\tau_{\text{ист}}$, нс
ССДИ8	2.5	13.2	13.0
ССДИ38	10.0	17.4	14.2

Вычисленные значения $\tau_{\text{ист}}$ для применяемых детекторов с различным временным разрешением отличаются всего на 1.2 нс. За истинную длительность $\tau_{\text{ист}}$ импульса нейтронов должно быть принято наименьшее вычисленное значение

для ССДИ38, т.е. $\tau_{\text{ист}} = 13.0$ нс.

Такую же процедуру можно проделать и для коррекции измеренной длительности импульса ЖРИ. В этих экспериментах экспериментально определенная средняя длительность ЖРИ с помощью ССДИ38 $\tau_{\text{эксп_ЖРИ}} = \langle t_{\text{ЖРИ}} \rangle = 3 \pm 1$ нс. Тогда аналогичные вычисления дают $\tau_{\text{ист_ЖРИ}} = 2 \pm 1$ нс.

Поскольку представляющий интерес рабочий диапазон выхода нейтронов составляет от 10^5 до 10^7 нейтр./имп., было проведено изучение зависимости длительности импульса

нейтронов по показаниям сигнала с ССДИЗ8 от уровня выхода нейтронов в каждом срабатывании (рис. 5). Видно, что средняя длительность нейтронного импульса в данных пределах не зависит от уровня выхода нейтронов. Нужно

отметить, что зависимость длительности импульса нейтронов от наличия примесей инертных газов также не обнаружена как для чистого D_2 наполнения камер Т19-Л316, так и для наполнения с добавками аргона D_2+Ar .

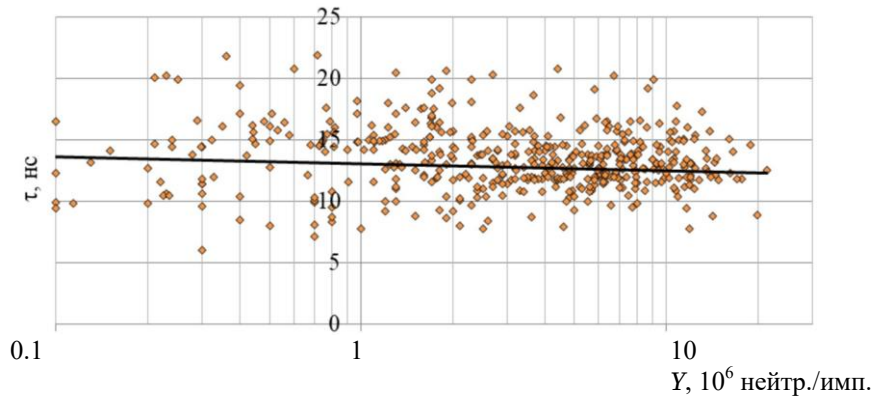


Рис. 5. Зависимость длительности импульса нейтронов по показаниям с сигнала ССДИ8 от уровня выхода нейтронов (2.5 МэВ) в каждом срабатывании

КАМЕРА ПЛАЗМЕННОГО ФОКУСА С ГЕНЕРАЦИЕЙ ТОЛЬКО ЖРИ (БЕЗНЕЙТРОННАЯ КАМЕРА)

Для реализации безнейтронного режима работы камеры Т19-Л316 дейтерий был заменен на водород, при этом выполняются условия для пинчевания рабочего газа (водорода) и формирования электронного пучка с последующей генерацией тормозного рентгеновского излучения (ЖРИ), но отсутствует ядерная реакция генерации нейтронов.

Проведены эксперименты по замене рабочего газа с дейтерия на водород. По сравнению с дейтерием, при использовании водорода, скорости движения фронта плазмы в ТПО меняются незначительно (15–25 %) [15]. Время сжатия ТПО в пинч остается согласованным с четвертью периода разряда. Для проверки сделанных предположений проведены серии срабатываний с камерой Т19-Л316 [13], заполненной водородом.

дом. Зарядное напряжение составляло 20 кВ. На рис. 6 представлены результаты измерения выхода ЖРИ при разных давлениях водорода.

Как видно из представленных результатов, оптимум давления водорода для генерации ЖРИ составляет примерно 10 торр. Сравнение выхода ЖРИ при наполнении камеры Т19-Л316 дейтерием и водородом показало, что выход ЖРИ в тех же режимах работы при наполнении дейтерием составил 0.18 отн.ед. и 0.3 отн.ед. при наполнении камеры водородом, т.е. разница примерно в два раза.

Дополнительно были проведены эксперименты по генерации ЖРИ в камере ПФ, в которых к водороду в камере при давлении 10 торр был добавлен аргон в количестве 0.5 торр. Выход ЖРИ в этих экспериментах увеличился в три раза по сравнению с чистым водородом, длительность импульсов ЖРИ при этом не изменилась.

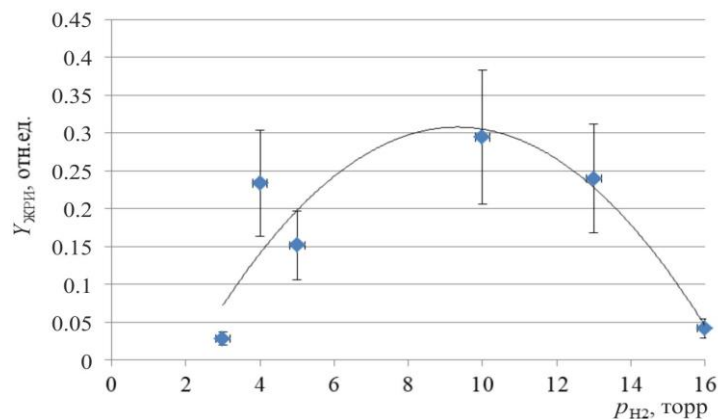


Рис. 6. Зависимость среднего нормированного выхода $Y_{ЖРИ}$ от давления водорода в камере ПФ

КАМЕРА ПЛАЗМЕННОГО ФОКУСА С ПОНИЖЕННЫМ ВЫХОДОМ ЖРИ

В задачах по генерации импульса нейтронов ЖРИ камер ПФ является паразитным фактором, и желательно, чтобы детекторы для регистрации параметров нейтронов были либо нечувствительны к ЖРИ, как СИВН61, либо защищены от ЖРИ, например свинцом, как ССДИ в экспериментах выше. Однако в случае использования большого набора детекторов разных типов защищать материалом поглотителя каждый детектор может быть затруднительно. Поэтому была разработана конструкция камеры Т19-Л316 с уменьшенным уровнем ЖРИ снаружи камеры. В конструкции разработанной камеры Т19-Л316 низкий уровень ЖРИ достигается за счет минимизации генерации рентгена на мишени из Ве и поглощения рентгеновского излучения в материалах: экрана из W, медного анода и медного катода. На рис. 7 приведен пример конструкции камеры со встроенным поглотителем ЖРИ.

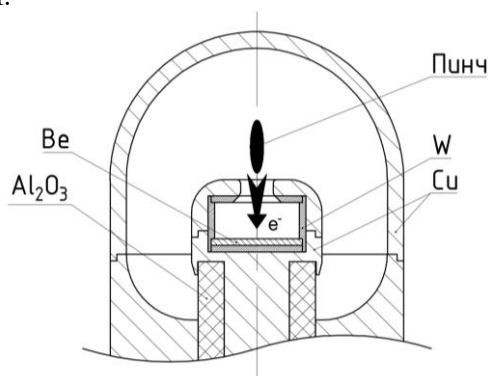


Рис. 7. Камера типа Т19-Л316
с пониженным выходом ЖРИ

Радиационные потери для тонкой мишени пропорциональны квадрату заряда ядер вещества Z (формула Бете-Блоха) и увеличиваются с ростом энергии почти линейно. Для толстой мишени в результате торможения электронов интенсивность рентгеновского излучения пропорциональна заряду ядра Z . Поэтому для получения наименьшего интегрального выхода ЖРИ камеры ПФ выбирается материал мишени с небольшим атомным номером ядра $Z_{\min}$, что позволяет ослабить исходную максимальную генерацию ЖРИ при $Z_{\max}$ в отношении $Z_{\max}/Z_{\min}$ практически на порядок.

Поглощение генерируемого в мишени рентгеновского излучения происходит цилиндрическим экраном. Экран, изготовленный из

материала толщиной x с большим атомным номером Z , например, из W или Та, поглощает рентгеновское излучение всех энергий по закону $I(E, x) = I_0(E) \cdot \exp(-\mu(E) \cdot x)$ [16], где $\mu(E)$ – полный массовый коэффициент ослабления данным материалом гамма-квантов энергии E , $I_0(E)$ – количество рентгеновских квантов энергии E , попадающих на поверхность материала, $I(E, x)$ – количество квантов энергии E после прохождения материала толщиной x . Так, при использовании Ве с зарядом ядра $Z = 4$ при энергии рентгеновских квантов 150 кэВ массовый коэффициент ослабления $\mu(E) = 0.0215$, а для W с $Z = 74$ для той же энергии рентгеновских квантов $\mu(E) = 1.99$ [16]. Это означает, что для одинакового поглощения рентгена с энергией квантов 150 кэВ достаточно иметь толщину вольфрама в 92 раза меньше толщины бериллия. На рис. 8 приведен график, иллюстрирующий изменение спектра ЖРИ камеры ПФ после прохождения поглотителей из разных материалов (в качестве исходного спектра использован характерный спектр ЖРИ камер ПФ). Видно, что достаточно толщины экрана 1 мм W для практически полного поглощения рентгена с энергией рентгеновских квантов вплоть до 250 кэВ.

В конструкции камеры Т19-Л316 имеется отверстие на верхушке анода (вблизи области пинчевания). Электронный пучок, образующийся в области над анодом, ускоряется в сторону отверстия и потом тормозится на материале мишени внутри анода. Поэтому в конструкции разработанной камеры Т19-Л316 ослабление ЖРИ происходит за счет поглощения рентгеновского излучения в материале экрана с большим Z , внутреннего медного электрода-анода и затем внешнего медного электрода-катода.

Экспериментальные работы на макетной камере Т19-Л316 с пониженным выходом ЖРИ проводились с использованием ССДИ8. На характерной осциллограмме, приведенной на рис. 9, видно, что импульс ЖРИ отсутствует.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам проведенных исследований сделаны следующие выводы:

- длительность импульса нейтронного излучения камеры Т19-Л316 лежит в диапазоне от 5 до 20 нс, в среднем 13.0 нс, и не зависит от уровня выхода нейтронов, и от наличия примеси тяжелых газов (Ar);

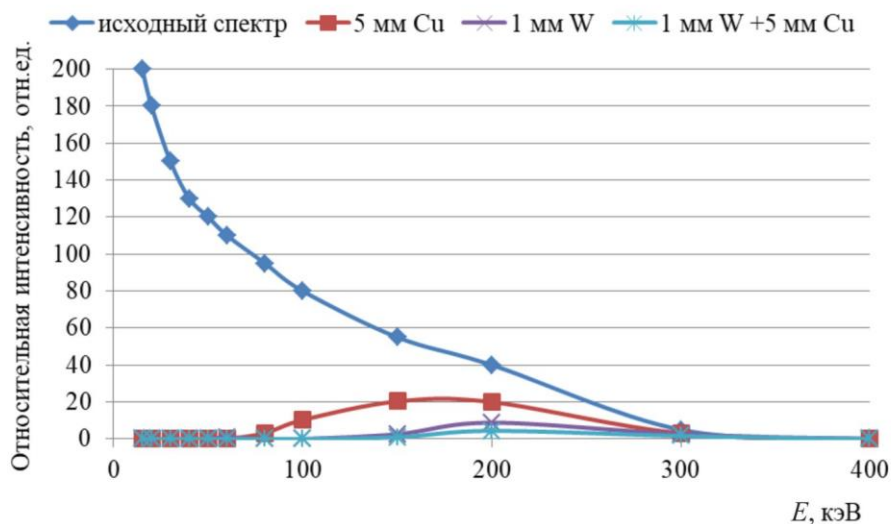


Рис. 8. Спектры рентгеновского излучения после прохождения поглотителей различных толщин

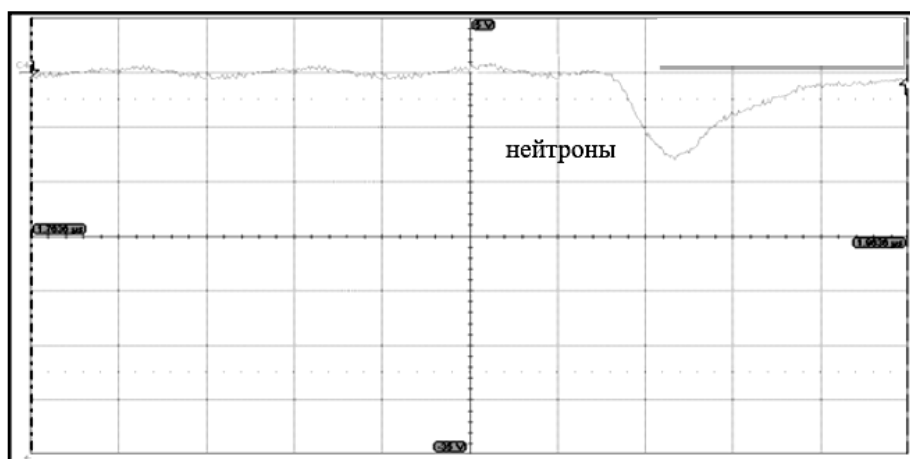


Рис. 9. Осциллограмма сигнала с ССДИЗ8 камеры с пониженным выходом ЖРИ, 5 В/дел., 20 нс/дел

- уровень выхода ЖРИ камеры Т19-Л316 лежит на уровне единиц мкГр и не зависит от уровня выхода нейтронного излучения, длительность импульса ЖРИ составляет в среднем 2.0 нс;

- показано, что возможен безнейтронный режим работы камер Т19-Л316. При заполнении камеры водородом возможна генерация ЖРИ без генерации нейтронов, добавка аргона в количестве 5 % от давления водорода позволяет увеличивать выход ЖРИ в несколько раз;

- разработана конструкция камеры ПФ генератора, с малым выходом ЖРИ, за счет использования внутри анода диска-мишени из материала с низким Z и цилиндрического экрана из материала с большим Z вокруг диска-мишени. Предложенное решение может быть распространено на все типы камер ПФ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Серия Б. Т. IX-3. Радиационная плазмодинамика / Отв. ред. В.А. Грибков. М.: Янус-К, 2007.
2. 1960–2010. 50 Anni di Ricerca sulla Fusione in Italia. 50 years of Fusion Research in Italy. Edited by Paola Batistoni. Associazione Euratom-ENEA sulla Fusione, 2010.
3. Gullickson R.L., Barlett R.H. Advances in X-ray Analysis. 1974. V. 18. P. 186.
4. Filippov N.V., Filippova T.I., Karakin M.A., et al. Filippov type plasma focus as intense source of hard x-rays ($E_x \approx 50$ keV) // IEEE Transactions on Plasma Science. 1996. Vol. 24. № 4. P. 1215–1220.
5. Lee S., Dugu S., Shrestha R., et al. Numerical experiments on PF1000 neutron yield // J. Fusion Energ. 2014. V. 33. P. 684–688, doi: 10.1007/s10894-014-9731-4.
6. Вухрев В.В., Королев В.Д. Генерация нейтронов в z-пинчах // Физика плазмы. 2007. Т. 33. № 5. С. 397–423. doi: 10.1134/s1063780x07050029.

7. Bogolyubov E.P., Bochkov V.D., Veretennikov V.A., et al. A powerful soft x-ray source for x-ray lithography based on plasma focusing // *Physica Scripta*. 1988. Vol. 5–7. P. 488–494.

8. Kalaiselvi S.M.P., Tan T.L., Talebitaher A., et al. Optimization of neon soft x-ray emission from 200 J plasma focus device for application in soft x-ray lithography. *Intern // J. of Modern Physics: Conference Series*. 2014. Vol. 32. P. 8, doi: 10.1142/s2010194514603238.

9. ВАНТ. Сер. Физика радиационного воздействия на радиоэлектронную аппаратуру / Отв. ред. В.В. Чернов. 1994. Вып. 1–2.

10. Универсальный дозиметр ДКС-101. ООО НПП «Доза». [Электронный ресурс]. URL: <http://www.doza.ru/catalog/dosimeters/196/> [дата обращения 20.09.2022].

11. Ляпидевский В.К., Самойлова Л.Б. Экспериментальные и теоретические исследования импульсных процессов // *Сб. научн. тр. / Ред. Л.П. Феоктистова*. М.: МИФИ, Энергоатомиздат. 1991. С. 22.

12. Дулатов А.К., Крапива П.С., Лемешко Б.Д., Михайлов Ю.В., Москаленко И.Н., Прокуратор И.А., Селифанов А.Н. Метод разностных фильтров для исследования спектра жесткого рентгеновского излучения установки плазменного фокуса // *Приборы и техника эксперимента*. 2015. № 6. С. 71–77, doi: 10.1134/S002044121505005X.

13. Официальный сайт ФГУП «ВНИИА». [Электронный ресурс]. URL: <http://www.vniia.ru/> [дата обращения: 20.09.2022].

14. Дулатов А.К., Крапива П.С., Лемешко Б.Д., Михайлов Ю.В., Москаленко И.Н., Прокуратор И.А., Селифанов А.Н. Особенности генерации рентгеновского излучения камерами плазменного фокуса с дейтериевым и дейтерий-третиевым наполнениями // *Физика плазмы*. 2016. Т. 42. № 1. С. 43–49, doi: 10.1134/S1063780X16010050.

15. Арцимович Л.А. Плазменные ускорители. М.: Машиностроение, 1973. С. 191–195.

16. Сторм Э. Израэль Х. Сечения взаимодействия гамма-излучения. М.: Атомиздат, 1973. 253 с.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2022, vol. 11, no 4, pp. 296–304

NEUTRON AND HARD X-RAY PULSES OF THE PLASMA FOCUS CHAMBER AT DISCHARGE CURRENTS OF 100-200 KA

D.I. Yurkov^{1,2}, V.A. Lavrenin², B.D. Lemesko^{1,2}, Yu.V. Mikhailov^{1*}, I.A. Prokuratorov^{1*}

¹Duknov All-Russia Research Institute of Automatics (VNIIA), Moscow, 127030, Russia

²National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

*e-mail: akdulatov@vniia.ru

Received October 26, 2022; revised November 7, 2022; accepted November 8, 2022

The paper considers the neutron and hard X-ray (HXR) generation by plasma focus chambers operating as part of the ING-102Э subkilojoule neutron generator with a storage capacity of 4.4 μF and an amplitude of the discharge current through the chamber electrodes in the range from 100 to 200 kA. T19-L316 type chamber was used, which ensures the neutron yield with an energy of 2.5 MeV at a level of 10⁵–10⁷ neutrons/pulse. Measurement of the neutron level yield and HXR of the T19-L316 chamber was carried out, the presence of operating modes with the generation of HXR without neutron radiation with deuterium filling of the chamber is shown. The neutron pulses duration of the T19-L316 chamber was determined, and the dependence of the duration on the neutron yield level and on the composition of the working gas in the PF chamber was studied. The PF chamber operation in the regime without neutrons was experimentally confirmed when the chamber volume was filled with hydrogen, and a comparison was made of the level of the HXR yield when working with hydrogen, deuterium, and deuterium with an admixture of argon. Also, a T19-L316 chamber design for neutron generation with a 100-fold reduced HXR yield, implemented is proposed.

Keywords: plasma focus, neutron generator, hard x-ray emission, pinch.

REFERENCES

1. Encyclopedia of Low Temperature Plasma / Ed. by V.E. Fortov, Ser. B, Vol. IX3: Radiative Plasma Dynamics: Physics, Experimental Technologies, and Applications. Ed. by V. A. Gribov. M.: YanusK Publ., 2007.

2. 1960–2010. 50 Anni di Ricerca sulla Fusione in Italia. 50 years of Fusion Research in Italy. Edited by

Paola Batistoni. Associazione Euratom-ENEA sulla Fusione, 2010.

3. Gullickson R.L., Barlett R.H. Advances in X-ray Analysis. 1974. Vol. 18. P. 186.

4. Filippov N.V., Filippova T.I., Karakin M.A., et al. Filippov type plasma focus as intense source of hard x-rays (E_x ≈ 50 keV). *IEEE Transactions on Plasma Science*. 1996. Vol. 24. № 4. P. 1215–1220.

5. Lee S., Dugu S., Shrestha R., et al. Numerical experiments on PF1000 neutron yield // J. Fusion Energ. 2014. Vol. 33. P. 684–688, doi: 10.1007/s10894-014-9731-4.
6. Vikhrev V.V., Korolev V.D. Neutron generation from z-pinches. Plasma Physics Reports. 2007. Vol. 33. № 5. P. 356–380, doi: 10.1134/S1063780X07050029 (in Russian).
7. Bogolyubov E.P., Bochkov V.D., Veretennikov V.A., et al. A powerful soft x-ray source for x-ray lithography based on plasma focusing // Physica Scripta. 1988. Vol. 5–7. P. 488–494.
8. Kalaiselvi S.M.P., Tan T.L., Talebitaher A., et al. Optimization of neon soft x-ray emission from 200 J plasma focus device for application in soft x-ray lithography. Intern // J. of Modern Physics: Conference Series, 2014. Vol. 32. P. 8, doi: 10.1142/s2010194514603238.
9. Questions of atomic science and technics. Series: Physics of radiation effects on radio-electronic equipment / Edited by V.V. Charnov. 1994. № 1–2.
10. Universal'nyj dozimetr DKS-101. ООО NPP «Doza». [Universal dosimeter DKS-101. LLC NPP Doza]. Available at: <http://www.doza.ru/catalog/dosimeters/196/> (accessed 20.09.2022).
11. Lyapidevsky V.K., Samoilova L.B. Eksperimental'nye i teoreticheskie issledovaniya impul'snyh processov. Sb. nauchn. Tr. Red. Feoktistova. [Experimental and theoretical studies of impulse processes. Scientific Tr. Ed. by Feoktistova L.P.]. M.: MEPhI, Energoatomizdat Publ., 1991. P. 22.
12. Dulatov A.K., Krapiva P.S., Lemesko B.D., Mikhailov Yu.V., Moskalenko I.N., Prokuratov I.A., Selifanov A.N. The Balanced Filter Method for Studying the Hard X-ray Spectrum of the Plasma Focus Device // Instruments and Experimental Techniques. 2015. Vol. 58. № 6. P. 774–780. 10.1134/S1063780X07050029 (in Russian), doi: 10.1134/S002044121505005X 10.1134/S1063780X07050029.
13. Oficial'nyj sajt FGUP «VNIIA». [Official site of FSUE «VNIIA»]. Available at: <http://www.vniia.ru/> (accessed 20.09.2022).
14. Dulatov A.K., Krapiva P.S., Lemesko B.D., Mikhailov Yu.V., Moskalenko I.N., Prokuratov I.A., Selifanov A.N. Specific Features of X-Ray Generation by Plasma Focus Chambers with Deuterium and Deuterium–Tritium Fillings. Plasma Physics Reports. 2016. Vol. 42. № 1. P. 38–44 (in Russian), doi: 10.1134/S1063780X16010050.
15. Artsimovich L.A. Plazmennye uskoriteli [Plasma accelerators]. M.: Mashinostroenie Publ., 1973. P. 191–195.
16. Storm E. Secheniya vzaimodejstviya gamma-izlucheniya [Interaction cross sections of gamma radiation]. M.: Atomizdat Publ., 1973. 253 p.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 537.8

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ

© 2022 С.П. Баутин^{1*}, В.Е. Замыслов^{2**}

¹Снежинский физико-технический институт НИЯУ МИФИ,
Снежинск, Челябинская область, 456776, Россия

²Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, 620034, Россия

*e-mail: spbautin@mail.ru

**e-mail: zamislov2017@yandex.ru

Поступила в редакцию: 12.11.2022

После доработки: 16.11.2022

Принята к публикации: 22.11.2022

В работе описана методика представлений решений нелинейного уравнения с частными производными – уравнения Бюргерса – в виде бесконечного тригонометрического ряда от пространственной переменной. Коэффициенты ряда являются искомыми функциями от времени. Описана процедура получения бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которой задают искомые коэффициенты ряда. Благодаря конкретным свойствам решений рассмотренных бесконечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений доказаны теоремы о кратных частотах и сходимости бесконечного тригонометрического ряда в некоторой окрестности точки $t = 0$ и при всех значениях независимой переменной x . С помощью конечных сумм построены конкретные приближенные решения уравнения Бюргерса. В том числе установлен факт возникновения у решения в конечный момент времени при заданных гладких начальных условиях больших значений производных по пространственной переменной. Что тем не менее не приводит к возникновению необоснованных осцилляций или к разрушению решения.

Ключевые слова: нелинейные уравнения с частными производными, тригонометрические ряды, уравнение Бюргерса, приближенные решения.

DOI: 10.26583/vestnik.2022.238

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время для решения очень многих важных для практики задач возникает необходимость исследования различных начально-краевых задач для нелинейных уравнений с частными производными.

На сегодняшний день основным способом построения решений подобных задач являются разностные методы, при которых численно определяется конечное число значений искоемых функций в отдельных изолированных точках.

Но, несмотря на прогресс в разработке этих численных методов и на все увеличивающуюся производительность вычислительной техники, очень часто под вопросом остаются надежность и адекватность получаемых разностными методами численных результатов.

Среди аналитических методов получения решений нелинейных уравнений с частными производными одним из основных методов является использование конечных или бесконечных представлений с применением различных систем базисных функций в случаях разных функциональных пространств.

На протяжении более чем двухсотлетней истории исследований уравнений с частными производными один из востребованных функциональных базисов – предложенный Ж.Б.Ж. Фурье базис из тригонометрических функций.

Но, к сожалению, применение как тригонометрических рядов Фурье, так и более поздних обобщений этого подхода, имеют место только при решении линейных задач. В этом случае бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений для искоемых коэффициентов перед гармониками расщепляется и для каждого коэффициента получается одно свое уравнение. Оно обычно решается в явном виде, что позволяет построить все бесконечное разложение и доказать его сходимость.

Чуть более десяти лет назад методика применения бесконечных тригонометрических рядов была эффективно применена для математического моделирования течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа при построении решений нелинейной системы уравнений с частными производными смешанного типа [1].

И сразу выяснились как основные трудные моменты, так и основные положительные моменты при представлении решений нелинейных уравнений с частными производными с помощью бесконечных тригонометрических рядов.

Во-первых, требуются достаточно громоздкие аналитические преобразования для получения бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой задают коэффициенты тригонометрических рядов. Но, тем не менее, оказалось, что проведение этих аналитических преобразований хорошо алгоритмизировано и возможна автоматизация математических выкладок с помощью современных компьютеров.

Во-вторых, доказать сходимость данных тригонометрических рядов тогда не удалось.

Одним из главных положительных моментов предложенной методики построения решения в виде тригонометрического ряда стало отсутствие необходимости последовательного нахождения коэффициентов рядов с помощью рекуррентных соотношений. К тому же при рекуррентном подходе к построению коэффициентов рядов практически не возможно догадаться о наличии свойств кратных частот, если заранее не знать об их существовании. При использовании методики, описанной в [1] и используемой в данной работе, С.П. Баутиным предложены постановка задачи и доказательство сходимости тригонометрических рядов, а В.Е. Замысловым численно построены коэффициенты конечных отрезков тригонометрических рядов при решении конечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений для приближенного описания решений уравнения Бюргерса.

УРАВНЕНИЕ БЮРГЕРСА И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЕГО РЕШЕНИЙ

Рассматривается уравнение Бюргерса

$$u_t + uu_x = \mu_0 u_{xx}, \quad (1)$$

где искомая функция u зависит от двух независимых переменных t, x , а $\mu_0 > 0$ – заданная положительная константа.

Многими учеными полагается, что с точки зрения механики и физики решения уравнения (1) в определенном смысле (как некие приближения) моделируют распространение одномерных акустических волн конечной амплитуды в условиях проявления диссипации. При этом

считается, что $u(t, x)$ задает колебательную скорость гидродинамических частиц, μ_0 характеризует вязкость и теплопроводность среды [2, 3]. Но фактически, уравнение (1) есть следствие закона сохранения импульса, записанного в дифференциальном виде для движений сжимаемой вязкой сплошной среды [4]:

$$\mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\mu_0}{\rho} \left[\frac{1}{4} \nabla (\operatorname{div} \mathbf{V}) + \frac{3}{4} \Delta \mathbf{V} \right].$$

Если в это уравнение положить: нулевое значение градиента давления $\nabla p = 0$, постоянную плотность $\rho = 1$ и рассмотреть частный случай

$$v = \omega = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial z} = 0,$$

то для u – третьей компоненты скорости – получится уравнение (1).

С точки зрения теории нелинейных уравнений с частными производными уравнение Бюргерса является достаточно простым и содержательным примером. Смысл этого в том, что решения уравнения (1) моделируют нелинейный перенос возмущений (сравни с нелинейным уравнением переноса $u_t + uu_x = 0$) в среде с диссипативными свойствами – вязкость и теплопроводность. Таким образом, решения этого уравнения передают свойства одновременно решений как гиперболических уравнений: бегущие вправо и влево волны в случае линеаризованного уравнения Бюргерса и возникновение бесконечных градиентов (градиентная катастрофа). Но также решения уравнения (1) передают свойства решений и параболических уравнений: экспоненциальное по времени затухание начальных возмущений у приближенных решений уравнения Бюргерса (сравни с линейным уравнением теплопроводности $u_t = \mu_0 u_{xx}$).

Двумя простыми эквивалентными заменами:

$$u = \mu_0 \tilde{u}, \quad t' = \mu_0 t,$$

уравнение (1) после деления на μ_0^2 приводится к виду

$$\tilde{u}_{t'} + \tilde{u} \tilde{u}_x = \tilde{u}_{xx}.$$

Если решение построено в новых переменных $t', \tilde{u}$, то при малых значениях константы μ_0 время процесса при старом времени t увеличится в $1/\mu_0$ раз. А значение старой искомой функции будет в μ_0 больше значения новой искомой функции $\tilde{u}$.

Далее для простоты написания штрих у буквы t и знак тильды над u опускаются

$$u_t + uu_x = u_{xx},$$

и уравнение в новых переменных переписывается в нормальной форме:

$$u_t = -uu_x + u_{xx}. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) представляется в виде бесконечного тригонометрического ряда [1]:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin(kx), \quad (3)$$

где $u_k(t)$ – неизвестные пока коэффициенты, $k = 1, 2, \dots$

В качестве решения уравнения Бюргера можно брать и конечную сумму гармоник от пространственной переменной с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени [1]:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^K u_k(t) \sin(kx), \quad (4)$$

где $u_k(t)$ – неизвестные пока коэффициенты, $k = 1, 2, \dots, K$, и для простоты разложения полагается, что $K \geq 2$.

Подстановка ряда (3) в уравнение (2) приводит к следующему равенству

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(t) \sin(kx) = & - \left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin(kx) \right] \times \\ & \times \left[\sum_{m=1}^{\infty} mu_m(t) \cos(mx) \right] - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} k^2 u_k(t) \sin(kx), \end{aligned}$$

которое переписывается с использованием двойной суммы

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(t) \sin(kx) = \\ = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} mu_k(t) u_m(t) \sin(kx) \cos(mx) - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} k^2 u_k(t) \sin(kx). \end{aligned}$$

Далее полученное уравнение проецируется на систему базисных гармоник $\sin(lx)$, $l = 1, 2, \dots$. Для этого данное уравнение умножается каждый раз на свою функцию $\sin(lx)$ и полученные при $l = 1, 2, 3, \dots$ равенства интегрируются по x на отрезке $0 \leq x \leq \pi$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(t) \left[\int_0^{\pi} \sin(kx) \sin(lx) dx \right] =$$

$$\begin{aligned} = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} mu_k(t) u_m(t) \left[\int_0^{\pi} \sin(kx) \cos(mx) \sin(lx) dx \right] - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} k^2 u_k(t) \left[\int_0^{\pi} \sin(kx) \sin(lx) dx \right], \quad l = 1, 2, 3 \dots \end{aligned}$$

Для подробной записи полученных при $l = 1, 2, 3 \dots$ уравнений используются значения некоторых конкретных определённых интегралов [1]:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos(lx) dx &= 0; \quad \int_0^{\pi} \sin^2(lx) dx = \\ &= \int_0^{\pi} \cos^2(lx) dx = \frac{\pi}{2}, \quad l = 1, 2, 3 \dots; \\ \int_0^{\pi} \cos(kx) \cos(lx) dx &= \int_0^{\pi} \sin(kx) \sin(lx) dx = 0, \end{aligned}$$

если $l \neq k$; $k, l = 1, 2, 3 \dots$;

$$\int_0^{\pi} \sin(kx) \sin(lx) \cos(mx) dx = \frac{\pi}{4} b_{klm};$$

$$b_{klm} = \begin{cases} -1, & \text{если } l = m - k; \\ 1, & \text{если } l = k - m; \\ 1, & \text{если } l = m + k; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

С учетом выписанных значений определенных интегралов и после умножения каждого из полученных уравнений на $2/\pi$ получается следующая бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений для бесконечного числа искомых функций $u_l(t)$:

$$u'_l(t) = - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{klm} mu_k(t) u_m(t) - l^2 u_l(t); \quad (5)$$

$l = 1, 2, 3 \dots$

В случае построения решения в виде конечной суммы (4) для конечного числа искомых коэффициентов $u_l(t)$ по описанной выше процедуре получается своя, уже конечная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Если в системе (5) положить нулями все слагаемые с номерами, большими K , то остаются только первые K уравнений:

$$u'_l(t) = - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K mu_k(t) u_m(t) b_{klm} - l^2 u_l(t); \quad (6)$$

$l = 1, 2, 3 \dots K.$

ТЕОРЕМЫ О КРАТНЫХ ЧАСТОТАХ

Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5), (6) справедливы приведенные далее теоремы 1 и 2, являющиеся теоремами о кратных частотах [1, 5].

Теорема 1. Пусть задано целое положительное число l_0 . Если для бесконечной системы (5) или конечной системы (6) при $t = 0$ заданы нулевые начальные условия для коэффициентов $u_l(t)$ при $l \neq l_0$. Тогда для индексов l , не кратных l_0 , функции $u_l(t) \equiv 0$ являются решениями бесконечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (5) или конечной системы (6).

Теорема 1 – первая теорема о кратных частотах – говорит о том, что если для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (5) или (6) начальные данные соответствуют присутствию в начальном условии для уравнения (2) гармоники только с одной частотой l_0 , то в решении этих систем могут присутствовать коэффициенты, стоящие в (3) перед гармониками только с частотами, кратными l_0 .

Теорема 2. Пусть задан набор целых положительных чисел

$$L = \{l, l_1, \dots, l_n\}$$

и число $d = \text{НОД}(l_0, l_1, \dots, l_n)$ – наибольший общий делитель чисел $l_0, l_1, \dots, l_n$. Пусть для бесконечной системы (5) или конечной системы (6) при $t = 0$ заданы нулевые начальные условия для коэффициентов $u_l(t)$:

$$u_l(0) = u_l^0 \neq 0, \text{ если } l \in L;$$

$$u_l(0) = 0, \text{ если } l \notin L.$$

Тогда среди решений систем (5) и (6) могут быть отличны от тождественного нуля только те $u_l(t)$, у которых индекс l кратен заданному числу d .

Теорема 2 – вторая теорема о кратных частотах – говорит о том, что если для систем (5) или (6) ненулевые начальные данные только у коэффициентов, стоящих в (3) перед гармониками с частотами $l_0, l_1, \dots, l_n$, то в решении этих систем могут быть коэффициенты, стоящие в (3) перед гармониками только с частотами, кратными

$$d = \text{НОД}(l_0, l_1, \dots, l_n).$$

Заметим, что теорема 1 есть частный случай теоремы 2.

Для краткости изложения приводится доказательство только теоремы 2.

Рассмотрим множество $L_d = \{d, 2d, 3d, \dots\}$. Из начальных условий, оговоренных в теореме, следует, что если $u_l^0 = 0$, когда $l \notin L_d$ ($l \in L_d$). Далее установим, что если $l \notin L_d$, то все решения систем (5), (6) тождественно равны нулю: $u_l(t) \equiv 0$.

Для доказательства предполагаем, что $l \notin L_d$ и для функции $u_l(t)$, $l = 1, 2, \dots$ строим ломаные Эйлера по формуле:

$$u_l(t_{i+1}) = u_l(t_i) + h \cdot f(t_i, u_l(t_i)),$$

где точки t_i лежат на отрезке интегрирования с постоянным шагом $h = t_{i+1} - t_i$, $t_0 = 0$. Из формул (5), (6) следует равенство:

$$u_l(t_1) = u_l(t_0) + h \times$$

$$\times \left[-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^M m u_k(t_0) u_m(t_0) b_{klm} - l^2 u_l(t_0) \right],$$

где верхний индекс суммирования M в случае системы (5) равен бесконечности, в случае системы (6) равен K . При подстановке в полученное равенство начальных значений получаем такое равенство:

$$u_l(t_1) = 0 + h \times$$

$$\times \left[-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^M m u_k(0) u_m(0) b_{klm} - l^2 \cdot 0 \right].$$

В двойной сумме ненулевыми остаются только слагаемые с произведениями $u_k(0) \cdot u_m(0)$, где $k, m \in L_d$, так как в противном случае эти произведения равны нулю в силу начальных условий. У коэффициента b_{klm} индекс $l \in L_d$, так как k, m кратны d и, следовательно l делится на d . Поэтому $b_{klm} = 0$ и тогда $u_l(t_1) = 0$.

По индукции предполагаем, что если $l \notin L_d$, то

$$u_l(t_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

При подстановке в формулу Эйлера уже найденных значений на предыдущих шагах получаем равенство:

$$u_l(t_{n+1}) = u_l(t_n) + h \times$$

$$\times \left[-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^M m u_k(t_n) u_m(t_n) b_{klm} - l^2 u_l(t_n) \right].$$

При повторе предыдущих рассуждений получаем, что $u_l(t_{n+1}) = 0$. Следовательно, при $l \notin L_d$ ломаные Эйлера тождественно равны нулю. При стремлении h к нулю ломаные сходятся к точному решению и тогда $u_l(t) \equiv 0$ при $l \notin L_d$. Значит, отличными от нуля решениями систем (5), (6) могут быть только те $u_l(t)$, у которых $l \in L_d$. Теорема доказана.

Впервые теоремы о кратных частотах были доказаны В.Е. Замысловым [5]. Им были рассмотрены представления одномерных решений полной системы уравнений Навье–Стокса в виде бесконечных тригонометрических рядов. Подробно эти теоремы представлены в монографии [1]. В работе [6] в случае других представлений одномерных решений полной системы уравнений Навье–Стокса доказаны теоремы о кратных частотах, что ранее были доказаны в работах [1, 5], с одним обобщением [6]: во второй теореме d определено для счетного набора частот

$$\{l_0, l_1, \dots, l_n, \dots\}.$$

Из доказанных теорем о кратных частотах следует, что в исследуемых решениях будут присутствовать гармоники только с частотами $d, 2d, 3d, 4d, 5d, \dots$. Поэтому исследуемые в работе решения не обладают свойством «удвоения частот», которое иногда без основания предполагают в течениях вязкой сплошной среды [7].

Как природное явление давно известен факт, что при возбуждении гармоник с одними частотами с течением времени фиксируются и новые гармоники, значения частот которых полностью согласуются с теоремами о кратных частотах. В музыке этим природным явлением пользуются давно [8]. Например, в произведении Р. Шумана «Карнавал», а также в произведениях М. Равеля, К. Дебюсси и других композиторов есть так называемые «немые аккорды», когда заранее освобождённые и покоящиеся струны начинают звучать после того, как зазвучали другие струны, естественно, с другой частотой собственных колебаний. Поэтому объяснить это явление резонансом нельзя. Благодаря доказанным теоремам о кратных частотах [1, 5, 6] установлено, что это природное явление есть следствие общих законов движения воздуха как сплошной среды – законов сохранения массы, импульса и энергии, проявляющихся как соответствующие свойства решений нелинейных уравнений с частными производными.

Если продифференцировать квадратичное выражение от гармоник с конкретными частотами и воспользоваться формулами тригонометрии, то в полученном выражении появятся гармоники с новыми частотами, которые будут иметь значения в полном соответствии с теоремами о кратных частотах. Многими исследователями это соображение полагается доказательством свойств кратных частот. Но данное рассуждение проведено при установлении свойств дифференциальных операторов, а не при уста-

новлении свойств решений нелинейных уравнений с частными производными. Авторам данной работы неизвестны работы (за исключением работ [1, 5, 6]), в которых хотя бы для формальных решений конкретных нелинейных уравнений с частными производными был бы доказан факт, соответствующий приведенным в работе теоремам о кратных частотах. Заметим, что при доказательстве теорем о кратных частотах [1, 5] принципиально использовались следующие факты: нормальная форма уравнений с частными производными относительно производных по времени; присутствие в уравнениях только квадратичных нелинейностей. И эти теоремы о кратных частотах доказаны благодаря соответствующим свойствам конкретных определённых интегралов от произведения трех гармоник, а не в результате дифференцирования квадратичных полиномов от гармоник.

СХОДИМОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА

Для уравнения (2) ставится следующее начальное условие

$$u(t, x)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^0 \sin(kx), \quad (7)$$

где числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^0 \quad (8)$$

сходится абсолютно, и тогда данное начальное условие является аналитической функцией при всех значениях x .

Решение поставленной задачи (2), (7) представляется в виде ряда (3). Для доказательства сходимости этого ряда в системе (5) делается переход от двойных сумм к одинарным.

Тогда с учетом ненулевых значений коэффициентов b_{klm} бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений (5) переходит в следующую бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с одинарными суммами в правых частях:

$$\begin{cases} u_1'(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t) u_{j+1}(t) - u_1(t); \\ u_l'(t) = \frac{1}{2} l \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t) u_{j+l}(t) - \\ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l-1} i u_{l-i}(t) u_i(t) - l^2 u_l(t); \quad l = 2, 3, 4, \dots \end{cases} \quad (9)$$

С учетом вида начальных условий (7) задаем начальные условия для системы (9):

$$u_l(0) = u_l^0, \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

При использовании стандартной методики метода мажорант [4] для доказательства сходимости бесконечных рядов, решающих уравнения с частными производными, «камнем преткновения» являются слагаемые из системы (9), содержащие в качестве сомножителя квадрат индекса l перед коэффициентом с номером l :

$$u_l'(t) = \dots - l^2 u_l(t), \quad l = 1, 2, 3, \dots$$

Фактически наличие именно такого слагаемого позволило С.В. Ковалевской [9] построить свой знаменитый контрпример для задачи Коши в случае линейного уравнения теплопроводности: конкретные начальные данные при $t = 0$ являются аналитической функцией, но формальный ряд по степеням t , единственным образом определяющий решение, расходится при любом t , отличном от нуля. Аналогичный контрпример построен для задачи Коши для нелинейного уравнения теплопроводности [10] благодаря возникновению соответствующего слагаемого при построении мажорантной задачи.

Далее с учетом вида задачи (2), (7) рассматривается другая задача Коши:

$$\begin{cases} v_l = -v v_x - v; \\ v|_{l=0} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^0 \sin kx. \end{cases} \quad (11)$$

Задача (11) отличается от задачи (2), (7) в двух моментах: обозначением искомой функции и тем, что вместо слагаемого $\ll u_{xx} \gg$ в дифференциальном уравнении из задачи (2), (7) в уравнении из задачи (11) стоит слагаемое $\ll -v \gg$, а не $\ll v_{xx} \gg$.

Поскольку уравнение в задаче (11) является уравнением типа Ковалевской [4], то по теореме Ковалевской [4, 9] задача (11) имеет в некоторой окрестности точки $(t = 0, x = 0)$ единственное аналитическое решение, которое можно представить в виде

$$v(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (12)$$

и ряд (12) абсолютно сходится в некоторой окрестности точки $(t = 0, x = 0)$.

Если решение задачи (11) строить в виде ряда (12), где

$$v_n(x) = \frac{\partial^n v(t, x)}{\partial t^n} \Big|_{t=0},$$

то для коэффициентов этого ряда получается следующая цепочка рекуррентных соотношений:

$$v_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^0 \sin kx,$$

$$v_1(x) = -v_0(x)v_0'(x) - v_0(x),$$

$$v_{n+1}(x) = -\sum_{m=0}^n C_n^m v_m(x)v_{n-m}'(x) - v_n(x), \quad n \geq 1.$$

Эти уравнения получаются после дифференцирования уравнения из задачи (11) соответствующее число раз по t и положении $t = 0$ после каждого дифференцирования.

С учетом вида функции $v_0(x)$, тригонометрической формулы

$$\sin(kx)\cos(mx) = \frac{1}{2} \{ \sin[(k+m)x] + \sin[(k-m)x] \}$$

и нечетности синуса (позволяющей сделать положительным коэффициент, стоящий перед x под синусом) получается, что все коэффициенты ряда (12) представимы в виде

$$v_l(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_{lk} \sin kx,$$

$$v_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_{n+1,k} \sin kx, \quad n \geq 1$$

и являются абсолютно сходящимися рядами при любых значениях x .

Поскольку в абсолютно сходящихся рядах можно переставлять и группировать слагаемые и суммы рядов от этого не меняются, то единственное решение задачи (11) представимо в виде другого ряда:

$$v(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \sin kx, \quad (13)$$

$$\text{где } v_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{n,k} \frac{t^n}{n!}.$$

И сам ряд (13), и его коэффициенты являются абсолютно сходящимися рядами в некоторой окрестности точки $t = 0$, т.е. при $|t| \leq t_1$, $t_1 > 0$ и при всех значениях x . Эта окрестность $|t| \leq t_1$ определяет некоторую область Ω в пространстве R^∞ , в которой изменяются значения v_k , $k \geq 1$ при $|t| \leq t_1$ и при которых ряд (13) сходится.

Ряд (13) подставляем в уравнение из задачи (11) и полученное соотношение также проецируем на функциональный базис

$$\{ \sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots \}.$$

В результате получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} v_1'(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} v_j(t) v_{j+1}(t) - v_1(t); \\ v_l''(t) = \frac{1}{2} l \sum_{j=1}^{\infty} v_j(t) v_{j+l}(t) - \\ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l-1} i v_{l-i}(t) v_i(t) - v_l(t); \quad l = 2, 3, 4, \dots, \end{cases} \quad (14)$$

которая отличается от системы (9) также в двух моментах. Обозначением искомых функций: вместо буквы «u» взята буква «v», а также вместо сомножителей $1, \dots, l^2, \dots$ перед последними слагаемыми в системе (9) в системе (14) все такие сомножители равны единице.

Для системы (14) ставим соответствующие начальные условия:

$$v_k(t)|_{t=0} = u_k^0; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

Поскольку ряд (13) удовлетворяет уравнению из задачи (11), то он и его коэффициенты удовлетворяют любым следствиям уравнения из задачи (11). Таким образом, коэффициенты $v_k(t)$ удовлетворяют уравнениям системы (14) и при этом все ряды в системе (14), сходятся. Значения v_k принадлежат описанной выше области Ω .

Поскольку система (14) отличается от системы (9) только линейно входящими последними слагаемыми в соответствующих уравнениях, то ряды, стоящие в правых частях системы (9), тоже сходятся, когда значения u_k принадлежат области Ω . В том числе и потому, что $u_k(0) = v_k(0) = u_k^0$

Лемма. Поскольку справедливо неравенство

$$|u_k^0| = |u_k(0)| \leq |v_k(0)| = |u_k^0|; \quad k = 2, 3, \dots, \quad (16)$$

то при $|t| \leq t_1$ для решений задачи Коши (9), (10) и (14) выполняются неравенства

$$|u_k(t)| \leq |v_k(t)|, \quad k \geq 2. \quad (17)$$

Для доказательства леммы рассмотрим по одному соответствующему уравнению из систем (9) и (14), начальные условия для них, и для краткости записи введем упрощенные обозначения:

$$\begin{cases} u_l'(t) = f_l(t, \vec{u}) - l^2 u_l(t), \\ v_l'(t) = f_l(t, \vec{v}) - v_l(t), \\ u_l(0) = v_l(0) = u_l^0; \quad l \geq 2. \end{cases} \quad (18)$$

По теореме Коши у задач (18) в некоторой окрестности точки $(t = 0, u_l = v_l = u_l^0)$ существуют единственные аналитические решения и поэтому искомые функции из задачи (18) можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_l(t) &= u_l^0 + [f(0, \vec{u}^0) - l^2 u_l^0] t + t^2 f_1(t), \\ v_l(t) &= u_l^0 + [f(0, \vec{u}^0) - u_l^0] t + t^2 f_2(t), \end{aligned}$$

где $f_1(t), f_2(t)$ – аналитические в окрестности точки $t = 0$ функции. Поэтому

$$v_l(t) - u_l(t) = (l^2 - 1) u_l^0 t + t^2 [f_2(t) - f_1(t)] \quad (19)$$

При дальнейшем использовании равенства (19) принципиально то, что пока $l \geq 2$.

Пусть $u_l^0 > 0$, тогда в некоторой окрестности точки $t = 0$ функции $v_l(t)$ и $u_l(t)$ сохраняют положительные знаки, и поэтому из равенства (19) следует, что в некоторой окрестности точки $t = 0$ при $t \geq 0$ имеет место следующее неравенство

$$v_l(t) \geq u_l(t),$$

и поэтому нужное соотношение

$$|u_l(t)| \leq |v_l(t)|$$

установлено.

Пусть $u_l^0 < 0$, тогда в некоторой окрестности точки $t = 0$ функции $v_l(t)$ и $u_l(t)$ будут отрицательными и при $t \geq 0$ из равенства (19) следует, что

$$v_l(t) \leq u_l(t) \leq 0,$$

и нужное неравенство

$$|u_l(t)| \leq |v_l(t)|$$

также установлено. Лемма доказана.

Из леммы следует, что ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} |v_k(t)| |\sin kx|$$

мажорирует ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} |u_k(t)| |\sin kx|,$$

и, следовательно, ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} u_k(t) \sin kx$$

абсолютно сходится при $|t| \leq t_1$ и при всех x . А тогда ряд (3), решающий задачу (2), (7), также абсолютно сходится в той же области. Что и требовалось доказать.

Естественно, что построить в явном виде бесконечный ряд невозможно. Поэтому ниже при построении приближенных решений задачи (2), (7) будем брать конечное число слагаемых

(см. формулу (4)) при выборе конкретного значения константы K . Однако термин «конечный отрезок ряда» к данной сумме не применим, поскольку при изменении значения константы K все коэффициенты $u_k(t)$ в конечных суммах изменяться: измениться не только число уравнений в конечных системах обыкновенных дифференциальных уравнений для определения коэффициентов $u_k(t)$, $1 \leq k \leq K$, но и количество слагаемых в правых частях этих систем.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА

Перед описанием построения приближенных решений уравнения Бюргерса сделаем замечание об использовании положительной константы μ_0 , стоящей в правой части уравнения (1) перед производной u_{xx} . Сделанные в первом пункте замены

$$u = \mu_0 \tilde{u}, \quad t' = \mu_0 t$$

позволили убрать из задачи этот параметр, что в каком-то смысле привело к более простым аналитическим выкладкам. Но далее эта константа оставлена в исходном уравнении Бюргерса. Это сделано для того, чтобы лучше понимать: как влияет на процесс диссипации значение отвечающей за этот процесс константы μ_0 при построении приближенных решений. Это приводит к тому, что конечная система обыкновенных дифференциальных уравнений (8) становится такой:

$$\begin{cases} u'_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K-1} u_j(t) u_{j+1}(t) - \mu_0 u_1(t); \\ u'_l(t) = \frac{1}{2} l \sum_{j=1}^{K-l} u_j(t) u_{j+l}(t) - \\ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l-1} i u_{l-i}(t) u_i(t) - \mu_0 l^2 u_l(t), \quad 2 \leq l \leq K-1; \\ u'_K(t) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K-1} i u_{K-i}(t) u_i(t) - \mu_0 K^2 u_K(t). \end{cases} \quad (20)$$

Естественно, что для системы (20) задаются начальные условия

$$u_l(t)|_{t=0} = u_l^0; \quad u_l^0 = \text{const}; \quad 1 \leq l \leq K.$$

Приближенные решения уравнения Бюргерса далее строятся в виде конечных сумм (4) при заданном K -числе слагаемых в начальном отрезке тригонометрического ряда. Для этого будут решаться конечные системы обыкновенных

дифференциальных уравнений (20) при заданных начальных данных (21).

При изменении значений начальных данных с помощью констант, входящих в начальные условия (21), выяснилось, что решение строится до достаточно больших значений времени.

В качестве примера подобной ситуации на рис. 1 приведены графики коэффициентов $u_k(t)$, $1 \leq k \leq 5$, в случае, когда $u|_{t=0} = \sin x$ и

$$K = 500; \mu_0 = 0.001;$$

$$u_1|_{t=0} = 1.0; \quad u_l|_{t=0} = 0; \quad 2 \leq l \leq K. \quad (22)$$

Номер кривой на рис. 1 соответствует номеру коэффициента $u_k(t)$.

Отметим, что коэффициента $u_l(t)$ достаточно быстро достигают своего локального экстремума, а затем монотонно стремятся к нулю. Это их отличает от поведения подобных коэффициентов, задающих приближенные решения полной системы уравнений Навье–Стокса [1], которые также убывают до нуля с течением времени, но при этом осциллируют с конкретными частотами.

Условия (22) говорят о том, что в качестве начального условия в задаче (1), (7) взята следующая функция:

$$u(t, x)|_{t=0} = \sin x.$$

График этой синусоиды приведён на рис. 2, а число слагаемых в частичной сумме (4) взято в количестве пятьсот.

Изменение с течением времени рассматриваемого приближения решения задачи (25) передают графики на рис. 3, 4.

Линии 1–3 на рис. 3 соответствуют моментам времени $t = 1.0; 2.0; 3.0$. На рис. 4 этим же силам соответствуют моменты времени $t = 10.0; 15.0; 20.0$.

Анализируя приложенные графики, отмечаем, что с течением времени значения функции в локальных экстремумах стремятся к нулю. При этом положительный максимум как бы «движется» вправо, отрицательный минимум – влево. Поэтому значения производной $u_x(t, x)$ при приближении к точкам $x = \pm \pi$ становятся все больше, например

$$u_x(10, \pi - 0.01) \approx 31.0.$$

Но при этом в решении не возникают резкие осцилляции и не наблюдается разрушение решения, что часто бывает при использовании разностных методов для решения нелинейных уравнений с частными производными.

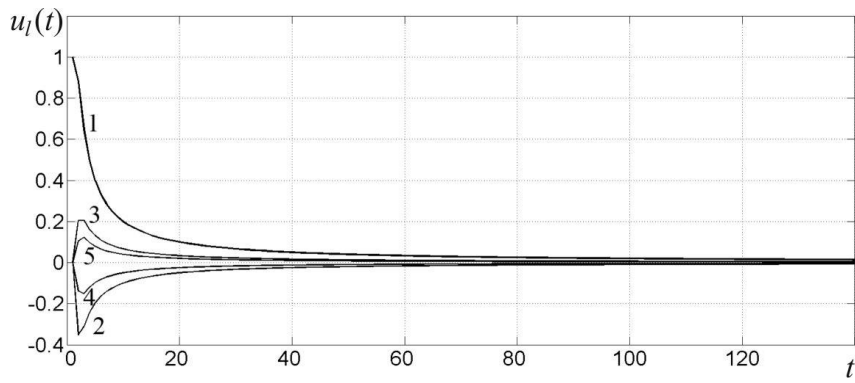


Рис. 1. Первые коэффициенты тригонометрического ряда

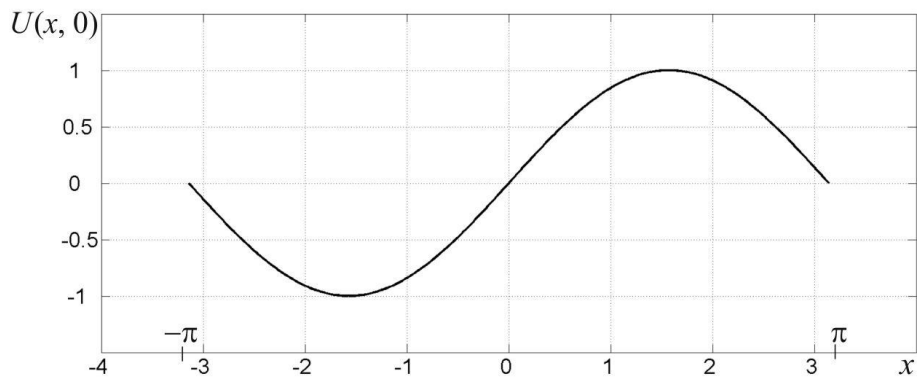


Рис. 2. График функции, задающей начальное условие

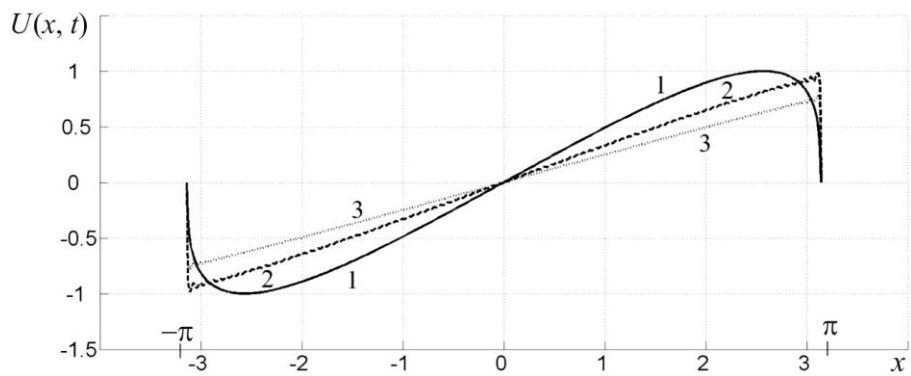


Рис. 3. Графики решения в моменты времени 1.0; 2.0; 3.0

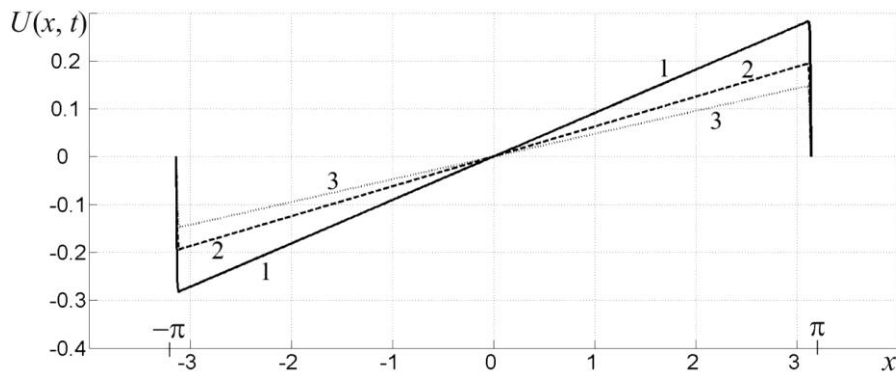


Рис. 4. Графики решения в моменты времени 10.0; 15.0; 20.0

На рис. 5 приведен спектр решения при условиях (22) в момент времени $t = 0$, а на

рис. 6 – спектр решения при $t = 1.0$. На этих рисунках по оси абсцисс откладывается значение

частоты k , а по оси ординат - значения соответствующих коэффициентов в указанный момент

времени.

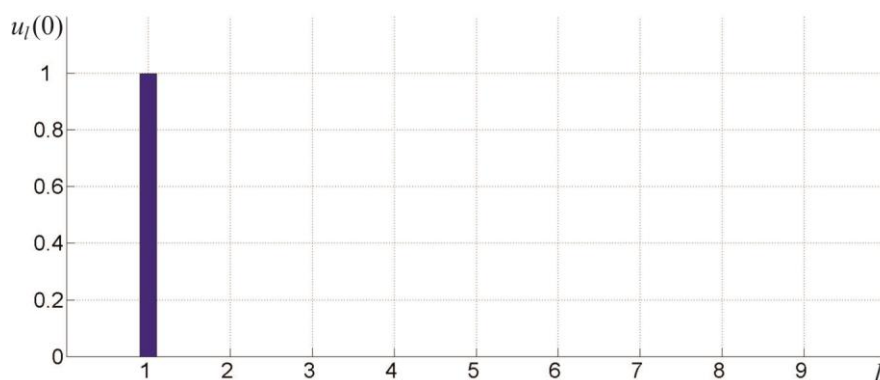


Рис. 5. Спектр начального условия

Рис. 5, 6 иллюстрируют действие первой теоремы о кратных частотах. В данном примере в начальный момент времени присутствует только одна гармоника с частотой 1 (см. рис. 5), и поэтому в решении с течением времени появ-

ляются только обертоны (см. рис. 6): гармоники со всеми большими частотами, поскольку в данном примере единственная начальная гармоника имеют частоту, равную единице, и поэтому $d = 1$.

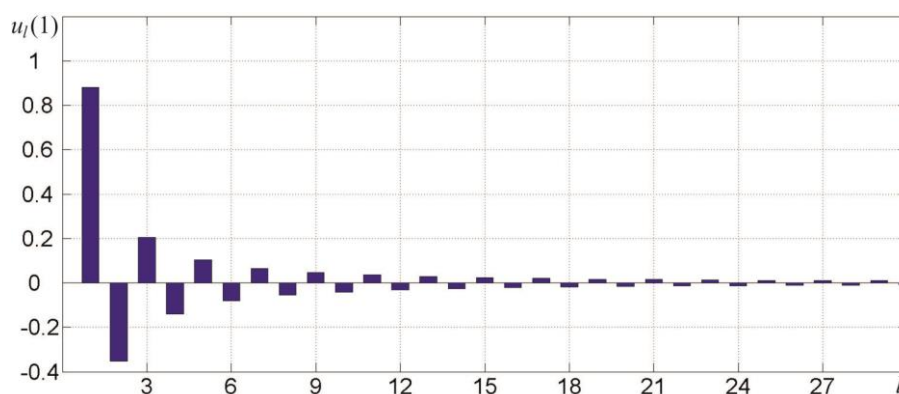
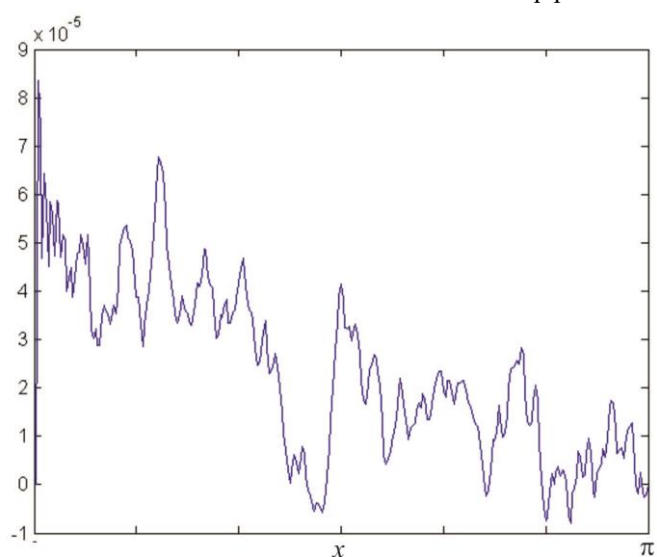


Рис. 6. Спектр решения в момент времени $t=1.0$



На рис. 7 при $t = 1$ приведена разность конечных сумм с различным числом слагаемых: $K = 400$ и $K = 500$, что показывает «машинную сходимость» конечных сумм в этом примере. Заметим, что численное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (20) проводилось с заданной точностью: $\varepsilon = 10^{-4}$, т.е. разность этих конечных сумм практически равна погрешности вычислений.

Рис. 7. Разность решений с $K = 400$ и с $K = 500$

Поведение другого решения с течением времени иллюстрируют рис. 8–11 для следующего варианта:

$$K = 500; \mu_0 = 0.001; u_4|_{t=0} = 0.1;$$

$$u_6|_{t=0} = 0.1; u_l|_{t=0} = 0 \text{ для остальных } l.$$

На рис. 8 приведен вид функции $u(t, x)|_{t=0} = 0.1 \sin(4x) + 0.1 \sin(6x)$, задающей начальное условие в этом примере.

На рис. 9 приведены графики функции $u(t, x)$ в разные моменты времени: $t = 10, t = 20, t = 30$ и соответствующие кривые помечены цифрами 1, 2, 3 соответственно.

На рис. 10, 11 приведены спектры этого решения в моменты времени $t = 0, t = 20$, т.е. на рис. 10 приведены значения $u_k(t)|_{t=0}$, на рис. 11 значения $u_k(t)|_{t=20}$.

Рис. 11 иллюстрирует действие второй теоремы о кратных частотах.

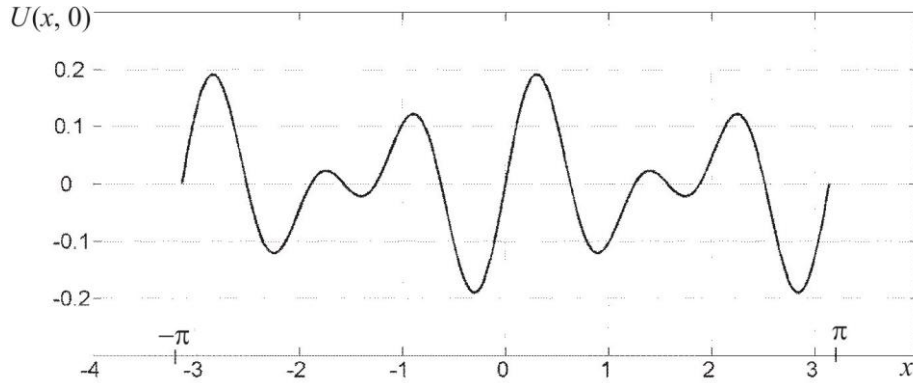


Рис. 8. График начального условия во втором примере

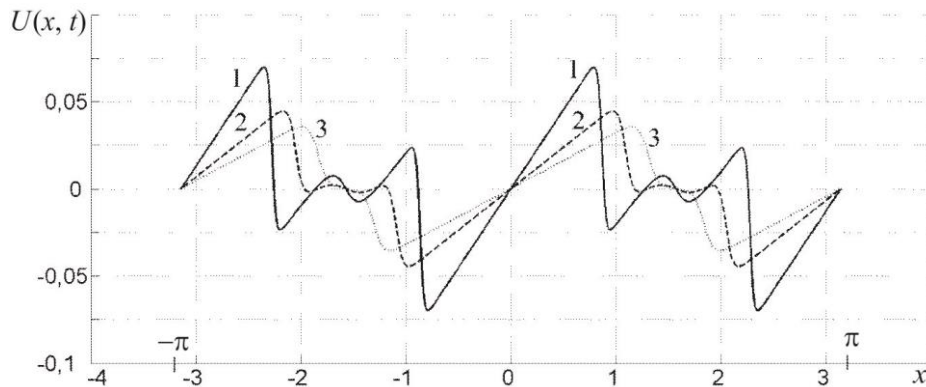


Рис. 9. Графики решения в моменты времени 10.0; 20.0; 30.0

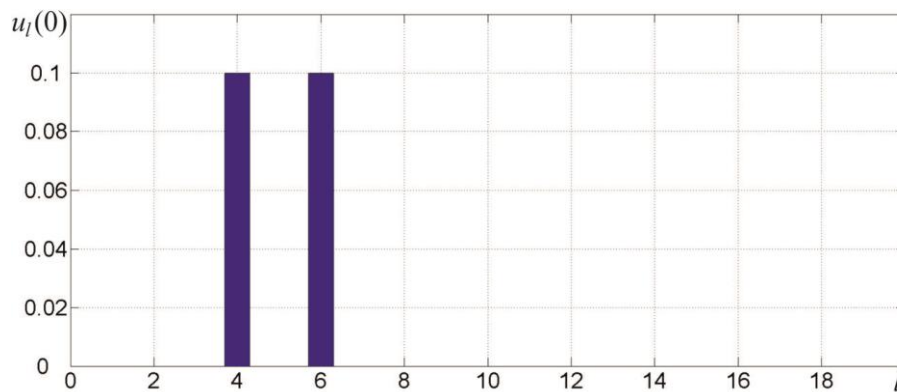


Рис. 10. Спектр решения в момент времени $t = 0$

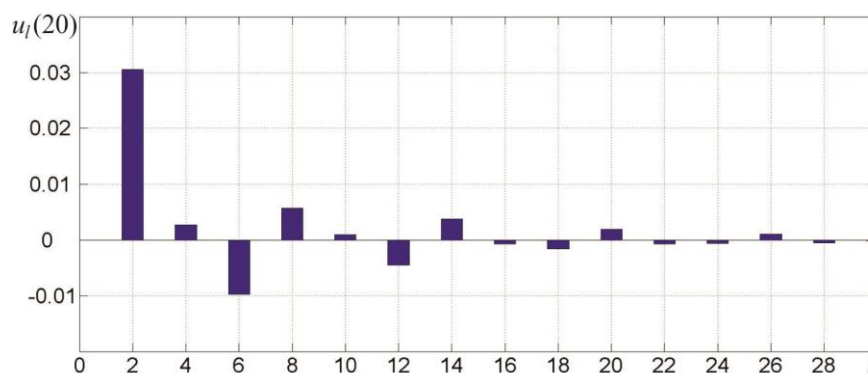


Рис. 11. Спектр решения в момент времени $t = 20.0$

В данном примере

$$d = \text{НОД}(4, 6) = 2,$$

и поэтому в решении с течением времени также появляются обертоны: гармоники с большими частотами, расположенными через двойку, т.е. 8, 10, 12 и т.д. Но кроме этого, появился и унтертон: гармоника с меньшей частотой, равной двум.

СОПОСТАВЛЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ С РЕШЕНИЯМИ, ПОСТРОЕННЫМИ РАЗНОСТНЫМИ МЕТОДАМИ

Естественно, что получить приближенные решения уравнения Бюргерса можно и разностными методами.

Благодаря наличию современных высокопроизводительных вычислительных комплексов основным инструментом построения приближенных решений нелинейных уравнений с частными производными включая полную систему уравнений Навье–Стокса [4], уже давно являются разностные методы.

Результаты численных расчетов приближенных решений уравнения Бюргерса с услови-

ями (22) в виде конечных тригонометрических сумм сопоставлялись с расчетами этой задачи разностными методами. Для этого использовалась явная разностная схема с применением центральных разностей для приближения производных по пространственным переменным и с постоянными разностными шагами по пространству и времени.

Как и ожидалось, пока в соответствующем приближенном решении уравнения Бюргерса не возникали большие значения производной по пространственной переменной, отклонения конечной тригонометрической суммы от разностного решения были небольшими. На рис. 12 приведен график функции $\Delta(t, x)$, являющийся разностью этих функций в момент времени $t = 1.0$. Величина модуля этой функции не превышает значения 0.02 и достигается около правой и левой границ при x , близких к $\pm\pi$.

Но при дальнейшем увеличении времени в окрестностях точки $x = \pm\pi$ у разностного решения $u_r(t, x)$ возникают достаточно большие необоснованные осцилляции.

На рис. 13 приведено поведение разностного решения в момент времени $t = 1.1$.

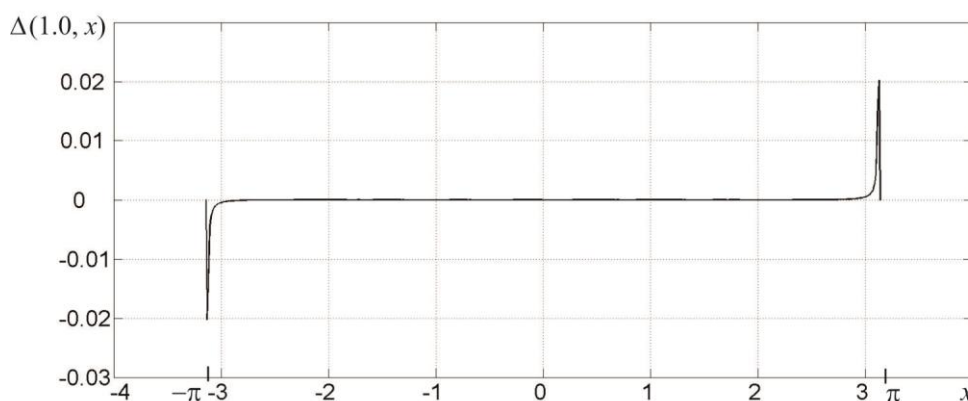
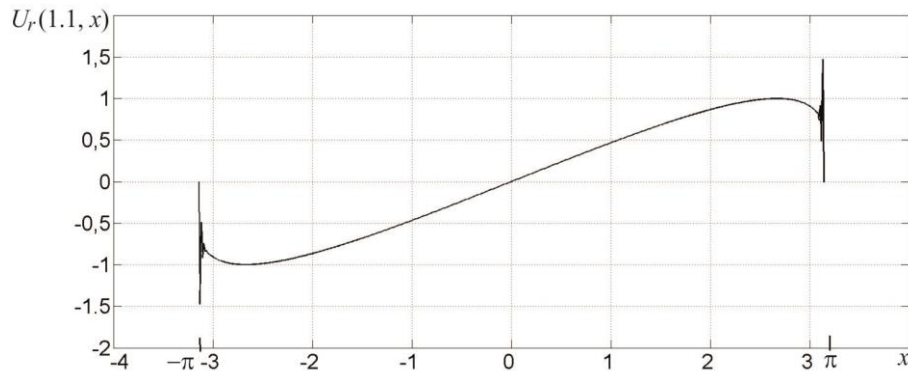


Рис. 12. Разность решений полученных тригонометрической суммой и разностным расчетом в момент времени $t = 1.0$

Рис. 13. График разностного решения в момент времени $t = 1.1$

Следовательно, приближенное решение уравнения Бюргерса, построенное с помощью конечных тригонометрических сумм, хорошо совпадает с приближенным решением, построенным разностным методом, пока в силу специфики разностных методов в последнем решении не появляются необоснованные осцилляции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используя ранее разработанную методику представления решений нелинейных уравнений с частными производными в данной работе построено решение уравнения Бюргерса в виде бесконечного тригонометрического ряда от пространственной переменной, коэффициенты которого зависят от времени. Доказаны теоремы о кратных частотах. Впервые доказана сходимость бесконечного тригонометрического ряда, решающего уравнение Бюргерса. Получение приближенных решений рассматриваемого нелинейного уравнения с частными производными основано на численном решении специальной конечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений при нахождении коэффициентов начального отрезка бесконечного тригонометрического ряда. Установлен факт возникновения у решения в конечный момент времени при заданных гладких начальных условиях больших значений производных по пространственной переменной. Что тем не менее не приводит к возникновению необоснованных осцилляций или к разрушению решения. Подобный эффект был получен ранее [1] при моделировании распространения одномерного ударного перехода в случае построения тригонометрическими рядами решений полной системы уравнений Навье–Стокса. Сопоставление приведенных приближенных решений с решениями, построенными разностными методами, показало, что можно использовать отрезки три-

гонометрических рядов для получения приближенных решений уравнения Бюргерса.

Авторами данной работы выражается уверенность в эффективности предложенного подхода для построения решений соответствующих нелинейных систем уравнений с частными производными с помощью сходящихся тригонометрических рядов, в том числе в случае многих пространственных переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баутин С.П., Замыслов В.Е., Скачков П.П. Математическое моделирование тригонометрическими рядами одномерных течений вязкого теплопроводного газа. Новосибирск: Наука; Екатеринбург: УрГУПС, 2014. 91 с.
2. Mendousse J.S. Nonlinear dissipative distortion of progressive sound waves at moderate amplitudes // J. Acoust. Soc. Am. 1953. V. 25. P. 51–54.
3. Хохлов Р.В. К теории ударных радиоволн в нелинейных линиях // Радиотехника и электроника. 1961. Т. 6. № 6. С. 917–925.
4. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.
5. Замыслов В.Е. Стоячие волны как решение полной системы уравнений Навье–Стокса в одномерном случае // Вычислительные технологии, 2013. Т. 18. № 2. С. 33–45.
6. Курмаева К.В., Титов С.С. Специальные ряды с кратными частотами для одномерных течений сжимаемого газа в обобщении теорем В.Е. Замыслова // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения, 2016. № 3. С. 18–28.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
8. Алдошина И., Приттс Р. Музыкальная акустика. СПб.: Композитор, 2006. 260 с.
9. Ковалевская С.П. Научные труды. К теории дифференциальных уравнений с частными производными. М.: Изд-во АН СССР, 1948. 368 с.
10. Баутин С.П. Аналитическая тепловая волна. М.: Физматлит, 2003. 88 с.

REPRESENTATION OF SOLUTIONS TO THE BURGERS EQUATION TRIGONOMETRIC SERIES

S.P. Bautin^{1}, V. E. Zamyslov²*

¹*Snezhinsk Institute of Physics and Technology, National Research Nuclear University MEPhI, Snezhinsk, Chelyabinsk region, 456776 Russia*

²*Ural State Transport University, Yekaterinburg, 620034 Russia*

**e-mail: spbautin@mail.ru*

***e-mail: zamislov2017@yandex.ru*

Received November 12, 2022; revised November 16, 2022; accepted November 22, 2022

The paper describes a technique for representing solutions of a nonlinear partial differential equation – the Burgers equation – in the form of an infinite trigonometric series from a spatial variable. The coefficients of the series are the desired functions of time. The procedure for obtaining an infinite system of ordinary differential equations, the solutions of which set the desired coefficients of the series, is described. Due to the specific properties of the solutions of the considered infinite systems of ordinary differential equations, the theorems on multiple frequencies are proved and the convergence of an infinite trigonometric series in some neighborhood of the point $t = 0$ and for all values of the independent variable x is investigated. With the help of finite sums, concrete approximate solutions of the Burgers equation are constructed. In particular, it is established that the solution has large values of derivatives in the spatial variable at a finite time under given smooth initial conditions. Which, nevertheless, does not lead to the occurrence of unreasonable oscillations or to the destruction of the solution.

Keywords: nonlinear partial differential equations, trigonometric series, Burgers equation, approximate solutions.

REFERENCE

1. *Bautin S.P., Zamyslov V.E., Skashkov P.P.* Matematicheskoe modelirovanie trigonometricheskimi rajdami odnomernyh techenii vsajzkogo teploprovodnogo gaza [Mathematical modeling of trigonometric series of one-dimensional flows of a viscous heat-conducting gas]. Novosibirsk: Nauka Publ.; Ekaterinburg: UrGUPS Publ. 2014. 91 p.
2. *Mendousse J.S.* Nonlinear dissipative distortion of progressive sound waves at moderate amplitudes. *J. Acoust. Soc. Am.* 1953. V. 25. P. 51–54.
3. *Hohlov R.V.* K teorii udarnykh radiovoln v nelineinykh liniyakh [On the theory of shock radio waves in nonlinear lines]. *Radiotekhnika i elektronika*. 1961. V. 6. № 6. P. 917–925 (in Russian).
4. *Bautin S.P.* Charakteristicheskaja zadacha Koshi i ee prilozhenija v gazovoi dinamike [The characteristic Cauchy problem and its applications in gas dynamics]. Novosibirsk: Nauka, 2009. 368 p. (in Russian).
5. *Zamyslov V.E.* Stoajchii volny kak resheniaj polnoi sistemy uravnenij Navie-Stoksa v odnomernom sluchae [Standing waves as solutions of the complete system of Navier-Stokes equations in the one-dimensional case]. *Vychislitelnye tehnologii*. 2013. V. 18. № 2. P. 33–45 (in Russian).
6. *Kurmaeva K.V., Titov S.S.* Specyialnye rajdy s kratnymi chastotami dlaj odnomernyh techenij szymaemogo gaza v obobchenii teorem V.E. Zamyslova. [Special series with multiple frequencies for one-dimensional flows of compressible gas in generalization of V.E. Zamyslov's theorems]. *Vestnik Uralskogo gosudarstvennogo universiteta putei soobshhenij*. 2016. № 3. P. 18–28 (in Russian).
7. *Landau L.D., Lifšyc E.M.* Teoreticheskaja fizika. vol.VI. Gidrodinamika [Theoretical physics. Vol. VI. Hydrodynamics]. M.: Nauka Publ, 1988. 736 p.
8. *Aldoshyna I., Pritts R., Ppumm P.* Muzykalnaaj akustika [Musical acoustics]. SPb.: Kompozitor publ., 2006. 260 p.
9. *Kovalevskaj S.V.* Nauchnye Trudy. K teorii differencyal'nyh uravnenij s chastnymi proizvodnyymi [Scientific works. On the theory of partial differential equations]. M.: Izd-vo AN SSSR Publ., 1948. 368 p.
10. *Bautin S.P.* Analiticheskaja teplovaja volna [Analytical heat wave]. M.: Fizmatlit Publ., 2003. 88 p.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.91

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРИКИ-БИСВАСА

© 2022 А.А. Кутуков*, Н.А. Кудряшов**

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

*e-mail: alexkutuk@gmail.com,

**e-mail: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию 06.12.2022

После доработки: 09.12.2022

Принята к публикации: 13.12.2022

Рассматривается математическая модель для описания распространения импульсов в нелинейной оптической среде, описываемая обобщенным уравнением Трики-Бисваса. Задача Коши этого нелинейного уравнения в частных производных не решается методом обратного преобразования рассеяния, поэтому решение ищется в переменных бегущей волны. Изучается система из двух нелинейных дифференциальных уравнений, полученная в результате приравнивания нулю действительной и мнимой частей исходного уравнения. После ряда преобразований, связанных с нахождением первых интегралов рассматриваемых уравнений, система уравнений преобразуется к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, решение которого не может быть выражено в общем виде при помощи эллиптических функций. Применяется метод преобразования зависимой и независимой переменных, с помощью которого решение рассматриваемого дифференциального уравнения записывается с использованием эллиптических функций Якоби в неявном виде. Исследуется вопрос существования вырожденных решений в зависимости от значений параметров исходного дифференциального уравнения. Приводится частный случай, когда решение имеет вид уединенной волны и представляется в неявной форме. Полученные решения в виде периодических и уединенных волн иллюстрируются при различных значениях параметров математической модели.

Ключевые слова: обобщенное уравнение Трики-Бисваса, точные решения, оптические солитоны.

DOI: 10.26583/vestnik.2022.239

ВВЕДЕНИЕ

Для передачи информации в современном мире используется оптическое волокно. Важной проблемой, привлекающей исследователей, является моделирование распространения импульсов в нелинейных волноводах с целью повышения качества передаваемого сигнала. Большинство таких математических моделей основаны на обобщениях нелинейного уравнения Шредингера с учетом свойств оптической среды [1–4]. Можно выделить известные модели, описываемые уравнением Трики-Бисваса [5–10], уравнением Радхакришнана-Кунду-Лакшманана [11–13], уравнением Бисваса-Аршеда [14–16], уравнением Фокаса-Ленеллса [17, 18]. В данной работе рассматривается обобщение уравнения Трики-Бисваса, с помощью которого моделируется распространение фемтосекундных оптических импульсов в нелинейной оптической среде. Это уравнение имеет вид

$$iq_t - \delta q_{xx} + i\frac{\partial}{\partial x}(a|q|^{2m}q + b|q|^{4m}q) = 0. \quad (1)$$

При $a = 0$ уравнение (1) имеет вид классического уравнения Трики-Бисваса. При $a = 0$ и $m = 1$ уравнение (1) имеет вид известного уравнения Каупа-Ньюэла [19].

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРИКИ-БИСВАСА В ПЕРЕМЕННЫХ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Точное решение уравнения (1) ищется в виде

$$q(x, t) = y(z)e^{i(\Psi(z) + \omega t)}, z = x - C_0 t. \quad (2)$$

После подстановки (2) в уравнение (1) получается обыкновенное дифференциальное уравнение в виде

$$\begin{aligned} & i(4m + 1)by^{4m}y_z - by^{4m+1}\Psi_z - \\ & - ay^{2m+1}\Psi_z + i(2m + 1)ay^{2m}y_z - \\ & - i\delta y\Psi_{zz} + \delta y\Psi_z^2 + C_0 y\Psi_z - \\ & - y\omega - 2i\delta y_z\Psi_z - iC_0 y_z - \delta y_{zz} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение (3) может быть представлено в виде системы уравнений путем приравнивания нулю действительной и мнимой части уравнения (3):

$$by^{2n+1}\psi_z + ay^{n+1}\psi_z + \delta y_{zz} - (\psi_z^2\delta + \psi_z C_0 - \omega)y = 0, \quad (4)$$

$$(2n+1)by^{2n}y_z + (n+1)ay^n y_z - \delta y\psi_{zz} - 2\delta y_z\psi_z - C_0 y_z = 0, \quad (5)$$

где $n = 2m$. Уравнение (5) может быть проинтегрировано по z после умножения на $y(z)$ и представлено в виде

$$-\delta y^2\psi_z + \frac{a(n+1)}{n+2}y^{n+2} + \frac{b(2n+1)}{2(n+1)}y^{2n+2} - \frac{C_0}{2}y^2 + C_1 = 0. \quad (6)$$

Из уравнения (6) находится ψ_z и подставляется в уравнение (4):

$$\begin{aligned} & -\delta y_{zz} + \frac{-4\delta\omega - C_0^2}{4\delta}y + \\ & + \frac{C_1^2}{\delta y^3} - \frac{(2n+1)b^2}{4(n+1)^2\delta}y^{4n+1} - \\ & - \frac{-C_0n^2b + 2(a^2 - 2C_0b)(n+1)}{2(n+2)^2\delta}y^{2n+1} + \\ & + \frac{C_0a}{2\delta}y^{n+1} + \frac{aC_1n}{(n+2)\delta}y^{n-1} - \\ & - \frac{(3n+2)ab}{2(n+1)(n+2)\delta}y^{3n+1} + \\ & + \frac{C_1nb}{(n+1)\delta}y^{2n-1} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Первый интеграл уравнения (7) получается после его умножения на y_z и интегрирования по z :

$$\begin{aligned} & -\frac{\delta}{2}y_z^2 - \frac{C_1^2}{2\delta y^2} - \frac{4\delta\omega + C_0^2}{8\delta}y^2 + \\ & + \frac{C_1a}{(n+2)\delta}y^n + \frac{C_0a}{2(n+2)\delta}y^{n+2} + \\ & + \frac{C_1b}{2(n+1)\delta}y^{2n} - \\ & - \frac{-C_0n^2b + 2(a^2 - 2C_0b)(n+1)}{4(n+1)(n+2)^2\delta}y^{2n+2} - \\ & - \frac{ab}{2(n+1)(n+2)\delta}y^{3n+2} - \\ & - \frac{b^2}{8(n+1)^2\delta}y^{4n+2} + C_2 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Вводятся следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{C_1^2}{\delta^2}, \quad B = -\frac{4\delta\omega + C_0^2}{4\delta^2}, \\ C &= \frac{2C_2}{\delta}, \quad E_n = \frac{2C_1a}{(n+2)\delta^2}, \\ F_n &= \frac{C_0a}{(n+2)\delta^2}, \\ G_n &= -\frac{-C_0bn^2 + 2(a^2 - 2bC_0)(n+1)}{2(n+1)(n+2)^2\delta^2}, \\ H_n &= -\frac{ab}{(n+1)(n+2)\delta^2}, \\ K_n &= -\frac{b^2}{4(n+1)^2\delta^2}, \quad L_n = \frac{bC_1}{(n+1)\delta^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда уравнение (8) представляется в виде

$$\begin{aligned} y_z^2 &= \frac{A}{y^2} + By^2 + C + E_n y^n + \\ & + F_n y^{n+2} + G_n y^{2n+2} + \\ & + H_n y^{3n+2} + K_n y^{4n+2} + L_n y^{2n}. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение (10) записывается в форме

$$y^2 y_z^2 = P(y), \quad (11)$$

где $P(y)$ имеет полиномиальную форму:

$$\begin{aligned} P(y) &= A + By^4 + Cy^2 + \\ & + E_n y^{n+2} + F_n y^{n+4} + G_n y^{2n+4} + \\ & + H_n y^{3n+4} + K_n y^{4n+4} + L_n y^{2n+2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Общее решение уравнения (10) может быть записано в виде

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{P(y)}} = z - z_0. \quad (13)$$

Такой интеграл не удастся выразить при помощи элементарных функций. Для построения решений могут быть использованы специальные методы для того, чтобы выразить решение в виде, удобном для построения с помощью систем символьных вычислений.

МЕТОД НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРИКИ-БИСВАСА В ПЕРЕМЕННЫХ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Рассматривается случай, когда $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$. Тогда $A = 0, C = 0, E_n = 0, L_n = 0$. С учетом указанных значений констант уравнение (10) представляется в виде

$$y_z^2 = By^2 + F_n y^{n+2} + G_n y^{2n+2} + H_n y^{3n+2} + K_n y^{4n+2}. \quad (14)$$

Осуществляется замена зависимой переменной в виде

$$y(z) = V(z)^{-\frac{1}{n}}. \quad (15)$$

Тогда уравнение (14) выражается в виде

$$\frac{V_z^2}{n^2} = \frac{BV^4 + F_nV^3 + G_nV^2 + H_nV + K_n}{V^2}. \quad (16)$$

После замены независимой переменной

$$z = \frac{\tilde{z}}{n\sqrt{B}} \quad (17)$$

уравнение (16) записывается в виде

$$V_z^2 = \frac{V^4 + M_nV^3 + R_nV^2 + S_nV + T_n}{V^2}, \quad (18)$$

где $M_n = \frac{F_n}{B}, R_n = \frac{G_n}{B}, S_n = \frac{H_n}{B}, T_n = \frac{K_n}{B}$.

Пусть V_1, V_2, V_3, V_4 – корни уравнения

$$V^4 + M_nV^3 + R_nV^2 + S_nV + T_n = 0. \quad (19)$$

Тогда уравнение (18) представляется в виде

$$\begin{aligned} V^2V_z^2 &= \\ &= (V - V_1)(V - V_2)(V - V_3)(V - V_4). \end{aligned} \quad (20)$$

Согласно методу неявных функций [21] предполагается, что

$$V(\tilde{z}) = U(\xi), \xi = \varphi(\tilde{z}). \quad (21)$$

После подстановки (21) в уравнение (20) получается уравнение

$$\begin{aligned} U^2U_\xi^2\xi_z^2 &= \\ &= (U - V_1)(U - V_2)(U - V_3)(U - V_4). \end{aligned} \quad (22)$$

Пусть

$$\xi_z^2 = \frac{1}{U^2}, \quad (23)$$

тогда уравнение (22) представляется в виде

$$U_\xi^2 = (U - V_1)(U - V_2)(U - V_3)(U - V_4). \quad (24)$$

Решение уравнения (24) выражается в виде

$$\begin{aligned} U(\xi) &= \\ &= \frac{V_3(V_1 - V_4) \operatorname{sn}^2(S(\xi - \xi_0), k)}{(V_1 - V_4) \operatorname{sn}^2(S(\xi - \xi_0), k) + V_3 - V_1} - \\ &\quad - \frac{V_4(V_1 - V_3)}{(V_1 - V_4) \operatorname{sn}^2(S(\xi - \xi_0), k) + V_3 - V_1}, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{(V_2 - V_4)(V_1 - V_3)}, \\ k^2 &= \frac{(V_2 - V_3)(V_1 - V_4)}{(V_1 - V_3)(V_2 - V_4)} \end{aligned} \quad (26)$$

и $\operatorname{sn}(x, k)$ – эллиптическая функция Якоби.

Принимая во внимание решение (25) и уравнение (23), связь между ξ и $\tilde{z}$ выражается в виде

$$\tilde{z} - z_0 = \pm \int U(\xi) d\xi. \quad (27)$$

Из уравнения (27) ξ в явном виде не выражается, поэтому выражение (25) и уравнение (27) задают решение уравнения (20) в неявной форме.

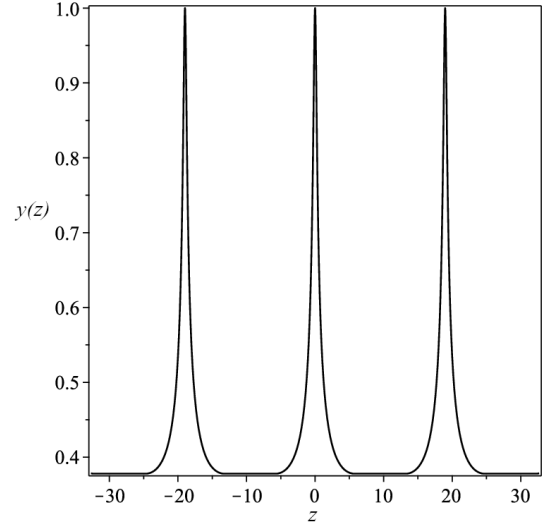


Рис. 1. График зависимости $y(z)$, заданной выражениями (25), (27) и (15), при $n = 2$, $a = -3, b = \frac{84}{5}, \delta = -\frac{441}{400}, \omega = 1, C_0 = 2$. График зависимости $y(\tilde{z})$ строится (рис. 1) с использованием выражений (25), (27) и (15).

ВЫРОЖДЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРИКИ-БИСВАСА В ПЕРЕМЕННЫХ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Рассматривается случай, когда в уравнении (18) полином (19) имеет кратные корни. В этом случае необходимо учесть, что значения корней зависят от параметров задачи. В каждом случае проверяется, существуют ли такие параметры, при которых корни полинома (19) имеют предполагаемую кратность. Коэффициенты полинома (19) выражаются через параметры задачи следующим образом:

$$\begin{aligned} M_n &= \frac{-4C_0a}{(n+2)(4\delta\omega + C_0^2)}, \\ S_n &= \frac{4ab}{(n^2 + 3n + 2)(4\delta\omega + C_0^2)}, \\ T_n &= \frac{b^2}{(n+1)^2(4\delta\omega + C_0^2)}, \\ R_n &= \frac{(4a^2 - 8bC_0)n}{(n+2)^2(n+1)(4\delta\omega + C_0^2)} + \\ &\quad + \frac{-2bn^2C_0 + 4a^2 - 8bC_0}{(n+2)^2(n+1)(4\delta\omega + C_0^2)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Тогда получается система уравнений для корней полинома (19) и параметров задачи в виде

$$\begin{aligned} V_1 V_2 V_3 V_4 &= \frac{b^2}{(n+1)^2(4\delta\omega + C_0^2)}, \\ -V_1 V_2 V_3 - V_1 V_2 V_4 - V_1 V_3 V_4 - V_2 V_3 V_4 &= \\ &= \frac{4ab}{(n^2 + 3n + 2)(4\delta\omega + C_0^2)}, \\ V_1 V_2 + V_3 V_1 + V_4 V_1 + \\ + V_3 V_2 + V_4 V_2 + V_4 V_3 &= \\ &= \frac{(4a^2 - 8bC_0)n}{(n+2)^2(n+1)(4\delta\omega + C_0^2)} + \\ + \frac{-2bn^2C_0 + 4a^2 - 8bC_0}{(n+2)^2(n+1)(4\delta\omega + C_0^2)}, \\ V_1 + V_2 + V_3 + V_4 &= \frac{4C_0a}{(n+2)(4\delta\omega + C_0^2)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Случай 1. Предполагается, что уравнение (20) имеет совпадающие корни $V_1 = V_2$. Тогда оно принимает вид

$$\tilde{z} - z_0 = \pm \int \frac{(V_1 - V_4) \tanh^2(S(\xi - \xi_0)) + V_3 - V_1}{V_3(V_1 - V_4) \tanh^2(S(\xi - \xi_0)) - V_4(V_1 - V_3)} d\xi. \quad (33)$$

Интеграл в формуле (33) выражается с помощью элементарных функций, поэтому уравнение (33) принимает форму

$$\begin{aligned} \tilde{z} - z_0 &= V_1 \xi + \ln \left(e^{-2S(\xi - \xi_0)} + \frac{-2V_1 + V_3 + V_4 + 4S}{V_3 - V_4} \right) - \\ &- \ln \left(e^{-2S(\xi - \xi_0)} + \frac{-2V_1 + V_3 + V_4 - 4S}{V_3 - V_4} \right), \end{aligned} \quad (34)$$

где S задается как (32). Таким образом, вырожденное решение обобщенного уравнения Трики-Бисваса в переменных бегущей волны записывается в неявном виде. Принимая во внимание формулы (15), (31) и (34), строят график зависимости $y(z)$ (рис. 2) при $n = 2$, $a = -\frac{448}{73}$, $b = \frac{2352}{73}$, $\delta = -\frac{6561}{5329}$, $\omega = 1$, $C_0 = 2$.

Случай 2. Пусть $V_1 = V_2 = V_3$, тогда уравнение (20) принимает вид

$$V^2 V_z^2 = (V - V_1)^3 (V - V_4). \quad (35)$$

Оказывается, что в этом случае система (29) имеет решения только при $V_1 = V_4$. Этот случай будет рассмотрен отдельно.

Случай 3. Пусть $V_1 = V_2 = V_3 = V_4$, тогда уравнение (18) принимает вид

$$V^2 V_z^2 = (V - V_1)^4. \quad (36)$$

В этом случае решение системы (29) находится в виде

$$V^2 V_z^2 = (V - V_1)^2 (V - V_3) (V - V_4) \quad (30)$$

Система (29) в случае $V_1 = V_2$ имеет решения для ненулевых значений параметров задачи, поэтому этот случай подходит для поиска решений уравнения (30). При $V_1 = V_2$ эллиптическая функция Якоби в выражении (25) вырождается в гиперболический тангенс, и получается решение в виде

$$\begin{aligned} U(\xi) &= \\ &= \frac{V_3(V_1 - V_4) \tanh^2(S(\xi - \xi_0))}{(V_1 - V_4) \tanh^2(S(\xi - \xi_0)) + V_3 - V_1} - \\ &- \frac{V_4(V_1 - V_3)}{(V_1 - V_4) \tanh^2(S(\xi - \xi_0)) + V_3 - V_1}, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$S = \frac{\sqrt{(V_1 - V_4)(V_1 - V_3)}}{2}. \quad (32)$$

В то же время уравнение (27) в случае $V_1 = V_2$ принимает форму

$$V_1 = -\frac{b(n+2)}{a(n+1)}, C_0 = -\frac{a^2(n+1)}{b(n+2)^2}, \quad \omega = 0. \quad (37)$$

Метод неявных функций применяется к уравнению (36). После замены переменных (21) в уравнении (36) получается уравнение вида

$$U^2 U_\xi^2 \xi_z^2 = (U - V_1)^4. \quad (38)$$

Положим

$$\xi_z^2 = \frac{1}{U^2}, \quad (39)$$

тогда уравнение (38) принимает вид

$$U_\xi^2 = (U - V_1)^4. \quad (40)$$

Одно из решений уравнения (40) представляется в виде

$$U(\xi) = \frac{-1 + V_1(\xi - \xi_0)}{\xi - \xi_0}. \quad (41)$$

Из уравнения (39) с учетом (40) получается зависимость

$$\tilde{z} - z_0 = V_1 \xi - \ln(\xi - \xi_0). \quad (42)$$

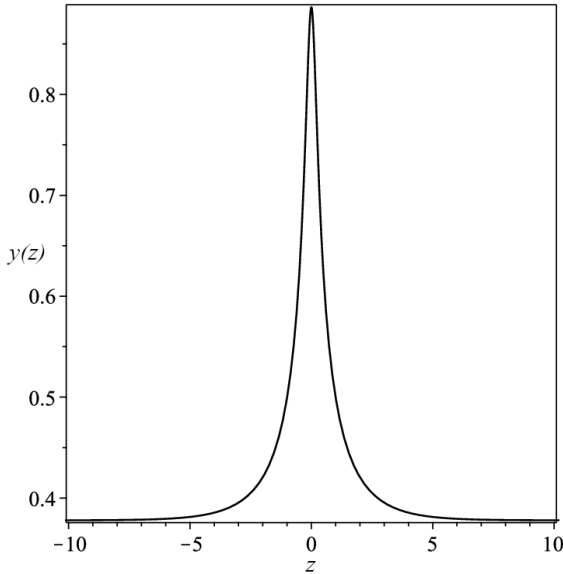


Рис. 2. График зависимости $y(z)$ в случае $V_1 = V_2$, заданной выражениями (31), (33) и (15), при $n = 2$, $a = -\frac{448}{73}$, $b = \frac{2352}{73}$, $\delta = -\frac{6561}{5329}$, $\omega = 1$, $C_0 = 2$

В этом случае удастся построить решение уравнения (36) в явном виде. Из соотношений (41) и (42) получается решение:

$$V(\tilde{z}) = \frac{V_1(W(-V_1 e^{V_1 \xi_0 - \tilde{z} + z_0}) + 1)}{W(-V_1 e^{V_1 \xi_0 - \tilde{z} + z_0})}, \quad (43)$$

где $W(x)$ – функция Ламберта, которая удовлетворяет уравнению $x = W(x)e^{W(x)}$. В данном случае не удастся построить действительные решения $y(z)$, поскольку в выражении (17) параметр B при условиях (37) принимает только отрицательные значения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассматривалось обобщенное уравнение Трики-Бисваса, описывающее распространение фемтосекундных импульсов в нелинейном оптическом волокне. Для обобщенного уравнения Трики-Бисваса в переменных бегущей волны найдены решения, заданные неявно. Рассмотрены вырожденные случаи. Проиллюстрированы решения в виде периодических и уединенных волн.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00141).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kivshar Y., Agrawal G. Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals, 2003.
2. Kudryashov N.A. Almost general solution of the reduced higher-order nonlinear Schrödinger equation // *Optik*. 2021. V. 230. Art. № 166347.
3. Kudryashov N.A. Highly dispersive solitary wave solutions of perturbed nonlinear Schrödinger equations // *Appl. Math. Comput.* 2020. V. 371. Art. № 124972.
4. Kudryashov N.A. Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities // *Optik*. 2020. V. 212. Art. № 164750.
5. Triki H., Biswas A. Sub pico-second chirped envelope solitons and conservation laws in monomode optical fibers for a new derivative nonlinear Schrödinger's model // *Optik*. 2018. V. 173. P. 235–241.
6. Kudryashov N.A. First integrals and solutions of the traveling wave reduction for the Triki-Biswas equation // *Optik*. 2019. V. 185. P. 275–281.
7. Zhou Q., Ekici M., Sonmezoglu A. Exact chirped singular soliton solutions of Triki-Biswas equation // *Optik*. 2019. V. 181. P. 338–342.
8. Arshed S. Sub-pico second chirped optical pulses with Triki-Biswas equation by $\exp(-\Phi(\xi))$ -expansion method and the first integral method *Optik*. 2019. V. 179. P. 518–525.
9. Zayed E., Alngar M. Application of newly proposed sub-ODE method to locate chirped optical solitons to Triki-Biswas equation *Optik*. 2020. V. 207. Art. № 164360.
10. Kudryashov N.A., Lavrova S.F. Dynamical properties of the periodically perturbed Triki-Biswas equation // *Optik*. 2022. V. 253. Art. № 168553.
11. Biswas A. 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan, Kundu, Lakshmanan equation // *Physics Letters A*. 2009. V. 373 (30). P. 25462548.
12. Biswas A. Optical soliton perturbation with Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation by traveling wave hypothesis // *Optik*. 2018. V. 171. P. 217–220.
13. Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., Alshomrani A. Optical solitons with Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation by extended trial function scheme // *Optik*. 2018. V. 160. P. 415–427.
14. Biswas A., Arshed S. Optical solitons in presence of higher order dispersions and absence of self-phase modulation // *Optik*. 2018. V. 174. P. 452–459.
15. Kudryashov N.A. Periodic and solitary waves of the Biswas-Arshed equation // *Optik*. 2020. V. 200. Art. № 163442.
16. Kutukov A., Kudryashov N., Prikazchikova A. Periodic and solitary wave solutions of the Biswas-Arshed equation for pulses in a birefringent fiber // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. V. 2036. Art. № 012027.
17. Lenells J., Fokas A. An integrable generalization of the nonlinear Schrödinger equation on the half-line and solitons // *Inverse Problems*. 2009. V. 25 (11). Art. № 115006.

18. Kudryashov N.A. First integrals and general solution of the Fokas-Lenells equation // *Optik*. 2019. V. 195.

19. Kaup D., Newell A. An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation // *Journal of Mathematical Physics*. 1977. V. 19 (4). P. 798–801.

20. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series, and Products: Eighth Edition // Elsevier, 2014.

21. Kudryashov N. Implicit solitary waves for one of the generalized nonlinear Schrödinger equations // *Mathematics*. 2021. V. 9 (23). Art. № 3024.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2022, vol. 11, no 4, pp. 319–325

ANALYTICAL SOLUTIONS OF THE GENERALIZED TRIKI-BISWAS EQUATION

A.A. Kutukov*, N.A. Kudryashov**

*National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute),
Moscow, 115409 Russia*

**e-mail: alexkutuk@gmail.com*

***e-mail: nakudr@gmail.com*

Received December 6, 2022; revised December 9, 2022; accepted December 13, 2022

The mathematical model is considered for describing the propagation of pulses in a nonlinear optical medium, which is described by the generalized Triki-Biswas equation. The Cauchy problem for the nonlinear partial differential equation under study is not solved by the method of inverse scattering transformation, therefore, a transition is made to the traveling wave variable. The resulting ordinary differential equation is considered as a system of two equations for the real and imaginary parts of the original equation. After a series of transformations related to finding the first integrals of the equations under consideration, the system of equations is transformed to a nonlinear ordinary differential equation of the first order, the solution of which cannot be expressed in a general form using elementary functions. The method of transformation of the dependent and independent variables is applied, with the help of which the solution of the considered differential equation is written using the Jacobi elliptic functions in an implicit form. We study the question of the existence of degenerate solutions depending on the values of the parameters of the original differential equation. A degenerate case is presented when the solution has the form of a solitary wave and is written in an implicit form. The solutions found in the form of periodic and solitary waves are illustrated for various values of the parameters of the model under study.

Keywords: generalized Triki-Biswas equation, exact solutions, optical solitons.

REFERENCES

1. Kivshar Y., Agrawal G. Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals, 2003.

2. Kudryashov N. A. Almost general solution of the reduced higher-order nonlinear Schrödinger equation, *Optik*, 2021. V. 230. Art. № 166347.

3. Kudryashov N. A. Highly dispersive solitary wave solutions of perturbed nonlinear Schrödinger equations, *Appl. Math. Comput.* 2020. V. 371. Art. № 124972.

4. Kudryashov N.A. Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities, *Optik*, 2020. V. 212. Art. № 164750.

5. Triki H., Biswas A. Sub pico-second chirped envelope solitons and conservation laws in monomode optical fibers for a new derivative nonlinear Schrödinger's model, *Optik*, 2018. V. 173. P. 235–241.

6. Kudryashov N.A. First integrals and solutions of the traveling wave reduction for the Triki-Biswas equation, *Optik*, 2019. V. 185. P. 275–281.

7. Zhou Q., Ekici M., Sonmezoglu A. Exact chirped singular soliton solutions of Triki-Biswas equation, *Optik*, 2019. V. 181. P. 338–342.

8. Arshed S., Sub-pico second chirped optical pulses with Triki-Biswas equation by $\exp(-\Phi(\xi))$ -expansion method and the first integral method, *Optik*, 2019. V. 179. P. 518–525.

9. Zayed E., Alngar M. Application of newly proposed sub-ODE method to locate chirped optical solitons to Triki-Biswas equation, *Optik*, 2020. V. 207. Art. № 164360.

10. Kudryashov N.A., Lavrova S.F. Dynamical properties of the periodically perturbed Triki-Biswas equation, *Optik*, 2022. V. 253. Art. № 168553.

11. Biswas A. 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan, Kundu, Lakshmanan equation, *Physics Letters A*, 2009. V. 373 (30). P. 2546–2548.

12. Biswas A. Optical soliton perturbation with Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation by traveling wave hypothesis, *Optik*, 2018. V. 171. P. 217–220.

13. Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., Alshomrani A. Optical solitons with Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation by extended trial function scheme, *Optik*, 2018. V. 160. P. 415–427.
14. Biswas A., Arshed S. Optical solitons in presence of higher order dispersions and absence of self-phase modulation, *Optik*, 2018. V. 174. P. 452–459.
15. Kudryashov N.A. Periodic and solitary waves of the Biswas-Arshed equation, *Optik*, 2020. V. 200. Art. № 163442.
16. Kutukov A., Kudryashov N., Prikazchikova A. Periodic and solitary wave solutions of the Biswas-Arshed equation for pulses in a birefringent fiber, *Journal of Physics: Conference Series*, 2021. V. 2036. Art. № 012027.
17. Lenells J., Fokas A. An integrable generalization of the nonlinear Schrödinger equation on the half-line and solitons, *Inverse Problems*, 2009. V. 25 (11). Art. № 115006.
18. Kudryashov N.A. First integrals and general solution of the Fokas-Lenells equation, *Optik*, 2019. V. 195.
19. Kaup D., Newell A. An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation, *Journal of Mathematical Physics*, 1977. V. 19 (4). P. 798–801.
20. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series, and Products: Eighth Edition, Elsevier, 2014.
21. Kudryashov N. Implicit solitary waves for one of the generalized nonlinear Schrödinger equations, *Mathematics*, 2021. V. 9 (23). Art. № 3024.

Дата выхода в свет 04.10.2023. г. Формат 60×90 ¹/₈. Усл. печ. л. 6,0. Уч.-изд. л. 6,0.
Тираж 100 экз. Заказ № 90. Цена свободная

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
Типография НИЯУ МИФИ. 115409, Москва, Каширское шоссе, д. 31.