ISSN 2304-487X
Том 12, номер 3
МАЙ – ИЮНЬ 2023

https://vestnikmephi.elpub.ru

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ»

НИЯУ МИФИ

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ»

Том 12 № 3 2023 МАЙ - ИЮНЬ

Основан в июле 2012 г.
Выходит 6 раз в год
ISSN: 2304-487X

Адрес редакции: 115409, Москва, Каширское ш., 31,
Вестник НИЯУ МИФИ
Интернет: https://vestnikmephi.elpub.ru
Электронная почта: vestnik@mephi.ru

Москва
НИЯУ МИФИ

СОДЕРЖАНИЕ

Том 12, № 3, 2023

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

Амплитудно-фазовая структура волновых возмущений на границе ледяного покрова и глубокой жидкости от локализованных источников 135
В.В. Булатов, И.Ю. Владимиров

Установка для тестирования кремниевых фотоумножителей и сцинтилляционных кристаллов 143
А.Д. Конотоп, Н.С. Бойко

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Решение линейных начально-краевых задач реакционно-диффузионного типа с запаздыванием 153
А.Д. Полянин, В.Г. Сорокин

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Оптимальный режим изменения мощности ядерного реактора в период угрозы экстремальных внешних воздействий при работе в переменном суточном графике нагрузки 165
Е.В. Евстюхина, А.М. Загребаев, А.В. Трифоненков

Модификация алгоритма интерпретации команд для многоканального человеко-машинного интерфейса 170
Т.И. Возненко

АВТОМАТИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Исследование схемы удвоения частоты следования сверхкоротких световых импульсов для формирования последовательности выборки аналого-цифровых фотонных систем 178
Е.Ю. Злоказов, В.А. Небавский, Р.С. Стариков

Вольт-амперная характеристика куба с элементами Мотта-Гёрни в ребрах 183
А.Е. Дубинов

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Дифференциальные уравнения с запаздыванием: свойства, методы, решения и модели 187
А.В. Аксенов

Contents

Volume 12, Number 3, 2023

THEORETICAL AND EXPERIMENTAL PHYSICS

Amplitude-phase structure of wave disturbances at the border of ice cover and deep liquid from localized sources 135
V.V. Bulatov, I.Yu. Vladimirov

Nstallation for testing silicon photomultiplier and scintillation crystals 143
A.D. Konotop, N. S. Boyko

MATHEMATICAL MODELS AND NUMERICAL METHODS

Solutions of linear initial-boundary value problems of reaction-diffusion type with delay 153
A.D. Polyanin, V.G. Sorokin

APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Optimal load- following nuclear reactor power control during the threatened period of extreme external effects 165
E.V. Evstyukhina, A.M. Zagrebaev, A.V. Trifonenkov

The modification of command interpretation algorithm for a multi-channel human-machine interface 170
T.I. Voznenko

AUTOMATION AND ELECTRONICS

Research of a scheme for doubling the reception frequency of ultra-short light pulses to form a sampling sequence of analog-digital photon systems 178
E.Yu. Zlokazov, V.A. Nebavsky, R.S. Starikov

Current-voltage characteristic of a cube with Mott-Gurney elements in the edges 183
A.E. Dubinov

BRIEF MESSAGES

Differential equations with delay: properties, methods, solutions and models 187
A.V. Aksenov

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2023, т. 12, № 3, с. 135–142

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

УДК 532.5:551.465

АМПЛИТУДНО-ФАЗОВАЯ СТРУКТУРА ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ГРАНИЦЕ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА И ГЛУБОКОЙ ЖИДКОСТИ ОТ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

***В.В. Булатов*[1,*], *И.Ю. Владимиров*[2,**]**

[1]*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия*
[2]*Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва, 117997, Россия*
[*]*e-mail: internalwave@mail.ru*
[**]*e-mail: iyuvladimirov@rambler.ru*

Поступила в редакцию: 17.09.2023
После доработки: 17.09.2023
Принята к публикации: 27.09.2023

Плавающий ледяной покров определяет динамическое взаимодействие между океаном и атмосферой, влияет на динамику не только морской поверхности, но и подповерхностных вод, и в общем движении по вертикали участвует как ледяной покров, так и вся масса жидкости под ним. В работе исследована амплитудно-фазовая структура волновых полей, возникающих на границе раздела льда и бесконечно глубокой однородной жидкости при обтекании локализованного источника возмущений. Ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной, деформации которой малы, и пластина является физически линейной. Получено интегральное представление решения и с помощью метода стационарной фазы построено асимптотическое представление для малых возмущений ледяного покрова вдали от локализованного источника. Приведены результаты расчетов дисперсионных зависимостей для различных параметров волновой генерации. Показано, что основными параметрами, определяющими характеристики амплитудно-фазовых структуру волновых возмущений поверхности ледяного покрова, являются толщина льда и скорость потока. Численные расчеты демонстрируют, что при изменении изменение скоростей потока и толщины льда происходит заметная качественная перестройка фазовых картин возбуждаемых дальних волновых полей на границе раздела льда и жидкости.

Ключевые слова: ледяной покров, возвышение поверхности раздела, глубокий океан, дальние поля, амплитудно-фазовая структура, локализованный источник.
DOI: 10.26583/vestnik.2023.267

Изучение волновых процессов в море с плавающим ледяным покровом актуально для изучения его реакции на различные гидродинамические возмущения, движущиеся надводные и подводные суда, процессы распада ледяных полей в интересах судоходства, а также совершенствования методов дистанционного зондирования поверхности ледяного покрытия [1–6]. Поверхностные возмущения ледяного покрова, которые могут быть зарегистрированы с помощью специальных радиолокационных и оптических систем, несут информацию не только об источниках возмущений, но и о характеристиках морской среды подо льдом [2, 3, 7, 8]. Плавающий ледяной покров, определяющий динамическое взаимодействие между океаном и атмосферой, влияет на динамику не только морской поверхности, но и подповерхностных вод, так как в общем движении по вертикали участвует как ледяной покров, так и вся масса жидкости под ним. Одним из заметных источников возбуждения ледяного покрова могут являться интенсивные внутренние гравитационные волны, в частности колебания ледяного покрова за счет внутренних волн могут быть от нескольких сантиметров (прилив) до 2–3 м (цунами), амплитуды возмущений льда до 30 см регистрировались при наличии ветровых волн [9–15].

Обычно предполагается, что ледяной покров является сплошным (его горизонтальные масштабы превышают длины возбуждаемых волн), и при достаточно общих условиях моделируется тонкой упругой физически линейной пластиной, деформации которой малы [1, 3]. Для проведения прогнозных расчетов возмущений ледяного покрова можно подбирать параметры модели генерации так, чтобы приблизить смоделированную волновую систему к реально наблюдаемым в природных условиях картинам возмущения поверхности льда [5, 6, 8].

Генерации волновых возмущений на границе льда и жидкости от обтекаемых подводных препятствий посвящены многочисленные исследования как в лабораторных опытах, так и в рамках теоретических работ. Современное состояние проблемы и подробный обзор работ содержится в [1–3, 16–20]. Обычно предполагается, что ледяной покров является сплошным, т.е. его горизонтальные масштабы превышают длины возбуждаемых волн и, при достаточно естественных условиях, моделируется тонкой упругой пластиной, деформации которой малы и пластина является физически линейной [17, 18, 21–23]. Цель настоящей работы – изучение амплитудно-фазовых характеристик волновых полей, возникающих на границе ледяного покрова и потока бесконечно глубокой однородной жидкости, обтекающей локализованный источник.

Рассматривается поток идеальной бесконечно глубокой жидкости, который обтекает точечный источник мощности массы $q\big(q = \text{const}\big)$. Сверху течение ограничено ледяным покровом толщиной l. Горизонтальная плоскость ξy совпадает с невозмущенной границей раздела жидкости плотностью ρ_0 и льда плотностью ρ_1. Скорость потока жидкости направлена вдоль оси ξ и равна V, источник расположен в точке $(0,0,z_0)$, $z_0<0$. Обозначим через $\varphi(\xi,y,z)$ установившийся во времени потенциал возмущений скорости: $\nabla\varphi=(u,v,w)$, и через $\eta(\xi,y)$ – установившуюся величину возвышения поверхности раздела жидкости и ледового покрова. Тогда $(V+u,v,w)$ – вектор скорости произвольной частицы жидкости. В линейном приближении математическая постановка задачи имеет вид [1, 3, 17, 20]:

$$\left(\Delta+\frac{\partial^2}{z^2}\right)\varphi=q\delta(\xi)\delta(y)\delta(z-z_0),$$

$$\frac{D\varphi}{Dt}+g\eta-C\Delta\eta+B\Delta^2\eta+A\frac{D^2\eta}{Dt^2}=0,$$

$$z=0;\ \frac{D\eta}{Dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial z},\ z=0;\ \varphi\to 0,\ z\to-\infty,$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $\frac{D}{Dt}=V\frac{\partial}{\partial\xi}$; $A=\frac{l\rho_1}{\rho_0}$; $B=\frac{El^3}{12\rho_0(1-\nu_0^2)}$; $C=\frac{\sigma l}{\rho_0}$; g – ускорение свободного падения; E – модуль Юнга льда; ν_0 – коэффициент Пуассона; σ – начальное напряжение. Характерные значения этих величин в морских условиях равны [5, 6, 8]: $\rho_0=1025\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\rho_1=0.9\rho_0$, $E=3\cdot10^9\,\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$, $\nu_0=0.3$, $\sigma=10^5\,\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$. Тогда выражение для возвышения имеет вид

$$\eta(\xi,y)=\frac{-iqV}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\nu y)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\mu,\nu)}{b(\mu,\nu)}\times$$

$$\times\exp(-i\mu\xi)\,d\nu d\mu,\ f(\mu,\nu)=\frac{\mu\exp(kz_0)}{Ak+1};\quad(1)$$

$$b(\mu,\nu)=\Omega^2(k)-\mu^2V^2,$$

$$k^2=\mu^2+\nu^2,\ \Omega^2(k)=\frac{k(g+Ck^2+Bk^4)}{Ak+1}.$$

Решение в форме (1) представляет сложную в вычислительном плане задачу из-за возникающих в расчетных формулах сингулярностей. Рассмотрим поведение функции $\eta(\xi,y)$ вдоль некоторого направления S_α, составляющего угол α с положительным направлением оси ξ, т.е. будем считать, что $\xi=r\cos\alpha$, $y=r\sin\alpha, 0\le\alpha\le\pi$. Чтобы найти асимптотику интеграла (1) при $r=\sqrt{\xi^2+y^2}\to\infty$ необходимо перевести контур интегрирования по переменной μ в нижнюю полуплоскость. Интеграл в нижней полуплоскости экспоненциально мал при $r\to\infty$. Основной вклад в (1) будет определяться двумя полюсами подынтегральной функции, расположенными на действительной оси. Полюса (дисперсионные кривые) $\mu=\pm\mu(\nu)$ находятся из решения уравнения $b(\mu,\nu)=0$, т.е. $\mu^2V^2=\Omega^2\left(\sqrt{\mu^2+\nu^2}\right)$. Это уравнение имеет действительные корни лишь при выполнении условия: $V>V_*=\Omega(k_*)/k_*$, где k_* – единственный положительный корень уравнения: $2ABk^5+3Bk^4+Ck^2-2Agk-g=0$ [1, 16–18]. Далее предполагается, что $V>V_*$, поскольку только в этом случае источник генерирует в набегающем потоке волновые возмущения. Тогда для суммарного вклада вычетов $\mu=\pm\mu(\nu)$ можно получить

$$\eta(\xi,y)=\frac{-iqV}{4\pi}\int_{L_+(\alpha)}\frac{f(\mu,\nu)}{G(\mu,\nu)}\cos(\mu\xi+\nu y)\,d\nu,$$

$$G(\mu,\nu)=\frac{\partial b(\mu,\nu)}{\partial\mu},\ \mu=\mu(\nu),\qquad(2)$$

где $L_+(\alpha)$ – та часть дисперсионной кривой $\mu=\mu(\nu)$, для которой проекция вектора групповой скорости на направление S_α положительно, т.е. выполнено следующее неравенство: $\left(\mathrm{V}-\Omega'(k)\frac{\mu}{k}\right)\cos(\alpha)-\Omega'(k)\frac{\nu}{k}\sin(\alpha)>0$. Это условие (условие излучения) означает, что волновая энергия распространяется наружу от источника возмущений. Асимптотика интеграла (2) при $r=\sqrt{\xi^2+y^2}\to\infty$ вычисляется методом стационарной фазы [7, 24–26]

$$\eta(\xi,y)\approx-\frac{qV}{4\pi\sqrt{2\pi r|D(k)|}}\times$$

$$\times\frac{\mu_1(k)\exp(kz_0)\cos(\mu(k)\xi-\nu(k)y+\frac{\pi}{4}\mathrm{sign}(D(k)))}{(Ak+1)T};$$

$$T=(\Omega(k)\Omega'(k)\frac{\mu(k)}{k}-\mu(k)V^2)\cos(\alpha)+$$
$$+\Omega(k)\Omega'(k)\frac{\nu(k)}{k}\sin(\alpha);$$

$$D(k)=\left(-\mu'(k)\nu''(k)+\nu'(k)\mu''(k)\right)\times$$
$$\times\left(\left(\mu(k)\right)^2+\left(\nu(k)\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}};$$

$$k=k_0(\alpha),\ \mu(k)=\frac{\Omega(k)}{V},$$

$$\nu(k)=\sqrt{k^2-(\Omega(k)/k)^2},$$

где $k_0(\alpha)$ – единственный корень уравнения $\mu'(k)\cos(\alpha)-\nu'(k)\sin(\alpha)=0$. На рис. 1–2 представлены результаты расчетов дисперсионных зависимостей для различных значений толщины льда l и скоростей потока V. Как показывает численный анализ, в зависимости от этих параметров дисперсионная зависимость может быть как всюду выпуклой (см. рис. 1) ($\mu''(\nu)>0$ для любых значений аргумента ν), так и иметь две симметричные относительно оси $\nu=0$ точки перегиба $\nu^*_{1,2}$, где $\mu''(\nu^*_{1,2})=0$ (рис. 2). В первом случае возбуждаемая источником волновая картина представляет собой систему только продольных волн. Наличие точек перегиба приводит к появлению дополнительных волновых фронтов и генерации поперечной системы волн.

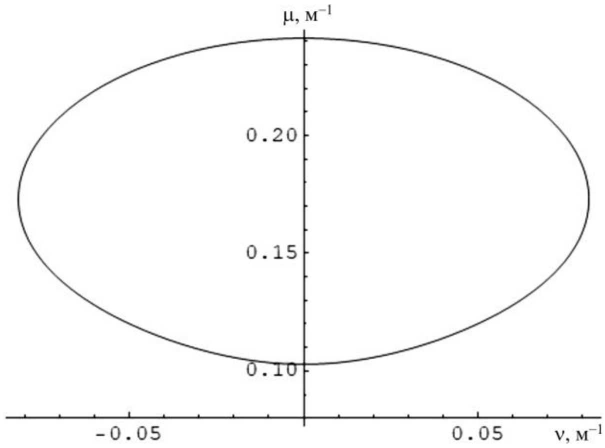


Рис. 1. Дисперсионная кривая $\mu(\nu)$ при $l=0.25$ м, $V=10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$

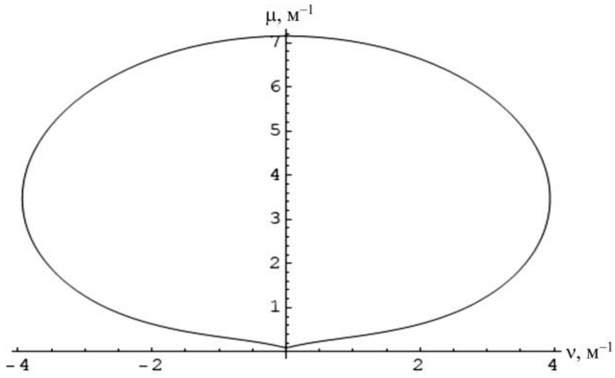


Рис. 2. Дисперсионная кривая $\mu(\nu)$ при $l=0.01$ м, $V=10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$

На рис. 3, 4 представлены результаты расчетов дисперсионных поверхностей при фиксированных значениях толщины льда l (рис. 3) и скоростей потока V (рис. 4). Горизонтальные срезки при фиксированных значениях V (см. рис. 3) и l (рис. 4) позволяют исследовать характер изменчивости дисперсионных зависимостей, варьируя эти параметры.

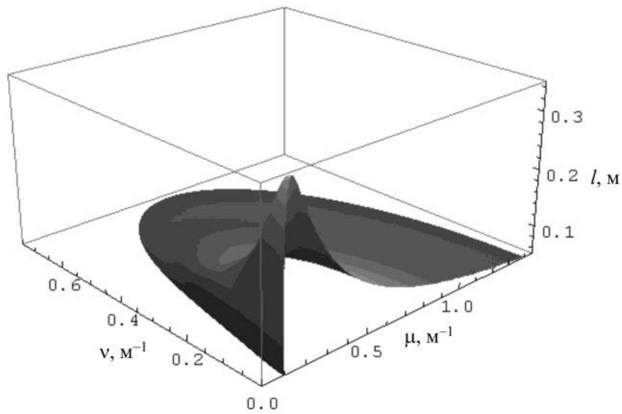


Рис. 3. Зависимости $l=l(\mu,\nu)$ при $V=10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$

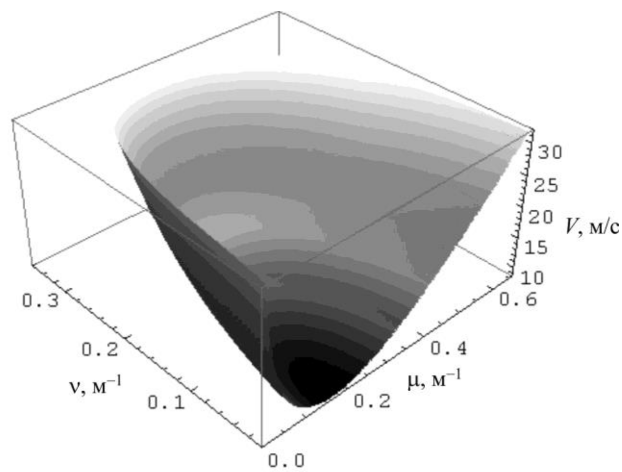


Рис. 4. Зависимости $V=V(\mu,\nu)$ при $l=0.25$ м

На рис. 5–7 представлены результаты расчетов фазовых картин возвышения ледяного покрова для различных значений толщины льда l и скоростей потока V. Остальные параметры, характерные для реальных гидрофизических условий, были следующие: $q = 5\ \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$, $z_0 = -2$ м, что в соответствии с общими принципами теории гидродинамического подобия течений и в данной постановке позволяет, например, моделировать обтекание затупленного полубесконечного тела с диаметром D, где $D = \sqrt{\frac{q}{\pi V}}$ [5, 7].

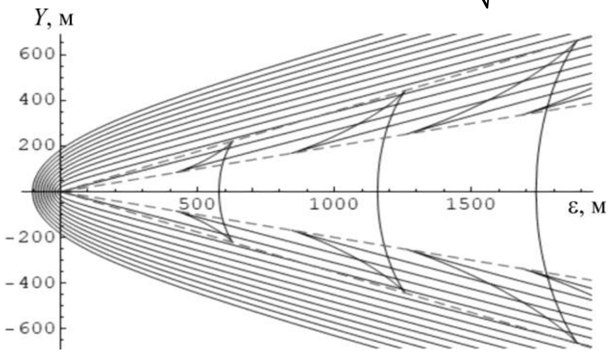


Рис. 5. Фазовая картина возвышения ледяного покрова при $l = 0.25$ м , $V = 30\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$

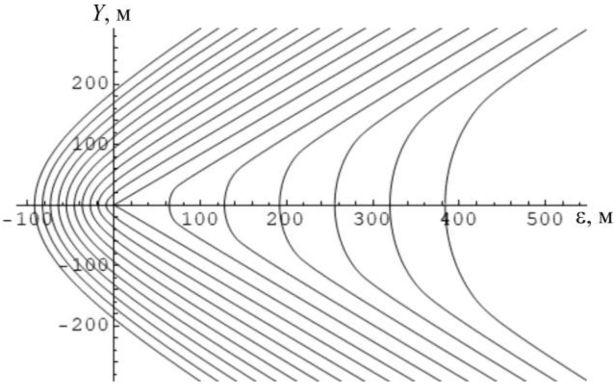


Рис. 6. Фазовая картина возвышения ледяного покрова при $l = 0.1$ м , $V = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$

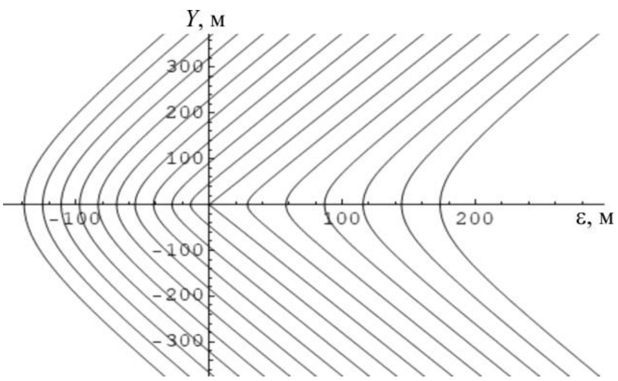


Рис. 7. Фазовая картина возвышения ледяного покрова при $l = 0.1$ м , $V = 7\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$

В более общих случаях, используя операцию свертки, можно в дальнейшем рассчитать волновые возмущения ледяного покрова, возбуждаемые распределенными в пространстве источниками различной физической природы, как естественного, так и антропогенного характеров [3, 7].

Численные расчеты показывают, что при изменении параметров волновой генерации (изменение скоростей потока и толщины льда) происходит заметная качественная перестройка фазовых картин возбуждаемых волновых полей на границе раздела льда и жидкости. Дисперсионные зависимости $\mu(\nu)$ могут представлять замкнутые, всюду выпуклые кривые, а также могут иметь две пары точек перегиба, которые существуют только при достаточно малых значениях волновых чисел и расположены симметрично относительно оси $\nu = 0$. Такое усложнение топологии дисперсионных зависимостей приводит к генерации дополнительной системы поперечных волн и появлению соответствующих пар волновых фронтов (штриховые линии на рис. 5). Уравнения волновых фронтов определяются как $\xi = \pm\mu'(\nu_{1,2}^*)y$, где $\nu_{1,2}^*$ – два корня уравнения $\mu''(\nu_{1,2}^*) = 0$. В этом случае фазовые картины демонстрируют пространственные структуры типа «ласточкина хвоста» (см. рис. 5), когда в фиксированной точке наблюдения происходит качественная перестройка одновременно приходящих волновых фронтов [7, 24–26]. Наиболее интересными с практической точки зрения являются локальные экстремумы дисперсионных зависимостей $\mu'(\nu)$, так как асимптотики дальних волновых полей в окрестности соответствующих волновых фронтов и каустик, отвечающих этим экстремумам**,** можно описать с помощью метода эталонных интегралов. Сложность топологии рассчитанных дисперсионных зависимостей $\mu(\nu)$ требует для корректного асимптотического исследования дальних полей применения специального математического аппарата [24–26].

Усложнение наблюдаемых волновых картин возвышения ледяного покрова может являться одним из признаков заметного изменения параметров морской среды: скоростей течения и толщины льда. Увеличение скорости течения при неизменной толщине льда приводит к расширению (в пространстве волновых чисел) дисперсионных кривых. Кривая, соответствующая меньшей скорости потока, целиком находится внутри кривой, отвечающей большей скорости потока. Поэтому при увеличении скорости течения V длина волны вдоль положительного направления оси 0ξ возрастает, а вдоль отрицательного направления оси 0ξ убывает. Также при увеличении скорости потока V происходит уменьшение пространственной области, где существуют волновые колебания. Вне этой зоны амплитуды дальних волновых полей экспоненциально малы. Этот же эффект наблюдается при изменении толщины льда l при неизменном значении скорости потока V. При увеличении толщины льда l происходит сужение (в пространстве волновых чисел) дисперсионных кривых, и, соответственно, расширение пространственной области волновых колебаний. Длина волны вдоль положительного направления оси 0ξ возрастает, а вдоль отрицательного оси 0ξ – убывает.

Численный анализ решений показал, что основными параметрами, которые могут приводить к существенной изменчивости качественных характеристик дисперсионных соотношений, являются толщина льда l и скорость потока V. Остальные параметры (модуль Юнга, коэффициент Пуассона, напряжение, плотность сред), также определяющие постоянные A, B, C, в пределах естественных масштабов их природной изменчивости, практически не влияют на динамику поведения дисперсионных зависимостей. Поэтому усложнение наблюдаемых волновых картин возвышения ледяного покрова может являться одним из признаков заметного изменения только таких параметров морской среды, как скорость течения и толщина льда. Анализ асимптотик показал хорошее совпадение с точным решением уже на расстояниях, начиная с десяти и более метров от источника, т.е. на таких расстояниях можно использовать понятие дальних волновых полей. Таким образом, исходя из результатов рассмотрения подобного класса задач и оценок пространственных масштабов возможного затухания волновых возмущений в природных условиях, представляется вполне обоснованным использования линейного приближения и метода стационарной фазы для расчета возмущений ледяного покрова и получения физически адекватных результатов [7, 24–26].

Построенные асимптотики дальних полей дают возможность эффективно рассчитывать основные характеристики волновых возмущений на границе раздела ледяного покрова и качественно анализировать полученные решения. Полученные асимптотические результаты с различными значениями входящих в них физических параметров позволяют провести оценку характеристик возмущений ледяного покрова, наблюдаемых в реальных морских условиях, и рассчитывать дальние волновые поля, в том числе и от нелокальных источников возмущений различной физической природы. В результате проведения модельных многовариантных расчетов по асимптотическим формулам смоделированная волновая система может быть приближена к наблюдаемым в натурных условиях волновым картинам, что дает возможность оценить физические параметры реальных источников в морской среде с ледовым покрытием и определить основные характеристики начальных возмущений, варьируя модельные значения исходных параметров. Таким образом, модели волновой генерации на поверхности раздела морской воды и льда могут быть не только верифицированы, но и использованы для проведения прогнозных оценок.

В общем случае постановка задачи нелокального источника, например твердого тела, потоком жидкости, ограниченной сверху ледяным покровом, включает в себя также задание определенных граничных условий на его поверхности. Даже в предположении об идеальности жидкости и потенциальности обтекающего тело потока нахождение поля его скорости представляет собой весьма сложную в математическом плане задачу. Очевидно, что существенно проще решается задача обтекания системы точечных гидродинамических особенностей (источников, стоков, диполей и т.п.), поскольку в этом случае нет необходимости удовлетворять наперед заданным граничным условиям. На линиях (поверхностях) тока, возникающих при обтекании такой модельной системы, условия непротекания удовлетворяются автоматически. Это обстоятельство используется при решении задач обтекания тел или непроницаемых границ, моделируемых специально подобранными системами гидродинамических особенностей. При таком подходе к задачам обтекания тел линии (поверхности) тока отождествляются с непроницаемыми границами. Например, при стационарном обтекании точечного источника равномерным безграничным потоком возникает линия (поверхность) тока, представляющая собой границу затупленного тела бесконечной длины, поэтому обтекание точечного источника гидродинамически эквивалентно обтеканию такого тела. В другом случае источник и сток, расположенные друг за другом вдоль по потоку, моделируют тело овоидной формы. Диполь в безграничном плоском потоке порождает охватывающую его линию тока в форме окружности, поэтому он моделирует поперечное обтекание цилиндра. В трехмерном случае обтекание диполя безграничным пространственным потоком эквивалентно обтеканию шара.

Перечисленные гидродинамические особенности часто используются при решении модельных задач, в которых точное воспроизведение формы помещенного в поток тела не имеет решающего значения. Подобный метод в значительной мере может относиться к рассмотренной задаче о генерации волновых возмущений на границе льда и жидкости, так как замена тела некоторым набором гидродинамических особенностей существенно упрощает решение этой задачи. Естественно, возникает вопрос о том, как влияет наличие границ раздела льда и жидкости на картину линий тока, возникающих при обтекании заданных гидродинамических особенностей. Например, можно ли считать диполь в плоском потоке со свободной границей хорошей моделью кругового цилиндра. Из физических соображений очевидно, что чем глубже находится диполь, тем точнее он моделирует цилиндр, и по мере приближения диполя к границе раздела льда и жидкости охватывающая его линия тока будет искажаться все значительнее и все менее точно соответствовать контуру поперечного сечения кругового цилиндра. Поэтому, в частности, при рассмотрении потоков конечной толщины под ледяным покровом необходимо знать, какое именно тело может моделировать выбранная система гидродинамических особенностей.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена по темам государственного задания: В.В. Булатов (№ FFGN-2023-0004), И.Ю. Владимиров (№ FMWE-2021-0016).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Букатов А.Е.* Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь: ФГБУН МГИ, 2017. 360 с.

2. *Ильичев А.Т.* Уединенные волны в моделях гидродинамики. М.: Физматлит, 2003. 256 с.

3. *Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J.* Moving loads on ice plates. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 2012. 236 p.

4. *Miropol'skii Yu. Z., Shishkina O.V.* Dynamics of internal gravity waves in the ocean. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001. 406 p.

5. *Mei C.C., Stiassnie M., Yue D.K.-P.* Theory and applications of ocean surface waves. Advanced series of ocean engineering. V. 42. London: World Scientific Publishing, 2018. 1240 p.

6. *Velarde M. G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V. (Eds.).* The ocean in motion. Springer Oceanography. Switzerland AG Cham, Springer Nature, 2018. 625 p.

7. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.

8. *Morozov E. G.* Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.

9. *Marchenko A.V., Morozov E.G., Muzylev S.V., Shestov A.S.* Interaction of short internal waves with the ice cover in an Arctic fjord // Oceanology. 2010. V. 50(1). P. 18–27.

10. *Marchenko A.V., Morozov E.G., Muzylev S.V., Shestov A.S.* Short-period internal waves under an ice cover in Van Mijen Fjord, Svalbard // Advances in Meteorology. 2011. V.2011. Article ID 573269.

11. *Marchenko A., Morozov E., Muzylev S.* Measurements of sea ice flexural stiffness by pressure characteristics of flexural-gravity waves // Ann. Glaciology. 2013. V. 54. P. 51–60.

12. *Marchenko A.V., Morozov E.G.* Surface manifestations of the waves in the ocean covered with ice // Russian J. Earth Sciences. 2016. V. 16 (1). ES1001.

13. *Morozov E.G., Marchenko A.V., Filchuk K.V., Kowalik Z., Marchenko N.A., Ryzhov I.V.* Sea ice evolution and internal wave generation due to a tidal jet in a frozen sea // Appl. Ocean Research. 2019. V. 87. P. 179–191.

14. *Morozov E.G., Pisarev S.V.* Internal tides at the Arctic latitudes (numerical experiments) // Oceanology, 2002. V. 42(2). P. 153–161.

15. *Morozov E.G., Zuev O.A., Zamshin V.V., Krechik V.A., Ostroumova S. A., Frey D. I.* Observations of icebergs in Antarctic cruises of the R/V «Akademik Mstislav Keldysh» // Russian J. Earth Sciences. 2022. V. 2. P. 1–5.

16. *Ильичев А.Т.* Эффективные длины волн огибающей на поверхности воды под ледяным покровом: малые амплитуды и умеренные глубины // ТМФ. 2021. Т. 28. № 3. С. 387–408.

17. *Савин А.С., Савин А.А.* Пространственная задача о возмущениях ледяного покрова движущимся в жидкости диполем // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 5. С. 16–23.

18. *Стурова И.В.* Движение нагрузки по ледяному покрову с неравномерным сжатием // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 4. С. 63–72.

19. *Dinvay E., Kalisch H., Parau E.I.* Fully dispersive models for moving loads on ice sheets // J. Fluid Mech. 2019. V. 876. P. 122–149

20. *Sturova I.V.* Radiation of waves by a cylinder submerged in water with ice floe or polynya // J. Fluid Mech. 2015. V. 784. P. 373–395.

21. *Das S., Sahoo T., Meylan M.H.* Dynamics of flexural gravity waves: from sea ice to Hawking radiation and analogue gravity // Proc.R.Soc.A. 2018. V. 474. P. 20170223.

22. *Pogorelova A.V., Zemlyak V.L., Kozin V.M.* Moving of a submarine under an ice cover in fluid of finite depth // J. Hydrodynamics. 2019. V. 31(3). P. 562–569.

23. *Khabakhpasheva T., Shishmarev K., Korobkin A.* Large-time response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Appl. Ocean Research. 2019. V. 86. P. 154–165.

24. *Свиркунов П.Н., Калашник М.В.* Фазовые картины диспергирующих волн от движущихся локализованных источников // УФН. 2014. Т. 184. № 1. С. 89–100.

25. *Gnevyshev V., Badulin S.* Wave patterns of gravity–capillary waves from moving localized sources // Fluids. 2020. V. 5. P. 219.

26. *Borovikov V.A.* Uniform stationary phase method. London: IEE electromagnetic waves. Series 40, 1994. 233 p.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 3, pp. 135–142

AMPLITUDE-PHASE STRUCTURE OF WAVE DISTURBANCES AT THE BORDER OF ICE COVER AND DEEP LIQUID FROM LOCALIZED SOURCES

***V.V. Bulatov*[1,*], *I.Yu. Vladimirov*[2,**]**
[1] Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS , Moscow, 119526 Russia
[2] Shirshov Institute of Oceanology RAS, Moscow, 117997, Russia
[*]e-mail: internalwave@mail.ru
[**]e-mail: iyuvladimirov@rambler.ru

Received September 17, 2023; revised September 17, 2023; accepted September 27, 2023

The floating ice cover determines the dynamic interaction between the ocean and the atmosphere, affects the dynamics of not only the sea surface, but also subsurface waters, and both the ice cover and the entire mass of liquid beneath it participate in the general vertical movement. This work investigates the amplitude-phase structure of wave fields arising at the interface between ice and an infinitely deep homogeneous fluid during flow around a localized source of disturbances. The ice cover is modeled by a thin elastic plate, the deformations of which are small and the plate is physically linear. An integral representation of the solution is obtained and, using the stationary phase method, an asymptotic representation is constructed for small disturbances of the ice cover far from a localized source. The results of calculations of dispersion dependences for various parameters of wave generation are presented. It is shown that the main parameters that determine the characteristics of the amplitude-phase structure of wave disturbances on the surface of the ice cover are ice thickness and flow velocity. Numerical calculations demonstrate that with changes in flow velocities and ice thickness, a noticeable qualitative restructuring of the phase patterns of excited far wave fields at the interface between ice and liquid occurs.

Keywords: ice cover, interface elevation, deep ocean, far fields, amplitude-phase structure, localized source.

REFERENCES

1. *Bukatov A.E.* Volny v more s plavayushchim ledyanym pokrovom [Waves in the Sea with Floating Ice]. Sevastopol: FGBUN MGI Publ., 2017. 360 p. (in Russian).

2. *Il'ichev A.T.* Uedinennye volny v modelyakh gidrodinamiki [Solitary waves in hydrodynamic models]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2003. 256 p. (in Russian).

3. *Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J.* Moving loads on ice plates. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 2012. 236 p.

4. *Miropol'skii Yu. Z., Shishkina O.V.* Dynamics of internal gravity waves in the ocean. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001. 406 p.

5. *Mei C.C., Stiassnie M., Yue D.K.-P.* Theory and applications of ocean surface waves. Advanced series of ocean engineering. V. 42. London: World Scientific Publishing, 2018. 1240 p.

6. *Velarde M.G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V.* (Eds.). The ocean in motion. Springer Oceanography. Switzerland AG Cham, Springer Nature, 2018. 625 p.

7. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Volny v stratifitsirovannykh sredakh [Waves in stratified Media], Moscow: Nauka Publishers, 2015. 735 p. (in Russian).

8. *Morozov E.G.* Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.

9. *Marchenko A.V., Morozov E.G., Muzylev S.V., Shestov A.S.* Interaction of short internal waves with the ice cover in an Arctic fjord. Oceanology, 2010. Vol. 50(1). Pp. 18–27.

10. *Marchenko A.V., Morozov E.G., Muzylev S.V., Shestov A.S.* Short-period internal waves under an ice

cover in Van Mijen Fjord, Svalbard. Advances in Meteorology. 2011. Vol. 2011. Article ID 573269.

11. *Marchenko A., Morozov E., Muzylev S.* Measurements of sea ice flexural stiffness by pressure characteristics of flexural-gravity waves. Ann. Glaciology, 2013. Vol. 54. Pp. 51–60.

12. *Marchenko A.V., Morozov E.G.* Surface manifestations of the waves in the ocean covered with ice. Russian J. Earth Sciences, 2016. Vol. 16 (1). ES1001.

13. *Morozov E.G., Marchenko A.V., Filchuk K.V., Kowalik Z., Marchenko N.A., Ryzhov I.V.* Sea ice evolution and internal wave generation due to a tidal jet in a frozen sea. Appl. Ocean Research, 2019. Vol. 87. Pp. 179–191.

14. *Morozov E.G., Pisarev S.V.* Internal tides at the Arctic latitudes (numerical experiments). Oceanology. 2002. Vol. 42(2). Pp. 153–161.

15. *Morozov E.G., Zuev O.A., Zamshin V.V., Krechik V.A., Ostroumova S.A., Frey D.I.* Observations of icebergs in Antarctic cruises of the R/V «Akademik Mstislav Keldysh». Russian J. Earth Sciences. 2022. Vol. 2. Pp. 1–5.

16. *Il'ichev A.T.* Effective wavelength of envelope waves on the water surface beneath an ice sheet: small amplitudes and moderate depths. Theor. Math. Phys. 2021. Vol. 208 (3). Pp. 1182–1200 (in Russian).

17. *Savin A.S., Savin A.A.* Three-dimensional problem of disturbing an ice cover by a dipole moving in fluid. Fluid Dyn. 2015. Vol. 50 (5). Pp. 613–620 (in Russian).

18. *Sturova I.V.* Motion of a load over an ice sheet with nonuniform compression. Fluid Dyn. 2021. Vol. 56 (4). Pp. 503–512 (in Russian).

19. *Dinvay E., Kalisch H., Parau E.I.* Fully dispersive models for moving loads on ice sheets. J. Fluid Mech. 2019. Vol. 876. Pp. 122–149.

20. *Sturova I.V.* Radiation of waves by a cylinder submerged in water with ice floe or polynya. J. Fluid Mech. 2015. Vol. 784. Pp. 373–395.

21. *Das S., Sahoo T., Meylan M.H.* Dynamics of flexural gravity waves: from sea ice to Hawking radiation and analogue gravity. Proc.R.Soc.A. 2018. Vol. 474. Pp. 20170223.

22. *Pogorelova A.V., Zemlyak V.L., Kozin V.M.* Moving of a submarine under an ice cover in fluid of finite depth. J. Hydrodynamics. 2019. Vol. 31(3). Pp. 562–569.

23. *Khabakhpasheva T., Shishmarev K., Korobkin A.* Large-time response of ice cover to a load moving along a frozen channel. Appl. Ocean Research. 2019. Vol. 86. Pp. 154–165.

24. *Svirkunov P.N., Kalashnik M.V.* Phase patterns of dispersive waves from moving localized sources. Phys.- Usp. 2014. Vol. 57 (1). Pp. 80–91 (in Russian).

25. *Gnevyshev V., Badulin S.* Wave patterns of gravity–capillary waves from moving localized sources. Fluids. 2020. Vol. 5. P. 219.

26. *Borovikov V.A.* Uniform stationary phase method. London: IEE electromagnetic waves. Series 40. 1994. 233 p.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2023, т. 12, № 3, с. 143–152

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

УДК 539.1

УСТАНОВКА ДЛЯ ТЕСТИРОВАНИЯ КРЕМНИЕВЫХ ФОТОУМНОЖИТЕЛЕЙ И СЦИНТИЛЛЯЦИОННЫХ КРИСТАЛЛОВ

***А.Д. Конотоп*[1,2]**, Н.С. Бойко*[1,2]**
[1]*Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, 115409, Россия*
[2]*НИЦ «Курчатовский институт», Москва, 123182 Россия*
**e-mail: akonotop03@mail.ru*

Поступила в редакцию: 18.09.2023
После доработки: 25.09.2023
Принята к публикации: 27.09.2023

В работе представлена установка для исследования ряда параметров сборок на основе кремниевых фотоумножителей и сцинтилляционных кристаллов, таких как шумовые характеристики, коэффициент усиления и температурная стабильность SiPM. Установка также позволяет снимать одноэлектронные спектры, изучать энергетическое и временное разрешение, световыход, а также температурную стабильность различных сцинтилляторов. Приведена блок-схема установки, и описан принцип ее работы. Разработаны необходимые макросы для математических пакетов, а также программное обеспечение для сбора, обработки и сохранения данных с датчика температуры в виде MFC-приложения на ОС Windows. Представлены результаты тестирования рабочих параметров установки, подтверждающие ее функциональность, выявлены замечания и недостатки, требующие исправлений и доработок. С помощью установки были проведены исследования по изучению температурных зависимостей, зависимостей энергетических разрешений от сцинтилляционного кристалла и от кремниевого фотоумножителя, а также получен одноэлектронный спектр для дальнейшего изучения и измерения относительного световыхода для различных сцинтилляторов на основе эталонного.

Ключевые слова: кремниевые фотоумножители, сцинтилляционные материалы, детекторы, энергетическое разрешение.
DOI: 10.26583/vestnik.2023.268

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время сцинтилляционные детекторы позволяют решать огромный спектр задач. Одним из наиболее удачных решений являются установки на базе кремниевых фотоумножителей (SiPM). Благодаря малым габаритам и более высокой чувствительности они получили свое распространение не только как аналог ФЭУ, например в области мегасайенс-установок физики частиц [1], астрофизики [2–4] или ядерной медицине [5], но и в других приборах, в которых требуется детектирование очень слабых сигналов [6].

В связи с этим появляется необходимость исследовать различные параметры кремниевых фотоумножителей и сцинтилляторов, а также их сборок. До сих пор не существует готового решения в данном вопросе, и лаборатории вынуждены конструировать собственные одноразовые установки [7] или проводить испытания уже непосредственно на установках [8–10]. В связи с чем, при возникновении необходимости протестировать сборки SiPM + сцинтиллятор, также понадобилось подготовить аналогичный универсальный испытательный полигон. В качестве решения была разработана установка, которая позволяет оценивать широкий спектр параметров: шумовые характеристики, коэффициент усиления и температурную стабильность SiPM, снимать одноэлектронные спектры, изучать энергетическое и временное разрешение, световыход, а также температурную стабильность различных сцинтилляторов.

СЦИНТИЛЛЯЦИОННЫЕ ДЕТЕКТОРЫ

Одним из элементов большинства установок по изучению частиц являются детекторы. Существует огромный спектр подобных приборов, разработанных под определенные задачи: искровые камеры для изучения треков частиц, счетчик Гейгера для подсчета количества частиц, масс-спектрографы для изучения концентрационного состава веществ.

Для регистрации частиц и γ-квантов активно применяются сцинтилляционные детекторы. Они представляют собой сборку из сцинтилляционного материала, излучающего свет при прохождении через него частиц, и фотоумножителя, реагирующего на световой сигнал, усиливая его.

Сцинтилляционные материалы

Сцинтилляционные вещества, как было сказано, реагируют на проходящие через них потоки частиц, излучая некоторое количество фотонов, обычно пропорциональное энергии пролетающей частицы. Благодаря данному эффекту появляется возможность получать энергетические спектры. Существует большое количество сцинтилляционных материалов: пластиковые сцинтилляторы, характеризующиеся высоким световыходом и малым временем высвечивания, газовые сцинтилляторы из азота и благородных газов, имеющие еще более короткое время высвечивания. Особое место занимают неорганические сцинтилляционные кристаллы, для которых характерен высокий световыход и отличное энергетическое разрешение, что позволяет говорить о энергетических характеристиках исследуемых частиц и, соответственно, высокоточно разделять их по энергиям. В табл. 1 приведены интересующие нас характеристики некоторых сцинтилляционных материалов.

Таблица 1. Характеристики сцинтилляторов [11]

Сцинтил-лятор	Плотность, г/см^3	Время высвечи-вания, нс	Свето-выход, фот/МэВ
Полистирол	1.05	5	0.1
GAGG(Ce)	6.63	87(90 %) 255(10 %)	56*

*Среднее значение.

Фотоумножители

Количество вышедших из сцинтиллятора фотонов достаточно мало для прямой обработки аппаратурой. Для устранения этого недостатка применяются особые фотоприемники, содержащие в своей конструкции умножители попадающих на них фотонов. Одним из подобных устройств является фотоэлектронный умножитель (ФЭУ), представленный на рис. 1.

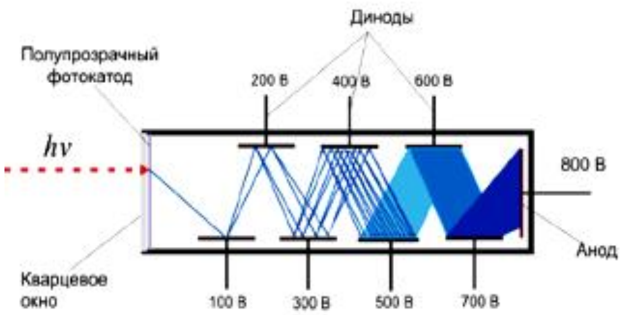
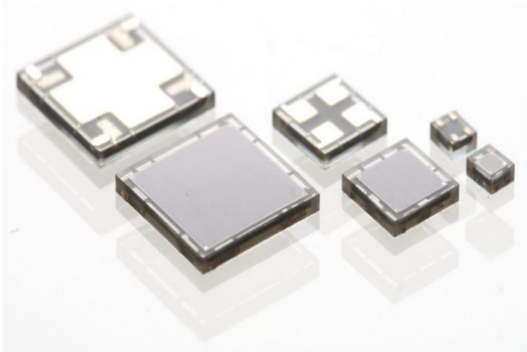


Рис. 1. Схема ФЭУ

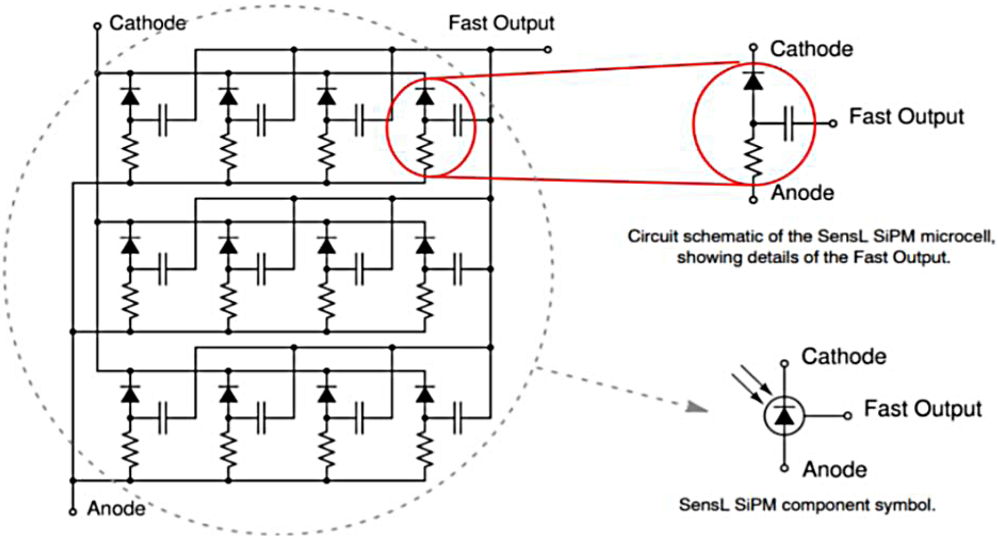
Фотон проходит через кварцевое окно и, преодолевая полупрозрачный фотокатод, падает на динод, выбивая несколько фотоэлектронов, которые летят к следующему диноду и далее, пока волна фотоэлектронов в сотни тысяч раз большая, чем один фотон, не достигнет анода. Такие фотоприемники являются достаточно громоздкими, требуют сложных в изготовлении источников питания, а также являются достаточно хрупкими, из-за чего требуют в эксплуатации особой осторожности.

Современным решением в области детектирования слабых излучений являются кремниевые фотоумножители (SiPM), представленные ниже на рис. 2.

Данный фотоприемник представляет из себя матрицу полупроводниковых лавинных фотодиодов (ЛФД, SPAD), работающих в гейгеровском режиме. Пример принципиальной схемы Si-ФЭУ представлен на рис. 2, у разных производителей схемы могут отличаться. В схеме резистивный элемент нужен для пассивного гашения лавины. За счет своих малых габаритов и высокого коэффициента усиления (порядка 106) SiPM не только приходит на замену ФЭУ во многих задачах, но и выходит за пределы применимости этого типа фотоприемников и используется для детектирования различных слабых сигналов [12].



а



б

Рис. 2. Кремниевый фотоумножитель компании SensL (*а*)
и принципиальная схема кремниевого фотоумножителя (*б*)

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

В связи с активным применением сборок из кремниевых фотоумножителей и сцинтилляторов появляется необходимость изучать их различные характеристики. В качестве решения была разработана установка, которая позволяет оценивать обширный набор параметров: шумовые характеристики, коэффициент усиления и температурную стабильность SiPM, снимать одноэлектронные спектры, изучать энергетическое и временное разрешение, световыход, а также температурную стабильность различных сцинтилляторов.

На рис. 3 представлена блок-схема установки. В подготовленный черный ящик помещается исследуемая сборка из сцинтиллятора и кремниевого фотоумножителя. Питание осуществляется внешним лабораторным источником питания, а в качестве источника сигнала может быть использован как изотоп, так и светодиод. Сигнал с SiPM передается в электронный тракт на основе аппаратуры CAEN [13]. Данное оборудование создано специально для работы с различными кремниевыми фотоумножителями и является наиболее удобным и компактным из существующих решений. Так, сигнал с SiPM передается на усилитель, а затем раздваивается и направляется на дискриминатор, формирующий временные ворота, и анализатор импульсов, который также получает данные с дискриминатора. Такая сборка позволяет собирать как дифференциальные, так и интегральные спектры, а с прямым подключением к ЭВМ – отображать их в реальном времени в прилагаемом ПО. Контроль температуры осуществляется при помощи термодатчика AM2302 на базе микроконтроллера Arduino nano, данные с которого также передаются на ЭВМ. При помощи сторонних пакетов программ производится анализ полученных данных.

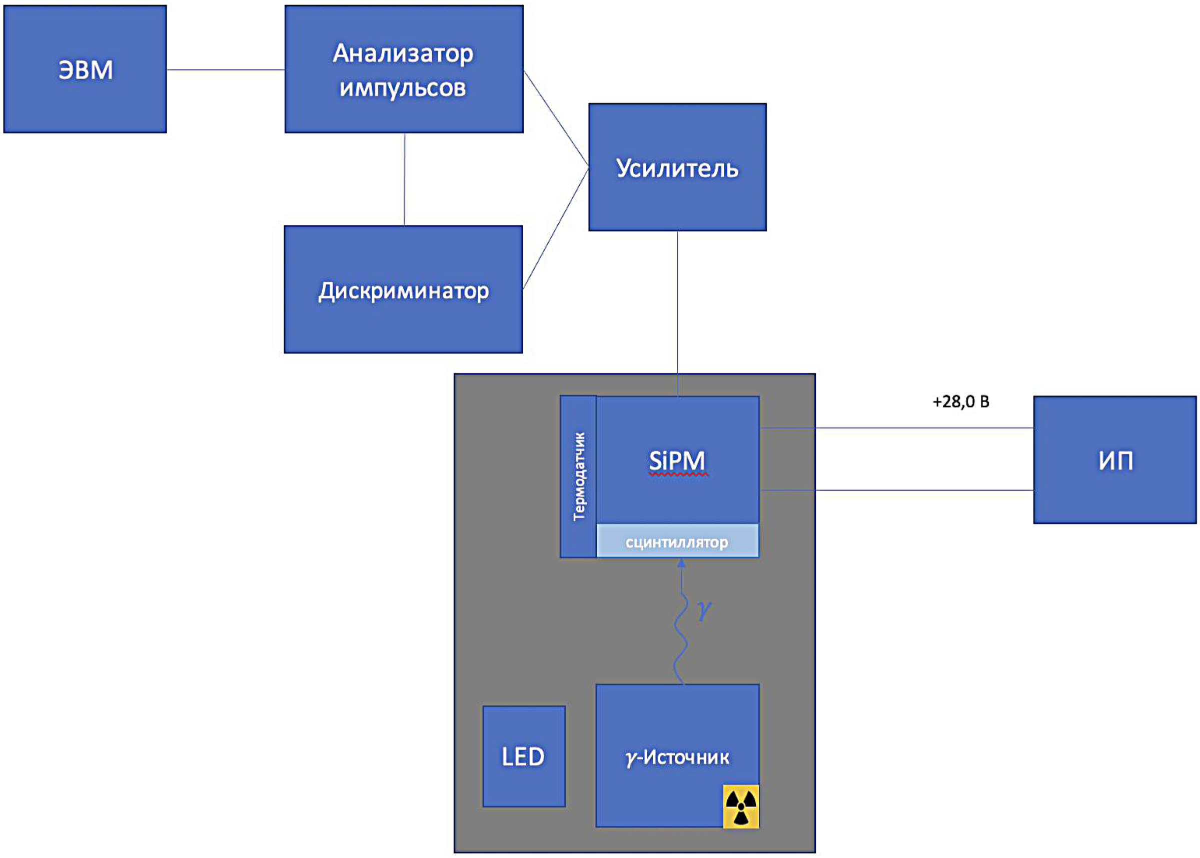


Рис. 3. Блок-схема установки

Аппаратура CAEN

Усилитель SP5600

SP5600 – блок питания и усиления общего назначения, объединяющий до двух SiPM в материнскую и дочернюю архитектуру, что позволяет легко устанавливать и заменять датчики. Базовая конфигурация имеет два канала с независимой регулировкой усиления до 50 дБ и подает напряжение смещения (до 100 В) на датчики со стабилизацией усиления. Каждый канал может обеспечивать цифровой выходной сигнал, генерируемый быстрыми дискриминаторами переднего фронта. Также возможно совпадение по времени двух каналов [4].

Анализатор импульсов DT5720A

DT5720A – 2-канальный 12-битный настольный анализатор импульсов формы волны 250 МС/s с несимметричным входным динамическим сигналом 2 V_{pp} на коаксиальных разъемах MCX. Регулировка смещения постоянного тока (диапазон ± 1 В) с помощью программируемых 16-битных ЦАП (по одному на каждый канал) позволяет правильно выбирать биполярный (V_{in} = ± 1 В) вплоть до полного положительного (V_{in} = 0 ÷ + 2 В) или отрицательного (V_{in} = 0 ÷ ÷ – 2 В) качание аналогового входа без потери динамического разрешения.

Модуль оснащен тактовым входом на передней панели и PLL для синтеза тактового сигнала от внутренних/внешних опорных сигналов. Поток данных непрерывно записывается в кольцевой буфер памяти. Когда возникает срабатывание, FPGA записывает дополнительные N выборок для пост-срабатывания и замораживает буфер, который может быть прочитан через USB или оптический канал. Сбор данных может продолжаться без мертвого времени в новом буфере [13].

Контроль температуры

Arduino nano

Arduino (рис. 4) представляет собой простейший микроконтроллер, построенный на 8-битном микропроцессоре ATmega-328P с тактовой частотой 16 МГц. За счет своей простоты, малых размеров и дешевизны данные контроллеры позволяют применять его для простых и некоторых сложных задач. Например, Arduino можно применить в качестве контроллера мониторинга, а на самом деле и регулирования, микроклимата [14].

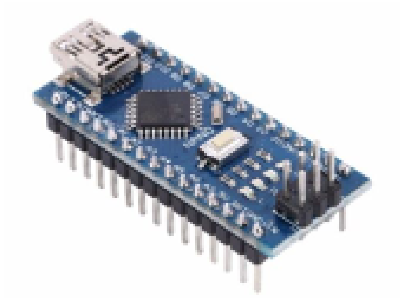


Рис. 4. Arduino nano

Благодаря гибкости архитектуры данные с контроллера можно транслировать на ЭВМ через 232 интерфейс (COM), сохраняя и обрабатывая при помощи специально разработанного программного обеспечения.

1.1.1. Датчик температуры и влажности AM2302

Рис. 5. Датчик AM2302

В качестве датчика температуры был использован AM2302, изображенный на рис. 5, зарекомендовавший себя в других различных приборов на протяжении многих лет. Несмотря на отсутствие аккредитации в госреестре измерительных приборов из-за своей дешевизны, модуль является достаточно точным: после прогрева в течение 40–60 мин. все приборы, принадлежащие одной партии, не только показывают одинаковые параметры температуры и влажности, но и одинаково реагируют на отклонения в микроклимате с погрешностью в несколько раз меньшей, чем заявлено производителем [15].

Программное обеспечение

Для получения и обработки выходных данных с датчика было разработано специальное программное обеспечение для платформ под управлением операционной системы Windows (поддержка 32- и 64-разрядной версий). После получения сигнала с COM-порта последовательность данных расшифровывается, проверяется соответствие, пересчитывается контрольная сумма, и подходящие для обработки данные сохраняются в отдельный файл, пригодный для обработки в стороннем программном обеспечении (рис. 6).

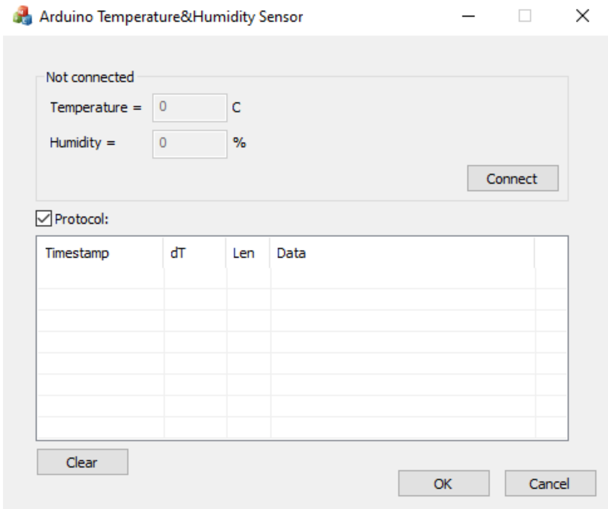


Рис. 6. Интерфейс разработанного программного обеспечения

РЕЗУЛЬТАТЫ

Исследование температурных зависимостей

Для начала необходимо было проверить, как влияет изменение температуры на результаты набора спектров, а также убедиться в работоспособности установки, проведя некоторого рода калибровку. Для этого на сборке SiPM + сцинтиллятора при помощи нашей установки были собраны два набора данных: спектр ^{137}Cs без нагрева и с нагревом. Все наборы сопровождались контрольным мониторингом температуры. Полученные спектры отображены в виде гистограмм на рис. 7, а данные по изменению температуры – на рис. 8.

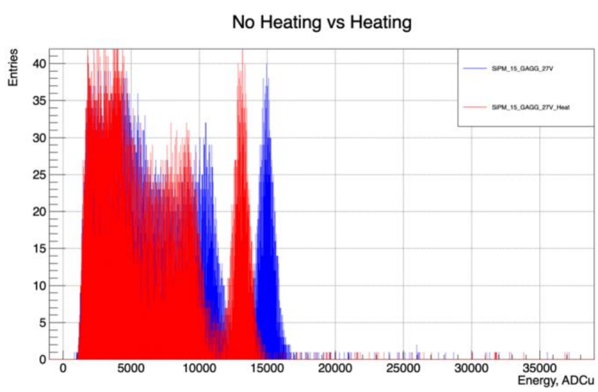
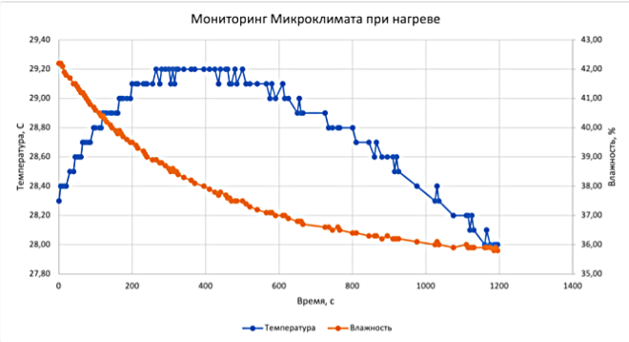


Рис. 7. Спектры ^{137}Cs при нагреве (красный) и без нагрева (синий)



а

б

Рис. 8. Мониторинг температуры в ходе сборов данных без нагрева (*а*) и с нагревом (*б*)

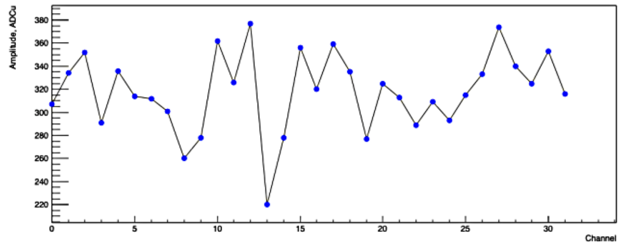
Исследование детекторов позитронно-эмиссионного томографа

В настоящее время в Курчатовском институте разрабатывается макет 32-канального позитронно-эмиссионного томографа на основе детекторных сборок из кремниевого фотоумножителя 3×3 мм от компании SensL и сцинтилляционного кристалла GAGG(Ce) 3×3×15 мм [16].

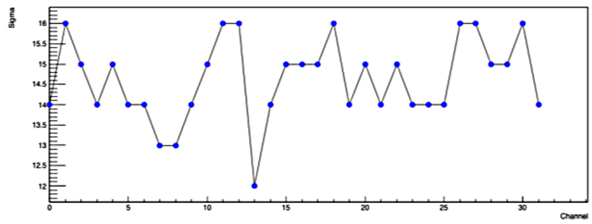
В ходе изучения некоторых его характеристик было выявлено характерное отклонение некоторых каналов от среднего значения по двум из них: энергетического разрешения и амплитуды энергии, что отражено на рис. 9.

Как было сказано ранее, созданная установка позволяет изучать различные сборки из кремниевых фотоумножителей и сцинтилляционных материалов. В связи с этим было принято решение провести испытания соответствующих детекторов на собранном оборудовании.

Чтобы выяснить, какая из частей детектора вносит отклонения, необходимо организовать проверку каждой из них: кремниевый фотоумножитель или сцинтилляционный кристалл. Для этого были сняты две серии измерений на одном SiPM для разных сцинтилляторов и наоборот.



а



б

Рис. 9. Зависимость амплитуды (*а*) и энергетического разрешения (*б*) от номера канала

Для начала, под контролем температуры, чтобы при необходимости внести поправки, а также оценить возможные отклонения и разбросы данных, на выбранном кристалле за одинаковое время были сняты спектры цезия-137 (^{137}Cs), один из которых отображен на рис. 10.

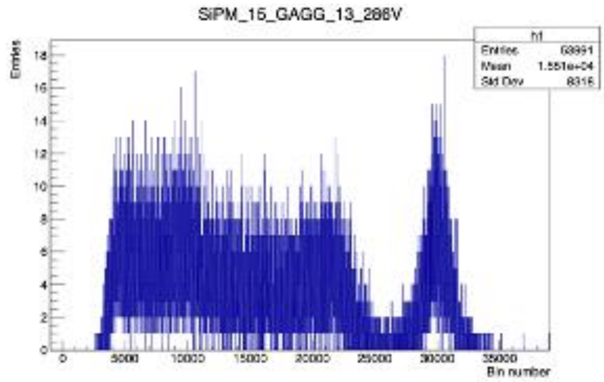


Рис. 10. Спектр ^{137}Cs

Как и ожидалось, система все это время находилась при одинаковой температуре, что подтверждают данные мониторинга, отображенного на рис. 11. Флуктуации температуры в начале измерений могут быть связаны с незначительными отклонениями из-за недостаточного прогрева аппаратуры или допустимой погрешностью измерений.

Полученные данные были обработаны и аппроксимированы гауссом методом Хи-квадрат. Отсюда получены значения положения пиков и энергетических разрешений, по которым были построены соответствующие зависимости параметров от номера SiPM (рис. 12).

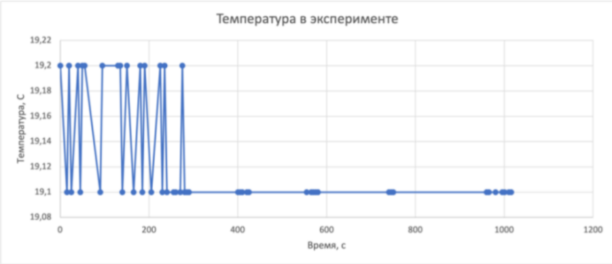


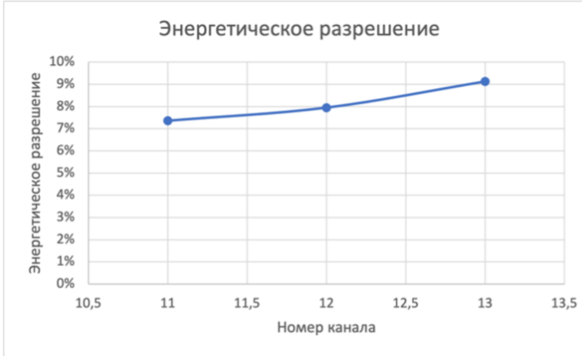
Рис. 11. Зависимость температуры в установке от времени

а

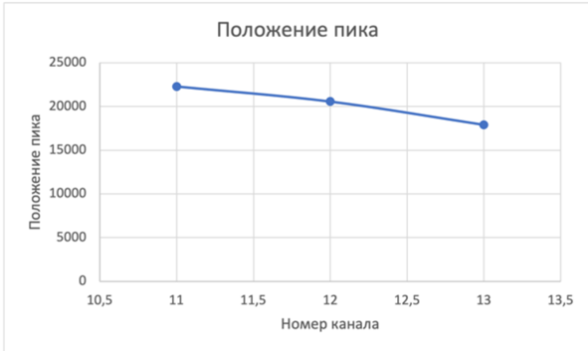
б

Рис. 12. Зависимость положения пика (*а*) и энергетического разрешения (*б*) детектора в зависимости от SiPM

Для выбранного кремниевого фотоумножителя и разных сцинтилляционных кристаллов были сняты аналогичные зависимости, аппроксимированы, а полученные данные положений пика и энергетических разрешений отражены на графиках, представленных на рис. 13.



а



б

Рис. 13. Зависимость энергетического разрешения (*а*) и положения пика (*б*) детектора в зависимости от SiPM

Получение одноэлектронного спектра

Как было описано ранее, конструкция позволяет использовать в качестве источника сигнала не только радиоактивные источники, но и светодиод для получения одноэлектронного спектра, изображенного на рис. 14.

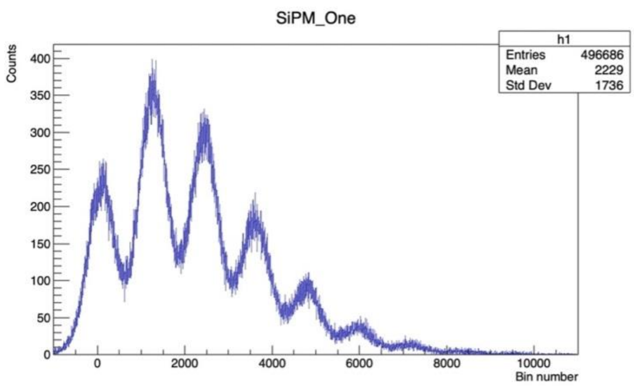


Рис. 14. Одноэлектронный спектр

ОБСУЖДЕНИЕ

Как видно из полученных наборов спектров при различных температурах, результаты совпадают с теоретическими изысканиями: при нагреве наблюдается смещение положения пика в спектре, что связано с изменением чувствительности самих кремниевых фотоумножителей с изменением температуры. Однако в данном эксперименте проявился первый недостаток нашей установки – невозможность поддерживать нагрев достаточно хорошо, как видно из соответствующих графиков мониторинга температуры. Для этого необходимо установить некоторого рода систему регулирования микроклимата в целях поддержания необходимых для экспериментов параметров среды, в том числе и с возможностью охлаждения.

Говоря о результатах изучения детекторов томографа, можно заметить, что картина оказывается явно неоднозначной: как видно из полученных данных, такого рода отклонения явно не зависят ни от кремниевого фотоумножителя, ни от сцинтиллятора, применяемого на конкретном детекторе. Несомненно, каждый из этих факторов вносит свои поправки, хотя влияние явно недостаточно. Таким образом, возможной причиной подобного рода разбросов может являться плохой контакт между кремниевым фотоумножителем и сцинтиллятором, что вызывается грубым позиционированием элементов. Для решения данного вопроса было принято решение использовать в дальнейшем оптический клей, свойства которого будут изучены отдельно.

Получив одноэлектронный спектр на нашей установке, появляется возможность с достаточной точностью совершить калибровку измерительной шкалы, благодаря которой при помощи эталонного сцинтилляционного кристалла с известным световыходом можно производить измерение относительного световыхода для любого известного кристалла.

В целом, для более точных измерений на самой установке, необходимо продумать каретковую конструкцию для исследуемых сцинтилляторов и кремниевых фотоумножителей. В этом случае получится добиться более точного позиционирования исследуемых компонентов, что существенно улучшит результаты наборов данных.

Для расширения функционала установки имеет смысл добавить дополнительный разъем для кремниевого умножителя, что позволит проводить дополнительные измерения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По итогам работы было создано универсальное полноценное рабочее устройство, позволяющее выполнять ряд задач по тестированию сцинтилляционных кристаллов и кремниевых фотоумножителей. Установка была проверена на реальных рабочих задачах, в ходе которых подтвердилась ее функциональность, выявлены замечания и недостатки, требующие исправлений и доработок. Для обработки данных были разработаны необходимые макросы для математических пакетов, а также программное обеспечение для сбора, обработки и сохранения данных с датчика температуры в виде MFC-приложения на ОС Windows. Ожидаемые результаты в целом достигнуты, а также поставлены новые задачи по доработке и улучшению установки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ghezzi A.* Precision Timing with LYSO: Ce Crystals and SiPM Sensors in the CMS MTD Barrel Timing Layer // 2021 IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference (NSS/MIC), IEEE. 2021. Pp. 1–4.

2. *Ozaki K, Kazama S., Yamashita M., Itow Y., Moriyama S.* Characterization of new silicon photomultipliers with low dark noise at low temperature // Journal of Instrumentation, 2021. Vol. 16. № 3. P. 03014.

3. *Chung C., Backes T., Dittmar C., Karpinski W., Kirn T. and etc.* The Development of SiPM-based fast time-of-flight detector for the AMS-100 experiment in space // Instruments, 2022. Vol. 6. № 1. P. 14.

4. *Ozaki K., Kazama S., Yamashita M, Itow Y., Moriyama S. C*haracterization of new photo-detectors for the future dark matter experiments with liquid xenon // Journal of Physics: Conference Series, 2020. Vol. 1468. P. 012238. doi:10.1088/1742-6596/1468/1/012238

5. *Salvador B., Pineda D.A. E., Fernandez-Maza L., Corral A.* Monitoring of microfluidics systems for PET radiopharmaceutical synthesis using integrated silicon photomultipliers // IEEE Sensors Journal, 2019. Vol. 19. № 17. Pp. 7702–7707.

6. Ravil Agishev *and etc.* Lidar with SiPM: Some capabilities and limitations in real environment // Optics & Laser Technology, 2013. № 49. Pp. 86–90.

7. *Полещук Р.* Разработка фотонных методов для экспериментального комплекса Центра подземной физики CUPP. М.: ФГМУН ИЯИ РАН, 2015.

8. *Poleshchuk O. and etc.* Performance tests of a LaBr3:Ce detector coupled to a SiPM array and the GET electronics for γ-ray spectroscopy in a strong magnetic

field // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2021. Vol. 987.

9. *Bonanno G., Marano D., Belluso M., Billota S. and etc.* Characterization Measurements Methodology and Instrumental Set-Up Optimization for New SiPM Detectors. Part I: Electrical Tests // IEEE Sensors Journal, 2014.

10. *Bonanno G., Marano D., Belluso M., Billota S. and etc.* Characterization Measurements Methodology and Instrumental Set-Up Optimization for New SiPM Detectors. Part II: Optical Tests // IEEE Sensors Journal, 2014. Vol. 14. № 10. Pp. 3567–3578.

11. *Корнеев А.* Универсальная модель световыхода пластмассовых и жидких органических сцинтилляторов для электронов и тяжелых заряженных частиц. [Электронный ресурс]. URL: https://nauchkor.ru/uploads/documents/569832da5f1be74d9300005b.pdf (дата обращения: 10.08.2023).

12. *Акимов Ю.* Фотонные методы регистрации излучений. Дубна: ОИЯИ, 2014.

13. Guide SP5600AN Educational Kit – Premium Version Guide. CAEN Educational, Italy 2016.

14. Arduino nano Datasheet, Arduino Inc. [Электронный ресурс]. URL: https://docs.arduino.cc/hardware/nano (дата обращения: 10.08.2023).

15. Temperature and humidity module AM2302 Product Manual, Aosong (Guangzhou) Electronics Co. Ltd., Guangzhou, China (2015). [Электронный ресурс]. URL: https://aosong.com/en/ (дата обращения: 10.08.2023).

16. *Конотоп А.* Характеристики 32-канального макета ПЭТ на основе сцинтиллятора GAGG в сочетании с SiPM. [Электронный ресурс]. URL: https://indico.particle.mephi.ru/event/311/contributions/3497 (дата обращения: 10.08.2023).

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 3, pp. 143–152

NSTALLATION FOR TESTING SILICON PHOTOMULTIPLIER AND SCINTILLATION CRYSTALS

A. D. Konotop [a,b*], ***N. S. Boyko*** [a,b]

[a]*National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, 115409, Russia*

[b]*National Research Center «Kurchatov Institute», Moscow, 123182 Russia*

**e-mail: akonotop03@mail.ru*

Received September 18, 2023; revised September 25, 2023; accepted September 27, 2023

The paper presents an installation for studying a number of parameters of assemblies based on silicon photomultipliers and scintillation crystals, such as noise characteristics, gain and temperature stability of SiPM. The installation also allows you to shoot single-electron spectra, study energy and time resolution, light output, as well as temperature stability of various scintillators. A block diagram of the installation is given and the principle of its operation is described. The necessary macros for mathematical packages have been developed, as well as software for collecting, processing and storing data from a temperature sensor in the form of an MFC application on Windows OS. The results of testing the operating parameters of the installation, confirming its functionality, are presented, comments and shortcomings requiring corrections and improvements are identified. With the help of the installation, studies were carried out on the study of temperature dependences, the dependences of energy resolutions on the scintillation crystal and on the silicon photomultiplier, and a single-electron spectrum was obtained for further study and measurement of the relative light output for various scintillators based on the reference.

Keywords: silicon photomultipliers, scintillation materials, detectors, energy resolution.

REFERENCES

1. *Ghezzi A.* Precision Timing with LYSO: Ce Crystals and SiPM Sensors in the CMS MTD Barrel Timing Layer. 2021 IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference (NSS/MIC), IEEE. 2021. Pp. 1–4.

2. *Ozaki K., Kazama S., Yamashita M., Itow Y., Moriyama S.* Characterization of new silicon photomultipliers with low dark noise at low temperature . Journal of Instrumentation, 2021. V. 16. No. 3. P. 03014.

3. *Chung C., Backes T., Dittmar C., Karpinski W., Kirn T. and etc.* The Development of SiPM-based fast time-of-flight detector for the AMS-100 experiment in space . Instruments, 2022. V. 6. No. 1. P. 14.

4. *Ozaki K., Kazama S., Yamashita M, Itow Y., Moriyama S. C*haracterization of new photo-detectors for the future dark matter experiments with liquid xenon. Journal of Physics: Conference Series. 2020. V. 1468. P. 012238. doi:10.1088/1742-6596/1468/1/012238.

5. *Salvador B., Pineda D.A. E., Fernandez-Maza L., Corral A.* Monitoring of microfluidics systems for PET

radiopharmaceutical synthesis using integrated silicon photomultipliers. IEEE Sensors Journal, 2019. V. 19. No. 17. Pp. 7702–7707.

6. Ravil Agishev *and etc.* Lidar with SiPM: Some capabilities and limitations in real environment. Optics & Laser Technology, 2013. No. 49. Pp. 86–90.

7. Poleshchuk R. Razrabotka fotonnyh metodov dlya eksperimental'nogo kompleksa Centra podzemnoĭ fiziki CUPP. [Development of photonic methods for the experimental complex of the Underground Physics Center CUPP]. Moscow, FGBUN IYI RAN Publ., 2015.

8. *Poleshchuk O. and etc.* Performance tests of a LaBr3:Ce detector coupled to a SiPM array and the GET electronics for γ-ray spectroscopy in a strong magnetic field. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2021. V. 987.

9. *Bonanno G., Marano D., Belluso M., Billota S. and etc.* Characterization Measurements Methodology and Instrumental Set-Up Optimization for New SiPM Detectors. Part I: Electrical Tests. IEEE Sensors Journal, 2014.

10. *Bonanno G., Marano D., Belluso M., Billota S. and etc.* Characterization Measurements Methodology and Instrumental Set-Up Optimization for New SiPM Detectors. Part II: Optical Tests . IEEE Sensors Journal, 2014. V. 14. No. 10. Pp. 3567–3578.

11. Korneev A. Universal'naya model' svetovyhoda plastmassovyh i zhidkih organicheskih scintillyatorov dlya elektronov i tyazhyolyh zaryazhennyh chastic [Universal model of light output of plastic and liquid organic scintillators for electrons and heavy charged particles]. Available at: https://nauchkor.ru/uploads/documents/569832da5f1be74d9300005b.pdf (accessed 10.08.2023).

12. Akimov YU. Fotonnye metody registracii izluchenij [Photonic methods of radiation registration]. OIYAI, Dubna. 2014.

13. Guide SP5600AN Educational Kit – Premium Version Guide. CAEN Educational, Italy, 2016.

14.Arduino nano Datasheet, Arduino Inc. Available at: https://docs.arduino.cc/hardware/nano (accessed 10.08.2023).

15. Temperature and humidity module AM2302 Product Manual, Aosong (Guangzhou) Electronics Co. Ltd., Guangzhou, China (2015). Available at: https://aosong.com/en/ (accessed 10.08.2023).

16. Konotop A. Harakteristiki 32-kanal'nogo maketa PET na osnove scintillyatora GAGG v sochetanii s SiPM [Characteristics of a 32-channel PET layout based on a GAG scintillator in combination with SiPM]. Available at: https://indico.particle.mephi.ru/event/311/contributions/3497 (accessed 10.08.2023).

.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2023, т. 12, № 3, с. 153–164

УДК 517.95

РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

***А.Д. Полянин*[*], *В.Г. Сорокин*[**]**
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия
[*]*e-mail: polyanin@ipmnet.ru*
[**]*e-mail: vsesor@gmail.com*

Поступила в редакцию: 20.06.2023
После доработки: 21.06.2023
Принята к публикации: 26.07.2023

Рассматриваются линейные одномерные уравнения реакционно-диффузионного типа с постоянным запаздыванием. Описаны точные решения таких уравнений, которые выражаются в элементарных функциях. Получены решения в замкнутом виде соответствующих начально-краевых задач с общими начальными данными и граничными условиями первого, второго и третьего рода, а также смешанными краевыми условиями.

Ключевые слова: линейные реакционно-диффузионные уравнения, уравнения в частных производных с запаздыванием, начально-краевые задачи, решения в замкнутом виде, точные решения.
DOI: 10.26583/vestnik.2023.286

ВВЕДЕНИЕ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МОДЕЛИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Уравнения в частных производных с запаздыванием применяются в математическом моделировании процессов, проявляющих свойства наследственности, когда скорость изменения искомой величины зависит не только от ее текущих значений, но и от некоторых значений в прошлом. В такие уравнения помимо искомой функции $u(t)$ входит функция $w = u(t - \tau)$, где t – время, $\tau > 0$ – время запаздывания. Простейшие обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) с постоянным запаздыванием имеют вид

$$u'(t) = F(u, w), \quad w = u(t - \tau), \tag{1}$$

где F – некоторая функция.

Теоретические аспекты ОДУ с постоянным запаздыванием достаточно хорошо изучены [1–3], а их практическое применение весьма обширно и имеет место в теории популяций [4–10], медицине [11–16], эпидемиологии [17–19], экономике [20–22], теории искусственных нейронных сетей [26–29] и др.

Однако протекающие процессы часто являются пространственно неоднородными и моделируются более сложными реакционно-диффузионными уравнениями с постоянным запаздыванием (см., например, [30, 31]):

$$u_t = au_{xx} + F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau), \tag{2}$$

где $u = u(x, t)$; $a > 0$ – коэффициент диффузии; F – кинетическая функция.

Специальный случай $F(u, w) = f(w)$ в (2) допускает простую физическую интерпретацию: процесс переноса субстанции в локально-неравновесной среде обладает инерционными свойствами, т.е. система реагирует на воздействие не мгновенно, как в классическом локально-равновесном случае, а на время запаздывания τ позже.

В большинстве случаев модели, описываемые реакционно-диффузионными уравнениями с запаздыванием вида (2), получаются путем формального добавления диффузионного слагаемого au_{xx} в правую часть ОДУ с запаздыванием (1). Таким образом моделируются случайные блуждания в пространстве рассматриваемых объектов (субъектов), причем движение каждого объекта (субъекта) обусловлено диффузией Фика, когда поток пропорционален градиенту концентрации, а константа пропорциональности является отрицательной. Например, в моделях динамики популяций явление, подобное диффузии, возникает из-за тенденции любого биологического вида мигрировать в регионы с более низкой плотностью популяции [33]. Для упрощения обычно предполагается, что питание поставляется непрерывно и однородно во времени и пространстве. Таким образом, в регионах с высокой плотностью популяции питание станет дефицитным, и особи будут стремиться мигрировать в регионы с более низкой плотностью, чтобы иметь более высокие шансы выжить. В [34–36] процесс диффузии обсуждается с экологической точки зрения.

Замечание 1. Формальное введение диффузионного слагаемого в правую часть ОДУ с запаздыванием может привести к некоторым сложностям. Дело в том, что, хотя диффузия и временное запаздывание связаны соответственно с пространством и временем, они не являются независимыми друг от друга, поскольку рассматриваемые особи, клетки, нейроны, молекулы и т.п. не находятся в одних и тех же точках пространства в предыдущие моменты времени. Возможные способы устранения указанной проблемы путем введения распределенного (нелокального) запаздывания обсуждаются в [37].

Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием вида (2) и родственные более сложные уравнения и системы таких уравнений возникают в различных приложениях, таких как теория популяций [38–42], биомедицина [43–48], эпидемиология [49–51], химия [32, 52, 53], математическая теория искусственных нейронных сетей [54–56] и др. (см. обзоры в химии [30, 31, 57]). Такие уравнения по сложности анализа и изучения сопоставимы с системами нелинейных уравнений в частных производных без запаздывания. Тем не менее, в последнее время с помощью метода функциональных связей [58, 59] было построено большое количество точных решений с обобщенным и функциональным разделением переменных для нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием, содержащих произвольные функции [58–63]. Некоторые точные решения были получены методами группового анализа [64] и путем использования решений более простых уравнений [65]. Решения типа бегущей волны $u = u(z)$, где $z = kx + \lambda t$, рассматривались, например, в [66]. Отметим, что нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием не допускают автомодельных решений вида $u = t^{\beta}\varphi(xt^{\lambda})$, которые часто имеют реакционно-диффузионные уравнения без запаздывания.

ЛИНЕЙНЫЕ РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕГО ВИДА

В данной статье рассматриваются линейные реакционно-диффузионные уравнения с постоянным запаздыванием

$$u_t = a_1 u_{xx} + a_2 w_{xx} + c_1 u + c_2 w + f(x, t),$$
$$w = u(x, t - \tau), \tag{3}$$

где $a_1 \ge 0$, $a_2 \ge 0$, $a_1 + a_2 > 0$, $\tau > 0$, $f(x, t)$ – некоторая заданная функция.

Однородные уравнения вида (3) при $f(x, t) \equiv 0$ допускают точные решения, которые выражаются в элементарных функциях и описаны ниже.

1. Решения с мультипликативным разделением переменных:

$$u = [A\cos(kx) + B\sin(kx)]e^{-\lambda t},$$
$$k = \sqrt{(\lambda + c_1 + c_2 e^{\lambda\tau})/(a_1 + a_2 e^{\lambda\tau})}$$

при
$$\lambda + c_1 + c_2 e^{\lambda\tau} > 0; \tag{4}$$
$$u = [A\exp(kx) + B\exp(-kx)]e^{-\lambda t},$$
$$k = \sqrt{-(\lambda + c_1 + c_2 e^{\lambda\tau})/(a_1 + a_2 e^{\lambda\tau})}$$

при
$$\lambda + c_1 + c_2 e^{\lambda\tau} < 0,$$

где A, B, λ – произвольные постоянные. Заметим, что эти решения являются частными случаями более сложных решений вида $u = \varphi(x)\,\psi(t)$.

Решение (4) является периодическим по пространственной переменной x и затухает при $t \to \infty$ (если $\lambda > 0$).

2. Точные решения, периодические по времени t:

$$u = e^{-\gamma x}[A\cos(\omega t - \beta x) + B\sin(\omega t - \beta x)],$$

где A, B, ω – произвольные постоянные, а константы β и γ можно выразить через ω и параметры исходного уравнения путем решения алгебраической системы уравнений

$$[a_1 + a_2\cos(\omega\tau)](\gamma^2 - \beta^2) +$$
$$+ 2a_2\sin(\omega\tau)\beta\gamma + c_1 + c_2\cos(\omega\tau) = 0,$$
$$a_2\sin(\omega\tau)(\gamma^2 - \beta^2) -$$
$$- 2[a_1 + a_2\cos(\omega\tau)]\beta\gamma + \omega + c_2\sin(\omega\tau) = 0.$$

Исключив γ (или β) из этой системы, можно получить биквадратное уравнение для β (или γ).

3. При некоторых ограничениях на параметры исходного уравнения существуют решения, которые являются периодическими по обеим независимым переменным x и t, вида

$$u = [A_1 \cos(\gamma x) + B_1 \sin(\gamma x)] \times$$
$$\times [A_2 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)],$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 – произвольные постоянные, а константы γ и ω определяются из трансцендентной системы уравнений

$$c_1 + c_2 \cos(\omega\tau) = [a_1 + a_2 \cos(\omega\tau)]\,\gamma^2,$$
$$\omega + c_2 \sin(\omega\tau) = a_2 \sin(\omega\tau)\,\gamma^2.$$

4. Имеются решения полиномного вида по пространственной переменной x (содержащие соответственно четные и нечетные степени):

$$u = \sum_{k=0}^{n} A_k(t) x^{2k} \quad \text{и} \quad u = \sum_{k=0}^{n} B_k(t) x^{2k+1}.$$

ЛИНЕЙНЫЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Предварительные замечания. Многие свойства линейных уравнений в частных производных с запаздыванием аналогичны свойствам более простых уравнений в частных производных без запаздывания. Граничные условия в начально-краевых задачах для уравнений в частных производных с запаздыванием формулируются точно так же, как и для уравнений в частных производных без запаздывания.

Начальные условия (начальные данные) для уравнений с частными производными в задачах с постоянным запаздыванием $\tau > 0$, задаются на целом интервале $t_0 - \tau \le t \le t_0$ (а не в точке $t = t_0$, как в задачах без запаздывания). При этом ищется решение, непрерывное в точке $t = t_0$, иногда встречается $t_0 = \tau$.

Для решения линейных задач, описываемых уравнениями в частных производных с запаздыванием, можно использовать метод разделения переменных и методы интегральных преобразований (таким же образом, как это делается для линейных уравнений в частных производных без запаздывания [67, 68]).

Формулировки начально-краевых задач. Рассмотрим одномерное линейное реакционно-диффузионное уравнение с постоянными коэффициентами и запаздыванием (3), определенное в области $\Omega = \{0 < x < h,\ t > 0\}$. Для краткости, далее будем обозначать это уравнение так:

$$L[u, w] = f(x, t), \quad t > 0, \tag{5}$$

где $L[u, w] \equiv u_t - a_1 u_{xx} - a_2 w_{xx} - c_1 u - c_2 w$ и $w = u(x, t - \tau)$.

Дополним уравнение (5) линейными неоднородными граничными условиями, которые, не конкретизируя, будем записывать в кратком виде:

$$\begin{aligned} &\Gamma_1[u] = g_1(t) \ \text{ при } \ x = 0,\ t > -\tau,\\ &\Gamma_2[u] = g_2(t) \ \text{ при } \ x = h,\ t > -\tau, \end{aligned} \tag{6}$$

и общим начальным условием

$$u = \varphi(x, t) \ \text{ при } \ 0 < x < h, -\tau \le t \le 0. \tag{7}$$

Будем считать, что входящие в граничные условия (6) линейные операторы $\Gamma_{1,2}[u]$ не зависят явно от времени t. Наиболее распространенные граничные условия приведены в третьем столбце табл. 1.

Будем считать, что функции f и φ, входящие в уравнение (3) и начальное условие (7), непрерывны, а функции g_1 и g_2, стоящие в граничных условиях (6), непрерывно дифференцируемы по t. Кроме того, будем предполагать, что граничные и начальные условия (6) и (7) совместны, т.е. выполняются соотношения

$$\Gamma_1[\varphi] = g_1(t) \ \text{ при } \ x = 0,\ t > -\tau;$$
$$\Gamma_2[\varphi] = g_2(t) \ \text{ при } \ x = h,\ t > -\tau.$$

В [69–73] для решения одномерных задач, описываемых реакционно-диффузионным уравнением с постоянным запаздыванием типа (3) и родственными уравнениями, использовался метод разделения переменных.

Представление решений начально-краевых задач в виде суммы решений более простых задач. Следуя [71,72], решение задачи (5)–(7) ищем в виде суммы

$$u = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t), \tag{8}$$

где
$$u_0 = u_0(x, t) \tag{9}$$

является любой дважды непрерывно дифференцируемой функцией, удовлетворяющей граничным условиям (6), т.е.

$$\begin{aligned} &\Gamma_1[u_0] = g_1(t) \ \text{ при } \ x = 0,\\ &\Gamma_2[u_0] = g_2(t) \ \text{ при } \ x = h. \end{aligned} \tag{10}$$

Определение функции u_0 не связано с решением дифференциальных уравнений. Эту функцию можно искать методом неопределенных коэффициентов, например, в виде квадратичного по x многочлена: $u_0 = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)x + \alpha_2(t)x^2$ (в большинстве случаев можно положить $\alpha_2 \equiv 0$). Функциональные коэффициенты $\alpha_k(t)$ определяются путем подстановки этого многочлена в граничные условия (10).

В табл. 1 приведены простейшие функции $u_0 = u_0(x, t)$, которые удовлетворяют наиболее распространенным неоднородным граничным условиям в начально-краевых задачах для реакционно-диффузионных уравнений с одной пространственной переменной. В граничных условиях третьего рода считается, что $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$.

Две функции $u_1 = u_1(x, t)$ и $u_2 = u_2(x, t)$, также входящие в (8), определяются путем решения описанных ниже более простых начально-краевых задач с однородными (нулевыми) граничными условиями.

Задача 1. Функция u_1 удовлетворяет линейному однородному УрЧП с постоянным запаздыванием

$$L[u_1, w_1] = 0, \quad w_1 = u_1(x, t-\tau), \tag{11}$$

однородным граничным условиям

$$\Gamma_1[u_1] = 0 \text{ при } x = 0, \ t > -\tau;$$
$$\Gamma_2[u_1] = 0 \text{ при } x = h, \ t > -\tau, \tag{12}$$

и неоднородному начальному условию

$$u_1 = \Phi(x, t) \text{ при } 0 < x < h, -\tau \le t \le 0, \tag{13}$$

где

$$\Phi(x, t) = \varphi(x, t) - u_0(x, t). \tag{14}$$

Таблица 1. Простейшие функции $u_0 = u_0(x, t)$, которые удовлетворяют наиболее распространенным неоднородным граничным условиям на концах отрезка $0 \le x \le h$

№	Начально-краевая задача	Граничные условия	Функция $u_0 = u_0(x, t)$, удовлетворяющая граничным условиям
1	Первая	$u = g_1(t)$ при $x = 0$, $u = g_2(t)$ при $x = h$	$u_0 = g_1(t) + \frac{x}{h}[g_2(t) - g_1(t)]$
2	Вторая	$u_x = g_1(t)$ при $x = 0$, $u_x = g_2(t)$ при $x = h$	$u_0 = xg_1(t) + \frac{x^2}{2h}[g_2(t) - g_1(t)]$
3	Третья	$u_x - k_1u = g_1(t)$ при $x = 0$, $u_x + k_2u = g_2(t)$ при $x = h$	$u_0 = \frac{(k_2x - 1 - k_2h)g_1(t) + (1 + k_1x)g_2(t)}{k_2 + k_1 + k_1k_2h}$
4	Смешанная	$u = g_1(t)$ при $x = 0$, $u_x = g_2(t)$ при $x = h$	$u_0 = g_1(t) + xg_2(t)$
5	Смешанная	$u_x = g_1(t)$ при $x = 0$, $u = g_2(t)$ при $x = h$	$u_0 = (x - h)g_1(t) + g_2(t)$

Задача 2. Функция u_2 удовлетворяет линейному однородному УрЧП с постоянным запаздыванием

$$L[u_2, w_2] = F(x, t), \quad w_2 = u_2(x, t-\tau), \tag{15}$$

где

$$F(x, t) = f(x, t) - L[u_0, w_0], \ w_0 = u_0(x, t-\tau), \tag{16}$$

и нулевым граничным и начальному условиям

$$\Gamma_1[u_2] = 0 \text{ при } x = 0, \ t > -\tau;$$
$$\Gamma_2[u_2] = 0 \text{ при } x = h, \ t > -\tau; \tag{17}$$

$$u_2 = 0 \text{ при } 0 < x < h, -\tau \le t \le 0. \tag{18}$$

Решение задачи 1. Рассмотрим линейное однородное УрЧП с запаздыванием (11) с граничными и начальными условиями (12) и (13). Сначала ищем частные решения уравнения (11) в виде произведения функций разных аргументов

$$u_{1p} = X(x)\,T(t). \tag{19}$$

Подставив (19) в (11), после элементарных преобразований получим

$$X(x)[T'(t) - c_1T(t) - c_2T(t-\tau)] = \\ = X''(x)[a_1T(t) + a_2T(t-\tau)]. \tag{20}$$

Разделяя в этом уравнении переменные, приходим к линейному ОДУ второго порядка и ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием:

$$X''(x) = -\lambda^2X(x), \tag{21}$$

$$T'(t) = (c_1 - a_1\lambda^2)T(t) + (c_2 - a_2\lambda^2)T(t-\tau). \tag{22}$$

Требуя, чтобы функция $u_{1p} = X(x)T(t)$ удовлетворяла однородным граничным условиям (12), приходим к однородным граничным условиям для функции X:

$$\Gamma_1[X] = 0 \text{ при } x = 0, \Gamma_2[X] = 0 \text{ при } x = h. \quad (23)$$

Нетривиальные решения $X = X_n(x)$ линейной однородной задачи на собственные значения (21), (23) существуют только для дискретного множества значений параметра λ:

$$\lambda = \lambda_n, \quad X = X_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots . \quad (24)$$

Важно отметить, что собственные функции $X_n(x)$ и $X_m(x)$ ортогональны в том смысле, что

$$\int_0^h X_n(x)X_m(x)dx = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m. \quad (25)$$

Собственные значения и собственные функции для однородных линейных краевых задач, описываемых ОДУ (21), для пяти наиболее распространенных граничных условий приведены в табл. 2.

Подставив собственные значения $\lambda = \lambda_n$ в (22), получим соответствующие ОДУ с запаздыванием для функций $T = T_n(t)$.

Решение линейной начально-краевой задачи (11)–(14) ищем в виде ряда

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t), \quad (26)$$

где функции $u_{1n}(x, t) = X_n(x)\,T_n(t)$–частные решения уравнения (11), удовлетворяющие однородным граничным условиям (12).

Чтобы найти начальные условия для ОДУ с запаздыванием (22) при $\lambda = \lambda_n$, представим начальное условие (13) в виде разложения по собственным функциям:

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t)X_n(x), \quad 0 \le x \le h, \quad -\tau \le t \le 0. \quad (27)$$

Умножая (27) на $X_m(x)$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$), интегрируя по пространственной переменной x от 0 до h и учитывая (25), имеем

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^h \Phi(\xi,t)X_n(\xi)d\xi, \quad -\tau \le t \le 0, \quad (28)$$

где функция $\Phi(\xi, t)$ определена формулой (14) и $\|X_n\|^2 = \int_0^h X_n^2(\xi)d\xi$.

Таблица 2. Собственные функции в задачах на собственные значения, описываемые однородным ОДУ $X''_{xx} = -\lambda^2 X$ с наиболее распространёнными однородными граничными условиями на концах отрезка $0 \le x \le h$

№	Начально-краевая задача	Граничные условия	Собственные значения и собственные функции $X_n = X_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$
1	Первая	$X = 0$ при $x = 0$, $X = 0$ при $x = h$	$\lambda_n = \pi n/h$; $X_n = \sin\left(\frac{\pi n x}{h}\right)$
2	Вторая	$X'_x = 0$ при $x = 0$, $X'_x = 0$ при $x = h$	$\lambda_0 = 0$, $\lambda_n = \pi n/h$; $X_0 = 1$, $X_n = \cos\left(\frac{\pi n x}{h}\right)$
3	Третья	$X'_x - k_1 X = 0$ при $x = 0$, $X'_x + k_2 X = 0$ при $x = h$	λ_n – корни трансцендентного уравнения $\frac{\mathrm{tg}(\lambda h)}{\lambda} = \frac{k_1 + k_2}{\lambda^2 - k_1 k_2}$, $(\lambda_n > 0)$; $X_n = \cos(\lambda_n x) + \frac{k_1}{\lambda_n}\sin(\lambda_n x)$
4	Смешанная	$X = 0$ при $x = 0$, $X'_x = 0$ при $x = h$	$\lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2h}$; $X_n = \sin\frac{\pi(2n-1)x}{2h}$
5	Смешанная	$X'_x = 0$ при $x = 0$, $X = 0$ при $x = h$	$\lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2h}$; $X_n = \cos\frac{\pi(2n-1)x}{2h}$

Из соотношений (26) и (27) получим начальные условия для ОДУ с запаздыванием (22) при $\lambda = \lambda_n$ в виде

$$T_n(t) = \Phi_n(t), \quad -\tau \le t \le 0, \tag{29}$$

где функции $\Phi_n(t)$ задаются выражениями (28).

Введем обозначения

$$\alpha_n = c_1 - a_1\lambda^2_n, \quad \beta_n = c_2 - a_2\lambda^2_n,$$
$$\sigma_n = \beta_n \exp(-\alpha_n\tau). \tag{30}$$

Тогда, как показано в [72], решение задачи (22), (29) при $\lambda = \lambda_n$ можно представить в виде

$$T_n(t) = e^{\alpha_n(t+\tau)}\exp_d(\sigma_n t, \sigma_n\tau)\Phi_n(-\tau) + \\ +\int_{-\tau}^{0} e^{\alpha_n(t-s)}\exp_d(\sigma_n(t-\tau-s), \sigma_n\tau)\times \\ \times\left[\Phi'_n(s) - \alpha_n\Phi_n(s)\right]ds. \tag{31}$$

Здесь $\exp_d(t, \tau)$ – экспонента с запаздыванием, которая определяется как

$$\exp_d(t,\tau) \equiv \sum_{k=0}^{[t/\tau]+1}\frac{\left[t-(k-1)\tau\right]^k}{k!}, \tag{32}$$

где символ $[A]$ обозначает целую часть числа A, а индекс d указывает на запаздывание (от англ. *delay*).

Подставив (31) в (26), находим решение задачи (11)–(14):

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\Big\{e^{\alpha_n(t+\tau)}\exp_d(\sigma_n t, \sigma_n\tau)\times \\ \times\Phi_n(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} e^{\alpha_n(t-s)}\exp_d(\sigma_n(t-\tau-s), \sigma_n\tau)\times \\ \times\left[\Phi'_n(s) - \alpha_n\Phi_n(s)\right]ds\Big\}, \tag{33}$$

где

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^h\left[\varphi(\xi,t) - u_0(\xi,t)\right]X_n(\xi)d\xi, \\ \|X_n\|^2 = \int_0^h X_n^2(\xi)d\xi. \tag{34}$$

Для любой из пяти основных начально-краевых задач, граничные условия которых приведены в табл. 1, в формулы (33)–(34) следует подставить соответствующие собственные значения λ_n и собственные функции $X_n(x)$, представленные в табл. 2.

Решение задачи 2. Рассмотрим теперь линейное неоднородное УрЧП с запаздыванием (15)–(16) с однородными граничными и начальным условиями (17) и (18).

Сначала разложим неоднородную составляющую уравнения (15) в ряд по собственным функциям (24):

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)X_n(x), \\ F_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^h F(\xi,t)X_n(\xi)d\xi, \tag{35}$$

где функция $F(x, t)$ определяется формулой (16), а $\|X_n\|^2 = \int_0^h X_n^2(\xi)d\xi.$

Решение задачи (15)–(18) ищем в виде ряда

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t)X_n(x), \tag{36}$$

который удовлетворяет однородным граничным условиям (17). Подставив (36) в (15) и учитывая (35), получим линейные неоднородные ОДУ с запаздыванием для функций $U_n(t)$:

$$U'_n(t) = (c_1 - a_1\lambda^2_n)\,U_n(t) + \\ + (c_2 - a_2\lambda^2_n)\,U_n(t-\tau) + F_n(t), \tag{37}$$

где функции $F_n(t)$ находятся с помощью второй формулы в (35). Для завершения формулировки задачи уравнения (37) дополним однородными начальными условиями

$$U_n(t) = 0, \; -\tau \le t \le 0, \tag{38}$$

которые следуют из (18) и (36).

Решение задачи (37)–(38) в области $t \ge 0$ можно представить в виде интеграла [72]:

$$U_n(t) = \int_0^t e^{\alpha_n(t-s)}\exp_d(\sigma_n(t-s), \sigma_n\tau)F_n(s)ds, \\ \sigma_n = e^{-\alpha_n\tau}\beta_n, \tag{39}$$

где параметры α_n и β_n определены в (30). Подставив (39) в (36), находим решение задачи (15)–(18):

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{\alpha_n(t-s)}\exp_d(\sigma_n(t-s), \sigma_n\tau)\times \\ \times F_n(s)ds\right]X_n(x). \tag{40}$$

Решение начально-краевой задачи (5)–(7) с любыми граничными условиями, представленными в табл. 1, можно получить, подставив функции (9), (33) и (40) в (8) и взяв функцию $u_0 = u_0(x, t)$ из табл. 1, а соответствующие собственные значения λ_n и собственные функции $X_n(x)$ из табл. 2.

Замечание 2. Можно показать, что при $a_1 > a_2 \ge 0$ и $c_1 = c_2 = 0$ все решения однородного реакционно-диффузионного уравнения с постоянным запаздыванием (3) (при $f \equiv 0$), удовлетворяющие однородным граничным условиям первого рода, стремятся к тривиальному решению при $t \to \infty$. При $a_2 > a_1 \ge 0$ тривиальное решение этой же начально-краевой задачи будет неустойчивым.

Замечание 3. В [57] рассматривались линейные начально-краевые задачи реакционно-диффузионного типа с запаздыванием с несколькими пространственными переменными.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700057-0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
2. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.
3. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
4. *Глаголев М.В., Сабреков А.Ф., Гончаров В.М.* Дифференциальные уравнения с запаздыванием как математические модели динамики популяций // Динамика окружающей среды и глобальные изменения климата, 2018. Т. 9. № 2. С. 40–63.
5. *Кащенко С.А.* Исследование стационарных режимов дифференциально-разностного уравнения динамики популяции насекомых // Моделирование и анализ информационных систем, 2012. Т. 19. № 5. С. 18–34.
6. *Кащенко И.С., Кащенко С.А.* Динамика уравнения с двумя запаздываниями, моделирующая численность популяции // Известия вузов. ПНД, 2019. Т. 27. № 2. С. 21–38.
7. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Теория релаксационных колебаний для уравнения Хатчинсона // Мат. сборник, 2011. Т. 202. № 6. С. 51–82.
8. *Переварюха А.Ю.* Сценарий невынужденной деструкции популяции в модификации уравнения Хатчинсона // Владикавказский математический журнал, 2017. Т. 19. № 4. С. 58–69.
9. *Berezansky L., Braverman E., Idels L.* Nicholson's blowflies differential equations revisited: Main results and open problems // Appl. Math. Modelling, 2010. V. 34. P. 1405–1417.
10. *Kuang Y.* Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. San Diego: Academic Press, 2012.
11. *Бочаров Г.А., Марчук Г.И.* Прикладные проблемы математического моделирования в иммунологии // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2000. Т. 40. № 12. С. 1905–1920.
12. *Воропаева О.Ф., Козлова А.О., Сенотрусова С.Д.* Численный анализ перехода от уравнения с запаздыванием к системе ОДУ в математической модели сети онкомаркеров // Вычислительные технологии, 2016. Т. 21. № 2. С. 12–25.
13. *Кубышкин Е.П., Морякова А.Р.* Бифуркации периодических решений уравнения Мэкки–Гласса // Моделирование и анализ информационных систем, 2016. Т. 23. № 6. С. 784–803.
14. *Gourley S.A., Kuang Y., Nagy J.D.* Dynamics of a delay differential equation model of hepatitis B virus infection // J. Biol. Dynam., 2008. V. 2. № 2. P. 140–153.
15. *Liu B.* New results on the positive almost periodic solutions for a model of hematopoiesis // Nonlinear Anal. Real World Appl., 2014. V. 17. P. 252–264.
16. *Schiesser W.E.* Time Delay ODE/PDE Models: Applications in Biomedical Science and Engineering. Boca Raton: CRC Press, 2019.
17. *Виницкий С.И., Гусев А.А., Дербов В.Л., Красовицкий П.М., Пеньков Ф.М., Чулуунбаатар Г.* Редуцированная модель *SIR* пандемии COVID-19 // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2021. Т. 61. № 3. С. 400–412.
18. *Перцев Н.В., Логинов К.К., Топчий В.А.* Анализ математической модели эпидемии, построенной на основе дифференциальных уравнений с запаздыванием // Сибирский журнал индустриальной математики, 2020. Т. 23 № 2. С. 119–132.
19. *Guglielmi N., Iacomini E., Viguerie A.* Delay differential equations for the spatially resolved simulation of epidemics with specific application to COVID-19 // Math. Meth. Appl. Sci., 2022. V. 45. № 8. P. 4752–4771.
20. *Кильматов Т.Р.* Временной лаг как фактор потери устойчивости экономической системы // Экономика и математические методы, 2013. Т. 49. № 3. С. 120–122.
21. *Chen X., Liu H., Xu Ch.* The new result on delayed finance system // Nonlinear Dyn., 2014. V. 78. P. 1989–1998.
22. *Zhang X., Zhu H.* Hopf bifurcation and chaos of a delayed finance system // Complexity, 2019. V. 2019. 6715036.
23. *Suarez M.J., Schopf P.S.* A delayed action oscillator for ENSO // J. Atmos. Sci., 1988. V. 45. P. 3283–3287.
24. *Kalmar-Nagy T., Stepan G., Moon F.C.* Subcritical HOPF bifurcation in the delay equation model for

machine tool vibrations // Nonlinear Dyn., 2001. V. 26. P. 121–142.

25. *Кащенко И.С., Кащенко С.А.* Локальная динамика модели полупроводникового лазера с запаздыванием // ТМФ, 2023. Т. 215. № 2. С. 232–241.

26. *Кащенко С.А., Майоров В.В., Майорова Н.Л.* Анализ колебательных процессов в сети импульсных нейронов // Вестник НИЯУ МИФИ, 2018. Т. 7, № 2. С. 138–162.

27. *Arik S.* Global asymptotic stability of a larger class of neural networks with constant time delay // Phys. Lett. A, 2003. V. 311. P. 504–511.

28. Wu J., Campbell S. A., Belair J. Time-delayed neural networks: stability and oscillations. In: Encyclopedia of Computational Neuroscience. P. 2966–2972. New York: Springer, 2015.

29. Zhao H. Exponential stability and periodic oscillatory of bidirectional associative memory neural network involving delays // Neurocomputing, 2006. V. 69. P. 424–448.

30. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г.* Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: математические модели и качественные особенности // Вестник НИЯУ МИФИ, 2017. Т. 6. № 1. С. 41–55.

31. *Wu J.* Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer, 1996.

32. *Wu J., Zou X.* Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay // J. Dyn. Differ. Equ., 2001. V. 13. № 3. P. 651–687.

33. *Cohen D.S., Rosenblat S.* Multi-species interactions with hereditary effects and spatial diffusion // J. Math. Biol., 1979. V. 7. P. 231–241.

34. *Murray J.D.* Mathematical Biology, 3rd ed. New York: Springer, 2002.

35. *Britton N.F.* Reaction-Diffusion Equations and Their Applifations to Biology. New York: Academic Press, 1986.

36. *Cantrell R.S., Cosner C.* Spatial Ecology via Reaction Diffusion Equations. Chichester: John Wiley & Sons, 2003.

37. *Gourley S.A, So J. W.-H., Wu J.H.* Nonlocality of reaction-diffusion equations induced by delay: biological modeling and nonlinear dynamics // J. Math. Sci., 2004. V. 124. № 4. P. 5119–5153.

38. *Алешин С.В., Глызин С.Д., Кащенко С.А.* Уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова с запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем, 2015. Т. 2. № 2. С. 304–321.

39. *Горюнов В.Е.* Динамика решений логистического уравнения с запаздыванием и диффузией в плоской области // ТМФ, 2022. Т. 212. № 2. С. 234–256.

40. *Huang J., Zou X.* Traveling wavefronts in diffusive and cooperative Lotka Volterra system with delays // J. Math. Anal. Appl., 2002. V. 271. P. 455–466.

41. *Song Y., Jiang H., Yuan Yu.* Turing-hopf bifurcation in the reaction-diffusion system with delay and application to a diffusive predator-prey model // J. Appl. Anal. Comput., 2019. V. 9. № 3. P. 1132–1164.

42. *Trofimchuk E., Tkachenko V., Trofimchuk S.* Slowly oscillating wave solutions of a single species reaction-diffusion equation with delay // J. Differ. Equ., 2008. V. 245. P. 2307–2332.

43. *Тасевич А.Л., Бочаров Г.А., Вольперт В.А.* Уравнения реакции – диффузии в имунологии // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2018. Т. 58. № 12. С. 2048–2059.

44. *Hattaf K., Yous N.* A generalized HBV model with diffusion and two delays // Comput. Math. Appl., 2015. V. 69. №1 . P. 31–40.

45. *Jia Yu.* Bifurcation and pattern formation of a tumor immune model with time-delay and diffusion // Math. Comput. Simul., 2020. V. 178. P. 92–108.

46. *Pan X., Shu H., Wang L., Wang X.-S.* Dirichlet problem for a delayed diffusive hematopoiesis model // Nonlinear Anal.: Real World Appl. 2019. V. 48. P. 493–516.

47. *Piotrowska M.J., Forys U.* A simple model of carcinogenic mutations with time delay and diffusion // Math. Biosci. Eng., 2013. V. 10. № 3. P. 861–872.

48. *Ramirez-Carrasco C., Molina-Garay J.* Existence and approximation of traveling wavefronts for the diffusive Mackey – Glass equation // Aust. J. Math. Anal. Appl., 2021. V. 18. № 1. P. 1–12.

49. *Cheng Y., Lu D., Zhou J., Wei J.* Existence of traveling wave solutions with critical speed in a delayed diffusive epidemic model // Adv. Differ. Equ., 2019. 494.

50. *Liu P.-P.* Periodic solutions in an epidemic model with diffusion and delay // Appl. Math. Comput., 2015. V. 265. P. 275–291.

51. *Zhu C.-C., Zhu J.* Dynamic analysis of a delayed COVID-19 epidemic with home quarantine in temporal-spatial heterogeneous via global exponential attractor method // Chaos Solit. Fractals, 2021. V. 143. 110546.

52. *Trofimchuk E., Pinto M., Trofimchuk S.* Traveling waves for a model of the Belousov–Zhabotinsky reaction // J. Differ. Equ., 2013. V. 254. P. 3690–3714.

53. *Zhang G.-B.* Asymptotics and uniqueness of traveling wavefronts for a delayed model of the Belousov Zhabotinsky reaction // Applicable Analysis, 2020. V. 99. № 10. P. 1639–1660.

54. *Cao Ya., Cao Yu., Guo Zh., Huang T., Wen Sh.* Global exponential synchronization of delayed memristive neural networks with reaction-diffusion terms // Neural Networks, 2020. V. 123. P. 70–81.

55. *Wang K., Teng Z., Jiang H.* Global exponential synchronization in delayed reaction-diffusion cellular neural networks with the Dirichlet boundary conditions // Math. Comput. Model, 2010. V. 52. P. 12–24.

56. *Yang Z., Xu D.* Global dynamics for non-autonomous reaction-diffusion neural networks with time-varying delays // Theor. Comput. Sci., 2008. V. 403. P. 3–10.

57. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Журов А.И.* Дифференциальные уравнения с запаздыванием: Свойства, методы, решения и модели. М.: ИПМех РАН, 2022.

58. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2014. V. 19. № 3. P. 417–430.

59. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coeffients // Int. J. Non-Linear Mech., 2014. V. 67. P. 267–277.

60. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time // Int. J. Non-Linear Mech., 2013. V. 54. P. 115–126.

61. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact separable solutions of delay reaction-diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2014. V. 19. № 3. P. 409–416.

62. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction-diffusion equations // Int. J. Non-Linear Mech., 2014. V. 59. P. 16–22.

63. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coeffients: Exact methods and new solutions // Appl. Math. Lett., 2014. V. 37. P. 43–48.

64. *Meleshko S.V., Moyo S.* On the complete group classiffication of the reaction-diffusion equation with a delay // J. Math. Anal. Appl., 2008. V. 338. P. 448–466.

65. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г.* Построение точных решений нелинейных уравнений математической физики с запаздыванием с помощью решений более простых уравнений без запаздывания // Вестник НИЯУ МИФИ, 2020. Т. 9, № 2. С.115–128.

66. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г.* Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: Точные решения типа бегущей волны // Вестник НИЯУ МИФИ, 2015. Т. 4, № 2. С. 119–126.

67. *Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd ed. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2016.

68. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

69. *Martin J.A., Rodriguez F., Company R.* Analytic solution of mixed problems for the generalized diffusion equation with delay // Math. Comput. Modelling, 2004. V. 40. P. 361–369.

70. *Reyes E., Rodriguez F., Martin J.A.* Analytic-numerical solutions of diffusion mathematical models with delays // Comput. Math. Appl., 2008. V. 56. P. 743–753.

71. *Khusainov D.Y., Ivanov A.F., Kovarzh I.V.* Solution of one heat equation with delay // Nonlinear Oscillations, 2009. V. 12. № 2. P. 260–282.

72. *Khusainov D.Y., Pokojovy M., Azizbayov E.I.* On classical solvability for a linear 1D heat equation with constant delay // Konstanzer Schriften in Mathematik, 2013. № 316.

73. *Khusainov D., Pokojovy M., Reinhard R.* Strong and mild extrapolated L^2-solutions to the heat equation with constant delay // SIAM J. Math. Anal., 2015. V. 47. № 1. P. 427–454.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 3, pp. 153–164

SOLUTIONS OF LINEAR INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF REACTION-DIFFUSION TYPE WITH DELAY

A.D. Polyanin*, V.G. Sorokin**

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia

**e-mail: polyanin@ipmnet.ru*

***e-mail: vsesor@gmail.com*

Received June 20, 2023; revised June 21, 2023; accepted July 26, 2023

Linear one-dimensional equations of reaction-diffusion type with a constant delay are considered. Exact solutions of such equations are described, which are expressed in elementary functions. Closed-form solutions are obtained for the corresponding initial-boundary value problems with common initial data and boundary conditions of the first, second, and third kind, as well as mixed boundary conditions.

Keywords: linear reaction-diffusion equations, partial differential equations with delay, initial-boundary value problems, closed-form solutions, exact solutions.

REFERENCES

1. *Bellman R., Cooke K.L.* Differencial'no-raznostnye uravneniya [Differential-difference equations]. Moscow, Mir Publ., 1967.

2. *Myshkis A.D.* Linejnye dfferencial'nye uravnenija s zapazdyvajushhim argumentom [Linear Differential Equations with Retarded Arguments]. Moscow, Nauka Publ., 1972.

3. *Elsgolt's L.E., Norkin S.B.* Vvedenie v teoriyu differencial'nyh uravnenij s otklonyayushchimsya argumentom [Introduction to the Theory and Application of Differential Equations With Deviating Arguments]. Moscow, Nauka Publ., 1971.

4. *Glagolev M.V., Sabrekov A.F., Gonharov V.M.* Differencial'nye uravnenija s zapazdyvaniem kak matematiheskie modeli dinamiki populjacij [Delay differential equations as a tool for mathematical modelling of population dynamic]. Dinamika okruzhajushhej sredy i global'nye izmenenija klimata, 2018. Vol. 9. No. 2. Pp. 40–63 (in Russian).

5. *Kashchenko S.A.* Issledovanie stacionarnykh rezhimov differencial'no-raznostnogo uravnenija dinamiki populjacii nasekomykh [Stationary states of a delay differential equation of insect population's dynamics]. Modelirovanie i analiz informacionnykh sistem, 2021. Vol. 19. No. 5. Pp. 18–34 (in Russian).

6. *Kashchenko I.S., Kashchenko S.A.* Dinamika uravnenija s dvumja zapazdyvanijami, modelirujushhego chislennost' populjacii [Dynamics of equation with two delays modelling the number of population]. Izvestija vuzov. PND, 2019. Vol. 27. No. 2. Pp. 21–38 (in Russian).

7. *Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh*. The theory of relaxation oscillations for Hutchinson's equation. Sbornik: Mathematics, 2011. Vol. 202. No. 6. Pp. 829–858.

8. *Perevarukha A.Yu*. Scenarij nevynuzhdennoj destrukcii populjacii v modifikacii uravnenija Khatchinsona [Scenario of involuntary destruction of a population in a modified Hutchinson equation]. Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal, 2017. Vol. 19. No. 4. Pp. 58–69 (in Russian).

9. *Berezansky L., Braverman E., Idels L*. Nicholson's blowflies differential equations revisited: Main results and open problems. Appl. Math. Modelling, 2010. Vol. 34. Pp. 1405–1417.

10. *Kuang Y.* Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. San Diego, Academic Press, 2012.

11. *Bocharov G.A., Marchuk G.I.* Prikladnye problemy matematicheskogo modelirovanija v immunologii [Applied problems of mathematical modeling in immunology]. Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki, 2000. Vol. 40. No. 12. Pp. 1905–1920 (in Russian).

12. *Voropaeva O.F., Kozlova A.O., Senotrusova S.D.* Chislennyj analiz perekhoda ot uravnenija s zapazdyvaniem k sisteme ODU v matematicheskoj modeli seti onkomarkerov [Numerical analysis of the transition from the equation with retarded argument to the ODE system in a mathematical model of the tumor markers network. Vyhislitel'nye tekhnologii, 2016. Vol. 21. No. 2. Pp. 12–25 (in Russian).

13. *Kubyshkin E.P., Moryakova A.R.* Bifurkacii periodicheskikh reshenij uravnenija Mehkki – Glassa [Bifurcation of Periodic Solutions of the Mackey Glass – Equation]. Modelirovanie i analiz informacionnykh sistem, 2016. Vol. 23. No. 6. Pp. 784–803 (in Russian).

14. *Gourley S.A., Kuang Y., Nagy J.D*. Dynamics of a delay differential equation model of hepatitis B virus infection. J. Biol. Dynam., 2008. Vol. 2. No. 2. Pp. 140–153.

15. *Liu B.* New results on the positive almost periodic solutions for a model of hematopoiesis. Nonlinear Anal. Real World Appl., 2014. Vol. 17. Pp. 252–264.

16. *Schiesser W.E.* Time Delay ODE/PDE Models: Applications in Biomedical Science and Engineering. Boca Raton, CRC Press, 2019.

17. *Vinitsky S.I., Gusev A.A., Chuluunbaatar G., Derbov V.L., Krassovitskiy P.M., Pen'kov F.M*. Reduced SIR model of COVID-19 pandemic. Comput. Math. Math. Phys., 2021. Vol. 61. No. 3. Pp. 376–387.

18. *Pertsev N.V., Loginov K.K., Topchii V.A.* Analysis of an epidemic mathematical model based on delay differential equations. J. Appl. Industr. Math., 2020. Vol. 14. No. 2. Pp. 396–406.

19. *Guglielmi N., Iacomini E., Viguerie A.* Delay differential equations for the spatially resolved simulation of epidemics with specific application to COVID-19. Math. Meth. Appl. Sci., 2022. V. 45. № 8. P. 4752–4771.

20. *Kil'matov T.R.* Vremennoj lag kak faktor poteri ustojchivosti ehkonomicheskoj sistemy [Time-Lag as a factor of loosing of the economic system]. Ehkonomika i matematicheskie metody, 2013. Vol. 49. No. 3. Pp. 120–122 (in Russian).

21. *Chen X., Liu H., Xu Ch.* The new result on delayed finance system. Nonlinear Dyn., 2014. Vol. 78. Pp. 1989–1998.

22. *Zhang X., Zhu H.* Hopf bifurcation and chaos of a delayed finance system. Complexity, 2019. Vol. 2019, 6715036.

23. *Suarez M.J., Schopf P.S.* A delayed action oscillator for ENSO. J. Atmos. Sci., 1988. Vol. 45. Pp. 3283–3287.

24. *Kalmar-Nagy T., Stepan G., Moon F.C.* Subcritical HOPF bifurcation in the delay equation model for machine tool vibrations. Nonlinear Dyn., 2001. Vol. 26. Pp. 121–142.

25. *Kashchenko I.S., Kashchenko S.A.* Local dynamics of the model of a semiconductor laser with delay. Theoret. Math. Phys., 2023. Vol. 215. No. 2. Pp. 658–666.

26. *Kashchenko S.A., Mayorov V.V., Mayorova N.L.* Analiz kolebatel'nykh processov v seti impul'snykh nejronov [Analysis of oscillating processes in a spiking neural network]. Vestnik NIYaU MIFI, 2018. Vol. 7. No. 2. Pp. 138–162 (in Russian).

27. *Arik S.* Global asymptotic stability of a clarger lass of neural networks with constant time delay. Phys. Lett. A, 2003. Vol. 311. Pp. 504–511.

28. *Wu J., Campbell S.A., Belair J.* Time-delayed neural networks: stability and oscillations. In: Encyclopedia of Computational Neuroscience. Pp. 2966–2972. New York, Springer, 2015.

29. *Zhao H.* Exponential stability and periodic oscillatory of bidirectional associative memory neural network involving delays. Neurocomputing, 2006. Vol. 69. Pp. 424–448.

30. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Reakcionno-diffuzionnye uravnenija s zapazdyvaniem: Matematicheskie modeli i kachestvennye osobennosti [Reaction diffusion equations with delay: Mathematical models and qualitative features]. Vestnik NIYaU MIFI, 2017. Vol. 6. No. 1. Pp. 41–55 (in Russian).

31. *Wu J.* Theory and Applications of Partial Functional Dfferential Equations. New York, Springer, 1996.

32. *Wu J., Zou X.* Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay. J. Dynamics Differ. Equ., 2001. Vol. 13. No. 3. Pp. 651–687.

33. *Cohen D.S., Rosenblat S.* Multi-species interactions with hereditary effects and spatial diffusion. J. Math. Biol., 1979. Vol. 7. Pp. 231–241.

34. *Murray J.D.* Mathematical Biology, 3-rd ed. New York, Springer, 2002.

35. *Britton N.F.* Reaction-Diffusion Equations and Their Applications to Biology. New York, Academic Press, 1986.

36. *Cantrell R.S., Cosner C.* Spatial Ecology via Reaction Diffusion Equations. Chichester, John Wiley & Sons, 2003.

37. *Gourley S.A, So J. W.-H., Wu J.H.* Nonlocality of reaction-diffusion equations induced by delay: biological modeling and nonlinear dynamics. J. Math. Sci., 2004. Vol. 124. No. 4. Pp. 5119–5153.

38. *Aleshin S.V., Glyzin S.D., Kaschenko S.A.* Uravnenie Kolmogorova – Petrovskogo – Piskunova s zapazdyvaniem [Fisher Kolmogorov – Petrovskii–Piscounov equation with delay. Model. Anal. Inform. Sist., 2015. Vol. 2. No. 2. Pp. 304–321 (in Russian).

39. *Goryunov V.E.* Dynamics of solutions of logistic equation with delay and diffusion in a planar domain. Theor. Math. Phys., 2022. Vol. 212. No. 2. Pp. 1092–1110.

40. *Huang J., Zou X.* Traveling wavefronts in diffusive and cooperative Lotka–Volterra system with delays. J. Math. Anal. Appl., 2002. Vol. 271. Pp. 455–466.

41. *Song Y., Jiang H., Yuan Yu.* Turing- hopf bifurcation in the reaction-diffusion system with delay and application to a diffusive predator-prey model. J. Appl. Anal. Comput., 2019. Vol. 9. No. 3. Pp. 1132–1164.

42. *Trofimchuk E., Tkachenko V., Trofimchuk S.* Slowly oscillating wave solutions of a single species reaction-diffusion equation with delay. J. Differ. Equ., 2008. Vol. 245. Pp. 2307–2332.

43. *Bocharov G.A., Volpert V.A., Tasevich A.L.* Reaction diffusion equations in immunology. Comput. Math. Math. Phys., 2018. Vol. 58. Pp. 1967–1976.

44. *Hattaf K., Yousfi N.* A generalized HBV model with diffusion and two delays. Comput. Math. Appl., 2015. Vol. 69. No. 1. Pp. 31–40.

45. *Jia Yu.* Bifurcation and pattern formation of a tumor immune model with time-delay and diffusion. Math. Comput. Simul., 2020. Vol. 178. Pp. 92–108.

46. *Pan X., Shu H., Wang L., Wang X.-S.* Dirichlet problem for a delayed diffusive hematopoiesis model. Nonlinear Anal.: Real World Appl., 2019. Vol. 48. Pp. 493–516.

47. *Piotrowska M.J., Forys U.* A simple model of carcinogenic mutations with time delay and diffusion. Math. Biosci. Eng., 2013. Vol. 10. No. 3. Pp. 861–872.

48. *Ramirez-Carrasco C., Molina-Garay J.* Existence and approximation of traveling wavefronts for the diffusive Mackey – Glass equation. Aust. J. Math. Anal. Appl., 2021. Vol. 18. No. 1. Pp. 1–12.

49. *Cheng Y., Lu D., Zhou J., Wei J.* Existence of traveling wave solutions with critical speed in a delayed diffusive epidemic model. Adv. Differ. Equ., 2019, 494.

50. *Liu P.-P.* Periodic solutions in an epidemic model with diffusion and delay. Appl. Math. Comput., 2015. Vol. 265. Pp. 275–291.

51. *Zhu C.-C., Zhu J.* Dynamic analysis of a delayed COVID-19 epidemic with home quarantine in temporal-spatial heterogeneous via global exponential attractor method. Chaos Solit. Fractals, 2021. Vol. 143, 110546.

52. *Trofimchuk E., Pinto M., Trofimchuk S.* Traveling waves for a model of the Belousov – Zhabotinsky reaction. J. Differ. Equ., 2013. Vol. 254. Pp. 3690–3714.

53. *Zhang G.-B.* Asymptotics and uniqueness of traveling wavefronts for a delayed model of the Belousov–Zhabotinsky reaction. Applicable Analysis, 2020. Vol. 99. No. 10. Pp. 1639–1660.

54. *Cao Ya., Cao Yu., Guo Zh., Huang T., Wen Sh.* Global exponential synchronization of delayed memristive neural networks with reaction-diffusion terms. Neural Networks, 2020. Vol. 123. Pp. 70–81.

55. *Wang K., Teng Z., Jiang H.* Global exponential synchronization in delayed reaction-diffusion cellular neural networks with the Dirichlet boundary conditions. Math. Comput. Model., 2010. Vol. 52. Pp. 12–24.

56. *Yang Z., Xu D.* Global dynamics for non-autonomous reaction-diffusion neural networks with time-varying delays. Theor. Comput. Sci., 2008. Vol. 403. Pp. 3–10.

57. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I.* Differential equations with delay: Properties, methods, solutions and models. Moscow, IPMech RAS Publ., 2022.

58. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2014. Vol. 19. No. 3. Pp. 417–430.

59. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction diffusion equations with varying transfer coeffcients. Int. J. Non-Linear Mech., 2014. Vol. 67. Pp. 267–277.

60. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and dif-

fusion equations with finite relaxation time. Int. J. Non-Linear Mech., 2013. Vol. 54. Pp. 115–126.

61. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact separable solutions of delay reaction-diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2014. Vol. 19. No. 3. Pp. 409–416.

62. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction diffusion equations. Int. J. Non-Linear Mech., 2014. Vol. 59. Pp. 16–22.

63. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coeffients: Exact methods and new solutions. Appl. Math. Lett., 2014. Vol. 37. Pp. 43–48.

64. *Meleshko S.V., Moyo S.* On the complete group classification of the reaction-diffusion equation with a delay. J. Math. Anal. Appl., 2008. Vol. 338. Pp. 448–466.

65. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Postroenie tochnykh reshenij nelinejnykh uravnenij matematicheskoj fiziki s zapazdyvaniem s pomoshh'ju reshenij bolee prostykh uravnenij bez zapazdyvanija [Construction of exact solutions for nonlinear equations of mathematical physics with delay using solutions of simpler equations without delay]. Vestnik NIYaU MIFI, 2020. Vol. 9. No. 2. Pp. 115–128 (in Russian).

66. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Nelinejnye reakcionno-diffuzionnye uravnenija s zapazdyvaniem: Tochnye reshenija tipa begushhej Volny [Nonlinear delay reaction diffusion equations: Exact traveling wave solutions]. Vestnik NIYaU MIFI, 2015. Vol. 4. No. 2. Pp. 119–126 (in Russian).

67. *Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd ed. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2016.

68. *Tikhonov A.N., Samarskii A.A*. Equations of Mathematical Physics. New York, Dover Publ., 1990.

69. *Martin J.A., Rodriguez F., Company R.* Analytic solution of mixed problems for the generalized diffusion equation with delay. Math. Comput. Modelling, 2004. Vol. 40. Pp. 361–369.

70. *Reyes E., Rodriguez F., Martin J.A.* Analytic-numerical solutions of diffusion mathematical models with delays. Comput. Math. Appl., 2008. Vol. 56. Pp. 743–753.

71. *Khusainov D.Y., Ivanov A.F., Kovarzh I.V.* Solution of one heat equation with delay. Nonlinear Oscillations, 2009. Vol. 12. No. 2. Pp. 260–282.

72. *Khusainov D.Y., Pokojovy M., Azizbayov E.I.* On classical solvability for a linear 1D heat equation with constant delay. Konstanzer Schriften in Mathematik, 2013. No. 316.

73. *Khusainov D., Pokojovy M., Reinhard R.* Strong and mild extrapolated L^2-solutions to the heat equation with constant delay. SIAM J. Math. Anal., 2015. Vol. 47. No. 1. Pp. 427–454.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2023, т. 12, № 3, с. 165–169

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 519.8

ОПТИМАЛЬНЫЙ РЕЖИМ ИЗМЕНЕНИЯ МОЩНОСТИ ЯДЕРНОГО РЕАКТОРА В ПЕРИОД УГРОЗЫ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПРИ РАБОТЕ В ПЕРЕМЕННОМ СУТОЧНОМ ГРАФИКЕ НАГРУЗКИ

Е.В. Евстюхина*, А.М. Загребаев, А.В. Трифоненков
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия
**e-mail:* eev004@campus.mephi.ru

Поступила в редакцию: 12.07.2023
После доработки: 30.07.2023
Принята к публикации: 08.08.2023

В работе рассмотрен вариант обстоятельств, при которых атомная электростанция, работающая в переменном суточном графике нагрузки, получает сигнал о вероятном наступлении в ближайшее время экстремальных внешних воздействий, которые вынудят остановить реакторы. При этом персонал станции уполномочен установить режим, в котором реакторы будут работать в период угрозы до момента ее реализации или отмены. Приведен двухуровневый суточный график изменения мощности ядерного реактора. Считается, что предупреждение об угрозе поступает в начале периода, тогда на время угрозы экстремальных внешних воздействий мощность реактора устанавливается постоянной на уровне между дневным и ночным режимами. Поставлена и решена задача поиска оптимального уровня мощности, при этом функция потерь вычисляется как взвешенный вероятностями реализации и отмены угрозы суммарный экономический ущерб: из-за отступления от графика потребления в случае ложной тревоги; из-за простоя в йодной яме в случае совершившейся угрозы. Результаты работы позволяют сделать следующий вывод: при увеличении вероятности реализации угрозы растет эффект оптимизации, следовательно, следует изменить режим мощности до соответствующего уровня α. Приводятся оценки эффекта оптимизации.

Ключевые слова: оптимизация, катаклизм, ксеноновое отравление, энерговыработка, переменный суточный график нагрузки, средняя величина ущерба.
DOI: 10.26583/vestnik.2023.257

ВВЕДЕНИЕ

С начала широкого внедрения в электроэнергетику атомных электростанций возникла проблема их привлечения к работе в переменном суточном графике нагрузки. Связано это с неравномерностью потребления энергии в течение суток и невозможностью хранения в больших объемах избытка вырабатываемой электроэнергии. Отметим также, что эта проблема, прежде всего, актуальна для АЭС, работающих изолировано, вне единой энергетической системы страны. Как правило, эти АЭС (существующие и строящиеся в удаленных районах страны) являются единственными крупными источниками электроэнергии для промышленного региона и города. При этом помимо известной проблемы, связанной с физическими ограничениями за счет ксенонового отравления, возникает проблема работы в условиях возможности возникновения чрезвычайных ситуаций, порождаемых внешними воздействиями, которые носят как природный, так и техногенный характер [1, 2].

В этой связи можно говорить о том, что на режимы нормальной эксплуатации АЭС могут накладываться экстремальные обстоятельства, приводящие к необходимости временной аварийной остановке ядерного реактора. Если эта остановка носит кратковременный характер и ей предшествовало предупреждение о возможности экстремальных обстоятельств в некоторый период времени, то может иметь место несколько постановок задач по оптимизации ксенонового отравления ядерного реактора.

Например, в работе [3] рассматривается задача об оптимизации режима изменения мощности ядерного реактора в угрожаемый период с точки зрения минимизации среднего оперативного запаса реактивности на компенсацию ксенонового отравления после полной остановки. Показано, что оптимальным режимом после объявления об угрозе является снижение мощности до некоторого уровня.

МЕТОДЫ

В настоящей работе ставится задача о минимизации потери энерговыработки реактора следующим образом. Пусть реактор работает в переменном суточном графике нагрузки (рис. 1). В дневное время суток реактор работает на номинальном уровне мощности $w_н$, в ночное время мощность снижается до уровня $\varepsilon w_н$. Предположим, что в момент времени $t = 0$ объявляется о событии, представляющем угрозу нормальной эксплуатации АЭС (например, о землетрясении).

Поскольку угрожаемое событие носит вероятностный характер (оно может реализоваться или не реализоваться), необходимо принять решение, как поступать в данной ситуации.

Возможны следующие варианты.

1. Сразу же остановить реактор. Если угроза не реализовалась, это приведет к потере энерговыработки за счет простоя, в том числе в «йодной яме», даже при отбое тревоги. Если же угроза реализовалась в случайный момент времени t из интервала $(0, T)$, то потеря энергии в момент катастрофы и ликвидации ее последствий может привести к возрастанию ущерба.

2. Не останавливать реактор и продолжать работать в соответствии с суточным графиком нагрузки. Тогда, если угроза не реализовалась – потерь энерговыработки нет, но в случае реализации угрозы в случайный момент времени t реактор также попадает в «йодную яму», поскольку он вынужден останавливаться.

3. Компромиссный вариант – в момент объявления угрозы снизить уровень мощности до величины αw_n, где $\varepsilon \le \alpha \le 1$ и поддерживать его постоянным. Отметим, что при $\alpha = \varepsilon$ происходит снижение мощности до ночного уровня. Значение $\alpha < \varepsilon$ не рассматривается, поскольку это случай будет аналогичен полной остановки, так как величина оперативного запаса реактивности на компенсацию ксенонового отравления на снижения до уровня ниже штатного ночного не рассчитана.

Таким образом, требуется найти такой уровень снижения мощности αw_n, чтобы средний ущерб был минимальным.

Сформируем функцию ущерба следующим образом:

$$\Delta\bar{Q} = (1-p)[c_1 w_n(1-\alpha)t_0 + \\ + c_2(\alpha-\varepsilon)w_n(T-t_0)] + c_3 p\alpha w_n \tau_в(\alpha). \quad (1)$$

Пусть теперь p означает вероятность реализации угрозы и остановки реактора, а вероятность ложной тревоги $1-p$. На рис. 1 показана иллюстрация к сформированной функции ущерба. Рассмотрим случай, когда угроза не реализовалась. Как следует из рисунка, ущерб при этом будет:

$$(1-p)[c_1 w_n(1-\alpha)t_0 + c_2(\alpha-\varepsilon)w_n(T-t_0)],$$

где коэффициенты c_1 и c_2 отражают связь между потерей энерговыработки и ущербом в финансовом эквиваленте; слагаемое $[c_1 w_n(1-\alpha)t_0]$ понимается как ущерб в виде штрафа за недопоставленную потребителю энергию; слагаемое $[c_2(\alpha-\varepsilon)w_n(T-t_0)]$ понимается как ущерб в виде финансовых потерь при утилизации избытка произведенной энергии, например при продаже энергии потребителю по более низкой цене.

Если угроза реализовалась с вероятностью p, и реактор остановился, то ущерб будет определяться выражением:

$$\Delta\bar{Q} = c_3 \cdot p\alpha w_n \tau_в(\alpha),$$

где $\tau_в(\alpha)$ – время простоя в «йодной яме»; $\alpha w_n \tau_в(\alpha)$ – потеря энерговыработки за время простоя.

На рис. 2 показано поведение концентрации ксенона после полной остановки реактора с различного уровня мощности $\alpha w_н$. Из рис. 2 видно, что время простоя в йодной яме зависит от α.

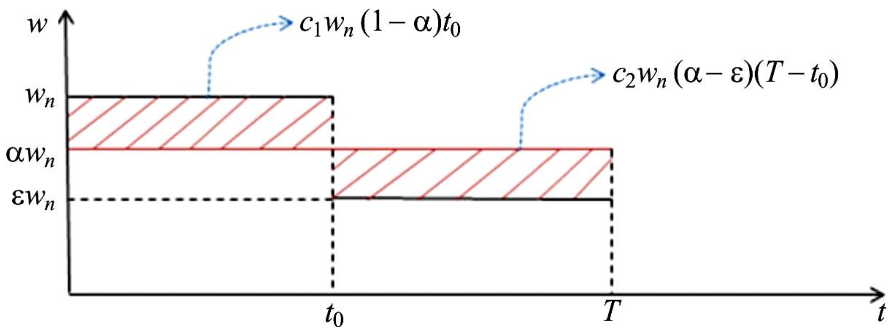


Рис. 1. Иллюстрация к постановке оптимизационной задачи

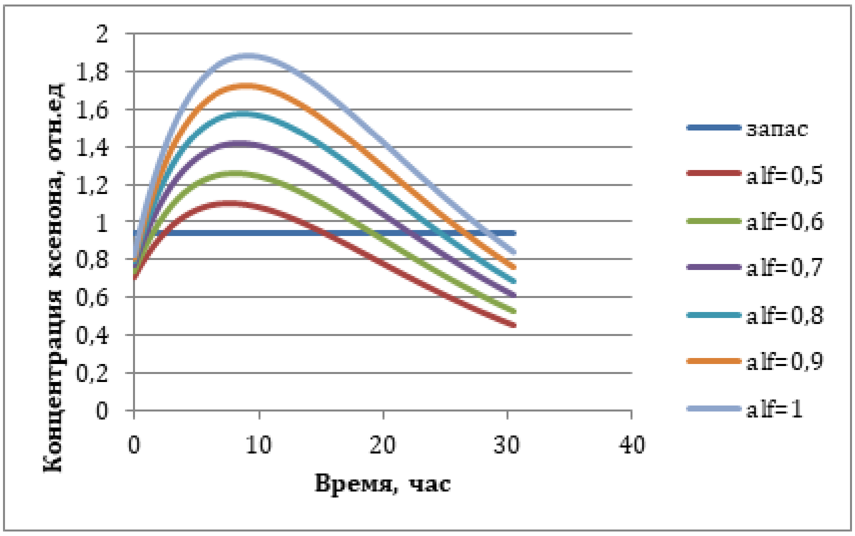


Рис. 2. Йодная яма при остановке с различного уровня мощности

Таким образом, для решения уравнения в общем случае необходимо аппроксимировать зависимость $\tau_в(\alpha)$.

Пусть $c_1 = c_2 = c$ – ущерб за недопоставку единицы энергии и ущерб за утилизацию единицы избытка энергии – одинаков.

Обозначим $r = \frac{c_3}{c}$ – коэфициент роста ущерба от потери энерговыработки при реализации угрозы. Тогда

$$\frac{\Delta\bar{Q}}{c} = (1-p)[w_n(1-\alpha)t_0 + +(\alpha-\varepsilon)w_n(T-t_0)] + rp\alpha w_n \tau_в(\alpha). \quad (2)$$

Оценки показывают, что время простоя в «йодной яме» в зависимости от степени снижения мощности $\tau_в(\alpha)$ имеет вид $\tau_в(\alpha) = = a + b\cdot\alpha$.

Выражение (2) может быть приведено к виду

$$\frac{\Delta\bar{Q}}{cw_nT} = (1-p)\left[(1-\alpha)\frac{t_0}{T} + + (\alpha-\varepsilon)\left(1-\frac{t_0}{T}\right)\right] + rp\alpha\left(\frac{a+b\cdot\alpha}{T}\right). \quad (3)$$

Обозначим в выражении (3) $\frac{t_0}{T} = \beta$, получим:

$$\frac{\Delta\bar{Q}}{cw_nT} = (1-p)[(1-\alpha)\beta + (\alpha-\varepsilon)(1-\beta)] + + rp\alpha\left(\frac{a+b\cdot\alpha}{T}\right), \text{ м.} \quad (4)$$

Требуется найти такой уровень снижения номинальной мощности α, чтобы функция $\frac{\Delta\bar{Q}}{cw_nT}(\alpha)$ принимала минимальное значение.

Решение уравнения $\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\Delta\bar{Q}}{cw_nT}\right) = 0$ есть

$$\alpha = \frac{T}{2b}\left\{\frac{(1-p)(2\beta-1)}{rp} - \frac{a}{T}\right\}.$$

Линейную зависимость $\tau_в(\alpha)$ удалось аппроксимировать. Оценки показывают, что параметры $\tau_в(\alpha)$ есть: $a = 15.491$, $b = 15.755$.

Таким образом

$$\alpha = \frac{T}{31.51}\left\{\frac{(1-p)(2\beta-1)}{rp} - \frac{15{,}491}{T}\right\}. \quad (5)$$

При переменном суточном графике нагрузки ($T = 24$ ч) получим:

$$\alpha = 0{,}761\left\{\frac{(1-p)(2\beta-1)}{rp} - 0.645\right\}. \quad (6)$$

Как видно из формулы (6), оптимальное решение зависит от вероятности реализации угрозы p и доли времени в течение суток, когда реактор работает на номинальной мощности β. Анализ показывает, что минимум функции потери достигается как внутри области допустимых значений $\varepsilon \le \alpha \le 1$, так и на границах. Например, при $\beta \le 0{,}5$ оптимальным будет решение $\alpha = \varepsilon$ при любом p.

В этом случае выражение (1) для средней потери энерговыработки принимает вид

$$S_{opt} = \frac{\Delta\bar{Q}}{cw_nT} = = (1-p)(1-\varepsilon)\beta + rp\varepsilon\left(\frac{a+b\cdot\varepsilon}{T}\right). \quad (7)$$

Для оценки эффекта оптимизации введем величину средней потери энерговыработки в случае, если режим работы реактора не меняется при объявлении возможной угрозы. Тогда в выражении (1) следует положить:

$$[c_1 w_n(1-\alpha)t_0 + c_2(\alpha-\varepsilon)w_n(T-t_0)] = 0.$$

Таким образом отсутствует ущерб от недопоставки и продажи излишка вырабатываемой энергии.

Средняя потеря энерговыработки в этом случае есть:

$$\frac{\Delta S}{cw_n} = \frac{r\cdot p}{T}\{t_0\tau_в(\alpha=1) + (T-t_0)\tau_в(\alpha=\varepsilon)\}. \quad (8)$$

После преобразований получим:

$$S_ш = \frac{\Delta\bar{S}}{cw_n T} =$$
$$= r\cdot p\{\beta\tau_в(\alpha=1) + (1-\beta)\tau_в(\alpha=\varepsilon)\}. \quad (9)$$

Относительный эффект оптимизации оценим как $\frac{S_ш - S_{opt}}{S_ш}\cdot 100$ %.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

По результатам расчетов построен график зависимости эффекта оптимизации от вероятности реализации угрозы (рис. 3).

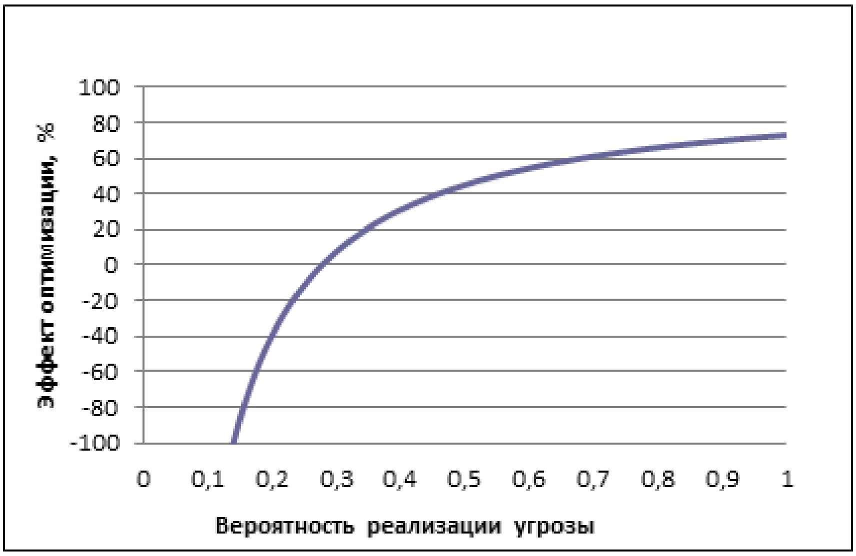


Рис. 3. Относительный эффект оптимизации

Из рис. 3 видно, что при вероятности реализации угрозы менее 30 % ($p < 0{,}3$) целесообразно не менять режим работы реактора. В противном случае следует поддерживать уровень мощности как в ночное время ($w = \varepsilon w_n$).

Из приведенных результатов следует, что при увеличении вероятности реализации угрозы растет эффект оптимизации. Следовательно, чем выше вероятность реализации угрозы, тем вероятнее будет изменение режима мощности до соответствующего уровня α.

Полученные результаты об оптимальном изменении уровня мощности реактора могут использоваться в качестве руководства регулирующими органами, ответственными за процесс принятия решений об остановке и повторном запуске станции после экстремальных обстоятельств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Герасимов А.С., Рудик А.П.* Отравление реактора ксеноном-135. М.: Энергоиздат. 1982, 95 с.
2. *Бирбаер А.Н., Роледер А.Ю.* Безопасность атомных электрических станций при экстремальных внешних воздействиях // Биосфера. 2010. Т. 2. № 2. С. 197–213.
3. *Загребаев А.М., Овсянникова Н.В., Садчиков С.М.* Оптимизация режима изменения мощности ядерного реактора в угрожаемый период при форс-мажорных обстоятельствах // Современные проблемы науки и образования. 2012. № 4.
4. *Анисур Рахман С.К., Увакин М.А.* Исследование изменения концентрации поглотителя при работе реактора ВВЭР-1000 в режиме маневрирования // Глобальная ядерная безопасность. 2020. № 2. С. 83–91.
5. *Климов А.Н.* Ядерная физика и ядерные реакторы. М.: Энергоатомиздат, 2002. 464 с.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 3, pp. 165–169

OPTIMAL LOAD-FOLLOWING NUCLEAR REACTOR POWER CONTROL DURING THE THREATENED PERIOD OF EXTREME EXTERNAL EFFECTS

E.V. Evstyukhina, A.M. Zagrebaev, A.V. Trifonenkov
National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, 115409 Russia

Received July 12, 2023; revised July 30, 2023; accepted August 8, 2023

The article considers a variant of circumstances under which a nuclear power plant operating in a variable daily load schedule receives a signal about the likely onset of extreme external influences in the near future, which will force the shutdown of the reactors. At the same time, the plant personnel is authorized to establish the mode in which the reactors will operate during the threat period until it is realized or canceled. A two-level daily graph of the change in the power of a nuclear reactor is given. It is believed that a threat warning is received at the beginning of the period, then, for the period of the threat of extreme external influences, the reactor power is set constant at a level between day and night regimes. The problem of finding the optimal power level was posed and solved, while the loss function is calculated as the total economic damage weighted by the probabilities of the implementation and cancellation of the threat: due to deviation from the consumption schedule in the event of a false alarm; due to downtime in the iodine pit in the event of a real threat. The results of the work allow us to draw the following conclusion: with an increase in the probability of a threat, the optimization effect increases, therefore, the power mode should be changed to the appropriate level α. Estimates of the optimization effect are given.

Keywords: optimization, cataclysm, xenon poisoning, power generation, variable daily load schedule, average damage.

REFERENCES

1. *Gerasimov A.S., Rudik A.P.* Otravleniye reaktora ksenonom-135 [Reactor poisoning with xenon-135]. Moscow: Energoizdat Publ., 1982. 95 p.

2. *Birbayer A.N., Roleder A.Yu.* Bezopasnost' atomnykh elektricheskikh stantsiy pri ekstremal'nykh vneshnikh vozdeystviyakh [Safety of nuclear power plants under extreme external influences]. Biosfera. 2010. Vol. 2. No. 2. Pp. 197–213 (in Russian).

3. *Zagrebayev A.M., Ovsyannikova N.V., Sadchikov S.M.* Optimizatsiya rezhima izmeneniya moshchnosti yadernogo reaktora v ugrozhayemyy period pri forsmazhornykh obstoyatel'stvakh [Optimization of the mode of changing the power of a nuclear reactor during a threatened period under force majeure circumstances]. Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya. 2012. No. 4 (in Russian).

4. *Anisur Rakhman S.K., Uvakin M.A.* Issledovaniye izmeneniya kontsentratsii poglotitelya pri rabote reaktora VVER-1000 v rezhime manevrirovaniya [Investigation of the change in the concentration of the absorber during the operation of the WWER-1000 reactor in the maneuvering mode]. Global'naya Yadernaya Bezopasnost'. 2020. No. 2. Pp. 83–91 (in Russian).

5. *Klimov A.N.* Yadernaya fizika i yadernyye reaktory [Nuclear physics and nuclear reactors]. Moscow: Energoatomizdat Publ., 2002. 464 p.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2023, т. 12, № 3, с. 170–177

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 004.5

МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА ИНТЕРПРЕТАЦИИ КОМАНД ДЛЯ МНОГОКАНАЛЬНОГО ЧЕЛОВЕКО-МАШИННОГО ИНТЕРФЕЙСА

Т.И. Возненко
Институт интеллектуальных кибернетических систем,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия
e-mail: TIVoznenko@mephi.ru

Поступила в редакцию: 24.08.2023
После доработки: 29.08.2023
Принята к публикации: 05.09.2023

В случае параллельного использования нескольких интерфейсов человеко-машинного взаимодействия существует задача выбора команды, при распознавании противоречивых команд, приходящих с различных интерфейсов. Для решения данной задачи может быть использован алгоритм декомпозиции. В случае декомпозиции для оператора выбирается наиболее эффективно работающая комбинация команд-интерфейсов, а остальные комбинации игнорируются. Существует улучшение алгоритма декомпозиции: алгоритм интерпретации команд, в котором данные игнорируемые комбинации используются для улучшения эффективности работы интерфейсов. В данной статье рассмотрены алгоритмы декомпозиции и интерпретации команд для многоканального человеко-машинного интерфейса, составлены и проанализированы блок-схемы работы данных алгоритмов. На основе данного анализа была предложена модификация алгоритма интерпретации команд для многоканального человеко-машинного интерфейса. Данная модификация позволяет уменьшить количество вычислений для исследования возможности интерпретации игнорируемой команды. Для сравнения существующего алгоритма интерпретации команд и его разработанной модификации был проведен ряд экспериментов, на основе сгенерированных матриц ошибок. Была показана целесообразность использования модифицированного алгоритма для высокоэффективно работающих интерфейсов.

Ключевые слова: человеко-машинный интерфейс, многоканальный интерфейс, алгоритм декомпозиции, алгоритм интерпретации, матрица ошибок.
DOI: 10.26583/vestnik.2023.265

ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных задач является повышение эффективности человеко-машинных интерфейсов. Для обеспечения эффективного использования интерфейса оператором проводятся исследования по улучшению существующих интерфейсов [1–2], или же рассматриваются реализации с параллельным использованием нескольких интерфейсов [3–4]. Однако при параллельном использовании интерфейсов существует задача выбора команды при распознавании нескольких противоречивых команд с различных интерфейсов [5]. Для решения данной задачи существуют несколько способов. В статье [6] был разработан алгоритм декомпозиции, основанный на выборе наиболее эффективного способа управления для многоканального человеко-машинного интерфейса. В статье [7] был разработан алгоритм интерпретации команд, который является улучшением алгоритма декомпозиции. В случае декомпозиции каждая команда может быть отдана оператором только с помощью одного, заранее определенного на основе анализа статистики, интерфейса. Алгоритм интерпретации рассматривает возможность интерпретации остальных команд-интерфейсов (channel-command [6]) для улучшения эффективности.

В данной статье рассматриваются алгоритмы декомпозиции и интерпретации, составляются и анализируются блок-схемы работы данных алгоритмов. На основе данного анализа предлагается модификация алгоритма интерпретации команд для многоканального человеко-машинного интерфейса.

АЛГОРИТМ ДЕКОМПОЗИЦИИ ДЛЯ МНОГОКАНАЛЬНОГО ЧЕЛОВЕКО-МАШИННОГО ИНТЕРФЕЙСА

Для начала рассмотрим один интерфейс, с помощью которого оператор-человек может выполнять n команд: $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$. Оценка эффективности распознавания каждой команды и работы интерфейса основана на матрице ошибок, которая составляется в ходе сбора статистики. Существуют матрицы ошибок с различными размерами: $n \times n$ [8], $n \times (n+1)$ [9], $(n+1) \times (n+1)$ [10]. В данной работе будет рассматриваться матрица $n \times (n+1)$. Для каждой команды проводится N испытаний, и полученные результаты записываются в виде матрицы ошибок $\boldsymbol{M}$:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1i} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1n} & m_{1n+1} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2i} & \dots & m_{2j} & \dots & m_{2n} & m_{2n+1} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ m_{i1} & m_{i2} & \dots & \boldsymbol{m_{ii}} & \dots & \boldsymbol{m_{ij}} & \dots & m_{in} & m_{in+1} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ m_{j1} & m_{j2} & \dots & \boldsymbol{m_{ji}} & \dots & \boldsymbol{m_{jj}} & \dots & m_{jn} & m_{jn+1} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{1i} & \dots & m_{nj} & \dots & m_{nn} & m_{nn+1} \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{m_{ij}}$ – количество исходов распознавания команды c_i как команды c_j. В данном случае m_{ii} – количество правильного распознавания переданной команды. Последний столбец означает случаи, когда команда была вызвана, но не была распознана.

В случае нескольких интерфейсов $P = (p_1, p_2, \dots, p_l)$ у каждого интерфейса p_s есть своя матрица ошибок $\boldsymbol{M_s}$. Алгоритм декомпозиции основан на нахождении таких команд-интерфейсов, при которых значение метрики t_i для каждой команды c_i будет максимальным. В статье [6] в качестве данной метрики t рассматривается $MTnP$, где $MTnP_i = TPRi * PPV_i$ (true positive rate * positive predictive value).

Если у команды c_i максимальное значение метрики t_i будет при использовании интерфейса p_s, то мы записываем данное значение в ассоциативный массив $cmdCh[c_i] = p_s$. Это означает, что оператор для выполнения команды c_i должен использовать только интерфейс p_s, так как для данного интерфейса наблюдается наибольшая эффективность при распознавании команды. Блок-схема алгоритма декомпозиции построена и представлена на рис. 1,*а*.

Комбинация команд-интерфейсов, которую разрешено использовать оператору – будем называть разрешенными команд-интерфейсами. Остальные команд-интерфейсы игнорируются. Данные команд-интерфейсы будем называть запрещенными, так как мы запрещаем оператору их выполнять, потому что их выполнение приведет к снижению эффективности распознавания команд и работы интерфейсов. Алгоритм интерпретации рассматривает возможность интерпретации запрещенных команд-интерфейсов, как разрешенные.

АЛГОРИТМ ИНТЕРПРЕТАЦИИ КОМАНД ДЛЯ МНОГОКАНАЛЬНОГО ЧЕЛОВЕКО-МАШИННОГО ИНТЕРФЕЙСА

В статье [7] был рассмотрен алгоритм интерпретации команд на частном примере. Рассмотрим в общем виде, что будет с матрицей ошибок, если мы будем игнорировать команду c_k в одном из интерфейсов. В случае игнорирования команды c_k получаем матрицу $\boldsymbol{M^{Ign\,k}}$ (ignore). При игнорировании команды c_k все прошлые распознавания команды c_k в результате выполнения других команд перейдут в столбец $n+1$, так как теперь этой команды не существует для данного интерфейса (т.е. команда не будет распознана).

При интерпретации команды c_k в качестве команды c_i следует изменить элементы столбца i: $\boldsymbol{m_{ji}}$ на $\boldsymbol{m_{ji}} + \boldsymbol{m_{jk}}$ $j = 1,2, \dots n$; т.е. ситуацию, когда при выполнении команды c_i распознается команда c_k, считать корректной. В случае интерпретации команды c_k в качестве команды c_i получаем матрицу $\boldsymbol{M^{Int\,k}}$ (interpretation *k*):

$$\boldsymbol{M^{Ign\,k}} = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1i} & \dots & m_{1n} & m_{1n+1} + \boldsymbol{m_{1k}} \\ m_{21} & \dots & m_{2i} & \dots & m_{2n} & m_{2n+1} + \boldsymbol{m_{2k}} \\ - & - & - & - & - & - \\ m_{i1} & \dots & m_{ii} & \dots & m_{in} & m_{in+1} + \boldsymbol{m_{ik}} \\ - & - & - & - & - & - \\ \\ - & - & - & - & - & - \\ m_{n1} & \dots & m_{1i} & \dots & m_{nn} & m_{nn+1} + \boldsymbol{m_{nk}} \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{M^{Int\,k}} = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1i} + \boldsymbol{m_{1k}} & \dots & m_{1n} & m_{1n+1} \\ m_{21} & \dots & m_{2i} + \boldsymbol{m_{2k}} & \dots & m_{2n} & m_{2n+1} \\ - & - & - & - & - & - \\ m_{i1} & \dots & m_{i} + \boldsymbol{m_{ik}} & \dots & m_{in} & m_{in+1} \\ - & - & - & - & - & - \\ \\ - & - & - & - & - & - \\ m_{n1} & \dots & m_{1i} + \boldsymbol{m_{nk}} & \dots & m_{nn} & m_{nn+1} \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы решить, применить ли интерпретацию или игнорирование команды, следует рассмотреть приращение параметра $\boldsymbol{MTnP}$ среди этих случаев:

$$\boldsymbol{\Delta_i}^{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{MTnP_i}^{\boldsymbol{Int\,k}} - \boldsymbol{MTnP_i}^{\boldsymbol{Ign\,k}} =$$

$$= \frac{(\boldsymbol{m_{ii}} + \boldsymbol{m_{ik}})^2}{\boldsymbol{N} * \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} (\boldsymbol{m_{ji}} + \boldsymbol{m_{jk}})} - \frac{\boldsymbol{m_{ii}^2}}{\boldsymbol{N} * \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} \boldsymbol{m_{ji}}}. \quad (1)$$

Таким образом, рассмотрев все команды, можно интерпретировать запрещенную команду как ту, у которой будет наибольшее положительное значение приращения $\boldsymbol{\Delta}$. Если для всех команд значение приращения $\boldsymbol{\Delta}$ является отрицательным, то данную команду нужно игнорировать, другими словами – интерпретировать как неизвестную команду. Блок-схема алгоритма интерпретации построена и представлена на рис. 1,*б*, а на рис. 2 представлена построенная блок-схема алгоритма интерпретации неиспользуемых команд-интерфейсов на основе вычисления $\boldsymbol{\Delta}$.

Так как игнорирование команд ведет к тому, что часть команд у интерфейса перестает использоваться и, следовательно, уменьшается количество ошибок, связанных с тем, что данные неиспользуемые команды будут ложно распознаваться как используемые, то при получении комбинации команд-интефейсов используются три метрики $t \in (TPR, PPV, MTnP)$. Целесообразность использования таких метрик показана в результатах тестирования [7].

В итоге с помощью алгоритма декомпозиции определяется команд-интерфейсов $cmdCh$, а затем в результате алгоритма интерпретации находится комбинация команд-интерфейсов $interpretation$. В качестве итоговой комбинации выбирается та, которая будет иметь наибольшую эффективность.

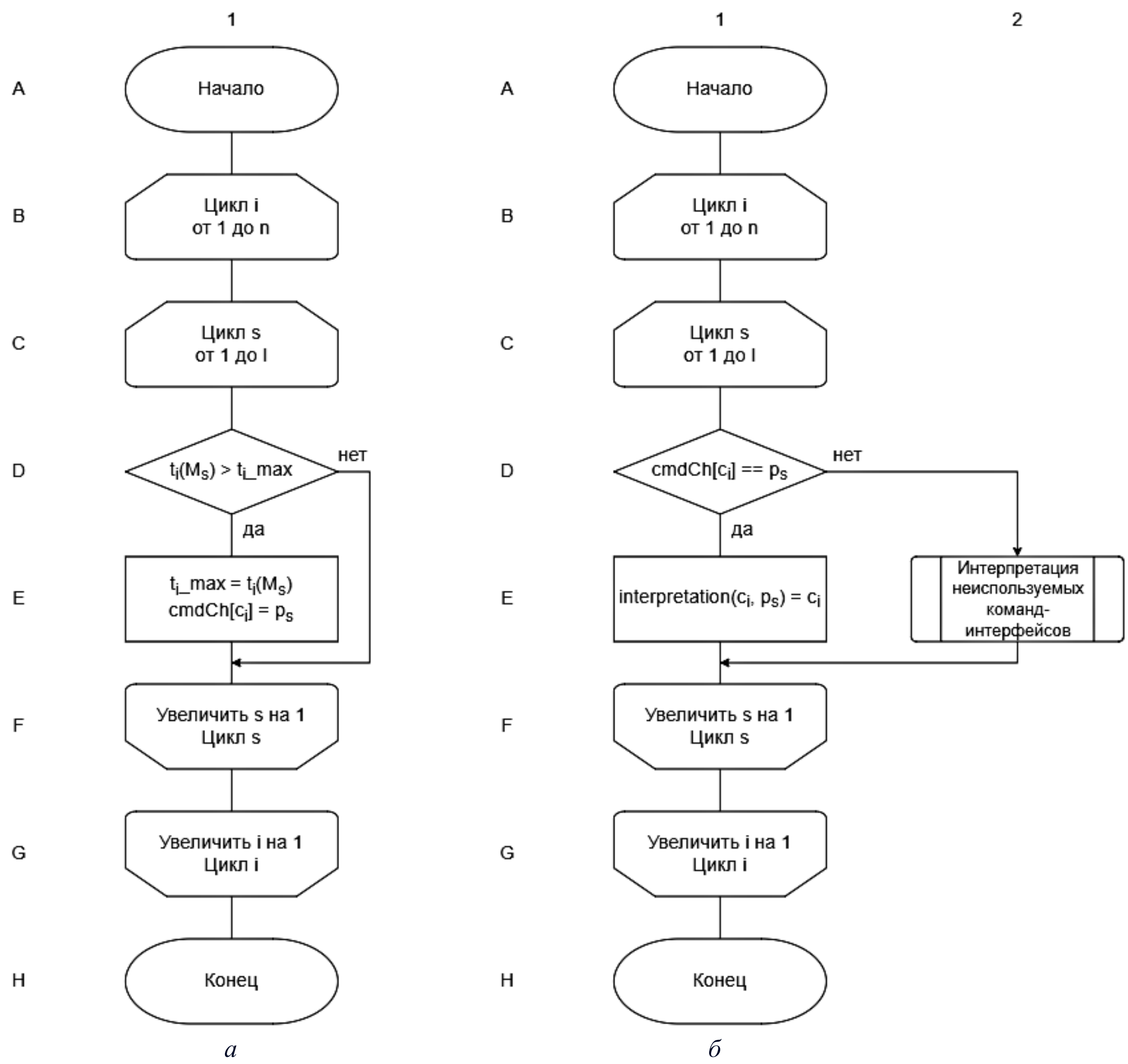


Рис. 1. Общие алгоритмы декомпозиции (*а*) и интерпретации (*б*)

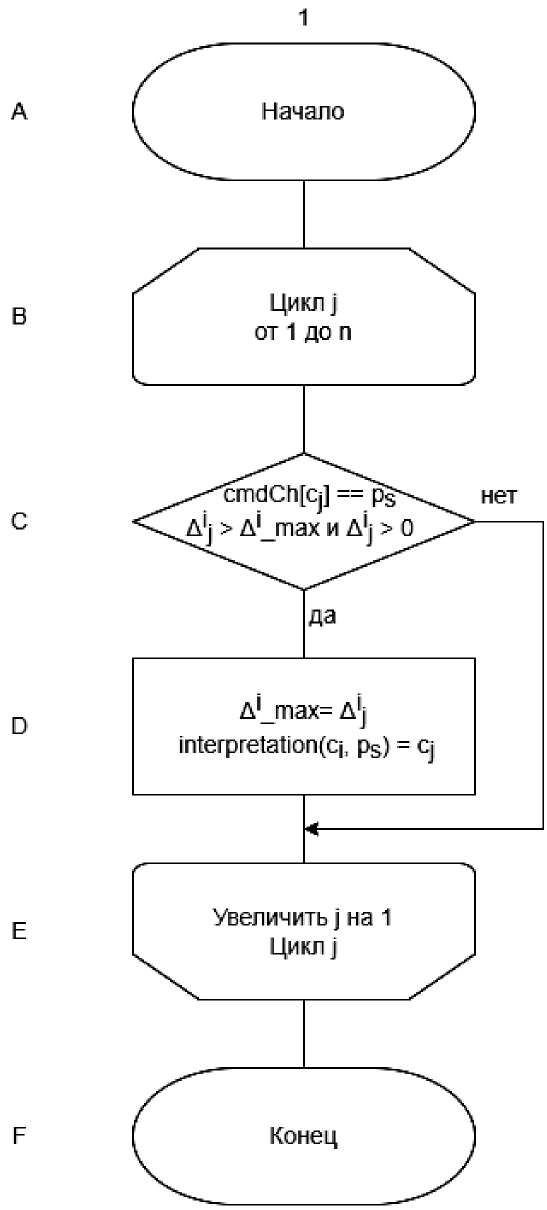


Рис. 2. Алгоритм интерпретации не используемых команд-интефейсов

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ИНТЕРПРЕТАЦИИ КОМАНД ДЛЯ МНОГОКАНАЛЬНОГО ЧЕЛОВЕКО-МАШИННОГО ИНТЕРФЕЙСА

Рассмотрим следующий пример. Пусть для одного интерфейса в результате проведения эксперимента, в рамках которого каждая команда была вызвана 100 раз, была получена следующая матрица ошибок (показано в табл. 1). Пусть для данного интерфейса команды c_1 и c_4 являются разрешенными, а команды c_2, c_3 и c_5 – запрещенными для выполнения. Однако так как интерфейсы работают не идеально, то возможны случаи ложного распознавания команд c_2, c_3 и c_5. Так как команды c_2, c_3 и c_5 оператор не может вызвать с данного интерфейса, то строки матрицы, где они вызываются, можно убрать (показано в табл. 2).

Таблица 1. Пример матрицы ошибок

Вызванная команда	Результат распознавания команды					
	c1	**c2**	**c3**	**c4**	**c5**	Команда не распознана
c1	96	1	0	1	0	2
c2	3	95	0	1	1	0
c3	2	2	94	2	0	0
c4	0	3	0	97	0	0
c5	2	4	0	0	92	2

Таблица 2. Пример матрицы ошибок с учетом вызова только разрешенных команд

Вызванная команда	Результат распознавания команды					
	c1	**c2**	**c3**	**c4**	**c5**	Команда не распознана
c1	96	1	0	1	0	2
c4	0	3	0	97	0	0

Для того чтобы понять, можно ли интерпретировать команду c_2 как c_1 или c_4, необходимо рассчитать значение $\boldsymbol{\Delta}$ для этих двух случаев. Если рассмотреть формулу расчета $\boldsymbol{\Delta}$ (1) и рассмотреть только зависимость от k, то получается что $\boldsymbol{\Delta_i}^{\boldsymbol{k}}$ будет стремиться к наибольшему значению, в случае если $\boldsymbol{m_{ik}}$ будет наибольшим, а $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n+1} \boldsymbol{m_{jk}}$ – наименьшим. Получается что для того, чтобы понять, с какой командой c_i стоит интерпретировать команду c_k, необходимо посмотреть на столбец k, и найти в нем наибольший положительный элемент, относящийся к команде, которая является частью $cmdCh$ комбинации. Если в таком случае приращение $\Delta_i{}^k$ будет положительным, то необходимо интерпретировать команду c_j как c_i, что приведет к улучшению эффективности работы системы. В случае если приращение $\Delta_i{}^k$ будет отрицательным, необходимо игнорировать команду. В текущем примере для того чтобы понять, стоит ли интерпретировать команду c_2 как c_1 или c_4, достаточно посмотреть на второй столбец и первую и четвертую строки. Так как случаев, когда мы отдали команду c_4, а была распознана команда c_2 больше, то достаточно рассчитать $\boldsymbol{\Delta_{i=4}}^{\boldsymbol{k=2}}$ для табл. 1. Если сравнить

$\mathbf{\Delta_4}^{\mathbf{2}}$ и $\mathbf{\Delta_1}^{\mathbf{2}}$, то действительно $\mathbf{\Delta_4}^{\mathbf{2}}$ является наибольшим значением $\mathbf{\Delta}$, так как $\mathbf{\Delta_4}^{\mathbf{2}} = 0.020 > \mathbf{\Delta_1}^{\mathbf{2}} = -0.019$.

Полученный алгоритм интерпретации команд является упрощенным, по сравнению с первоначальным алгоритмом, так как в нем вместо нахождения максимального приращения по всем командам ищется максимальный элемент столбца i. В частном случае, если в столбце k будет несколько наибольших элементов, то для всех таких команд необходимо рассчитать $\Delta_i{}^k$. Блок-схема нового алгоритма интерпретации построена и представлена на рис. 3.

СХЕМА ЭКСПЕРИМЕНТА

Тестирование проводится на основе моделирования матриц ошибок для пяти команд. Для сравнения существующего алгоритма интерпретации и его разработанной модификации будут вычисляться все значения $\Delta_i{}^k$ и затем проводиться сравнение, действительно ли $\Delta_i{}^k$ будет максимальным при наибольшем элементе в столбце k.

Генерирование матрицы ошибок будет производиться на основе Base параметра [7], обозначающего минимальное правильное количество распознавания команды (выбор Base значений: 80, 85, 87, 90, 95, 97). Рассмотрим 1000000 матриц ошибок для каждого Base значения.

Эксперимент состоит из следующих шагов:

1. Выбор Base ∈ (80, 85, 87, 90, 95, 97). Вначале рассмотрим Base = 80.
2. Генерирование матрицы ошибок на основе Base значения.
3. Выбирается команда, которая объявляется запрещенной командой. Вначале это первая команда. Остальные команды являются разрешенными.
4. Согласно оригинальному алгоритму интерпретации происходит вычисление значений $\mathbf{\Delta}$, для того чтобы определить можно ли интерпретировать запрещенную команду как одну из разрешенных. Интерпретация происходит для команды, имеющей наибольшее положительное значение $\mathbf{\Delta}$. Происходит подсчет количества вызовов вычисления функции $\mathbf{\Delta}$.
5. Согласно улучшенному алгоритму интерпретации происходит анализ столбца матрицы ошибок для запрещенной команды. Вычисляется $\mathbf{\Delta}$ значение для команды, имеющей наибольшее значение в столбце. Происходит подсчет количества вызовов вычисления функции $\mathbf{\Delta}$.

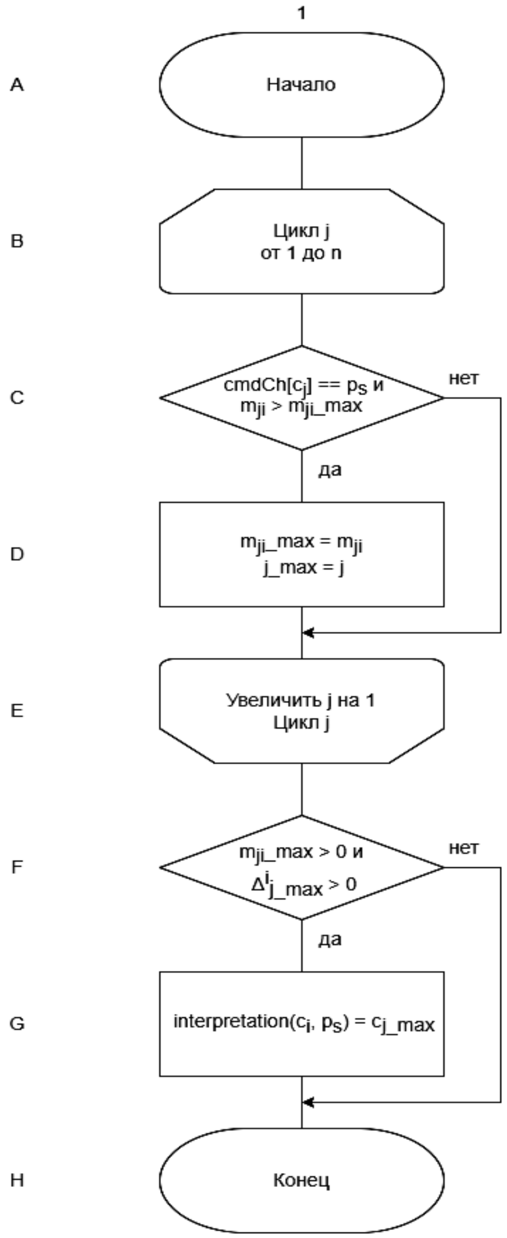


Рис. 3. Улучшенный алгоритм интерпретации не используемых команд-интефейсов

6. Сравнивается результат работы алгоритма интерпретации и его улучшения путем сравнения наибольших положительных $\mathbf{\Delta}$ значений. Различные отрицательные $\mathbf{\Delta}$ значения не рассматриваются, так как при такой ситуации команда будет игнорироваться, а не интерпретироваться.
7. Шаг 3–6 выполняется для всех команд, от первой до пятой.
8. Шаг 2–7 выполняется для 100000 случайных матриц ошибок, сгенерированных согласно выбранному Base значению.
9. Шаг 1–8 выполняется для остальных значений Base.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В результате проведенного тестирования были получены следующие результаты, представленные в табл. 3 и 4.

Таблица 3. Результат сравнения алгоритма интерпретации и его модификации

Base значение	Доля разных положительных значений $\boldsymbol{\Delta}$, при алгоритме интерпретации и его улучшения, %	Среднее различие положительных значений $\boldsymbol{\Delta}$, при алгоритме интерпретации и его улучшения	Максимальное различие положительных значений $\boldsymbol{\Delta}$, при алгоритме интерпретации и его улучшения
80	0.04628	$1.4 \cdot 10^{-6}$	0.02
85	0.00158	$2.6 \cdot 10^{-8}$	0.006
87	0.00012	$1.2 \cdot 10^{-9}$	0.002
90	0	0	0
95	0	0	0
97	0	0	0

В табл. 4 представлены результаты сравнения количества вызовов функции $\boldsymbol{\Delta}$. В целом вызовов функции вычисления $\boldsymbol{\Delta}$ для улучшенного алгоритма требовалось меньше за счет анализа наибольшего положительного элемента в столбце игнорируемой команды. Для Base = = 97 наблюдается уменьшение количества вызовов функции вычисления $\boldsymbol{\Delta}$ значения, по сравнению с Base = 95, поскольку в алгоритме учитывается наибольший положительный элемент, а в случае Base = 97 было больше случаев, когда наибольший элемент был равен 0, из-за чего пропадала необходимость вычисления $\boldsymbol{\Delta}$ значения, и команда игнорировалась.

В табл. 3 представлены сравнения результатов работ алгоритма интерпретации и его улучшения. Из полученных результатов видно, что возможны различия работы алгоритма при Base ∈ (80, 85, 87). Данный результат был получен с учетом того, что улучшенный алгоритм рассматривает зависимость от k, а при Base ∈ (80, 85, 87) высокое влияние оказывают $\boldsymbol{m_{ji}}$ элементы матрицы ошибки. Однако таких случаев очень мало, например при Base = 80 доля разных значений составляет около 0.05 %, а при Base = 87 – около 0.0001 %. При этом максимальное различие положительных значений $\boldsymbol{\Delta}$ при алгоритме интерпретации и его улучшения при Base = 80 составляет 0.02, а при Base = = 87 – 0.002.

Таблица 4. Сравнение количество вызовов функции

Base значение	Количество вызовов функции вычисления $\boldsymbol{\Delta}$ значения (* 10^6)	
	для алгоритма интерпретации	для улучшенного алгоритма интерпретации
80	20.0	5.8
85	20.0	6.1
87	20.0	6.3
90	20.0	6.7
95	20.0	7.5
97	20.0	6.4

При высоком значении Base ∈ (90, 95, 97) алгоритмы показывают одинаковый результат. Таким образом, улучшенный алгоритм можно применять для интерфейсов, которые имеют высокое значение правильного распознавания команд.

ВЫВОДЫ

В данной статье были составлены и проанализированы блок-схемы работы алгоритмов декомпозиции и интерпретации. Была предложена модификация алгоритма интерпретации, которая приводит к уменьшению количества вызовов функции вычисления $\boldsymbol{\Delta}$. Было показано, что предложенная модификация алгоритма работает для интерфейсов с изначально высоким значением правильного распознавания команд ($TP \geq 90$). В остальных случаях улучшенный алгоритм показал разногласия в меньше чем 0.1 % случаях. Полученный результат можно обосновать высоким влиянием $\boldsymbol{m_{ji}}$ элементов матрицы ошибки. Алгоритм можно улучшить, рассматривая не только максимальный положительный элемент в столбце, а несколько элементов, близких к максимальному значению. Однако данная модификация приведет к усложнению алгоритма. Поэтому предложенный улучшенный алгоритм интерпретации рекомендуется применять для высокоэффективно работающих интерфейсов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Singh A., Hussain A.A., Lal S., Guesgen H.W.* A comprehensive review on critical issues and possible solutions of motor imagery based electroencephalography brain-computer interface // Sensors. 2021. Vol. 21. No. 6, 2173. DOI: 10.3390/s21062173.

2. *Heldman D.A., Moran D.W.* Local field potentials for BCI control // Handbook of clinical neurology. 2020. Vol. 168. P. 279–288. DOI: 10.1016/B978-0-444-63934-9.00020-2.

3. *Ladouce S., Mustile M., Ietswaart M., Dehais F.* Capturing Cognitive Events Embedded in the Real World Using Mobile Electroencephalography and Eye-Tracking // Journal of Cognitive Neuroscience. 2022. Vol. 34. № 12. P. 2237–2255. DOI: 10.1162/jocn_a_01903.

4. *Belkacem A.N., Lakas A.* A Cooperative EEG-based BCI Control System for Robot–Drone Interaction // International Wireless Communications and Mobile Computing (IWCMC), IEEE. 2021. P. 297–302. DOI: 10.1109/IWCMC51323.2021.9498781.

5. *Gridnev A.A., Voznenko T.I., Chepin E.V.* The decision-making system for a multi-channel robotic device control // Procedia computer science. 2018. Vol. 123. P.149–154. DOI: 10.1016/j.procs.2018.01.024.

6. *Voznenko T.I., Gridnev A.A., Kudryavtsev K.Y., Chepin E.V.* The decomposition method of multi-channel control system based on extended bci for a robotic wheelchair // Biologically Inspired Cognitive Architectures Meeting, Springer. Cham. 2019. P. 562–567. DOI: 10.1007/978-3-030-25719-4_73.

7. *Voznenko T.I., Gridnev A.A., Chepin E.V., Kudryavtsev K.Y.* The command interpretation in decomposition method of multi-channel control for a robotic device // Procedia Computer Science. 2020. Vol. 169. P. 152–157. DOI: 10.1016/j.procs.2020.02.127.

8. *Liu J., Zhong L., Wickramasuriya J., Vasudevan V.* uWave: Accelerometer-based personalized gesture recognition and its applications // Pervasive and Mobile Computing. 2009. Vol. 5. № 6. P. 657–675. DOI: 10.1016/j.pmcj.2009.07.007.

9. *Abdelnasser H., Youssef M., Harras K.A.* Wigest: A ubiquitous wifi-based gesture recognition system // 2015 IEEE conference on computer communications (INFOCOM). IEEE. 2015. P. 1472–1480. DOI: 10.1109/INFOCOM.2015.7218525.

10. *Nuzzi C., Pasinetti S., Lancini M., Docchio F., Sansoni G.* Deep learning-based hand gesture recognition for collaborative robots // IEEE Instrumentation & Measurement Magazine. 2019. Vol. 22. № 2. P. 44–51. DOI: 10.1109/MIM.2019.8674634.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 3, pp. 170–177

THE MODIFICATION OF COMMAND INTERPRETATION ALGORITHM FOR A MULTI-CHANNEL HUMAN-MACHINE INTERFACE

T.I. Voznenko
Institute of Cyber Intelligence Systems
National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, 115409, Russia
**e-mail: TIVoznenko@mephi.ru*

Received August 24, 2023; revised August 29, 2023; accepted September 5, 2023

In the case of parallel use of several human-machine interfaces, there is a problem of command selection, when recognizing conflicting commands coming from different interfaces. To solve this problem, the decomposition algorithm can be used. In the case of decomposition, the most efficient combination of command-interfaces is selected for the operator, and the remaining combinations are ignored. There is an improvement to the decomposition algorithm: the command interpretation algorithm in which these ignored combinations are used to improve the efficiency of the interfaces. In this article, the decomposition and interpretation of commands algorithms for multi-channel human-machine interface are considered, and flowcharts of these algorithms are designed and analyzed. Based on this analysis, the modification of the command interpretation algorithm for a multi-channel human-machine interface was proposed. This modification allows to reduce the number of calculations to investigate the possibility of interpreting an ignored command. To compare the existing command interpretation algorithm and its developed modification, a number of experiments were carried out based on the generated confusion matrices. The expediency of using a modified algorithm for highly efficient interfaces was shown.

Keywords: human-machine interface, multi-channel interface, decomposition algorithm, interpretation algorithm, confusion matrix.

REFERENCES

1. *Singh A., Hussain A.A., Lal S., Guesgen H.W.* A comprehensive review on critical issues and possible solutions of motor imagery based electroencephalography brain-computer interface. Sensors. 2021. Vol. 21. No. 6. 2173. DOI: 10.3390/s21062173.

2. *Heldman D.A., Moran D.W.* Local field potentials for BCI control. Handbook of clinical neurology, 2020, Vol. 168. Pp. 279–288. DOI: 10.1016/B978-0-444-63934-9.00020-2.

3. *Ladouce S., Mustile M., Ietswaart M., Dehais F.* Capturing Cognitive Events Embedded in the Real World Using Mobile Electroencephalography and Eye-Tracking. Journal of Cognitive Neuroscience, 2022. Vol. 34. No. 12. Pp. 2237–2255. DOI: 10.1162/jocn_a_01903

4. *Belkacem A.N., Lakas A.A.* Cooperative EEG-based BCI Control System for Robot–Drone Interaction. International Wireless Communications and Mobile Computing (IWCMC). IEEE. 2021. Pp. 297–302. DOI: 10.1109/IWCMC51323.2021.9498781.

5. *Gridnev A.A., Voznenko T.I., Chepin E.V.* The decision-making system for a multi-channel robotic device control. Procedia computer science. 2018. Vol. 123. Pp. 149–154. DOI: 10.1016/j.procs.2018.01.024.

6. *Voznenko T.I., Gridnev A.A., Kudryavtsev K.Y., Chepin E.V. The decomposition method of multi-channel control* system based on extended bci for a robotic wheelchair. Biologically Inspired Cognitive Architectures Meeting, Springer, Cham. 2019. Pp. 562–567. DOI: 10.1007/978-3-030-25719-4_73.

7. *Voznenko T.I., Gridnev A.A., Chepin E.V., Kudryavtsev K.Y.* The command interpretation in decomposition method of multi-channel control for a robotic device. Procedia Computer Science. 2020. Vol. 169. Pp. 152–157. DOI: 10.1016/j.procs.2020.02.127.

8. *Liu J., Zhong L., Wickramasuriya J., Vasudevan V.* uWave: Accelerometer-based personalized gesture recognition and its applications. Pervasive and Mobile Computing. 2009. Vol. 5. No. 6. Pp. 657–675. DOI: 10.1016/j.pmcj.2009.07.007.

9. *Abdelnasser H., Youssef M., Harras K.A.* Wigest: A ubiquitous wifi-based gesture recognition system. 2015 IEEE conference on computer communications (INFOCOM), IEEE, 2015. Pp. 1472–1480. DOI: 10.1109/INFOCOM.2015.7218525.

10. *Nuzzi C., Pasinetti S., Lancini M., Docchio F., Sansoni G.* Deep learning-based hand gesture recognition for collaborative robots. IEEE Instrumentation & Measurement Magazine, 2019. Vol. 22. No. 2. Pp. 44–51. DOI: 10.1109/MIM.2019.8674634.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2023, т. 12, № 3, с. 178–182

АВТОМАТИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

УДК 535.8+621.38+621.391.64+621.3.087.92

ИССЛЕДОВАНИЕ СХЕМЫ УДВОЕНИЯ ЧАСТОТЫ СЛЕДОВАНИЯ СВЕРХКОРОТКИХ СВЕТОВЫХ ИМПУЛЬСОВ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВЫБОРКИ АНАЛОГО-ЦИФРОВЫХ ФОТОННЫХ СИСТЕМ

Е.Ю. Злоказов*[1]*, В.А. Небавский*[1], Р.С. Стариков*[1]**

[1]*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия*

**e-mail: VANebavskii@mephi.ru*

Поступила в редакцию: 27.08.2023
После доработки: 05.09.2023
Принята к публикации: 05.09.2023

Рассмотрена и экспериментально испытана система удвоения частоты следования коротких оптических импульсов лазера в режиме синхронизации мод, предназначенная для формирования последовательности выборки в аналого-цифровых фотонных системах. Основной идеей умножения частоты следования оптических импульсов является разделение исходной импульсной последовательности, а затем относительная временная задержка разделенных сигналов и их сложение. Разделение и сложение могут осуществляется разветвителями либо демультиплексорами. Представлено аналитическое описание зависимости временной задержки в плечах на сигнал и спектр, полученной в ходе фотодектирования сформированной последовательности. Величина задержки между импульсами регулируется таким образом, чтобы минимизировать нежелательные спектральные составляющие на кратных частоте повторений лазера частотах в СВЧ-спектре фотодетектированной последовательности; в работе минимизировались члены нечетного порядка. Показано, что на максимальную точность предложенного метода также влияет различие мощности складываемых импульсов. В ходе сопоставления полученных в экспериментах данных с результатами численного моделирования удалось достичь точности рассогласования во времени между каналами не более 100 фемтосекунд, а по мощности – не более 1 %. Апертурная ошибка, вычисленная по результатам измерения фазовых шумов, составила 10.2 фемтосекунды.

Ключевые слова: микроволновая фотоника, радиофотоника, оптическая выборка, апертурная ошибка, джиттер.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.264

Современные лазерные источники с низким уровнем фазовых шумов находят применение при построении систем микроволновой фотоники, реализующих оптическую выборку электрических сигналов [1–10 и мн. др.]. В частности, лазеры, работающие в режиме синхронизации мод (ЛСМ), используются в качестве источников импульсных последовательностей выборки, малая апертурная ошибка («джиттер») которых обеспечивает потенциально высокую точность итогового цифрового представления обрабатываемого сигнала. Именно малая апертурная ошибка, в совокупности с широкополосностью и потенциально высокой энергоэффективностью аналого-цифровых систем микроволновой фотоники, определяет фундаментальный интерес к их реализации, несмотря на то, что при существующем уровне техники их точность в большей степени ограничена другими факторами [5–9, 11]. Импульсы ЛСМ могут использоваться непосредственно в качестве последовательности выборки, другой же вариант состоит в формировании мультиспектральной последовательности выборки, канализируемой с помощью демультиплексоров по длине волны; такие системы обеспечивают также возможности увеличения ширины полосы преобразования, пропорционально числу используемых спектральных каналов, при параллельной обработке в них без повышения частоты выборки. В обоих случаях на практике возникает потребность в повышении исходной частоты следования импульсов ЛСМ, в частности, в настоящее время практический интерес представляет получение последовательностей с частотами 2–10 ГГц. Технически возможны различные варианты повышения частоты следования импульсов ЛСМ, в их основе – деление исходного сигнала с его последующими повторением и/или задержкой, при этом, для сформированной последовательности необходимо обеспечить эквидистантность следования импульсов при сохранении низкой апертурной ошибки. Эквидистантность следования достигается путем контроля задержек оптических импульсов после деления исходной последовательности ЛСМ, при этом важны точность реализации и возможность подстройки элементов, выполняющих задержку. Современная мировая практика показывает, что возможно обеспечение эквидистантности с фемтосекундной точностью, более того, в этом случае возможна автоматизация необходимых подстроек системы [12]. К сожалению, по объективным физическим причинам, апертурная ошибка получаемых импульсных последовательностей может только увеличиваться относительно исходной и не может быть скомпенсирована; адекватная оценка такой деградации апертурной ошибки практически важна при построении реальных систем. В данной работе рассматривается практичная система удвоения частоты следования ЛСМ, реализованная на коммерчески доступных пассивных оптоволоконных компонентах.

Основной идеей умножения частоты следования оптических импульсов является разделение исходной импульсной последовательности, а затем относительная временная задержка разделенных сигналов и их сложение. В частности, для удвоения частоты справеливо:

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t+\tau), \qquad (1)$$

где $E(t)$ – поле сформированной оптической импульсной последовательности, $E_{1,2}$ – поля импульсных последовательностей ЛСМ после разделения, τ – в идеале, регулируемая временная задержка, которая должна быть, равна половине периода исходной последовательности импульсов ЛСМ.

Если сформированная последовательность детектируется с помощью фотодиода, то сила тока на его выходе описывается выражением

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t+\tau) + 2R(t,\tau)\cos\frac{2\pi c}{\lambda}\tau\,, \qquad (2)$$

где i – сила тока на выходе; $i_{1,2}$ – вклад в ток от каждого из полей $E_{1,2}$; $R(t,\tau)$ – интерферометрический член, усредненный с учетом характеристик фотодетектора, λ – длина волны основной несущей.

Рассмотрим спектральное разложение только суммы токов $i_{1,2}$, что оправдано, если задержка поля выбрана достаточно близко к значению половины периода следования исходной последовательности ЛСМ:

$$W(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(W_{1,k} + W_{2,k}e^{jk\pi}\right)e^{jk\omega_1 t}, \qquad (3)$$

где $W_{1,k}W_{2,k}$ – спектральная мощность на $k\omega_1$ частоте, а ω_1 – частота повторения импульсов.

Очевидно, правильность выбора задержки при заданном соотношении $E_{1,2}$, минимизирует нежелательные спектральные составляющие, на практике же минимальное значение для таких составляющих будет также ограничено качеством используемых оптических элементов. Таким образом, основной метрикой контроля качества юстировки может служить мощность нежелательных спектральных составляющих.

Была собрана схема, представленная на рис. 1,*а*. В схеме использован ЛСМ С-диапазона с частотой повторения 1.25 ГГц и периодической апертурной ошибкой, измеренной в отстройках от несущей от 1 кГц до 1МГц, равной 8.5 фс. Последовательность импульсов ЛСМ с помощью оптоволоконного разветвителя 50/50 делится в два параллельных канала, в одном из которых использована линия с переменной временной задержкой. Далее обе последовательности объединяются с помощью второго 50/50 разветвителя, на одном из выходов которого результат регистрируется с помощью фотодиода с полосой 40 ГГц и анализируется цифровым осциллографом с истинной аналоговой полосой 33 ГГц и частотой выборки 80 ГГц, либо анализатором источников сигналов, обеспечивающим измерение фазовых шумов. Характерные длины используемых оптоволоконных компонентов – десятки сантиметров. На рис. 1,*б* представлен результат измерения сигнала макета (осциллограмма).

Величина временной задержки $\Delta\tau$ подбирается таким образом, чтобы минимизировать величину нечетных гармоник импульсно-периодического сигнала на осциллографе. На рис. 2,*а* представлен результат спектрального анализа численной модели импульсно-периодического сигнала на выходе схемы с расстройкой временной задержки в 100 фс и дисбалансом мощностей в каналах 1 %. На рис. 2,*б* представлен результат спектрального анализа импульсно-периодического сигнала с рис. 1,*б*.

С помощью анализатора источников сигналов была построена диаграмма фазовых шумов полученной импульсной последовательности. Результат измерений фазовых шумов представлен на рис. 3, он соответствует периодической апертурной ошибке, измеренной в отстройках от несущей от 1 кГц до 1 МГц в 10.2 фс.

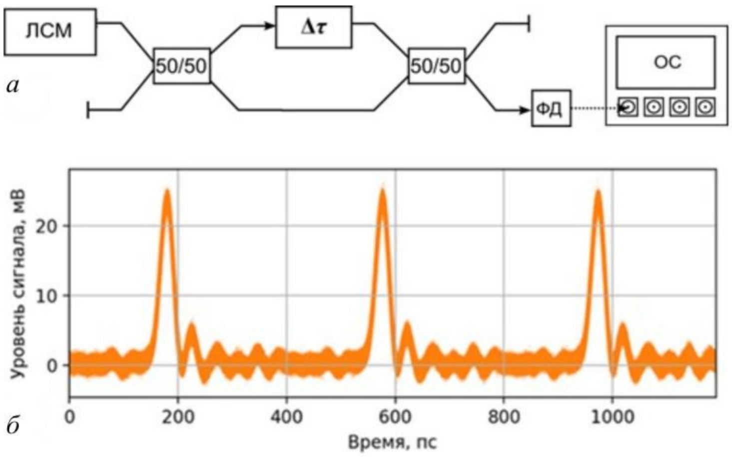


Рис. 1. Измерение сигнала: *а*) схема пассивного умножителя частоты последовательности импульсов ЛСМ; *б*) осциллограмма записанного сигнала

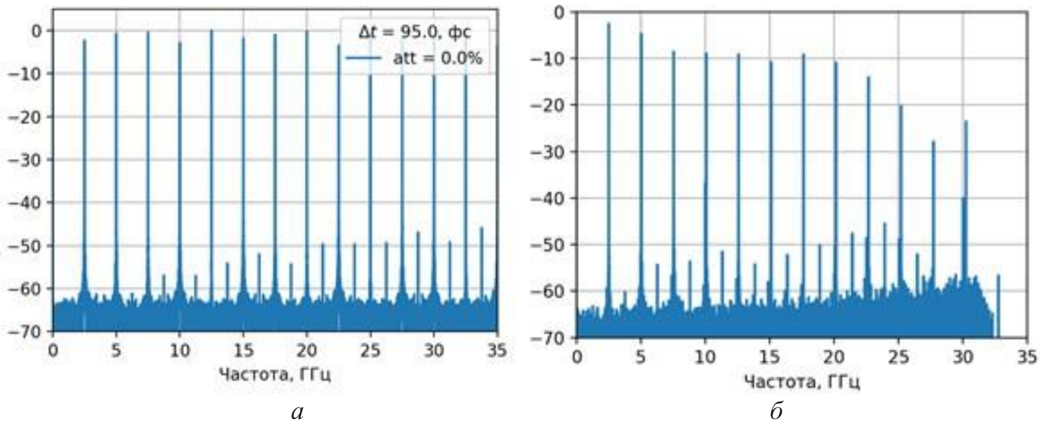


Рис. 2. Результат: *а*) численного моделирования импульсно-периодической последовательности с рассогласованием каналов по времени на 100 фс и по мощности на 1 %; *б*) БПФ-анализа последовательности, полученной экспериментально и представленной на осциллограмме рис. 1,*б* (по вертикальной шкале – мощность, дБ)

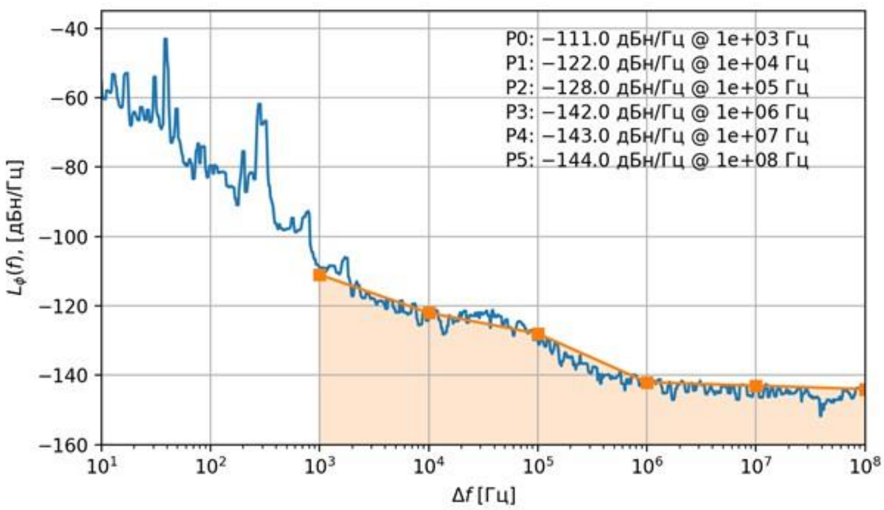


Рис. 3. Результат измерения диаграммы фазовых шумов сформированной импульсной последовательности

ВЫВОДЫ

Построенная система позволяет получить удвоенную по отношению к исходной частоту следования ультракоротких лазерных импульсов. Схема и метод могут быть развиты для увеличения частоты следования импульсов в 4 и большее четное число раз, при увеличении же в нечетное число раз настройка по компонентам радиочастотного спектра формируемой последовательности представляется более сложной и затруднительной. Схема вносит ожидаемое ухудшение апертурной ошибки – с 8.5 фс у исходной последовательности до 10.2 фс у сформированной. Такое значение, впрочем, в настоящее время представляется приемлемым для ряда практических задач. Вероятно, ожидать лучшей сохранности исходной апертурной ошибки возможно при реализации системы с использованием интегральных элементов с более точным контролем и меньшим абсолютным значением оптического пути.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта 20-37-90119.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Valley G.C.* Photonic analog-to-digital converters // Opt. Express, 2007. V. 15. No. 5. P. 1995.
2. *McKinney J.D., Williams K.J.* Sampled analog optical links // IEEE Trans. Microw. TheoryTechn., 2009. V. 57. № 8. P. 2093.
3. *Стариков Р.С.* Фотонные АЦП // Успехи совр. радиоэлектроники. 2015. № 2. С. 3.
4. *Starikov R.S.* Photonic sampled ADC's: state of the art // Proceedings of SPIE, 2016. V. 10176. P. 1017618.
5. *Esman D.J., Wiberg A.O.J., Alic, N., Radic S.* Highly Linear Broadband Photonic-Assisted Q-Band ADC // J. Light. Technol., 2015. V. 33. P. 2256.
6. *Cruz P.E.D., Alves T.M.F. Cartaxo A.V.T.* Performance Evaluation of Wavelength Division Multiplexing Photonic Analogue-to-Digital Converters for High-Resolution Radar Systems// Optics and Photonics Journal, 2019. V. 9. P. 219.
7. *Xu Y., Li S., Xue X., Xiao X., Zheng X., Zhou B.* An interleaved broadband photonic ADC immune to channel mismatches capable for high-speed radar imaging // IEEE Photon. J., 2019. V. 11. № 4. Art. № 5502009.
8. *Mehta N. et al.* An Optically Sampled ADC in 3D Integrated Silicon-Photonics/65nm CMOS// 2020 IEEE Symposium on VLSI Technology, Honolulu, HI, USA, 2020. P. 1.
9. *Дадашев М.С., Земцов Д.С., Злоказов Е.Ю., Небавский В.А., Осипов В.Г., Павлов П.А., Романов А.С., Стариков Р.С., Хафизов И.Ж.* Фотонный аналогово-цифровой преобразователь с электронным квантованием и оптической выборкой на скорости до 10 Гвыб/с // Радиотехника и электроника, 2023. Т. 68. № 2. С. 188.
10. *Li Z., Wang X., Zhang Y. et al.* Photonic sampling analog-to-digital conversion based on time and wavelength interleaved ultra-short optical pulse train generated by using monolithic integrated LNOI intensity and phase modulator // Opt Express, 2022. V. 30(16). P. 29611.
11. *Citrin D.S.* Photonic Sampling Analog-to-Digital Conversion With Read-In Timing Jitter // IEEE Transactions on Communications, 2022. V. 70. № 1. P. 445.
12. *Земцов Д.С., Злоказов Е.Ю., Небавский В.А., Стариков Р.С., Хафизов И.Ж.* Формирование мультиспектральной последовательности выборки в аналоговом оптическом тракте: возможность автоматизации с помощью цифровой обратной связи // Измерительная техника, 2023. Т. 6. С. 34.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 3, pp. 178–182

RESEARCH OF A SCHEME FOR DOUBLING THE RECEPTION FREQUENCY OF ULTRA-SHORT LIGHT PULSES TO FORM A SAMPLING SEQUENCE OF ANALOG-DIGITAL PHOTONIC SYSTEMS

***E.Yu. Zlokazov*[1]*, V.A. Nebavsky*[1]**, R.S. Starikov*[1]**

[1]*National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, 115409, Russia*
**e-mail: VANebavskii@mephi.ru*

Received August 27, 2023; revised September 05, 2023; accepted September 05, 2023

A system for doubling the repetition rate of laser optical pulses in the mode-locked mode, which is designed to form a selection sequence in analog-to-digital photonic connections, is considered and experimentally tested. The basic idea of pulse repetition rate multiplication is to isolate the original pulse sequence and then the corresponding time delay to separate the pulse signals and their effects. The division and addition can be carried out both by branching and by gratings or by demultiplexers. Shown analytical description depends on the time delay in the signal arms and the spectrum obtained in the process of photodetection of the generated sequence. The amount of delay between pulses is adjusted in such a way as to minimize unwanted spectral components at multiple repetition rates of laser frequencies in the microwave spectra of the photodetected sequence, in which odd-order terms are minimized. It is shown that the effect of changing pulses also affects the caution of the proposed method.To considering the data in experiments with the results of the computational calculation, it was possible to achieve an accuracy of mismatch in time between pulses of no more than 100 femtoseconds, and a power difference of no more than 1 %. The jitterwascalculated using phase noise measurements is 10.2 femtoseconds.

Keywords: microwave photonics, radio photonics, optical sampling, aperture error, jitter.

REFERENSES

1. *Valley G.C.* Photonic analog-to-digital converters. Opt. Express, 2007. Vol. 15. No. 5. P. 1995.

2. *McKinney J.D., Williams K.J.* Sampled analog optical links. IEEE Trans. Microw. Theory Techn., 2009. Vol. 57. No. 8. P. 2093.

3. *Starikov R.S.* Fotonnye ACP. [Photonic ADCs]. Uspekhisovr. Radioelektroniki, 2015. No. 2. P. 3 [in Russian].

4. *Starikov R.S.* Photonic sampled ADC's: state of the art. Proceedings of SPIE, 2016. Vol. 10176. P. 1017618.

5. *Esman D.J., Wiberg A.O.J., Alic N., Radic S.* Highly Linear Broadband Photonic-Assisted Q-Band ADC. J. Light. Technol., 2015. Vol. 33. P. 2256.

6. *Cruz P.E.D., Alves T.M.F., Cartaxo A.V.T.* Performance Evaluation of Wavelength Division Multiplexing Photonic Analogue-to-Digital Converters for High-Resolution Radar Systems. Optics and Photonics Journal, 2019. Vol. 9. P. 219.

7. *Xu Y., Li S., Xue X., Xiao X., Zheng X., Zhou B*. An interleaved broadband photonic ADC immune to channel mismatches capable for high-speed radar imaging. IEEE Photon. J., 2019. Vol. 11. No. 4. Art. no. 5502009.

8. *Mehta N. et al*. An Optically Sampled ADC in 3D Integrated Silicon-Photonics/65nm CMOS. 2020 IEEE Symposium on VLSI Technology, Honolulu, HI, USA, 2020. P. 1.

9. *Dadashev M.S., Zemcov D.S., Zlokazov E.Yu., Nebavskij V.A., Osipov V.G., Pavlov P.A., Romanov A.S., Starikov R.S., Hafizov I.ZH.* Fotonnyj analogovo-cifrovoj preobrazovatel' s elektronnym kvantovaniem I opticheskoj vyborkoj na skorosti do 10 Gvyb/s. [Photonic A/D converter with electronic quantization and optical sampling at speeds up to 10 GS/s]. Radiotekhnikaielektronika, 2023. Vol. 68. No. 2. P. 188 [in Russian].

10. *Li Z., Wang X., Zhang Y. et al.* Photonic sampling analog-to-digital conversion based on time and wavelength interleaved ultra-short optical pulse train generated by using monolithic integrated LNOI intensity and phase modulator. Opt Express. 2022 Aug 1. Vol. 30(16). P. 29611.

11. *Citrin D.S.* Photonic Sampling Analog-to-Digital Conversion With Read-In Timing Jitter// IEEE Transactions on Communications, 2022. Vol. 70. No. 1. Pp. 445.

12. *Zemcov D.S., Zlokazov E.Yu., Nebavskij V.A., Starikov R.S., Hafizov I.Zh.* Formirovanie mul'tispektral'noj posledovatel'nosti vyborki v analogovom opticheskom trakte: vozmozhnost' avtomatizacii s pomoshch'yu cifrovoj obratnoj svyazi [Formation of a multispectral sampling sequence in an analog optical path: possibility of automation using digital feedback]. Izmeritel'naya tekhnika, 2023. Vol. 6. Pp. 34 [in Russian].

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2023, т. 12, № 3, с. 183–186

АВТОМАТИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

УДК 621.3.061+629.7.064.56 +004.353.254.5

ВОЛЬТ-АМПЕРНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КУБА С ЭЛЕМЕНТАМИ МОТТА–ГЁРНИ В РЕБРАХ

А.Е. Дубинов[1,2*]

[1] *Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, г. Саров, Нижегородская обл., 607188, Россия*

[2] *Саровский физико-технический институт – филиал Национального исследовательского ядерного университета «Московский инженерно-физический институт», г. Саров, Нижегородская обл., 607186, Россия*

**e-mail: dubinov-ae@yandex.ru*

Поступила в редакцию: 26.08.2023
После доработки: 19.09.2023
Принята к публикации: 22.09.2023

В работе выведена точная явная формула вольт-амперной характеристики (ВАХ) для цепи постоянного тока в форме куба, в ребрах которого установлены одинаковые нелинейные элементы Мотта–Гёрни. Вывод формулы основан на методе декомпозиции сложных электрических цепей и на использовании вспомогательных формул для ВАХ последовательного и параллельного соединения таких элементов, также полученных в данной работе. Формула может быть полезна для вычисления ВАХ больших сетей, содержащих кубические ячейки со светоизлучающими диодами и солнечными элементами.

Ключевые слова: вольт-амперная характеристика, цепь постоянного тока, элемент Мотта–Гёрни, метод декомпозиции.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.263

ВВЕДЕНИЕ

Теория Мотта–Гёрни дает предельную плотность тока частиц, ограниченного их собственным пространственным зарядом, в плоском промежутке, в котором движение частиц имеет дрейфовую природу: $v = \mu E \operatorname{sign} q$, где v – скорость частиц, q – их заряд, μ – их подвижность, а E – напряженность электрического поля [1–3]. Эта теория описывает электронный транспорт в полупроводниках [4], в неметаллических кристаллах [5, 6], а также в органических светоизлучающих микроструктурах [7]. Согласно этой теории, двухполюсные элементы Мотта–Гёрни электрической цепи постоянного тока (МГ-элементы), такие как органические светоизлучающие диоды (LED) и солнечные элементы (SC) [8], имеют вольт-амперные характеристики (ВАХ) с нелинейностями квадратичного типа: $I = PU^2$, где I – ток, протекающий в MG-элементе, U – напряжение, P – коэффициент, имеющий размерность A/V^2.

LED и SC, как правило, входят в состав многоэлементных цепей, образующих в пространстве объемные сети. Чаще всего сети имеют тетрагональную структуру с кубическими элементарными ячейками. Для оценки режимов питания всей сети важно знать, какова ВАХ большой цепи, в которой нелинейные MG-элементы объединены в тетрагональную сеть, и, в частности, какова ВАХ каждой такой ячейки. Поэтому получение удобной формулы для расчета ВАХ кубической ячейки с MG-элементами является актуальной задачей и целью данной работы.

В данной работе получена точная явная формула для ВАХ в цепи постоянного тока в форме куба, в ребрах которого установлены одинаковые MG-элементы. Для получения формулы для ВАХ использовался метод декомпозиции сложных электрических цепей.

Укажем, что решение задачи о ВАХ цепи в форме куба, в ребрах которого установлены одинаковые линейные омические элементы (резисторы) с сопротивлением R, хорошо известно: $I = (6/5R)U$ [9, 10], и даже обобщено на *n*-мерный куб [9].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим цепь постоянного тока в форме куба, в ребрах которого установлены одинаковые MG-элементы, имеющие коэффициенты собственных ВАХ – $P_{1,\ldots 12} = P$ (рис. 1). Необходимо вывести формулу для ВАХ цепи между узлами A и G, когда узел A заземлен, а на узел G подан потенциал U_0.

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ТРЕХ MG-ЭЛЕМЕНТОВ

Для решения поставленной задачи сначала выведем ВАХ участков цепи с параллельным и последовательным включениями трех, вообще говоря, различных MG-элементов с коэффициентами $P_{1,2,3}$ (рис. 2,*а*,*б*, соответственно).

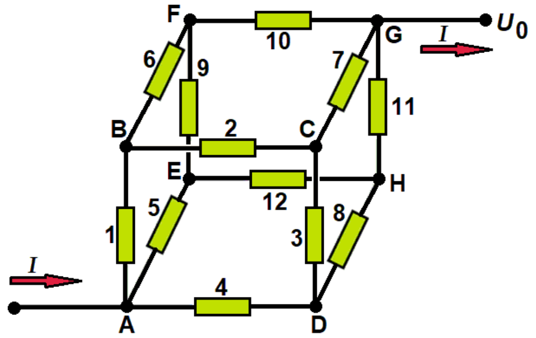


Рис. 1. Схема кубической цепи с MG-элементами: A, B – H – обозначения узлов цепи; 1–12 – нумерация MG-элементов; стрелки показывают направление тока

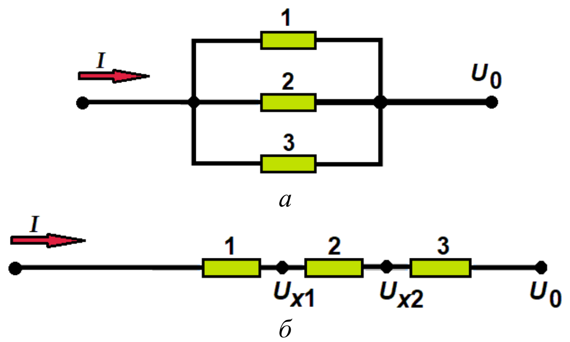


Рис. 2. Схемы участков цепи с тремя MG-элементами: 1–3 – нумерация MG-элементов с коэффициентами $P_{1,2,3}$: *а*) параллельное соединение; *б*) последовательное соединение; U_{x1}, U_{x2}, U_0 – потенциалы узлов

Несложно записать выражение для общего тока между заземленным контактом и контактом с потенциалом U_0 для параллельного соединения на рис. 2,*а*:

$$I = P_1 U_0^2 + P_2 U_0^2 + P_3 U_0^2 = = (P_1 + P_2 + P_3) U_0^2. \quad (1)$$

Ненамного сложнее найти ВАХ для последовательного соединения (рис. 2,*б*). Для этого сначала нужно найти выражение для потенциалов U_{x1} и U_{x2} в узлах соединения MG-элементов. Для этого воспользуемся первым законом Кирхгофа в этих узлах, в результате чего получим систему уравнений

$$P_1 U_{x1}^2 = P_2 (U_{x2} - U_{x1})^2 = P_3 (U_0 - U_{x2})^2. \quad (2)$$

Если извлечь квадратный корень из этих уравнений, то они становятся линейными относительно неизвестных U_{x1} и U_{x2}. Тогда система имеет единственное решение:

$$U_{x1} = \frac{\sqrt{P_2 P_3}}{\sqrt{P_1 P_2 + P_2 P_3 + P_3 P_1}} U_0;$$

$$U_{x2} = \frac{(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})\sqrt{P_3}}{\sqrt{P_1 P_2 + P_2 P_3 + P_3 P_1}} U_0. \quad (3)$$

В итоге, ВАХ последовательного соединения трех MG-элементов запишется в виде

$$I = P_1 U_{x1}^2 = \frac{P_1 P_2 P_3}{P_1 P_2 + P_2 P_3 + P_3 P_1} U_0^2. \quad (4)$$

Отметим, что ВАХ (4) симметрична относительно перестановки индексов у коэффициентов P_i. Из этого следует, что при любой перестановке MG-элементов на схеме рис. 2,*б* выражение для ВАХ (4) не изменится.

ДЕКОМПОЗИЦИЯ КУБИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Объемная цепь на рис. 1 не может быть изображена на плоскости в виде схемы без пересечения контактных линий. Для упрощения проведем стандартную процедуру ее декомпозиции. Для этого сначала заметим, что узлы B, D и E на рис. 1 находятся в одинаковых условиях вследствие симметрии. Следовательно, их электрические потенциалы равны, и их без ущерба для работы цепи можно соединить общим проводником накоротко. Также можно соединить проводником и другую тройку узлов – C, F и H. В результате схему цепи рис. 1 можно изобразить на плоскости, как показано на рис. 3.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВАХ КУБИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Как видно, кубическая цепь состоит из трех последовательно соединенных фрагментов; в I-м и III-м имеется по три параллельных MG-элемента, а во II-м – шесть параллельных MG-элементов. Следовательно, согласно (1), $P_{\mathrm{I}} = P_{\mathrm{III}} = 3P$ и $P_{\mathrm{II}} = 6P$. Подставляя полученные коэффициенты фрагментов в (4) и проведя несложные алгебраические вычисления, в итоге получим ВАХ кубической цепи, в ребрах которой установлены одинаковые нелинейные MG-элементы, в виде

$$I = \frac{6}{5} P U_0^2 = 1.2 P U_0^2. \quad (5)$$

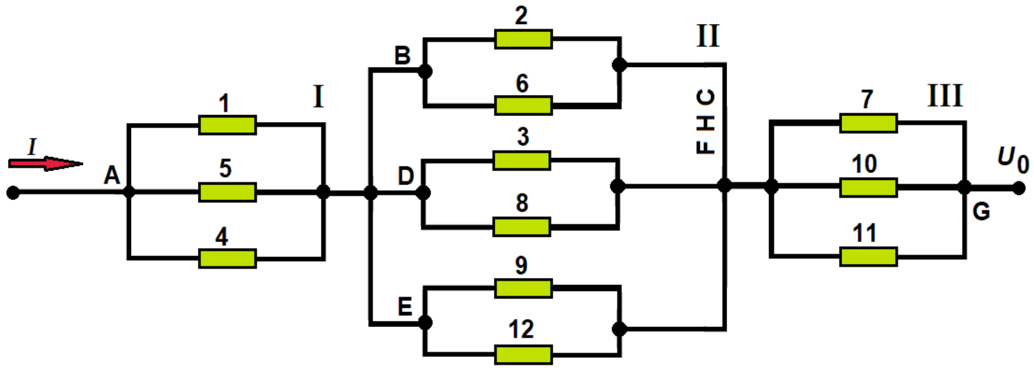


Рис. 3. Схема – результат декомпозиции кубической цепи
(нумерация узлов и MG-элементов соответствует исходной схеме на рис. 1)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе выведена точная явная формула (5) для ВАХ кубической цепи постоянного тока, в ребрах которой установлены одинаковые нелинейные MG-элементы. Для получения формулы использовался метод декомпозиции сложных электрических цепей. Формула позволит легко оценивать электротехнические параметры (режимы электропитания) больших сетей, содержащих такие кубические ячейки с LED, SC или MG-элемент любой другой природы. Для этого каждую кубическую ячейку в большой сети можно представлять эквивалентным нелинейным элементом, имеющим ВАХ (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mott N.F., Gurney R.W.* Electronic processes in ionic crystals. Oxford Univ. Press, London, UK, 1940.

2. *Ламперт М., Марк П.* Инжекционные токи в твердых телах. М.: Мир, 1973.

3. *Дубинов А.Е., Китаев И.Н.* Обобщение закона Мотта–Гёрни для двуслойного промежутка // ЖТФ. 2018. Т. 88. № 4. С. 483–486.
https://doi.org/10.1134/S1063784218040096

4. *Gildenblat G.S., Rao A.R.* Current-voltage characteristic of pulsed space-charge-limited currents in GaAs // J. Appl. Phys. 1987. V. 61. № 7. P. 2683–2685.
https://doi.org/10.1063/1.337904

5. *Büget U., Wright G.T.* Space-charge-limited current in silicon // Solid-State Electronics. 1967. V. 10. № 3. P. 199–207.
https://doi.org/10.1016/0038-1101(67)90074-3

6. *López-Cruz E., Sánchez-Sinencio F., Rose A., Helman J.S.* Photoinjection of holes and electrons into sulfur single crystals // Phys. Rev. B. 1980. V. 22. № 6. P. 2855–2860.
https://doi.org/10.1103/PhysRevB.22.2855

7. *Ho S., Xiang C., Liu R., Chopra N., Mathai M., So F.* Stable solution processed hole injection material for organic light-emitting diodes // Organic Electr. 2014. V. 15. № 10. P. 2513– 2517.
https://doi.org/10.1016/j.orgel.2014.07.022

8. *Zhu Y.B., Geng K., Cheng Z.S., Yao R.H.* Space-charge-limited current injection into free space and trap-filled solid // IEEE Trans. Plasma Sci. 2021. V. 49. № 7. P. 2107–2112.
https://doi.org/10.1109/TPS.2021.3084461

9. *Narraway J.J.* Resistance of an n-cube // Electr. Lett. 1994. V. 30. № 24. P. 2004–2006.
https://doi.org/10.1049/el:19941386

10. *Perrier F., Girault F.* Two-point resistances in Archimedean resistor networks // Results. Phys. 2022. V. 36. May 2022, 105443.
https://doi.org/10.1016/j.rinp.2022.105443

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 3, pp. 183–186

CURRENT-VOLTAGE CHARACTERISTIC OF A CUBE WITH MOTT-GURNEY ELEMENTS IN THE EDGES

A.E. Dubinov [1,2]

[1] *Russian Federal Nuclear Center – All-Russia Scientific research Institute of Experimental Physics, Sarov, Nizhny Novgorod region, 607188, Russia*

[2] *Sarov Physical Technical Institute – the branch of National Research Nuclear University «Moscow Engineering Physics Institute», Sarov, Nizhny Novgorod region, 607186, Russia*

e-mail: dubinov-ae@yandex.ru

Received August 26, 2023; revised September 19, 2023; accepted September 22, 2023

The explicit exact formula for the volt-ampere characteristic (VAC) of a dc-circuit in the form of a cube, in the edges of which the same nonlinear Mott-Gurney elements are installed, is derived. The formula derivation is based on the decomposition method of complicated electric circuits and on the application of auxiliary formulas for VAC of serial and parallel connection of such elements, which were also obtained in this work. The formula can be used for calculating the VAC of large networks containing cubic cells with light-emitting diodes and solar cells.

Keywords: volt-ampere characteristic, dc-circuit, Mott-Gurney element, decomposition method.

REFERENSES

1. *Mott N.F., Gurney R.W.* Electronic processes in ionic crystals. Oxford Univ. Press, London, UK, 1940.
2. *Lampert M., Mark P.* Current injection in solids. Moscow, Mir Publ, 1973 [in Russian].
3. *Dubinov A.E., Kitayev, I.N.* Extension of the Mott–Gurney law for a bilayer gap. Techn. Phys. 2018. Vol. 63. No. 4. Pp. 467–470 [in Russian]. https://doi.org/10.1134/S1063784218040096
4. *Gildenblat G.S., Rao A.R.* Current-voltage characteristic of pulsed space-charge-limited currents in GaAs. J. Appl. Phys. 1987. Vol. 61. No. 7. Pp. 2683–2685. https://doi.org/10.1063/1.337904
5. *Büget U., Wright G.T.* Space-charge-limited current in silicon. Solid-State Electronics. 1967. Vol. 10. No. 3. Pp. 199–207. https://doi.org/10.1016/0038-1101(67)90074-3
6. *López-Cruz E., Sánchez-Sinencio F., Rose A., Helman J.S.* Photoinjection of holes and electrons into sulfur single crystals. Phys. Rev. B. 1980. Vol. 22. No. 6. Pp. 2855–2860. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.22.2855
7. *Ho S., Xiang C., Liu R., Chopra N., Mathai M., So F.* Stable solution processed hole injection material for organic light-emitting diodes. Organic Electr. 2014. Vol. 15. No. 10. Pp. 2513– 2517. https://doi.org/10.1016/j.orgel.2014.07.022
8. *Zhu Y.B., Geng K., Cheng Z.S., Yao R.H.* Space-charge-limited current injection into free space and trap-filled solid // IEEE Trans. Plasma Sci. 2021. Vol. 49. No. 7. Pp. 2107–2112. https://doi.org/10.1109/TPS.2021.3084461
9. *Narraway J.J.* Resistance of an n-cube . Electr. Lett. 1994. Vol. 30. No. 24. Pp. 2004–2006. https://doi.org/10.1049/el:19941386
10. *Perrier F., Girault F.* Two-point resistances in Archimedean resistor networks. Results. Phys. 2022. Vol. 36. May 2022, 105443. https://doi.org/10.1016/j.rinp.2022.105443

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2023, т. 12, № 3, с. 187–189

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.95

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ: СВОЙСТВА, МЕТОДЫ, РЕШЕНИЯ И МОДЕЛИ

А.В. Аксенов*

Механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия

**e-mail:* aksenov@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию: 29.05.2023

После доработки: 30.05.2023

Принята к публикации: 08.06.2023

Рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных с постоянным и переменным запаздыванием. Излагаются точные, приближенные аналитические и численные методы решения таких уравнений. Описаны наиболее распространенные математические модели с запаздыванием, используемые в теории популяций, биологии, медицине и других приложениях.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения с запаздыванием, уравнения в частных производных с запаздыванием, аналитические методы, численные методы, точные решения, математические модели с запаздыванием, пропорциональное и переменное запаздывание.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.287

В 2022 г. в издательстве Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН вышла в свет книга А.Д. Полянина, В.Г. Сорокина, А.И. Журова «Дифференциальные уравнения с запаздыванием: Свойства, методы, решения и модели» [1].

Линейные и нелинейные дифференциальные уравнения (обыкновенные и в частных производных) с запаздыванием часто используются для математического моделирования явлений и процессов в различных областях теоретической физики, механики, теории управления, биологии, биофизики, биохимии, медицины, экологии, экономики и в технических приложениях.

Отметим некоторые факторы, приводящие к необходимости вводить запаздывание в математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями. В биологии и биомеханике запаздывание обусловлено ограниченной скоростью передачи нервных и мышечных реакций в живых тканях; в медицине – в задачах о распространении инфекционных заболеваний – время запаздывания определяется инкубационным периодом (промежуток времени от момента заражения до первых признаков проявления болезни); в динамике популяций запаздывание связано с тем, что особи участвуют в репродукции лишь после достижения определенного возраста; в теории управления запаздывание обычно связано с конечной скоростью распространения сигнала и ограниченной скоростью технологических процессов.

Наличие запаздывания в математических моделях и дифференциальных уравнениях является осложняющим фактором, который, как правило, приводит к сужению области устойчивости получаемых решений. Исследование и решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с запаздыванием по сложности сопоставимы с исследованием и решением уравнений в частных производных (УрЧП) без запаздывания.

В книге описаны качественные особенности дифференциальных уравнений с запаздыванием, и сформулированы для них типичные постановки задач с начальными данными и начально-краевых задач. Излагаются точные, приближенные аналитические и численные методы решения таких уравнений. Помимо дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием исследуются уравнения с пропорциональным запаздыванием (типа пантографа), а также более сложные уравнения с переменным запаздыванием общего вида или несколькими запаздываниями. Изложение теоретического материала сопровождается примерами практического применения рассматриваемых методов для получения искомых решений.

Дан обзор наиболее распространенных математических моделей с запаздыванием, используемых в теории популяций, биологии, медицине и других приложениях.

Приведены аналитические решения линейных задач типа Коши для ОДУ и систем ОДУ первого и второго порядка с постоянным и пропорциональным запаздыванием. Рассмотрены некоторые классы нелинейных ОДУ первого порядка с запаздыванием, которые допускают линеаризацию или точные решения. Обсуждаются вопросы устойчивости и неустойчивости решений ОДУ с запаздыванием.

Описаны наиболее распространенные аналитические и численные методы решения задач с начальными данными и краевых задач для ОДУ с постоянным и переменным запаздыванием (метод шагов, методы интегральных преобразований, метод регулярного разложения по малому параметру, метод сращиваемых асимптотических разложений, методы итерационного типа, метод разложения Адомиана, метод гомотопического анализа, метод коллокаций, проекционные методы типа Галеркина, методы Эйлера и Рунге – Кутты, метод стрельбы, методы, основанные на использовании пакета Mathematica и др.).

Методом разделения переменных получены решения в виде рядов Фурье по пространственным переменным линейных начально-краевых задач для УрЧП параболического и гиперболического типов с постоянным и пропорциональным запаздыванием и различными граничными условиями. Излагаются также численные методы решения начально-краевых задач для линейных и нелинейных УрЧП с запаздыванием. Наибольшее внимание уделено методу прямых, который базируется на сведении УрЧП с запаздыванием к системе ОДУ с запаздыванием. Рассмотрены конечно-разностные методы, основанные на неявной схеме, схеме с весами, схеме повышенного порядка точности и др. Обсуждается также метод декомпозиции области по времени, который обобщает метод шагов, используемый для решения ОДУ с запаздыванием. Сформулированы основные принципы построения и выбора тестовых задач, предназначенных для проверки адекватности и оценки точности численных и приближенных аналитических методов решения УрЧП с запаздыванием.

Общее решение нелинейных УрЧП с запаздыванием не удается найти даже в простейших случаях. Поэтому при исследовании таких уравнений обычно приходится ограничиваться поиском и анализом их частных решений, которые принято называть точными решениями.

В данной книге большое внимание уделено описанию и практическому применению методов построения точных решений нелинейных уравнений математической физики с запаздыванием (методы обобщенного и функционального разделения переменных, метод функциональных связей, метод порождающих уравнений, принцип аналогии решений и др.). Важно отметить, что подавляющее большинство аналитических методов, которые успешно позволяют находить точные решения нелинейных уравнений с частными производными без запаздывания, либо вообще неприменимы для построения точных решений нелинейных УрЧП с постоянным или переменным запаздыванием, либо имеют весьма ограниченную область применимости. Уравнения математической физики с двумя независимыми переменными и запаздыванием имеют специфические качественные особенности: (i) УрЧП с постоянным запаздыванием не допускают автомодельных решений, которые весьма часто имеют УрЧП без запаздывания, (ii) УрЧП с пропорциональным запаздыванием по одной независимой переменной не имеют решений типа бегущей волны.

Рассмотрено много нелинейных реакционно-диффузионных и волновых уравнений с запаздыванием, которые зависят от одной или нескольких произвольных функций или содержат ряд свободных параметров. Такие уравнения наиболее сложны для анализа, а их точные решения могут использоваться для тестирования и оценки погрешности численных и приближенных аналитических методов решения соответствующих начально-краевых задач. Для удобства читателей авторы добавили в книгу справочное приложение, которое содержит обширные таблицы точных решений уравнений в частных производных с постоянным и переменным запаздыванием.

В целом, данная книга содержит много нового материала, который ранее в монографиях не публиковался. Основные результаты можно найти в статьях авторов [2–5].

Для максимального расширения круга потенциальных читателей с разной математической подготовкой авторы по возможности старались избегать использования специальной терминологии. Поэтому некоторые результаты описаны схематично и упрощенно, чего вполне достаточно для их практического применения. Многие разделы можно читать независимо друг от друга, что облегчает работу с материалом. Подробное оглавление позволяет быстро находить необходимую информацию.

Автор считает, что книга будет полезной для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, аспирантов и студентов, специализирующихся в области прикладной и вычислительной математики, математической физики, механики, теории управления, биологии, биофизики, биохимии, медицины, химической технологии и экологии. Отдельные разделы книги, методы и примеры могут быть использованы в курсах лекций по прикладной математике, математической физике и функционально-дифференциальным уравнениям, для чтения спецкурсов и проведения практических занятий.

Отметим, что электронная версия книги находится в свободном доступе в интернете (https://eqworld.ipmnet.ru/Arts_Polyanin/Book_Polyanin_Sorokin_Zhurov_2022.pdf).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Журов А.И.* Дифференциальные уравнения с запаздыванием: Свойства, методы, решения и модели. М.: ИПМех РАН, 2022.
2. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014. V. 19. № 3. Pp. 417–430.
3. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* New generalized and functional separable solutions to non-linear delay reaction-diffusion equations // International Journal of Non-Linear Mechanics, 2014. Vol. 59. Pp. 16–22.
4. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Nonlinear pantograph-type diffusion PDEs: Exact solutions and the principle of analogy. // Mathematics, 2021, V. 9. № 5. P. 511.
5. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions // Mathematics, 2021. V. 9. № 4. P. 345.
6. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Review of methods for constructing exact solutions of equations of mathematical physics based on simpler solutions. // Theoretical and Mathematical Physics, 2022. V. 211. № 2. Pp. 567–594.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 3, pp. 187–190

DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAY: PROPERTIES, METHODS, SOLUTIONS AND MODELS

A.V. Aksenov*

[1] *Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia*

**e-mail:* *aksenov@mech.math.msu.su*

Received May 29, 2023; revised May 30, 2023; accepted June 08, 2023

Ordinary differential equations and partial differential equations with constant and variable delay are considered. Exact, approximate analytical and numerical methods for solving such equations are presented. The most common mathematical models with delay used in population theory, biology, medicine and other applications are described.

Keywords: ordinary differential equations with delay, partial differential equations with delay, analytical methods, numerical methods, exact solutions, mathematical models with delay, proportional and variable delay.

REFERENCES

1. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I.* Differencialnye uravneniya s zapazdyvaniem svojstva metody-resheniya i modeli [Differential equations with delay: Properties, methods, solutions and models]. Moscow. Institute of Mechanics and Mechanics RAS Publ., 2022 [in Russian].
2. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014. Vol. 19. No. 3. Pp. 417–430.

3. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* New generalized and functional separable solutions to non-linear delay reaction-diffusion equations. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2014. Vol. 59. Pp. 16–22.

4. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Nonlinear pantograph-type diffusion PDEs: Exact solutions and the principle of analogy. Mathematics, 2021. Vol. 9. No. 5. P. 511.

5. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions. Mathematics, 2021. Vol. 9. No. 4. P. 345.

6. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Review of methods for constructing exact solutions of equations of mathematical physics based on simpler solutions. Theoretical and Mathematical Physics, 2022. Vol. 211. No. 2. Pp. 567–594.