ISSN 2304-487X

Том 12, номер 4 **ИЮЛЬ – АВГУСТ 2023**

https://vestnikmephi.elpub.ru

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ»

НИЯУ МИФИ

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ»

Том 12 № 4 2023 ИЮЛЬ - АВГУСТ

Основан в июле 2012 г.
Выходит 6 раз в год
ISSN: 2304-487X

Адрес редакции: 115409, Москва, Каширское ш., 31,
Вестник НИЯУ МИФИ
Интернет: https://vestnikmephi.elpub.ru
Электронная почта: vestnik@mephi.ru

Москва
НИЯУ МИФИ

СОДЕРЖАНИЕ

Том 12, № 4, 2023

Contents

Volume 12, Number 4, 2023

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2023, т. 12, № 4, с. 193–200

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 535

РАЗРАБОТКА ПОДХОДА ПО ОСУШЕНИЮ ПРОБЫ ВЫДЫХАЕМОГО ВОЗДУХА ЧЕЛОВЕКОМ

И.А. Карпов*, И.Л. Фуфурин, О.А. Небритова, П.П. Демкин, Д.Р. Анфимов
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
**e-mail : Ivan123121@mail.ru*

Поступила в редакцию: 27.09.2023
После доработки: 27.09.2023
Принята к публикации: 10.10.2023

В настоящий момент 6 % людей от всего населения планеты больны сахарным диабетом обоих типов, а 4 % – бронхиальной астмой. Прогнозируется, что количество людей с этими заболеваниями будет расти с каждым годом. Большой процент от всех страдающих вышеупомянутыми заболеваниями – дети. Актуальной задачей является разработка неинвазивного метода диагностирования диабета первого и второго типов, астмы и других болезней. Разработан подход для подготовки проб выдыхаемого человеком воздуха для их последующего анализа с помощью метода, основанного на инфракрасной лазерной спектроскопии. Применяемый метод подробно описан в данной работе. С помощью установки, основанной на инфракрасном квантово-каскадном лазере, проводится анализ спектров пропускания выдыхаемого человеком воздуха. По полученным спектрам можно рассчитать концентрации веществ-биомаркеров, отклонение от нормы которых связано с развитием у пациента определенных заболеваний или патологий. В данной работе проведен анализ таких существующих типов осушителей воздуха, как например, капиллярная колонка, криоловушка, адсорбционные осушители и др. В качестве наиболее оптимального решения для использования в экспериментальной установке с инфракрасным квантово-каскадным лазером был выбран нафионовый осушитель. По результатам исследований спектров выдыхаемого воздуха пациентов, с заранее известными поставленными диагнозами, был разработан и описан метод осушения пробы выдыхаемого человеком воздуха, а также была рассчитана абсолютная влажность осушенной пробы выдыхаемого воздуха.

Ключевые слова: выдыхаемый воздух, нафионовый осушитель, инфракрасная спектроскопия, спектральный анализ.
DOI: 10.26583/vestnik.2023.271

ВВЕДЕНИЕ

В приведенной работе объектом исследования является выдыхаемый человеком воздух. В рамках данного исследования проводились эксперименты с выдыхаемым воздухом пациентов Морозовской детской городской клинической больницы и Клиники детских болезней им. М.А. Хлудова. Также исследовались спектры воздуха больничных палат. С помощью экспериментальной установки, основанной на инфракрасном квантово-каскадном лазере, проводится исследование спектров поглощения проб выдыхаемого воздуха для обнаружения в них веществ-биомаркеров. Данные о присутствии некоторых таких веществ, как ацетон, оксид азота и др., в выдыхаемом пациентом воздухе можно использовать для диагностирования таких заболеваний, как диабет, астма и т. д. [1–6].

Данная статья посвящена методике подготовки проб выдыхаемого человеком воздуха для их дальнейшего исследования, которое основывается на ИК-спектроскопии пропускания, а точнее на получении спектра выдыхаемого воздуха [7]. Необходимо точно определять спектральные линии веществ-биомаркеров, которые содержатся в малых концентрациях [8]. Проблемой, препятствующей спектральному анализу, является вода, содержащаяся в выдыхаемом воздухе. Известно, что у воды много спектральных линий в диапазоне, в котором находятся линии веществ-биомаркеров (рис. 1) [9].

При получении спектра неосушенной пробы спектральные линии воды препятствуют надежной идентификации и анализу веществ-биомаркеров. Именно поэтому перед проведением эксперимента необходимо провести осушку пробы.

1. МЕТОДЫ

1.1. Экспериментальная установка

Разработанная экспериментальная установка основана на квантово-каскадном лазере LaserTune компании «Block Engineering». Источник инфракрасного излучения перенастраиваемый лазер с внешним резонатором в конфигурации Литтроу и чипом квантово-каскадного лазера, имеющим широкий спектральный диапазон. Важным компонентом является дифракционная решетка, от угла поворота которой зависит длина волны испускаемого устройством излучения. Данный лазер позволяет работать с инфракрасным диапазоном излучения 5.3–12.8 мкм (770–1850 см$^{-1}$). Средняя мощность лазера в этом спектральном диапазоне превосходит 0.5 мВт [10].

На рис. 2 представлена схема источника инфракрасного излучения LaserTune.

На рис. 3 представлена оптическая часть экспериментальной установки по изучению выдыхаемого человеком воздуха.

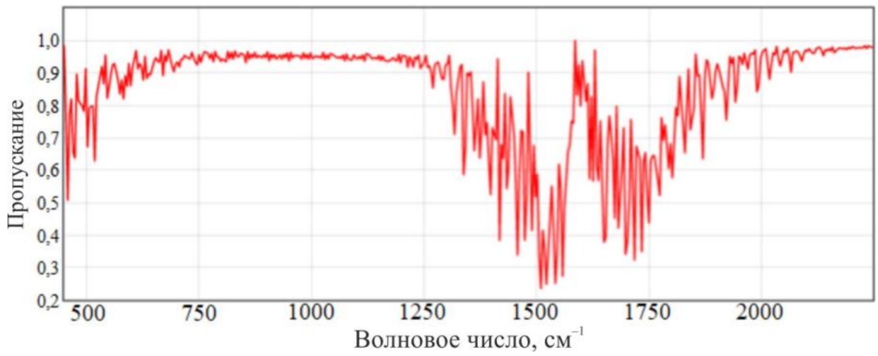


Рис. 1. Спектр пропускания воды по данным Национального института стандартов и технологий США (NIST) [9]

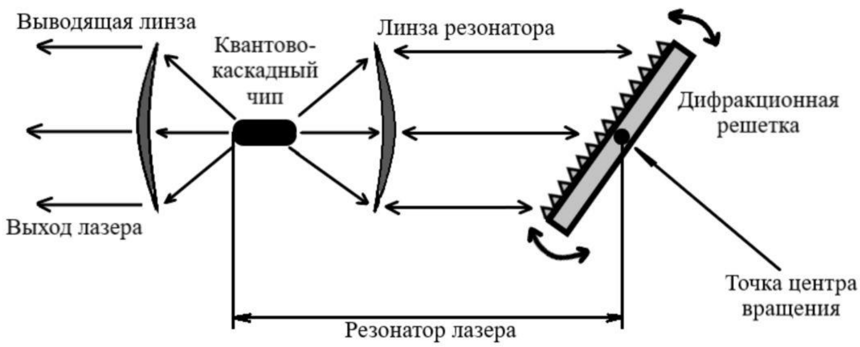


Рис. 2. Схема источника инфракрасного излучения лазера LaserTune

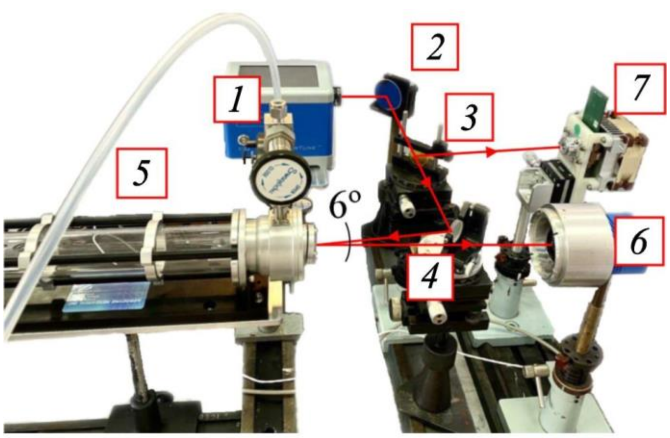


Рис. 3. Оптическая часть экспериментальной установки по изучению выдыхаемого человеком воздуха

Компоненты оптической части экспериментальной установки, представленной на рис. 3:

1 – инфракрасный квантово-каскадный лазер LaserTune;

2 – зеркало;

3 – светоделительная пластина из селенида цинка (ZnSe);

4 – зеркало;

5 – многоходовая газовая кювета Эрриота;

6 – сигнальное фотоприемное устройство;

7 – опорное фотоприемное устройство.

Испускаемый лазерный пучок квантово-каскадного лазера отражается от зеркала и разделяется светоделительной пластиной: 80 % излучения проходит через пластину и 20 % отражается на опорное фотоприемное устройство. Основной лазерный пучок после прохождения светоделительной пластины отражается от второго зеркала и попадает в многопроходную газовую кювету Эрриота, в которую закачан выдыхаемый человеком воздух. С помощью системы зеркал кюветы луч лазера преодолевает расстояние в 76 м и выходит из нее под углом в 6° к направлению входа луча в кювету. После прохождения предыдущих этапов луч лазера падает на сигнальное фотоприемное устройство. Затем информация об излучении, падающем на опорный и сигнальный фотоприемник, обрабатывается, и по полученным данным строятся спектры пропускания выдыхаемого человеком воздуха.

В газовую кювету закачивается 1–2 л выдыхаемого человеком воздуха. Для обнаружения веществ-биомаркеров в пробе воздуха их предельная теоретическая концентрация должна быть порядка нескольких ppb.

1.2. Подготовка пробы выдыхаемого человеком воздуха

1.2.1. Теоретически изученные виды осушителей воздуха

1.2.1.1. Криоловушка. Принцип работы ловушки: в процессе создания остаточного давления в испытуемой емкости образуются пары веществ, которые на пути в вакуумный насос оседают на внутренней колбе ловушки за счет низких температур, что исключает их попадание в сам насос. В качестве рабочего вещества в таком типе осушителей используется азот, фреон и другие хладагенты.

1.2.1.2. Адсорбционные осушители. Принцип работы типичного адсорбционного осушителя: пары влаги потребляются твердой поверхностью адсорбента. В качестве адсорбента используются силикагель, активный оксид алюминия и др.

1.2.1.3. Капиллярная колонка. Принцип работы капиллярной колонки: на внутренней поверхности трубки, по которой с большой скоростью движется инертный газ с анализируемым веществом, нанесена тонким слоем неподвижная фаза, что позволяет анализировать многокомпонентные смеси.

Описанные выше типы осушителей (1.2.1.1–1.2.1.3) используются для подготовки газообразных проб для исследования методами газовой хроматографии, масс-спектрометрии, ИК-фурье-спектроскопии и др. Эти осушители не подходят для использования в ранее упомянутой экспериментальной установке по таким причинам, как: высокая стоимость расходных материалов и обслуживания, недостаточное осушение пробы, большие интервалы времени между экспериментами из-за подготовки оборудования, потенциальное уменьшение концентраций веществ-биомаркеров из-за агрессивного способа осушения, большие размеры и др. [11–13].

1.2.1.4. Нафионовый осушитель. Для целей, преследуемых в этой работе, подходит нафионовый осушитель серии MD фирмы Perma Pure. Данный осушитель был выбран из-за компактных размеров, простоты в обслуживании между циклами, бережного способа осушения [14]. Схема газовых потоков и внешний вид осушителя представлены на рис. 4 слева и справа, соответственно.

Рис. 4. Схема газовых потоков (слева) и внешний вид нафионового осушителя (справа)

Осушители такого типа представляют собой конструкцию из двух трубок, одна из которых находится внутри другой, подобно теплообменнику. Влажный газ (выдыхаемый человеком воздух) двигается по нафионовой внутренней трубке, омываемой сухим газом (в случае вышеописанной экспериментальной установки – азотом). Внешняя трубка состоит из инертных материалов, а внутренняя – из нафионового полимера. Движущей силой процесса является разность в парциальном давлении этих двух потоков. Молекулы водяного пара адсорбируются на стенках внутренней трубки из нафиона и проходит через них в поток азота [15–16]. Для определения расхода чистого газа, который необходим для реализации метода разделения пробы, можно воспользоваться формулой (1), где V_p – расход азота; V_s – расход пробы выдыхаемого человеком воздуха; P_s – давление пробы; P_v – давление азота:

$$V_p = V_s/(P_s/2P_v) - 1. \tag{1}$$

1.2.2. Разработанный подход по осушению пробы выдыхаемого человеком воздуха

На рис. 5 представлена схема части экспериментальной установки, отвечающей за подготовку пробы выдыхаемого человеком воздуха и газораспределение азота и самой пробы. Стрелками разных цветов показаны пути, которые проходят потоки азота и пробы выдыхаемого воздуха.

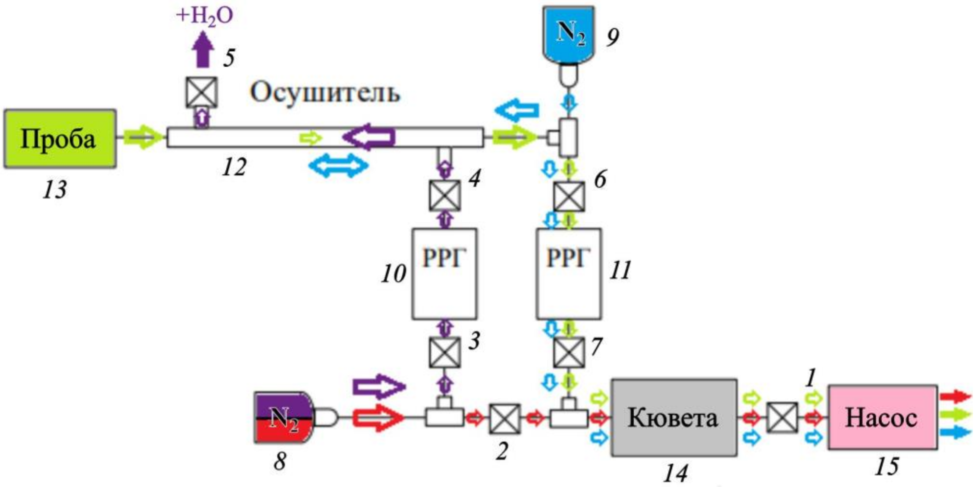


Рис. 5. Схема газораспределения при пробоподготовке

Компоненты газовой части экспериментальной установки, схема которой представлена на рис. 5:

- игольчатый вентиль *1–7*;
- баллон с газообразным азотом *8*, *9*;
- распределитель расхода газа *10*, *11*;
- нафионовый осушитель *12*;
- тедларовый пакет с пробой выдыхаемого человеком воздуха *13*;
- многоходовая газовая кювета *14*;
- вакууматор *15*.

Из газового баллона по пути *8→3→10→→4→12→5* течет азот, навстречу азоту в осушителе (12) течет проба воздуха по пути *13→12→6*→11*→7→14→1→15*, при этом, благодаря нафионовому осушителю, молекулы воды переходят в азот и вместе с ним выходят в атмосферный воздух. Осушенная проба накачивается в кювету до достижения давления, равного атмосферному. Проба накачивается в течение 20–30 мин. После получения и сохранения спектральных данных пробы, она откачивается насосом *15* в атмосферный воздух. Для исследования выдыхаемого воздуха людей, страдающих болезнями, которые передаются воздушно-капельным путем, необходимо дополнительно очищать пробу на выходе, для безопасности проведения экспериментов.

В данной работе эксперименты с такими болезнями не проводились. Между экспериментами газовая система установки очищается азотом по путям *8→2→14→1→15* и *9→12*, *6→11→→7→14→1→15*.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Экспериментально было получено среднее значение абсолютной влажности осушенной пробы воздуха выбранным нафионовым осушителем на примере нескольких экспериментов при температуре воздуха 30 °С и относительной влажности 34 % для нескольких спектральных линий с помощью закона Бугера–Ламберта–Бера [17]:

$$I = I_0 \cdot \exp(-a_\lambda lc). \qquad (2)$$

где I – интенсивность излучения, прошедшего через среду (пробу воздуха); I_0 – интенсивность падающего на вещество излучения; a_λ – коэффициент поглощения среды для данной длины волны λ; l – оптический путь; c – концентрация вещества.

Из закона Бугера-Ламберта-Бера выразим пропускание (формула 3).

$$\tau = I/I_0. \qquad (3)$$

Также из этого закона следует соотношение для степени осушения:

$$C_1/C_2 = \ln(\tau_1)/\ln(\tau_2), \qquad (4)$$

где C_1 – концентрация воды в неосушенной пробе воздуха; C_2 – в осушенной.

На рис. 6 представлены спектры пропускания пробы комнатного воздуха до (красным) и после (синим) осушения для первого эксперимента.

После проведения экспериментов были построены соответствующие им графики, на каждом из которых было выбрано пять точек. По этим точкам с помощью формулы (4) было рассчитано, во сколько раз становится меньше абсолютная влажность пробы воздуха после осушения нафионовым осушителем. Результаты расчетов представлены в табл. 1.

Таблица 1. Осушение пробы нафионовым осушителем для пяти выбранных точек с доверительной вероятностью $P = 0.9$

Волновое число, см$^{-1}$	Во сколько раз стала меньше абсолютная влажность пробы воздуха
1218	3.02 ± 0.3
1225	3.16 ± 0.33
1258	5.13 ± 0.14
1271	4.17 ± 0.51
1307	6.41 ± 0.31

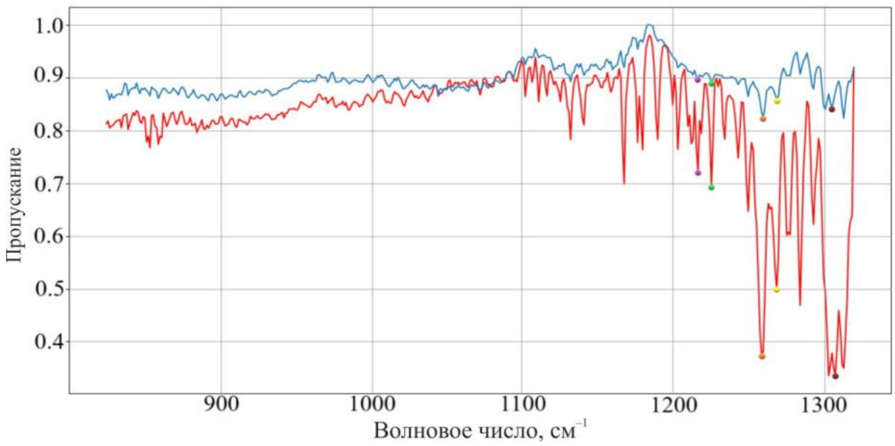


Рис. 6. Спектры пропускания пробы комнатного воздуха в одном из экспериментов

В среднем абсолютная влажность пробы уменьшилась в 4.38 ± 0.28 раза. Для более понятного представления данных получим значение абсолютной влажности пробы после осушения. Плотность насыщенных паров воды при 30 °С: ρ_0 = 30.30 г/м^3. В соответствии с формулой (5) для относительной влажности φ рассчитаем абсолютную влажность воздуха:

$$\varphi = \rho/\rho_0 \cdot 100\ \%. \qquad (5)$$

В результате вычислений, абсолютная влажность воздуха ρ = 10.30 г/м^3. В соответствии с уменьшением абсолютной влажности, проба воздуха осушилась до содержания воды 2.40 ± 0.10 г/м^3.

ОБСУЖДЕНИЕ

Полученные результаты показывают, что нафионовый осушитель подходит для пробоподготовки выдыхаемого человеком воздуха. Малое значение абсолютной влажности после осушения проб воздуха позволяет исследовать их методами инфракрасной спектроскопии. Разработанную экспериментальную установку и метод ее использования можно применять для диагностирования у пациентов таких заболеваний, как астма, сахарный диабет первого и второго типов и других болезней, при которых в выдыхаемом человеком воздухе содержатся вещества-биомаркеры, имеющие линии в инфракрасном спектре пропускания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fufurin I., Berezhanskiy P., Golyak I., Anfimov D., Kareva E., Scherbakova A. Morozov A.* Deep Learning for Type 1 diabetes mellitus diagnosis using infrared quantum cascade laser spectroscopy // Materials. 2022. V. 15. № 9. P. 2984. DOI: https://doi.org/10.3390/ma15092984.

2. *Tabalina A. S., Anfimov D. R., Fufurin I. L., Golyak I. S.* Infrared quantum cascade laser spectroscopy as non-invasive diagnostic tests for human diseases // Biomedical Spectroscopy, Microscopy, and Imaging, 2020. V. 11359. P. 233–242. DOI: https://doi.org/10.1117/12.2555042.

3. *Das S., Pal S., Mitra M.* Significance of exhaled breath test in clinical diagnosis: a special focus on the detection of diabetes mellitus // Journal of medical and biological engineering, 2016. V. 36. P. 605–624. DOI: https://doi.org/10.1007/s40846-016-0164-6.

4. *Kharitonov S.A., Barnes P.J.* Exhaled biomarkers // Chest, 2006. V. 130. № 5, P. 1541–1546. DOI: https://doi.org/10.1378/chest.130.5.1541.

5. *Righettoni M., Tricoli A., Pratsinis S.E.* Si: WO3 sensors for highly selective detection of acetone for easy diagnosis of diabetes by breath analysis // Analytical chemistry, 2010. V. 82. № 9. P. 3581–3587. DOI: https://doi.org/10.1021/ac902695n.

6. *Голяк И.С., Бережанский П.В., Седова А.Ю., Гутырчик Т.А., Небритова О.А., Морозов А.Н., Анфимов Д.Р., Винтайкин И.Б., Коноплева А.А., Демкин П.П., Фуфурин И.Л.* Применение машинного обучения для диагностики некоторых социально значимых заболеваний по выдыхаемому человеком воздуху методом инфракрасной лазерной спектроскопии // Оптика и спектроскопия, 2023. Т. 131. № 6. С. 825–831. DOI: https://doi.org/10.21883/OS.2023.06.55917.109-23.

7. *Anfimov D. R., Fufurin I. L., Golyak I. S., Morozov A.N.* Design of an analyzer based on a quantum cascade laser for substance identification by infrared reflected radiation // Integrated Optics: Design, Devices, Systems and Applications VI, 2021. V. 11775. P. 115–122. SPIE. DOI: https://doi.org/10.1117/12.2589238.

8. *Davies S., Spanel P., Smith D.* Quantitative analysis of ammonia on the breath of patients in end-stage renal failure // Kidney international, 1997. V. 52(1). P. 223–228. DOI: https://doi.org/10.1038/ki.1997.324

9. *Chu P.M., Guenther F.R., Rhoderick G.C., Lafferty W.J.* The NIST quantitative infrared database // Journal of research of the National Institute of Standards and Technology. 1999. V. 104. № 1. P. 59–81. DOI: https://doi.org/10.6028/jres.104.004.

10. *Shcherbakova A.V., Anfimov D.R., Fufurin I.L., Golyak I.S., Trapeznikova I.A., Kareva E.R., Morozov A.N.* Experimental Setup Based on a Quantum Cascade Laser Tunable in the Wavelength Range of 5.3–12.8 μm for Spectral Analysis of Human Exhaled Air // Optics and Spectroscopy, 2021. V. 129. iss.7. P. 830–837. DOI: https://doi.org/10.1134/S0030400X21060151.

11. *Михайлова С.М., Шарифуллина Л.Р.* Оценка загрязнения воздуха высокотоксичными соединениями в зоне техногенных чрезвычайных ситуаций, связанных с возгоранием синтетических материалов // Научные и образовательные проблемы гражданской защиты, 2020. Т. 2. № 45. С. 47–55.

12. *Сояк Л.* Разделение и идентификация изомерных углеводородов методами капиллярной газовой хроматографии и сочетаниями ее с масс-спектрометрией и ИК-фурье-спектроскопией // Российский химический журнал, 2003. Т. 47. № 2. С. 51–69.

13. *Шерстов И.В., Пустовалова Р.В., Зенов К.Г.* Система сбора и подготовки проб выдыхаемого воздуха для медицинского лазерного оптико-акустического газоанализатора // Оптика атмосферы и океана, 2017. Т. 30. № 5. С. 435–441. DOI: https://doi.org/10.15372/AOO20170513.

14. *Pleil J.D., Oliver K.D., McClenny W.A.* Enhanced performance of Nafion dryers in removing water from air samples prior to gas chromatographic analysis // Japca, 1987. V. 37. № 3. P. 244–248. DOI: https://doi.org/10.1080/08940630.1987.10466219.

15 *Welp L.R., Keeling R.F., Weiss R.F., Paplawsky W., Heckman S.* Design and performance of a Nafion dryer for continuous operation at CO_2 and CH_4 air monitoring sites // Atmospheric Measurement Techniques, 2013. V. 6. № 5. P. 1217–1226. DOI: https://doi.org/10.5194/amt-6-1217-2013.

16. *Ye X., LeVan M.D.* Water transport properties of Nafion membranes: Part I. Single-tube membrane module for air drying // Journal of Membrane Science, 2003. V. 221. iss. 1–2. P. 147–161. DOI: https://doi.org/10.1016/S0376-7388(03)00255-2.

17. Мальцев А. А. Молекулярная спектроскопия. М.: Изд-во Московского университета, 1980. 272 с.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 4, pp. 193–200

DEVELOPMENT OF AN APPROACH FOR DRYING HUMAN EXHAUST AIR SAMPLES

I.A. Karpov*, I.L. Fufurin, O.A. Nebritova, P.P. Demkin, D.R. Anfimov
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia
**e-mail: Ivan123121@mail.ru*

Received September 27, 2023; revised September 27, 2023; accepted October 10, 2023

Currently, 6 % of the total population of the planet has both types of diabetes mellitus, and 4% have bronchial asthma. It is predicted that the number of people with these diseases will increase every year. A large percentage of all those suffering from the above diseases are children. An urgent task is to develop a non-invasive method for diagnosing type 1 and type 2 diabetes, asthma and other diseases. An approach has been developed for preparing samples of human exhaled air for their subsequent analysis using a method based on infrared laser spectroscopy. The method used is described in detail in this work. Using an installation based on an infrared quantum cascade laser, the transmission spectra of human exhaled air are analyzed. From the obtained spectra, it is possible to calculate the concentrations of biomarker substances, deviations from the norm are associated with the development of certain diseases or pathologies in the patient. In this work, an analysis of existing types of air dehumidifiers was carried out, for example: capillary column, cryotrap, adsorption dehumidifiers, etc. A Nafion dehumidifier was chosen as the most optimal solution for use in an experimental setup with an infrared quantum cascade laser. Based on the results of studies of the spectra of exhaled air from patients with previously known diagnoses, a method for drying a sample of human exhaled air was developed and described, and the absolute humidity of the dried exhaled air sample was calculated.

Keywords: exhaled air, Nafion desiccant, infrared spectroscopy, spectral analysis

REFERENCES

1. *Fufurin I., Berezhanskiy P., Golyak I., Anfimov D., Kareva E., Scherbakova A. Morozov A*. Deep Learning for Type 1 diabetes mellitus diagnosis using infrared quantum cascade laser spectroscopy. Materials, 2022. Vol. 15. No. 9. Pp. 2984. DOI: https://doi.org/ 10.3390/ ma15092984.

2. *Tabalina A. S., Anfimov D. R., Fufurin I. L., Golyak I. S.* Infrared quantum cascade laser spectroscopy as non-invasive diagnostic tests for human diseases. Biomedical Spectroscopy, Microscopy and Imaging, 2020. Vol. 11359. Pp. 233–242. DOI: https://doi.org/10.1117/ 12.2555042.

3. *Das S., Pal S., Mitra M.* Significance of exhaled breath test in clinical diagnosis: a special focus on the detection of diabetes mellitus. Journal of medical and biological engineering, 2016. Vol. 36. Pp. 605–624. DOI: https://doi.org/10.1007/s40846-016-0164-6.

4. *Kharitonov S.A., Barnes P.J.* Exhaled biomarkers. Chest, 2006. Vol. 130. No. 5. Pp. 1541–1546. DOI: https://doi.org/10.1378/chest.130.5.1541.

5. *Righettoni M., Tricoli A., Pratsinis S.E.* Si: WO_3 sensors for highly selective detection of acetone for easy diagnosis of diabetes by breath analysis. Analytical chemistry, 2010. Vol .82. No. 9. Pp. 3581–3587. DOI: https://doi.org/10.1021/ac902695n.

6. *Golyak I.S., Berezhansky P.V., Sedova A.Yu., Gutyrchik T.A., Nebritova O.A., Morozov A.N., Anfimov D.R., Vintaykin I.B., Konopleva A.A., Demkin P.P., Fufurin I.L.* Primenenie mashinnogo obucheniya dlya diagnostiki nekotoryh social'no znachimyh zabolevanij po vydyhaemomu chelovekom vozduhu metodom infrakrasnoj lazernoj spektroskopii. [Application of machine learning for the diagnosis of some socially significant diseases using the air exhaled by a person using infrared laser spectroscopy]. Optics and Spectroscopy, 2023. Vol. 131. No. 6. Pp. 825–831. DOI: https:// doi.org/10.21883/OS.2023.06.55917.109-23 (in Russian).

7. *Anfimov D.R., Fufurin I.L., Golyak I.S., Morozov A.N.* Design of an analyzer based on a quantum cascade laser for substance identification by infrared reflected radiation. Integrated Optics: Design, Devices, Systems and Applications VI, 2021. Vol. 11775. Pp. 115–122. SPIE. DOI: https://doi.org/10.1117/12. 2589238.

8. *Davies S., Spanel P., Smith D.* Quantitative analysis of ammonia on the breath of patients in end-stage renal failure. Kidney international, 1997. Vol. 52(1). Pp. 223–228. DOI: https://doi.org/10.1038/ki.1997.324.

9. *Chu P.M., Guenther F.R., Rhoderick G.C., Lafferty W.J.* The NIST quantitative infrared database. Journal of research of the National Institute of Standards and Technology, 1999. Vol. 104. No. 1. Pp. 59–81. DOI: https://doi.org/10.6028/jres.104.004.

10. *Shcherbakova A.V., Anfimov D.R., Fufurin I.L., Golyak I.S., Trapeznikova I.A., Kareva E.R., Moro-*

zov A.N. Experimental Setup Based on a Quantum Cascade Laser Tunable in the Wavelength Range of 5.3–12.8 μm for Spectral Analysis of Human Exhaled Air. Optics and Spectroscopy, 2021. Vol. 129. iss.7. Pp. 830–837. DOI: https://doi.org/10.1134/S0030400X21060151.

11. *Mikhailova S.M., Sharifullina L.R.* Ocenka zagryazneniya vozduha vysokotoksichnymi soedineniyami v zone tekhnogennyh chrezvychajnyh situacij, svyazannyh s vozgoraniem sinteticheskih materialov. [Assessment of air pollution by highly toxic compounds in the zone of man-made emergency situations associated with the fire of synthetic materials]. Scientific and educational problems of civil protection, 2020. Vol. 2. No. 45. Pp. 47–55 (in Russian).

12. *Soyak L.* Razdelenie i identifikaciya izomernyh uglevodorodov metodami kapillyarnoj gazovoj hromatografii i sochetaniyami ee s mass-spektrometriej i IK-Fur'e-spektroskopiej [Separation and identification of isomeric hydrocarbons by methods of capillary gas chromatography and its combinations with mass spectrometry and IR-Fourier spectroscopy]. Russian Chemical Journal, 2003. Vol. 47. No. 2. Pp. 51–69 (in Russian).

13. *Sherstov I.V., Pustovalova R.V., Zenov K.G.* Sistema sbora i podgotovki prob vydyhaemogo vozduha dlya medicinskogo lazernogo optiko-akusticheskogo gazoanalizatora. [System for collecting and preparing exhaled air samples for a medical laser optical-acoustic gas analyzer]. Atmosphere and Ocean Optics, 2017. Vol. 30. No. 5. Pp. 435–441. DOI: https://doi.org/ 10.15372/AOO20170513 (in Russian).

14. *Pleil J.D., Oliver K.D., McClenny W.A.* Enhanced performance of Nafion dryers in removing water from air samples prior to gas chromatographic analysis. Japca, 1987. Vol. 37. No. 3. Pp. 244–248. DOI: https://doi.org/10.1080/08940630.1987.10466219.

15 *Welp L.R., Keeling R.F., Weiss R.F., Paplawsky W., Heckman S.* Design and performance of a Nafion dryer for continuous operation at CO_2 and CH_4 air monitoring sites. Atmospheric Measurement Techniques, 2013. Vol. 6. No. 5. Pp. 1217–1226. DOI: https://doi.org/ 10.5194/amt-6-1217-2013.

16. *Ye X., LeVan M. D.* Water transport properties of Nafion membranes: Part I. Single-tube membrane module for air drying // Journal of Membrane Science, 2003. Vol. 221, iss. 1–2. Pp. 147–161. DOI: https://doi.org/10.1016/S0376-7388(03)00255-2.

17. *Maltsev A.A.* Molekulyarnaya spektroskopiya. [Molecular spectroscopy]. Moscow, Moscow University Publishing House, 1980. 272 p.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2023, т. 12, № 4, с. 201–210

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.9

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, РЕДУКЦИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

А.Д. Полянин
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
e-mail: polyanin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию: 27.09.2023
После доработки: 28.09.2023
Принята к публикации: 10.10.2023

Исследуется сильно нелинейное уравнение в частных производных с тремя независимыми переменными $u_t = u_{xx}u_{yy} - u^2_{xy}$, которое встречается в электронной магнитной гидродинамике. Описаны многопараметрические преобразования, сохраняющие вид этого уравнения, а также двумерные и одномерные редукции, приводящие его к более простым уравнениям в частных производных с двумя независимыми переменными (в том числе к стационарным уравнениям типа Монжа–Ампера, нестационарным уравнениям теплопроводности и уравнениям нелинейной теории фильтрации) или обыкновенным дифференциальным уравнениям. Методами обобщенного разделения переменных построены точные решения, многие из которых допускают представление в элементарных функциях. Рассмотрены также более сложные решения, которые выражаются через решения линейных уравнений диффузионного типа.

Ключевые слова: нелинейные уравнения с частными производными, одно- и двумерные редукции, точные решения, решения с обобщенным разделением переменных, уравнения типа Монжа–Ампера, магнитная гидродинамика, нелинейные уравнения теплопроводности, уравнения диффузии.
DOI: 10.26583/vestnik.2023.293

ВВЕДЕНИЕ. РАССМАТРИВАЕМОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

В плазменной электронной магнитной гидродинамике разработан подход, в котором электронная составляющая плазмы представлена в виде набора случайных или регулярно распределенных точечных электронных вихрей. Локальные деформации сжатия-разрежения нестационарных движений акустического типа в такой двумерной вихревой системе описываются нелинейным уравнением Смирнова–Чукбара–Забурдаева [1–3]:

$$u_t = u_{xx}u_{yy} - u^2_{xy}, \qquad (1)$$

в котором в правой части опущен общий постоянный множитель (без ограничения общности это достигается простым масштабированием по любой независимой или зависимой переменной).

В стационарном случае уравнение (1) вырождается в однородное уравнение Монжа–Ампера, общее решение которого можно представить в параметрической форме [4] (преобразования и точные решения этого и родственных более сложных уравнений типа Монжа–Ампера можно найти [5–7]).

В работе [8] методом разделения переменных были получены точные решения нестационарного уравнения (1) в виде произведения трех функций разных аргументов: $u = X(x)Y(y)T(t)$.

Методы построения решений математических уравнений, основанные на решениях более простых уравнений, обычно называются редукциями. Редукции играют ключевую роль для построения точных решений дифференциальных уравнений и обычно приводят к уравнениям более низкого порядка или уравнениям меньшей размерности. Наиболее важными для нелинейных уравнений с частными производными являются одномерные редукции, используя которые удается представить их решения в терминах решений гораздо более простых обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

В данной работе под точными решениями нелинейных уравнений с частными производными понимаются решения, которые выражаются:

- с помощью элементарных функций и неопределенных интегралов;
- через решения ОДУ или систем ОДУ;
- через решения линейных уравнений математической физики.

Важно отметить, что точные решения нелинейных уравнений математической физики с частными производными играют важную роль стандартных «математических эталонов», которые широко используются для оценки точности, верификации и разработки различных численных, асимптотических и приближенных аналитических методов. Редукции и точные решения нелинейных уравнений с частными производными чаще всего строятся с использованием методов группового анализа [6, 9, 10], методов обобщенного и функционального разделения переменных [7, 11–14], метода дифференциальных связей [7, 11, 13–15] и некоторых других аналитических методов [7, 14, 16–21].

В данной работе для поиска точных решений нелинейного уравнения магнитной гидродинамики (1) использованы различные модификации метода обобщенного разделения переменных [7, 11–14] и приведенные в [7] точные решения более простых, чем исходное, промежуточных редуцированных уравнений с меньшим числом независимых переменных. Особое внимание уделяется построению простых точных решений, которые выражаются через элементарные функции. Такие решения удобно использовать в качестве тестовых задач для оценки точности и проверки адекватности численных методов решения сильно нелинейных уравнений с частными производными.

НЕКОТОРЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Преобразование

$$\bar{x} = a_1x + b_1y + c_1,$$
$$\bar{y} = a_2x + b_2y + c_2 \quad (a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0),$$
$$\bar{t} = pt + q, \quad \bar{u} = ku + a_3x + b_3y + c_3,$$
$$k = \frac{1}{p}\left(a_1b_2 - a_2b_1\right)^2, \qquad (2)$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, p, q – произвольные постоянные, приводит исходное уравнение (1) к уравнению точно такого же вида.

Одиннадцатипараметрическое инвариантное преобразование (2) позволяет с помощью более простых частных решений уравнения (1) строить его более сложные точные решения. А именно, если $u = F(x, y, t)$ – решение уравнения (1), то функция

$$u = \frac{p}{\left(a_1b_2 - a_2b_1\right)^2} F(a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2, pt + q) + a_4x + b_4y + c_4,$$

где $a_4 = -a_3/k$, $b_4 = -b_3/k$, $c_4 = -c_3/k$, также является решением этого уравнения.

2. В полярных координатах r, φ, где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, исходное уравнение принимает вид

$$u_t = r^{-2}u_{rr}(u_{\varphi\varphi} + ru_r) - [(r^{-1}u_\varphi)_r]^2. \qquad (3)$$

Это уравнение будет использовано далее для построения точных решений рассматриваемого уравнения.

3. В эллиптических координатах r, φ, где $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$ (a и b – положительные константы), уравнение (1) записывается так:

$$u_t = (ab)^{-2}\{r^{-2}u_{rr}(u_{\varphi\varphi} + ru_r) - [(r^{-1}u_\varphi)_r]^2\}. \qquad (4)$$

4. В гиперболических координатах ζ, ψ, где $x = a\zeta\,\mathrm{ch}\,\psi$, $y = b\zeta\,\mathrm{sh}\,\psi$ (a и b – ненулевые константы), уравнение (1) имеет вид

$$u_t = -(ab)^{-2}\{\zeta^{-2}u_{\zeta\zeta}(u_{\psi\psi} + \zeta u_\zeta) - [(\zeta^{-1}u_\psi)_\zeta]^2\}. \qquad (5)$$

Видно, что уравнение (5) отличается от уравнения (4) только знаком правой части и очевидными переобозначениями. Поэтому точные решения уравнения (5) можно получить из точных решений уравнения (4), заменив t на $-t$ и сделав соответствующие переобозначения.

ДВУМЕРНЫЕ РЕДУКЦИИ, ОСНОВАННЫЕ НА ИНВАРИАНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

1. Переходя в (1) к переменным типа бегущей волны

$$u = U(\xi, \eta), \quad \xi = x - a_1t, \quad \eta = y - a_2t, \qquad (6)$$

где a_1 и a_2 – произвольные постоянные, приходим к двумерному уравнению типа Монжа–Ампера с постоянными коэффициентами

$$-a_1U_\xi - a_2U_\eta = U^2_{\xi\eta} - U_{\xi\xi}U_{\eta\eta}. \qquad (7)$$

Уравнение (7) допускает точные решения, квадратичные по любой независимой переменной, вида

$$U_1 = f_1(\xi)\eta^2 + g_1(\xi)\eta + h_1(\xi),$$
$$U_2 = f_2(\eta)\,\xi^2 + g_2(\eta)\,\xi + h_2(\eta), \qquad (8)$$

где функции f_i, g_i, h_i ($i = 1, 2$) описываются соответствующими одномерными системами ОДУ, которые здесь опускаются.

2. Переходя в (1) к переменным автомодельного типа

$$u = t^{-2\alpha-2\beta-1}U(\xi, \eta),\ \ \xi = xt^{\alpha},\ \ \eta = yt^{\beta}, \qquad (9)$$

где α и β – произвольные постоянные, получим двумерное уравнение типа Монжа–Ампера с переменными коэффициентами при младших производных

$$\alpha\xi U_\xi + \beta\eta U_\eta - (2\alpha + 2\beta + 1)U = U^2_{\xi\eta} - U_{\xi\xi}U_{\eta\eta}. \qquad (10)$$

Уравнение (10) допускает точные решения, квадратичные по любой независимой переменной, вида (8).

3. Переходя в (1) к переменным предельного автомодельного типа

$$u = e^{-2(\alpha+\beta)t}U(\xi, \eta),\ \ \xi = xe^{\alpha t},\ \ \eta = ye^{\beta t}, \qquad (11)$$

где α и β – произвольные постоянные, получим другое двумерное уравнение типа Монжа–Ампера с переменными коэффициентами при младших производных

$$\alpha\xi U_\xi + \beta\eta U_\eta - 2(\alpha + \beta)U = U^2_{\xi\eta} - U_{\xi\xi}U_{\eta\eta}. \qquad (12)$$

Уравнение (12) допускает точные решения, квадратичные по любой независимой переменной, вида (8).

4. Переходя в (1) к инвариантным переменным

$$u = U(\xi, \eta)/t,\ \ \xi = x + \lambda_1 \ln(t),\ \ \eta = y + \lambda_2 \ln(t), \qquad (13)$$

где λ и λ_2 – произвольные постоянные, получим еще одно двумерное уравнение типа Монжа–Ампера с постоянными коэффициентами

$$\lambda U_\xi + \lambda_2 U_\eta - U = U^2_{\xi\eta} - U_{\xi\xi}U_{\eta\eta}. \qquad (14)$$

Уравнение (14) допускает точные решения типа бегущей волны, а также решения, квадратичные по любой независимой переменной, вида (8).

Замечание 1. Более сложные двумерные редукции уравнения (1) можно получить, заменив в (6), (9), (11), (13) пространственные переменные их произвольными линейными комбинациями по правилу $x \Rightarrow a_1x + b_1y$ и $y \Rightarrow a_2x + b_2y$.

РЕДУКЦИИ С ОБОБЩЕННЫМ РАЗДЕЛЕНИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ, ПРИВОДЯЩИЕ К НЕОДНОРОДНЫМ УРАВНЕНИЯМ МОНЖА–АМПЕРА

1. Уравнение (1) имеет решения с аддитивным разделением переменных вида

$$u = -At + \omega(x, y), \qquad (15)$$

где A – произвольная постоянная, а функция ω описывается неоднородным уравнением Монжа–Ампера с постоянной правой частью

$$\omega_{xx}\,\omega_{yy} - \omega^2_{xy} = -A. \qquad (16)$$

2. Нетрудно проверить, что уравнение (1) допускает точное решение с аддитивным разделением переменных вида (15), которое выражается в элементарных функциях

$$u = C_1x^2 + C_2xy + C_3y^2 + C_4x + C_5y + (4C_1C_3 - C^2_2)\,t + C_6, \qquad (17)$$

где C_1, ..., C_6 – произвольные постоянные.

3. Используя результаты [7], можно получить, например, следующие точные решения вида (15) уравнения (1):

$$u = -At \pm \frac{\sqrt{A}}{C_2}x(C_1x + C_2y) + \varphi(C_1x + C_2y) + C_3x + C_4y + C_5,$$

$$u = -At \pm \frac{1}{x + C_1}\left(C_2y^2 + C_3y + \frac{C_3^2}{4C_2}\right) - \frac{A}{12C_2}(x^3 + 3C_1x^2) + C_4y + C_5x + C_6,$$

$$u = -At \pm \frac{2\sqrt{A}}{3C_1C_2}(C_1x - C_2^2y^2 + C_3)^{3/2} + C_4x + C_5y + C_6,$$

где C_1, ..., C_6 – произвольные постоянные, $\varphi = \varphi(z)$ – произвольная функция.

Замечание 2. При $A > 0$ общее решение неоднородного уравнения Монжа–Ампера (16) можно представить в параметрическом виде [4, 7].

4. Уравнение (1) допускает более сложные, чем (15), решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = -(ax + by + c)t + \omega(x, y), \qquad (18)$$

где a, b, c – произвольные постоянные, а функция ω описывается неоднородным уравнением Монжа–Ампера с переменной правой частью

$$\omega_{xx}\omega_{yy} - \omega^2_{xy} = -ax - by - c. \qquad (19)$$

При $b = 0$ уравнение (19) имеет, например, точные решения

$$\omega = \pm\frac{2}{3a}y(ax+c)^{3/2} + \varphi(x) + C_1 y, \qquad (20)$$

где $\varphi(x)$ – произвольная функция.

РЕДУКЦИЯ С РАЗДЕЛЕНИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ, ПРИВОДЯЩАЯ К ЛИНЕЙНОМУ УРАВНЕНИЮ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

1. Уравнение (1) допускает решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \frac{1}{2}ax^2 + bxy + \frac{1}{2}cy^2 + dy + (ac-b^2)t + U(x,t), \qquad (21)$$

где a, b, c, d – произвольные постоянные, а функция $U = U(x,t)$ описывается линейным уравнением теплопроводности

$$U_t = cU_{xx}. \qquad (22)$$

2. О решениях уравнения (22) при произвольных начальных и граничных условиях см., например, в [22, 23]. В [23] приведен большой список простых точных решений линейного уравнения теплопроводности, которые выражаются в элементарных функциях. Для иллюстрации сказанного приведем несколько решений уравнения (22), которые содержат экспоненциальные и тригонометрические функции:

$$U = C_1\exp(c\mu^2 t \pm \mu x) + C_2,$$
$$U = C_1\exp(-c\mu^2 t)\cos(\mu x) + C_2,$$
$$U = C_1\exp(-c\mu 2t)\sin(\mu x) + C_2,$$
$$U = C_1\exp(-\mu x)\cos(\mu x - 2\mu^2 t) + C_2,$$
$$U = C_1\exp(-\mu x)\sin(\mu x - 2\mu^2 t) + C_2,$$

где C_1, C_2, μ – произвольные постоянные.

РЕДУКЦИИ, КВАДРАТИЧНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Уравнение (1) имеет решения с обобщенным разделением переменных, квадратичные относительно любой пространственной переменной, например

$$u = y^2 f(x,t) + yg(x,t) + h(x,t), \qquad (23)$$

где функции $f = f(x, t)$, $g = g(x, t)$, $h = h(x, t)$ описываются системой уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными

$$f_t = 2ff_{xx} - 4f^2_x,\ \ g_t = 2fg_{xx} - 4f_x g_x,$$
$$h_t = 2fh_{xx} - g^2_x. \qquad (24)$$

Здесь первое уравнение для f нелинейно и изолированно (т.е. не зависит от других уравнений), а два других уравнения линейны относительно искомых функций g и h (причем уравнение для g однородно, а уравнение для h – неоднородно).

Отметим, что заменой $f = \xi^{-1/2}$ первое уравнение (24) сводится к нелинейному уравнению теплопроводности специального вида

$$\xi_t = 2(\xi^{-1/2}\xi_x)_x, \qquad (25)$$

которое допускает много точных решений (см., например, [7]).

2. Последние два уравнения системы (24) имеют тривиальное решение $g = h = 0$. Справедливо также более общее утверждение.

Утверждение. Пусть $f = f(x, t)$ – любое решение первого уравнения (24). Тогда последние два уравнения системы (24) допускают частные решения

$$g = C_1 f + C_2,\ \ h = \frac{1}{4}C_1^2 f + C_3, \qquad (26)$$

Это утверждение доказывается путем подстановки функций (26) в последние два уравнения системы (24) и сравнением полученных выражений с первым уравнением (24).

3. Простейшим решением первого уравнения (24) является константа

$$f = \frac{1}{2}a, \qquad (27)$$

где a – произвольная постоянная. В этом случае последние два уравнения (24) являются линейными уравнениями теплопроводности

$$g_t = ag_{xx}, \quad h_t = ah_{xx} - g^2_x. \qquad (28)$$

первое из которых однородно, а второе – неоднородно. Решения этих уравнений можно получить для произвольных начальных и граничных условиях (см., например, в [22, 23]).

Отметим, что первое уравнение (28) имеет вырожденное стационарное решение $g = bx$, где b – произвольная постоянная. Большой список других простых точных решений этого уравнения, которые выражаются в элементарных функциях, можно найти в [23].

Приведем простые решения типа бегущей волны уравнений (28), содержащие экспоненциальные функции:

$$g = C_1 \exp(kx + ak^2 t),$$
$$h = C_2 \exp(kx + ak^2 t) + \frac{C_1^2}{2a} \exp[2(kx + ak^2 t)], \qquad (29)$$

где C_1, C_2, k – произвольные постоянные. Подставляя (27) и (29) в формулу (23), получим точное решение исходного уравнения (1).

4. Первое уравнение (24) имеет стационарное решение

$$f = \frac{1}{C_1 x + C_2}, \qquad (30)$$

а также более сложное нестационарное трехпараметрическое точное решение с обобщенным разделением переменных

$$f = \frac{(x + C_1)^2}{12(t + C_2)} + C_3 (t + C_2)^{1/3}, \qquad (31)$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

5. Система (24) допускает точное решение типа бегущей волны

$$f = f(z), \quad g = g(z), \quad h = h(z),$$
$$z = kx - \lambda t, \qquad (32)$$

где k и λ – произвольные постоянные. Решение соответствующего автономного ОДУ для функции f (которое сводится к линейному ОДУ первого порядка) можно выразить в элементарных функциях.

РЕДУКЦИИ К УРАВНЕНИЮ ТИПА МОНЖА–АМПЕРА В НОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ТИПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

1. Уравнение (1) допускает решения с обобщенным разделением переменных комбинированного типа

$$u = C_1 x^2 + C_2 xy + C_3 y^2 + C_4 x + C_5 y + C_6 t + U(\xi, \eta),$$
$$\xi = a_1 x + b_1 y - \lambda_1 t, \quad \eta = a_2 x + b_2 y - \lambda_2 t, \qquad (33)$$

где C_i, a_j, b_j, λ_j ($i = 1, \ldots, 6$; $j = 1, 2$) – произвольные постоянные; ξ и η – новые переменные типа бегущей волны, а функция $U = U(\xi, \eta)$ описывается двумерным уравнением типа Монжа–Ампера

$$\begin{aligned} C_6 - \lambda_1 U_\xi - \lambda_2 U_\eta &= 4C_1C_3 - C_2^2 + \\ &+ (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 (U_{\xi\xi} U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta}^2) + \\ &+ 2(a_1^2 C_3 + b_1^2 C_1 - a_1 b_1 C_2) U_{\xi\xi} + \\ &+ 2(a_2^2 C_3 + b_2^2 C_1 - a_2 b_2 C_2) U_{\eta\eta} + \\ &+ 2[(2a_1 a_2 C_3 + 2b_1 b_2 C_1) - (a_1 b_2 + b_1 a_2) C_2] U_{\xi\eta}. \end{aligned} \qquad (34)$$

2. Уравнение (34) допускает точные решения, квадратичные по любой независимой переменной типа бегущей волны, вида

$$U_1 = f_1(\xi)\eta^2 + g_1(\xi)\eta + h_1(\xi),$$
$$U_2 = f_2(\eta)\xi^2 + g_2(\eta)\xi + h_2(\eta),$$

где функции f_i, g_i, h_i ($i = 1, 2$) описываются соответствующими одномерными системами ОДУ, которые здесь опускаются.

3. Рассмотрим специальный случай (33) – (34), положив

$$a_1 = a,\ b_1 = b,\ \lambda_1 = \lambda,\ a_2 = b_2 = 0,\ \lambda_2 = -1,\ \eta = t,$$

что соответствует решению вида

$$u = C_1 x^2 + C_2 xy + C_3 y^2 + C_4 x + C_5 y + C_6 t + U(\xi, t),$$
$$\xi = ax + by - \lambda t, \qquad (35)$$

где C_i, a, b, λ ($i = 1, \ldots, 6$) – произвольные постоянные. В этом случае функция $U = U(\xi, t)$ описывается линейным уравнением типа конвективной теплопроводности с постоянным источником

$$\begin{aligned} U_t &= 2(a^2 C_3 + b^2 C_1 - abC_2) U_{\xi\xi} + \\ &+ \lambda U_\xi + 4C_1 C_3 - C_2^2 - C_6. \end{aligned} \qquad (36)$$

4. В частности, взяв в (35)–(36) функцию U с одним аргументом ξ и положив $C_6 = 4C_1C_3 - C_2^2$, приходим к линейному ОДУ с постоянными коэффициентами

$$2(a^2 C_3 + b^2 C_1 - abC_2) U''_{\xi\xi} + \lambda U'_\xi = 0,$$

общее решение которого выражается через экспоненту

$$U(\xi) = A_1 \exp\left[-\frac{\lambda}{2(a^2 C^3 + b^2 C_1 - abC_2}\xi \right] + A_2, \qquad (37)$$

где A_1 и A_2 – произвольные постоянные.

РЕДУКЦИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ КООРДИНАТАМ

1. В переменных, одна из которых время, а другая задается параболической функцией по пространственным переменным

$$u = U(z, t), \quad z = y + ax^2, \qquad (38)$$

где a – произвольная постоянная, уравнение (1) редуцируется к двумерному уравнению

$$U_t = 2aU_z U_{zz}, \qquad (39)$$

которое встречается в теории нелинейной фильтрации жидкости в пористых средах. Ниже рассмотрены некоторые классы точных решений, которые допускает уравнение (39).

2. Редуцированное уравнение (39) имеет простое частное решение, пропорциональное произведению подходящих степеней независимых переменных

$$U = -\frac{z^3}{36at}.$$

3. Редуцированное уравнение (39) допускает решение с аддитивным разделением переменных

$$U = C_1(z + C_2)^{3/2} + \frac{9}{4}aC_1^2 t + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

4. Редуцированное уравнение (39) допускает решение типа бегущей волны

$$U = U(\xi), \quad \xi = z - \lambda t \equiv y + ax^2 - \lambda t,$$

где функция $U = U(\xi)$ удовлетворяет простому линейному ОДУ с постоянными коэффициентами $2aU''_{\xi\xi} + \lambda = 0$, общее решение которого имеет вид

$$U = -\frac{\lambda}{4a}\xi^2 + C_1\xi + C_2.$$

Замечание 3. Более общее решение уравнения (39) можно получить, если искать решение в виде

$$U = Ct + W(\xi), \quad \xi = z - \lambda t \equiv y + ax^2 - \lambda t.$$

5. Редуцированное уравнение (39) имеет автомодельное решение

$$U = t^{-3\beta-1}\, W(\xi), \quad \xi = z\, t^{\beta},$$

где β – произвольная постоянная, а функция $W = W(\xi)$ описывается ОДУ

$$-(3\beta + 1)W + \beta\xi W'_\xi = 2aW'_\xi\, W''_{\xi\xi}.$$

При $\beta = -1/3$ общее решение последнего уравнения имеет вид

$$W = -\frac{1}{36a}\xi^3 + C_1\xi + C_2,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

6. Редуцированное уравнение (39) допускает предельное автомодельное решение

$$U = e^{-3\beta t}W(\xi), \quad \xi = e^{\beta t}z,$$

где β – произвольная постоянная, а функция $W = W(\xi)$ описывается ОДУ

$$3\beta W + \beta\xi W'_\xi = 2aW'_\xi\, W''_{\xi\xi}.$$

7. Редуцированное уравнение (39) имеет другое инвариантное решение вида

$$U = t^{-1}W(\xi), \quad \xi = z + \lambda \ln t,$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $W = W(\xi)$ описывается автономным ОДУ

$$-W + \lambda W'_\xi = 2aW'_\xi\, W''_{\xi\xi}.$$

8. Редуцированное уравнение (39) допускает точное решение в виде кубического полинома по z [11, 12]:

$$U = \psi_1(t) + \psi_2(t)z + \psi_3(t)z^2 + \psi_4(t)z^3,$$

где функции $\psi_n(t)$ $(n = 1, \ldots, 4)$ описываются системой ОДУ

$$\psi'_1 = 4a\psi_2\psi_3, \quad \psi'_2 = 4a(3\psi_2\psi_4 + 2\psi_3^2),$$
$$\psi'_3 = 36a\psi_3\psi_4, \quad \psi'_4 = 36a\psi_4^2.$$

9. Редуцированное уравнение (39) имеет также точное решение с обобщенным разделением переменных более экзотического вида [11, 12]:

$$U = \vartheta_1(t) + \vartheta_2(t)z^{3/2} + \vartheta_3(t)z^3,$$

где функции $\vartheta_n(t)$ $(n = 1,\ 2,\ 3)$ описываются системой ОДУ

$$\vartheta'_1 = \frac{9}{4}a\,\vartheta_2^2, \ \ \vartheta'_2 = \frac{45}{2}a\vartheta_2\vartheta_3, \ \ \vartheta'_3 = 36a\vartheta_3^2.$$

Эту систему нетрудно проинтегрировать в обратном порядке, начиная с последнего уравнения.

РЕДУКЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ КВАДРАТИЧНОГО ВИДА ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ КООРДИНАТАМ

1. В переменных, одна из которых – время, а другая квадратична относительно пространственных переменных

$$u = U(z, t), \ \ z = ax^2 + bxy + cy^2 + kx + sy, \quad (40)$$

где a, b, c, k, s – произвольные постоянные, уравнение (1) редуцируется к двумерному уравнению

$$U_t = 2[(4ac - b^2)z + as^2 + ck^2 - bks]U_z U_{zz} + \\ +(4ac - b^2)U_z^2. \quad (41)$$

Отметим, что в зависимости от знаков коэффициентов квадратичных слагаемых a, b, c в (40), кривая z = const может быть как эллипсом, так и гиперболой (или параболой в вырожденном случае при $4ac{-}b^2 = 0$).

Рассмотрим некоторые классы точных решений, которые допускает уравнение (41).

2. Редуцированное уравнение (41) допускает решения с аддитивным разделением переменных

$$U = Ct + \zeta(z),$$

где C – произвольная постоянная, а функция $\zeta = \zeta(z)$ описывается нелинейным ОДУ:

$$2[(4ac - b^2)z + as^2 + ck^2 - bks]\, \zeta'_z \zeta''_{zz} + \\ + (4ac - b^2)(\zeta'_z)^2 = C,$$

которое легко интегрируется, поскольку допускает понижение порядка с помощью стандартной подстановки $\omega(z) = \zeta'_z$. Отметим, что полученное ОДУ имеет частное решение в виде квадратичного многочлена.

3. Редуцированное уравнение (41) допускает решения, квадратичные относительно z:

$$U = \varphi_2(t)z^2 + \varphi_1(t)z + \varphi_0(t),$$

где функции $\varphi_i(t)$ описываются системой ОДУ, которая здесь опускается.

4. При $4ac - b^2 \neq 0$ редуцированное уравнение (41) допускает решения квазиавтомодельного вида

$$U = t^{-2\beta-1}V(\eta), \\ \eta = [(4ac - b^2)z + as^2 + ck^2 - bks]t^{\beta}, \quad (42)$$

где β – произвольная постоянная, а функция $V = V(\eta)$ удовлетворяет нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-(2\beta+1)V + \beta\eta V'_\eta = 2A^3\eta V'_\eta V''_\eta + A^3(V'_\eta)^2, \\ A = 4ac - b^2. \quad (43)$$

Уравнение (43) допускает частное решение в виде квадратичного многочлена. В частности, оно имеет простое решение

$$V = -\frac{1}{12}A^{-3}\eta^2, \quad A = 4ac - b^2, \quad (44)$$

которое не зависит от параметра β.

5. Отметим, что при $4ac - b^2 > 0$ преобразование

$$t = t, \quad \rho = \left| z + \frac{as^2 + ck^2 - bks}{4ac - b^2} \right|^{1/2}, \\ U = \frac{4}{4ac - b^2} W(t, \rho),$$

приводит уравнение (41) к каноническому виду

$$W_t = \rho^{-1} W_\rho W_{\rho\rho}. \quad (45)$$

6. Уравнение (45) имеет простое точное решение

$$W = -\frac{\rho^4}{48t}. \quad (46)$$

Используя решение (46) и результаты [19, 20] (см. второе утверждение), из (45) получим

$$W = e^{-4\lambda t}\Phi(\zeta), \;\; \zeta = \rho e^{\lambda t}, \quad (47)$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $\Phi = \Phi(\zeta)$ удовлетворяет нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-4\lambda\Phi + \lambda\,\zeta\,\Phi'_\zeta = \zeta^{-1}\,\Phi'_\zeta\,\Phi''_{\zeta\zeta}$$

порядок которого можно понизить на единицу.

7. Уравнение (45) имеет также точное решение с обобщенным разделением переменных полиномиального вида

$$W = \theta_1(t) + \theta_2(t)\rho^2 + \theta_3(t)\rho^4, \quad (48)$$

где функции $\theta_n(t)$ (n = 1, 2, 3) описываются системой ОДУ

$$\theta'_1 = 4\theta_2^2, \;\; \theta'_2 = 32\theta_2\theta_3, \;\; \theta'_3 = 48\theta_3^2.$$

Эту систему нетрудно проинтегрировать в обратном порядке, начиная с последнего уравнения.

Замечание 4. Уравнение (45) с точностью до обозначений совпадает с уравнением (49), точные решения которого (отличные от указанных выше в пп. 6 и 7) приведены далее.

РЕДУКЦИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ В ПОЛЯРНЫХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

1. Уравнение (3), записанное в полярных координатах r, φ, допускает точные решения, не зависящие от угловой переменной, которые описываются двумерным уравнением

$$u_t = r^{-1}u_r u_{rr}, \quad (49)$$

которое с точностью до обозначений совпадает с уравнением (45) (некоторые его точные решения описаны ранее в пп. 6 и 7).

2.Уравнение (49) имеет точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u = C_1 C_2^2 t + C_2 \int \sqrt{C_1 r^2 + C_3}\, dr + C_4,$$

где C_1, ..., C_4 – произвольные постоянные (при различных знаках константы C_1 интеграл в правой части выражается через разные элементарные функции).

3. Уравнение (49) допускает автомодельное решение

$$u = t^{-4\beta-1} F(z), \quad z = rt^{\beta},$$

где β – произвольная постоянная, а функция $F = F(z)$ описывается ОДУ

$$-(4\beta+1)F + \beta z F'_z = z^{-1} F'_z F''_{zz}.$$

Это уравнение можно проинтегрировать при $\beta = -1/4$.

4. Уравнение (3) имеет также точные решения с разделением переменных вида

$$u = r^4 v(\varphi, t), \tag{50}$$

где функция $v = v(\varphi, t)$ описывается двумерным уравнением

$$v_t = 12v(v_{\varphi\varphi} + 4v) - 9v_\varphi^2. \tag{51}$$

5. Поскольку уравнение (51) не зависит явно от независимых переменных, то оно имеет решение типа бегущей волны

$$v = v(Z), \; Z = \varphi - \lambda t,$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $v =$ $= v(Z)$ описывается автономным ОДУ

$$12v(v''_{ZZ} + 4v) - 9(v'z)^2 + \lambda v'_Z = 0.$$

6. Уравнение (51) допускает также решение с простым разделением переменных вида

$$v = (t + C)^{-1} V(\varphi),$$

где C – произвольная постоянная, а функция $V = V(\varphi)$ описывается автономным ОДУ

$$12V(V''_{\varphi\varphi} + 4V) - 9(V'_\varphi)^2 + V = 0.$$

7. Уравнение (3), записанное в полярных координатах r, φ, допускает точные решения с неполным разделением переменных вида

$$u = \frac{1}{t + C} W(r, \varphi),$$

где функция W описывается двумерным уравнением

$$r^{-2} W_{rr}(W_{\varphi\varphi} + rW_r) - [(r^{-1}W_\varphi)_r]^2 + W = 0.$$

8. Поскольку уравнения в полярных и эллиптических координатах (3) и (4) отличаются только постоянным множителем в правой части, то точные решения уравнения (4) можно получить из решений уравнения (3), заменив в них переменную t по правилу $t \Rightarrow (ab)^{-2} t$.

КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Исследуется нелинейное уравнение в частных производных с тремя независимыми переменными вида $u_t = u_{xx}u_{yy} - u^2_{xy}$, которое описывает локальные нестационарные движения плазмы в электронной магнитной гидродинамике. Рассматриваются инвариантные многопараметрические преобразования, сохраняющие вид этого уравнения. Описаны двух- и одномерные редукции, приводящие его к более простым уравнениям с частными производными с двумя независимыми переменными (в том числе к стационарным уравнениям типа Монжа–Ампера и линейным или нелинейным нестационарным уравнениям теплопроводности) или обыкновенным дифференциальным уравнениям. Получен ряд решений с обобщенным разделением переменных, которые выражаются в элементарных функциях, а также некоторые другие точные решения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700057-0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Smirnov V.V., Chukbar K.V.* «Phonons» in two-dimensional vortex lattices // Journal of Experimental and Theoretical Physics, 2001. V. 93. № 1. P. 126–135.

2. *Zaburdaev V.Yu., Smirnov V.V., Chukbar K.V.* Nonlinear dynamics of electron vortex lattices // Plasma Physics Reports, 2014. V. 30. № 3. P. 214–217.

3. *Ohkitani K., Sultu F.Al.* Singularity formation in the Smirnov–Chukbar–Zaburdaev equation for the deformation of vortex lattices // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2013. V. 46. № 20. P. 205501.

4. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 3. Ч. 1. М.: Гостехиздат, 1933.

5. *Хабиров С.В.* Неизэнтропические одномерные движения газа, построенные с помощью контактной группы неоднородного уравнения Монжа – Ампера // Математический сборник, 1990. V. 181. № 12. P. 1607–1622.

6. *Ibragimov N.H. (ed.).* CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, vol.1, Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. Boca Raton: CRC Press, 1994.

7. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.

8. *Dubinov A.E., Kitayev I. N.* New exact solutions of the equation of non-linear dynamics of a lattice of electronic vortices in plasma in the framework of electron magnetohydrodynamics // Magnetohydrodynamics, 2020. V. 56. № 4. P. 369–375.

9. *Ovsiannikov L.V.* Group Analysis of Differential Equations. New York: Academic Press, 1982.

10. *Olver P.J.* Application of Lie Groups to Differential Equations, 2nd ed. NewYork: Springer-Verlag, 2000.

11. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.

12. *Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Chapman & Hall / CRC Press, Boca Raton, 2007.

13. *Полянин А.Д.,Журов А.И.* Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. М.: ИПМех РАН, 2020.

14. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. Boca Raton–London: CRC Press, 2022.

15. *Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.

16. *Kudryashov N.A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // Chaos,S olitons and Fractals. 2005. V. 24. № 5. P. 1217–1231.

17. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Изд. дом «Интеллект», 2010.

18. Полянин А.Д., Аксенов А.В. Использование простых решений нелинейных уравнений математической физики для построения более сложных решений // Вестник НИЯУ«МИФИ», 2020. Т. 9. № 5. P. 420–437.

19. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions // Mathematics, 2021. V. 9. № 4, 345.

20. *Аксенов А.В., Полянин А.Д.* Обзор методов построения точных решений уравнений математической физики, основанных на использовании более простых решений // Теоретическая и математическая физика, 2022. V. 211. № 2. С. 149–180. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf10247

21. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I.* Delay Ordinary and Partial Differential Equations. Boca Raton: CRC Press, 2024.

22. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

23. *Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd ed. Boca Raton–London: CRC Press, 2016.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 4, pp. 201–210

TRANSFORMATIONS, REDUCTIONS AND EXACT SOLUTIONS OF A HIGHLY NONLINEAR EQUATION OF ELECTRON MAGNETOHYDRODYNAMICS

A.D. Polyanin*

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,Moscow, 119526 Russia

**e-mail: polyanin@ipmnet.ru*

Received September 27, 2023; revised September 28, 2023; accepted October 10, 2023

A strongly nonlinear partial differential equation with three independent variables of the form $u_t = u_{xx}u_{yy} - u^2_{xy}$, which occurs in electron magnetohydrodynamics, isconsidered. Multiparameter transformations that preserve the form of this equation are described, as well as two- and one-dimensional reductions that lead to simpler partial differential equations with two independent variables (including stationary equations of the Monge–Ampere type and nonstationary heat equations) or ordinary differential equations. By methods of generalized separation of variables, exact solutions are constructed, many of which admit representation in elementary functions. More complex solutions are also considered, which are expressed in terms of solutions of linear diffusion-type equations.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, РЕДУКЦИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Keywords: nonlinear partial differential equations, exact solutions, one-dimensional and two-dimensional reductions, generalized separable solutions, Monge–Ampere type equations, magnetohydrodynamics, nonlinear heat equations, diffusion-type equations.

REFERENCES

1. *Smirnov V.V., Chukbar K.V.* «Phonons» in two-dimensional vortex lattices. Journal of Experimental and Theoretical Physics, 2001. Vol. 93. No. 1. P. 126–135.

2. *Zaburdaev V.Yu., Smirnov V.V., Chukbar K.V.* Nonlinear dynamics of electron vortex lattices. Plasma Physics Reports, 2014. Vol. 30. No. 3. Pp. 214–217.

3. *OhkitaniK., Sultu F. Al.* Singularity formation in the Smirnov–Chukbar–Zaburdaev equation for the deformation of vortex lattices. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2013. Vol. 46. No. 20. P. 205501.

4. *Goursat E.* A Course of Mathematical Analysis. Vol. 3. Part 1, Moscow, Gostekhizdat Publ. 1933 (in Russian).

5. *Khabirov S.V.* Neizentropicheskie odnomernye dvizheniya gaza, postroennye s pomoshch'yu kontaktnoj gruppy neodnorodnogo uravneniya Monzha-Ampera [Nonisentropic one-dimensional gas motions obtained with the help of the contact group of the nonhomogeneous Monge–Amp`ere equation]. Matematicheskij sbornik, 1990. Vol. 181. No. 12. Pp. 1607–1622 (in Russian).

6. *Ibragimov N.H. (ed.).* CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, vol.1, Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. Boca Raton: CRC Press, 1994.

7. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.

8. *Dubinov A.E., Kitayev I.N.* New exact solutions of the equation of non-linear dynamics of a lattice of electronic vortices in plasma in the framework of electron magnetohydrodynamics. Magnetohydrodynamics, 2020. Vol. 56. No. 4. Pp. 369–375.

9. *Ovsiannikov L.V.* Group Analysis of Differential Equations. New York: Academic Press, 1982.

10. *Olver P.J.* Application of Lie Groups to Differential Equations, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2000.

11. *Polyanin A.D., Zaitsev A.I., Zhurov A.I.* Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki [Solution Methods for Nonlinear Equations of Mathematical Physics and Mechanics], Moscow, Fizmatlit Publ., 2005.

12. *Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Chapman & Hall / CRC Press, Boca Raton, 2007.

13. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Metody razdeleniya peremennyh i tochnye resheniya nelinejnyh uravnenij matematicheskoj fiziki [Methods of Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear Equations of Mathematical Physics], Moscow IPMech RAS Publ., 2020.

14. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. Boca Raton–London: CRC Press, 2022.

15. *Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N.* Metod differencial'nyh svyazej I ego prilozheniya v gazovoj dinamike [Method of Differential Constraints and its Applications in Gas Dynamics], Novosibirsk: Nauka Publ., 1984.

16. *Kudryashov N.A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. Chaos, Solitons and Fractals. 2005. Vol. 24. No. 5. Pp. 1217–1231.

17. *Kudryashov N.A.* Metody nelinejnoj matematicheskoj fiziki [Methods of Nonlinear Mathematical Physics], Dolgoprudnyi: Izd. Dom Intellekt Publ., 2010.

18. *Polyanin A.D., Aksenov A.V.* Ispol'zovanie prostyh reshenij nelinejnyh uravnenij matematicheskoj fiziki dlya postroeniya bolee slozhnyh reshenij [Using simple solutions of nonlinear equations of mathematical physics to construct more complex solutions]. Vestnik NIYaU MIFI, 2020. Vol. 9. No. 5. Pp. 420–437 (in Russian).

19. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions. Mathematics, 2021. Vol. 9. No. 4, 345.

20. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Obzor metodov postroeniya tochnyh reshenij uravnenij matematicheskoj fiziki, osnovannyh na ispol'zovanii bolee prostyh reshenij [Review of methods for constructing exact solutions of equations of mathematical physics based on simpler solutions]. Theoretical and Mathematical Physics, 2022. Vol. 211. No. 2. Pp. 149–180 (in Russian) DOI: https://doi.org/10.4213/tmf10247

21. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I.* Delay Ordinary and Partial Differential Equations. Boca Raton: CRC Press, 2024.

22. *Tikhonov A.N., Samarskii A.A.* Uravneniya matematicheskoj fiziki [Equations of Mathematical Physics], Moscow: Nauka Publ., 1972.

23. *Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd ed. Boca Raton–London: CRC Press, 2016.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2023, т. 12, № 4, с. 211–222

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.95

РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА КЛЕЙНА–ГОРДОНА С ПОСТОЯННЫМ И ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В.Г. Сорокин
ФГСБУН Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук,
Москва,119526, Россия
e-mail: vsesor@gmail.com

Поступила в редакцию 19.09.2023
После доработки: 19.09.2023
Принята к публикации: 26.09.2023

Рассматриваются одномерные линейные однородные уравнения типа Клейна–Гордона с постоянным и пропорциональным запаздыванием, которые помимо искомой функции $u(x, t)$ содержат функцию с постоянным запаздыванием вида $u(x, t-\tau)$, где $\tau > 0$ – постоянное запаздывание, или функцию с пропорциональным запаздыванием вида $u(x, pt)$, где p – коэффициент пропорциональности. Приводятся выраженные в элементарных функциях точные решения таких уравнений. Сформулированы начально-краевые задачи с начальными данными общего вида и однородными граничными условиями первого, второго и третьего рода, а также смешанными граничными условиями. Приводится подробное описание решения этих задач с помощью метода разделения переменных. В результате получены аналитические формулы решений начально-краевых задач для линейных однородных уравнений типа Клейна–Гордона с постоянным и пропорциональным запаздыванием.

Ключевые слова: линейные однородные уравнения типа Клейна–Гордона, уравнения в частных производных с запаздыванием, уравнения в частных производных с пропорциональным запаздыванием, начально-краевые задачи, решения в замкнутом виде, точные решения.
DOI: 10.26583/vestnik.2023.294

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения с постоянным запаздыванием

Дифференциальные уравнения с запаздыванием применяются при математическом моделировании процессов, текущее состояние которых зависит в том числе от состояния в некоторый момент в прошлом. Такие уравнения помимо искомой функции $u(t)$ содержат функцию с запаздыванием $w=u(t-\tau)$, где t – время, $\tau > 0$ – время запаздывания. Простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) с постоянным запаздыванием имеет вид [1–4]:

$$u'_t = F(u,\ w),\quad w=u(t-\tau),\tag{1}$$

где F – некоторая функция.

Более сложные процессы с пространственной неоднородностью моделируются реакционно-диффузионными уравнениями с постоянным запаздыванием (см. [5, 6], а также обзор публикаций в [7]):

$$u_t = au_{xx} + F(u, w),\quad w=u(x, t-\tau),\tag{2}$$

где $u=u(x,t)$, $a > 0$ – коэффициент диффузии; F – кинетическая функция.

В специальном случае $F(u, w) = f(w)$ в (2) можно говорить об инерционности процесса переноса субстанции в локально-неравновесной среде: реакция системы на некоторое воздействие является не мгновенной, как в классическом локально-равновесном случае, а запаздывает на время τ.

Замечание 1. Решения начально-краевых задач для реакционно-диффузионных уравнений типа (2) рассматривались в [7].

Уравнения типа Клейна–Гордона с запаздыванием имеют вид

$$u_{tt} = au_{xx} + F(u, w),\quad w=u(x, t-\tau),\tag{3}$$

где a – некоторая положительная константа ($\sqrt{a}$ – скорость); F – функция источника.

Эти уравнения также называют волновыми уравнениями с запаздыванием. Точные решения нелинейных уравнений типа Клейна–Гордона с запаздыванием построены с помощью метода функциональных связей в [8] (см. также [9, 10], где рассматривались более сложные гиперболические уравнения с запаздыванием телеграфного типа) и с помощью группового анализа в [11–13]. В [14] рассматриваются способы построения точных решений для уравнений с запаздыванием типа (3) (а также уравнений типа (2) и других уравнений) с помощью точных решений более простых уравнений в частных производных без запаздывания. Другие методы построения точных решений волновых уравнений с запаздыванием и сами точные решения описаны в [15, 16]. Численное интегрирование начально-краевых задач для нелинейных уравнений типа Клейна–Гордона с запаздыванием (3) с помощью комбинации метода прямых и методов решения систем ОДУ и сопоставление полученных численных решений с точными проводилось в [17].

Дифференциальные уравнения с пропорциональным запаздыванием

Уравнения вида (1), (2) и (3) можно усложнить, рассматривая переменное запаздывание $\tau = \tau(t)$ вместо постоянного. В частном случае $\tau(t) = (1 - p)\, t$, где p – коэффициент пропорциональности (чаще всего $0 < p < 1$, однако в литературе встречаются и случаи $p > 1$), имеем уравнения с пропорциональным запаздыванием. Например, ОДУ с пропорциональным запаздыванием имеет вид

$$u'_t = F(u, w), \quad w = u(pt) \tag{4}$$

и при $0 < p < 1$ часто называется уравнением пантографа [18]. Уравнения вида (4) и более сложные ОДУ с пропорциональным запаздыванием используются в описании процессов электродинамики [19], теории популяций [20], теории чисел [21], стохастических игр [22], теории графов [23], теории риска и очередей [24], теории искусственных нейронных сетей [25–27]. Важно отметить, что родственные ОДУ с пропорциональным запаздыванием при $p > 1$ используются в моделировании процессов биологии [28–30] и астрофизики [31].

Уравнения в частных производных с пропорциональным запаздыванием, а именно реакционно-диффузионные уравнения

$$u_t = au_{xx} + F(u, w), \quad w = u(x, pt) \tag{5}$$

и уравнения типа Клейна–Гордона

$$u_{tt} = au_{xx} + F(u, w), \quad w = u(x, pt) \tag{6}$$

встречаются в публикациях значительно реже, чем такие же уравнения с постоянным запаздыванием. В [32] получено асимптотическое решение линейного уравнения типа (5). В [33] методом разделения переменных построены точные решения линейных уравнений вида (5) и (6). Многие нелинейные уравнения с пропорциональным запаздыванием вида (5) и (6), допускающие редукции и точные решения с аддитивным, мультипликативным, обобщенным и функциональным разделением переменных рассматриваются в [34–37]. Приближенные аналитические методы решения некоторых линейных и нелинейных уравнений в частных производных с пропорциональным запаздыванием описаны в [38, 39]; численные методы – в [40, 41].

Виды рассматриваемых в статье уравнений

В статье рассматриваются линейные однородные уравнения типа Клейна–Гордона с постоянным запаздыванием

$$u_{tt} = a_1 u_{xx} + a_2 w_{xx} + c_1 u + c_2 w, \quad w = u(x, t - \tau), \tag{7}$$

где $a_1 \ge 0$, $a_2 \ge 0$, $a_1 + a_2 > 0$, $\tau > 0$, и с пропорциональным запаздыванием

$$u_{tt} = a_1 u_{xx} + a_2 w_{xx} + c_1 u + c_2 w, \quad w = u(x, pt), \tag{8}$$

где $0 < p < 1$.

Точные решения и решения начально-краевых задач с общими начальными данными и с граничными условиями первого, второго и третьего рода (а также смешанными граничными условиями) для уравнений типа (7) рассматриваются во второй части статьи, а для уравнений типа (8) – в третьей.

ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА КЛЕЙНА–ГОРДОНА С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Точные решения простейшего вида

Уравнения с постоянным запаздыванием вида (7) допускают точные решения, которые выражаются в элементарных функциях и описаны далее.

1. Решения с мультипликативным разделением переменных:

$$u=\left[A\cos(kx)+B\sin(kx)\right]e^{-\lambda t},$$
$$k=\sqrt{(c_1+c_2e^{\lambda\tau}-\lambda^2)/(a_1+a_2e^{\lambda\tau})} \qquad (9)$$
$$\text{при } c_1+c_2e^{\lambda\tau}-\lambda^2>0;$$

$$u=\left[A\exp(kx)+B\exp(-kx)\right]e^{-\lambda t},$$
$$k=\sqrt{-(c_1+c_2e^{\lambda\tau}-\lambda^2)/(a_1+a_2e^{\lambda\tau})}$$
$$\text{при } c_1+c_2e^{\lambda\tau}-\lambda^2<0,$$

где A, B, λ – произвольные постоянные. Заметим, что эти решения являются частными случаями более сложных решений с мультипликативным разделением переменных $u=\varphi(x)\psi(t)$.

Решение (9) является периодическим по пространственной переменной x и затухает при $t\to\infty$ (если $\lambda>0$).

2. При некоторых ограничениях на параметры исходного уравнения существуют решения, которые являются периодическими по обеим независимым переменным x и t, вида

$$u=[A_1\cos(\gamma x)+B_1\sin(\gamma x)]\times$$
$$\times[A_2\cos(\omega t)+B_2\sin(\omega t)],$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 – произвольные постоянные, а константы γ и ω определяются из трансцендентной системы уравнений

$$\omega^2+c_1+c_2\cos(\omega\tau)=[a_1+a_2\cos(\omega\tau)]\gamma^2,$$
$$(c_2-a_2\gamma^2)\sin(\omega\tau)=0.$$

3. При некоторых ограничениях на параметры исходного уравнения существуют решения, периодические по времени t, вида

$$u=[A_1\operatorname{ch}(\gamma x)+B_1\operatorname{sh}(\gamma x)]\times$$
$$\times[A_2\cos(\omega t)+B_2\sin(\omega t)],$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 – произвольные постоянные, а константы γ и ω определяются из трансцендентной системы уравнений

$$\omega^2+c_1+c_2\cos(\omega\tau)=-[a_1+a_2\cos(\omega\tau)]\gamma^2,$$
$$(c_2+a_2\gamma^2)\sin(\omega\tau)=0.$$

4. Существуют другие решения, периодические по времени t:

$$u=e^{-\gamma x}[A\cos(\omega t-\beta x)+B\sin(\omega t-\beta x)],$$

где A, B, ω – произвольные постоянные, а параметры β и γ могут быть выражены через ω и параметры исходного уравнения путем решения алгебраической системы уравнений, которая здесь не приводится.

5. Имеются решения полиномиального вида по x (содержащие соответственно четные и нечетные степени):

$$u=\sum_{k=0}^{n}A_k(t)x^{2k} \quad \text{и} \quad u=\sum_{k=0}^{n}B_k(t)x^{2k+1}.$$

Линейные начально-краевые задачи
для уравнений типа Клейна–Гордона
с постоянным запаздыванием

Предварительные замечания. Отметим основное отличие при постановке начально-краевой задачи для уравнений в частных производных с постоянным запаздыванием от более простых уравнений в частных производных без запаздывания. Дело в том, что начальные условия (начальные данные) в задачах для уравнений с постоянным запаздыванием $\tau>0$ необходимо задавать на целом отрезке $t_0-\tau\le t\le t_0$ (а не в точке $t=t_0$, как в задачах без запаздывания). При этом искомое решение должно быть также непрерывно в точке $t=t_0$. Чаще всего используется начальная точка $t_0=0$, иногда встречается $t_0=\tau$.

Граничные условия в начально-краевых задачах для уравнений в частных производных с запаздыванием формулируются точно так же, как и для уравнений в частных производных без запаздывания.

Решение линейных задач для уравнений в частных производных с запаздыванием можно вести с помощью метода разделения переменных или методов интегральных преобразований (по аналогии с задачами для линейных уравнений в частных производных без запаздывания [42, 43]).

Формулировки начально-краевых задач. Рассмотрим начально-краевую задачу для одномерного линейного однородного уравнения типа Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами и запаздыванием (7) при согласованных начальных условиях общего вида

$$u=\varphi(x,t) \text{ при } 0<x<h,\ -\tau\le t\le 0,$$
$$u_t=\varphi_t(x,t) \text{ при } 0<x<h,\ -\tau\le t\le 0, \qquad (10)$$

и различных линейных однородных граничных условиях, которые запишем в компактной форме

$$\begin{aligned} &\Gamma_1[u]=0 \text{ при } x=0,\ t>-\tau;\\ &\Gamma_2[u]=0 \text{ при } x=h,\ t>-\tau; \end{aligned} \tag{11}$$

где $0 < h < \infty$.

Наиболее распространенные однородные граничные условия приведены в табл. 1. В частности, в случае граничных условий первого рода в (11) надо взять $\Gamma_1[u] = \Gamma_2[u] = u$.

Предполагается, что функция φ, входящая в начальные условия (10), непрерывно дифференцируема по времени t, а входящие в граничные условия (11) линейные операторы $\Gamma_{1,2}[u]$ не зависят явно от времени t. Кроме того, считается, что начальные условия (10) и граничные условия (11) совместны, т. е. выполняются соотношения

$$\varphi(0, t) = \varphi_t(0, t) = 0, \quad \varphi(h, t) = \varphi_t(h, t) = 0.$$

Замечание 2. Решение начально-краевой задачи для линейного однородного уравнения типа Клейна–Гордона (7) при $a_2 = c_1 = 0$ с однородными граничными условиями первого рода (11) (при $\Gamma_1[u] = \Gamma_2 = [u] = u$) и начальными условиями (10) было получено методом разделения переменных в [44].

Таблица 1. Наиболее распространенные однородные граничные условия на концах отрезка $0 \le x \le h$

№	Начально-краевая задача	Граничные условия
1	Первая	$u = 0$ при $x = 0$ $u = 0$ при $x = h$
2	Вторая	$u_x = 0$ при $x = 0$ $u_x = 0$ при $x = h$
3	Третья	$u_x - k_1u = 0$ при $x = 0$ $u_x + k_2u = 0$ при $x = h$
4	Смешанная	$u = 0$ при $x = 0$ $u_x = 0$ при $x = h$
5	Смешанная	$u_x = 0$ при $x = 0$ $u = 0$ при $x = h$

Построение решения начально-краевой задачи. Начнем с поиска частных решений исходного уравнения типа Клейна–Гордона с запаздыванием (7) в виде произведения функций разных аргументов

$$Up = X(x)\,T(t). \tag{12}$$

Подставив (12) в (7), после элементарных преобразований получим:

$$\begin{aligned} &X(x)\,[T''(t) - c_1T(t) - c_2T(t-\tau)] =\\ &= X''(x)\,[a_1T(t) + a_2T(t-\tau)]. \end{aligned} \tag{13}$$

Разделяя в этом уравнении переменные, приходим к линейному ОДУ второго порядка и ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием:

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x), \tag{14}$$

$$T''(t) = (c_1 - a_1\lambda^2)\,T(t) + (c_2 - a_2\lambda^2)T(t-\tau). \tag{15}$$

Требуя, чтобы функция (12) удовлетворяла однородным граничным условиям (11), приходим к однородным граничным условиям для функции X:

$$\begin{aligned} &\Gamma_1[X]=0 \text{ при } x=0,\\ &\Gamma_2[X]=0 \text{ при } x=h. \end{aligned} \tag{16}$$

Нетривиальные решения $X = X_n(x)$ линейной однородной задачи на собственные значения (14), (16) существуют только для дискретного набора значений параметра λ:

$$\lambda = \lambda_n, \quad X = X_n(x), \quad n = 1, 2, \dots . \tag{17}$$

Важно отметить, что собственные функции $X_n(x)$ и $X_m(x)$ ортогональны в том смысле, что

$$\int_0^h X_n(x)X_m(x)dx = 0 \quad \text{при} \quad n \ne m. \tag{18}$$

Собственные значения и собственные функции для однородных линейных краевых задач, описываемых ОДУ (14), для пяти наиболее распространенных граничных условий приведены в табл. 2.

Подставив собственные значения $\lambda = \lambda_n$ в (15), получим соответствующие ОДУ с запаздыванием для функций $T_n(t)$:

$$\begin{aligned} &T_n''(t) = (c_1 - a_1\lambda^2)T_n(t) +\\ &+(c_2 - a_2\lambda^2)T_n(t-\tau). \end{aligned} \tag{19}$$

Решение линейной начально-краевой задачи для исходного уравнения типа Клейна–Гордона с запаздыванием (7) с начальными условиями (10) и однородными граничными условиями (11) ищем в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t), \tag{20}$$

где функции $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ – частные решения уравнения (7), удовлетворяющие однородным граничным условиям (11).

Таблица 2. Собственные функции в задачах на собственные значения, описываемые однородным ОДУ $X''_{xx} = -\lambda^2 X$ с наиболее распространенными однородными граничными условиями на концах отрезка $0 \le x \le h$

№	Начально-краевая задача	Граничные условия	Собственные значения и собственные функции $X_n = X_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$
1	Первая	$X = 0$ при $x = 0$ $X = 0$ при $x = h$	$\lambda_n = \pi n/h$; $X_n = \sin\left(\frac{\pi n x}{h}\right)$
2	Вторая	$X'_x = 0$ при $x = 0$ $X'_x = 0$ при $x = h$	$\lambda_0 = 0$, $\lambda_n = \pi n/h$; $X_0 = 1$, $X_n = \cos\left(\frac{\pi n x}{h}\right)$
3	Третья	$X'_x - k_1 X = 0$ при $x = 0$ $X'_x + k_2 X = 0$ при $x = h$	λ_n – корни трансцендентного уравнения; $\frac{\operatorname{tg}(\lambda h)}{\lambda} = \frac{k_1 + k_2}{\lambda^2 - k_1 k_2}$, $(\lambda_n > 0)$; $X_n = \cos(\lambda_n x) + \frac{k_1}{\lambda_n}\sin(\lambda_n x)$
4	Смешанная	$X = 0$ при $x = 0$ $X'_x = 0$ при $x = h$	$\lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2h}$; $X_n = \sin\frac{\pi(2n-1)x}{2h}$
5	Смешанная	$X'_x = 0$ при $x = 0$ $X = 0$ при $x = h$	$\lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2h}$; $X_n = \cos\frac{\pi(2n-1)x}{2h}$

Чтобы найти начальные условия для ОДУ второго порядка с запаздыванием (19), представим начальные условия (10) в виде разложения по собственным функциям:

$$\varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) X_n(x), \quad 0 \le x \le h, \quad -\tau \le t \le 0. \tag{21}$$

Умножая (21) на $X_m(x)$ (m = 1, 2, ...), интегрируя по пространственной переменной x от 0 до h и учитывая условия ортогональности (18), имеем

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^h \varphi(\xi,t) X_n(\xi)\,d\xi, \quad \|X_n\|^2 = \int_0^h X_n^2(\xi)\,d\xi. \tag{22}$$

Из условий (10) и соотношений (20) и (21) получаем начальные условия для ОДУ второго порядка с запаздыванием (19) в виде

$$T_n(t) = \Phi_n(t), \quad T'_n(t) = \Phi'_n(t) \quad \text{при } -\tau \le t \le 0. \tag{23}$$

где функции $\Phi_n(t)$ определяются формулами (22).

Для удобства представления аналитического решения задачи типа Коши для ОДУ второго порядка с запаздыванием (19) и начальными данными введем обозначения

$$\alpha = \sqrt{a_1\lambda^2 - c_1}, \quad \beta = c_2 - a_2\lambda^2. \tag{24}$$

Зафиксируя и опуская индекс n запишем:

$$T''(t) = -\alpha^2 T(t) + \beta T(t-\tau), \quad T(t) = \Phi(t), \quad T'(t) = \Phi'(t) \quad \text{при } -\tau \le t \le 0, \tag{25}$$

где α и β определяются формулами (24).

При $\alpha_1\lambda^2 > c_1$, как показано в [44], решение задачи Коши (25) в области $t > \tau$ можно выразить через решения двух более простых задач по формуле

$$T(t) = \frac{\Phi(\tau) - \gamma\Phi(0)}{1-\gamma} T_1(t) - \frac{\Phi'(\tau) - \gamma\Phi'(0)}{1-\gamma} \times \left(\frac{\tau}{1-\gamma}T_1(t) - T_2(t)\right) + \frac{\gamma}{1-\gamma} \times \int_0^\tau \left(\frac{\tau}{1-\gamma}T_1(t) - T_2(t)\right)\Phi''(t)\,dt, \quad \gamma = \frac{\beta}{\alpha^2}, \tag{26}$$

где $T_1(t)$ и $T_2(t)$ – решения задачи (25), соответственно, при $\Phi(t) \equiv 1$ и $\Phi(t) \equiv t$.

Ниже приведены входящие в (26) вспомогательные функции $T_1(t)$ и $T_2(t)$, которые были получены методом шагов в [44].

1. На отрезке $m\tau \le t \le (m+1)\tau$ решение задачи (25) при $\Phi(t) \equiv 1$ можно представить в виде

$$T_1(t) = \gamma^m + (1-\gamma)\sum_{k=1}^{m}\gamma^{k-1}\sum_{n=0}^{k-1}A_{k,n} \times \frac{[\alpha(t-k\tau)]^n}{n!}\cos\left[\alpha(t-k\tau)-\frac{1}{2}\pi n\right], \quad (27)$$

где $\gamma = \dfrac{\beta}{\alpha^2}$, а постоянные $A_{k,n}$ определяются по формулам

$$A_{k,0} = 1, \quad A_{k,n} = \sum_{j=0}^{k-n-1}\frac{n}{n+2j}2^{-n-2j}C_{n+2j}^{j}, \quad 1 \le n < k, \quad (28)$$

где $C_n^j = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$ – биномиальные коэффициенты. Отметим, что $0 < A_{k,n} \le 1$.

2. На отрезке $m\tau \le t \le (m+1)\tau$ решение задачи (25) при $\Phi(t) \equiv t$ можно представить в виде

$$T_2(t) = \gamma^m (t-m\tau) + \tau\sum_{k=1}^{m}\gamma^{k-1}\sum_{n=0}^{k-1}A_{k,n} \times \frac{[\alpha(t-k\tau)]^n}{n!}\cos\left[\alpha(t-k\tau)-\frac{1}{2}\pi n\right] + \frac{1-\gamma}{\alpha}\sum_{k=1}^{m}\gamma^{k-1}\sum_{n=0}^{k-1}B_{k,n}\frac{[\alpha(t-k\tau)]^n}{n!} \times \sin\left[\alpha(t-k\tau)-\frac{1}{2}\pi n\right], \quad (29)$$

где $\gamma = \dfrac{\beta}{\alpha^2}$, постоянные $A_{k,n}$ вычисляются по формулам (28), а постоянные $B_{k,n}$ определяются так:

$$B_{k,0} = 2^{1-2k}k\,C_{2k}^{k}, \quad B_{k,n} = 2^{n+1-2k}\sum_{j=0}^{k-n-1}\frac{n(k-n-j)}{n+2j} \times C_{n+2j}^{j}\,C_{2(k-n-j)}^{k-n-j}, \quad 1 \le n < k.$$

После определения функций $T_n(t)$ решение исходной задачи (7), (10), (11) определяется рядом (20), в котором собственные функции $X_n(x)$ и собственные значения λ_n для пяти наиболее распространенных граничных условий берутся из табл. 2.

Замечание 3. Можно показать [45], что начально-краевые задачи для уравнений типа Клейна–Гордона (7) с начальными данными (10) и граничными условиями (11) при выполнении неравенства $a_2 > a_1$ некорректны по Адамару.

Замечание 4. В [44] было получено аналитическое решение начально-краевой задачи для одномерного линейного однородного уравнения типа Клейна–Гордона с постоянным запаздыванием (7) при $a_2 = c_1 = 0$ с однородными граничными условиями первого рода $u|_{x=0} = u|_{x=h} = 0$.

ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА КЛЕЙНА – ГОРДОНА С ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Точные решения простейшего вида

Линейные однородные уравнения типа Клейна–Гордона с пропорциональным запаздыванием

$$u_{tt} = a_1 u_{xx} + a_2 w_{xx} + c_1 u + c_2 w, \quad w = u(x, pt) \quad (30)$$

допускают точные решения, которые выражаются в элементарных функциях и описаны ниже.

1. Решение с мультипликативным разделением переменных, периодическое по x:

$$u = [A\cos(kx) + B\sin(kx)]\varphi(t),$$

где A, B, k – произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается линейным ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием

$$\varphi''_{tt} = (c_1 - a_1k^2)\varphi + (c_2 - a_2k^2)\bar{\varphi}, \quad \bar{\varphi} = \varphi(pt). \quad (31)$$

Это ОДУ допускает аналитическое решение в виде степенного ряда [46, с. 33]:

$$u(t) = A\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{2n}t^{2n}\right) + B\left(t + \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{2n+1}t^{2n+1}\right), \quad (32)$$

$$\gamma_{2n} = \frac{1}{(2n)!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha + \beta p^{2k}),$$
$$\gamma_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha + \beta p^{2k+1}), \quad (33)$$
$$\alpha = c_1 - a_1k^2, \quad \beta = c_2 - a_2k^2.$$

2. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = [A\,\mathrm{ch}(kx) + B\,\mathrm{sh}(kx)]\,\varphi(t),$$

где A, B, k – произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается линейным ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием

$$\varphi''_{tt} = (c_1 + a_1 k^2)\varphi + (c_2 + a_2 k^2)\overline{\varphi},$$
$$\overline{\varphi} = \varphi(pt).$$

Это ОДУ допускает аналитическое решение в виде степенного ряда (32)–(33), где $\alpha = c_1 + a_1 k^2$, $\beta = c_2 + a_2 k^2$.

3. Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = \varphi(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются, соответственно, линейным ОДУ второго порядка и ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием

$$(a_1 + a_2)\varphi''_{xx} + (c_1 + c_2)\varphi = 0,$$
$$\psi''_{tt} = c_1\psi + c_2\overline{\psi}, \quad \overline{\psi} = \psi(pt).$$

4. Имеются решения полиномиального вида по x (содержащие, соответственно, четные и нечетные степени):

$$u = \sum_{k=0}^{n} A_k(t) x^{2k} \quad \text{и} \quad u = \sum_{k=0}^{n} B_k(t) x^{2k+1}.$$

Линейные начально-краевые задачи для уравнений типа Клейна–Гордона с пропорциональным запаздыванием

Формулировки начально-краевых задач. Рассмотрим начально-краевую задачу для исходного уравнения типа Клейна–Гордона с пропорциональным запаздыванием (30) с начальными условиями общего вида

$$u = \varphi(x) \ \text{или} \ t = 0, \qquad u_t = \psi(x) \ \text{при} \ t = 0 \tag{34}$$

и различными линейными однородными граничными условиями, которые для удобства запишем в компактной форме

$$\Gamma_1[u] = 0 \ \text{при} \ x = 0, \qquad \Gamma_2[u] = 0 \ \text{при} \ x = h, \tag{35}$$

где $0 < h < \infty$. Наиболее распространенные граничные условия приведены в табл. 1. В частности, в случае граничных условий первого рода в (35) надо взять $\Gamma_1[u] = \Gamma_2[u] = u$.

Отметим, что начальные условия для уравнений с пропорциональным запаздыванием задаются в точке, как и для уравнений без запаздывания, в отличие от уравнений с постоянным запаздыванием, для которых начальные условия задаются на отрезке.

Построение решения начально-краевой задачи. Частные решения исходного уравнения ищем в виде произведения функций разных аргументов $u_p = X(x)T(t)$. Используя стандартную процедуру разделения переменных, приходим к линейному ОДУ второго порядка и ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием:

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x), \tag{36}$$

$$T''(t) = (c_1 - a_1\lambda^2)T(t) + (c_2 - a_2\lambda^2)T(pt). \tag{37}$$

Требуя, чтобы функция $u_p = X(x)\,T(t)$ удовлетворяла однородным граничным условиям (35), получим однородные граничные условия для функции X:

$$\Gamma_1[X] = 0 \ \text{при} \ x = 0, \qquad \Gamma_2[X] = 0 \ \text{при} \ x = h. \tag{38}$$

Нетривиальные решения $X = X_n(x)$ линейной однородной задачи на собственные значения (36), (38) существуют только для дискретного набора значений параметра λ:

$$\lambda = \lambda_n, \quad X = X_n(x), \quad n = 1, 2, \dots\ . \tag{39}$$

Собственные значения и собственные функции однородных линейных краевых задач, описываемых ОДУ (36), для пяти наиболее распространенных граничных условий, приведены в табл. 2.

Подставив собственные значения $\lambda = \lambda_n$ в (37), получим соответствующие ОДУ с пропорциональным запаздыванием для функций $T = T_n(t)$.

Используя принцип линейной суперпозиции, ищем решение линейной начально-краевой задачи для исходного уравнения (30) с начальными и граничными условиями (34) и (35) в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \tag{40}$$

где функции $T_n(t)$ описываются уравнением (37) при $\lambda = \lambda_n$. По построению ряд (40) удовлетворяет исходному уравнению (30) и однородным граничным условиям (35).

Чтобы найти начальные условия для ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием (37), функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящие в начальные условия (34), представим в виде разложений по собственным функциям:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n(x),$$

$$A_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^h \varphi(\xi) X_n(\xi)\, d\xi, \tag{41}$$

$$B_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^h \psi(\xi) X_n(\xi)\, d\xi,$$

где $\|X_n\|^2 = \int_0^h X_n^2(\xi)\, d\xi$. Из соотношений (40) и (41) получим начальные условия для ОДУ с пропорциональным запаздыванием (37):

$$T_n(0) = A_n, \quad T_n'(0) = B_n. \tag{42}$$

Линейное ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием (37) с точностью до обозначений совпадает с уравнением (31), аналитическое решение которого имеет вид (32)–(33) и удовлетворяет начальным условиям (42). Учитывая изложенное, можно представить решение линейной задачи (37), (42) в виде линейной комбинации двух степенных рядов:

$$\begin{aligned} T_n(t) = A_n \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{n,2m}\, t^{2m}\right) + \\ + B_n \left(t + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{n,2m+1}\, t^{2m+1}\right), \end{aligned} \tag{43}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{n,2m} &= \frac{1}{(2m)!} \prod_{k=0}^{m-1} (\alpha_n + \beta_n p^{2k}), \\ \gamma_{n,2m+1} &= \frac{1}{(2m+1)!} \prod_{k=0}^{m-1} (\alpha_n + \beta_n p^{2k+1}), \\ \alpha_n &= c_1 - a_1 \lambda_n^2, \quad \beta_n = c_2 - a_2 \lambda_n^2. \end{aligned} \tag{44}$$

При $0 < p < 1$ оба ряда в (44) имеют бесконечный радиус сходимости.

Подставив выражения (43) в (40), получим решение рассматриваемой начально-краевой задачи (30), (34), (35) в виде

$$\begin{aligned} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg[A_n \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{n,2m}\, t^{2m}\right) + \\ + B_n \left(t + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{n,2m+1}\, t^{2m+1}\right) \Bigg] X_n(x). \end{aligned} \tag{45}$$

Решения начально-краевых задач для исходного уравнения типа Клейна–Гордона с пропорциональным запаздыванием (30) с пятью граничными условиями, представленными в табл. 1, могут быть получены по формулам (41) для A_n и B_n, (44) для $\gamma_{n,2m}$ и $\gamma_{n,2m+1}$ и (45), где соответствующие собственные значения λ_n и собственные функции $X_n(x)$ берутся из табл. 2.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит А.Д. Полянина за внимание к работе и полезные замечания.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700057-0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
2. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.
3. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
4. *Kuang Y.* Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. San Diego: Academic Press, 2012.
5. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г.* Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: Математические модели и качественные особенности // Вестник НИЯУ МИФИ, 2017. Т. 6. № 1. С. 41–55.
6. *Wu J.* Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer, 1996.
7. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г.* Решения линейных начально-краевых задач реакционно-диффузионного типа с запаздыванием // Вестник НИЯУ МИФИ. 2023. Т. 12. № 3 (в печати).
8. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Generalized and functional separable solutions to nonlinear delay Klein–Gordon equations. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014. V. 19. P. 2676–2689.
9. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Вязьмин А.В.* Точные решения и качественные особенности нелинейных гиперболических реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием // Теоретические основы химической технологии, 2015. Т. 49. № 5. С. 527–541.
10. *Сорокин В.Г.* Точные решения нелинейных телеграфных уравнений с запаздыванием // Вестник НИЯУ МИФИ, 2019. Т. 8. № 5. С. 453–464.
11. *Long F.-S., Meleshko S.V.* On the complete group classification of the one- dimensional nonlinear Klein–Gordon equation with a delay // Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2016. V. 39. P. 3255–3270.

12. *Long F.-S., Meleshko S.V.* Symmetry analysis of the nonlinear two- dimensional Klein–Gordon equation with a time-varying delay // Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2017. V. 40. P. 4658–4673.

13. *Lobo J.Z., Valaulikar Y.S.* Group analysis of the one dimensional wave equation with delay // Applied Mathematics and Computation, 2020. V. 378. P. 125193.

14. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г.* Построение точных решений нелинейных уравнений математической физики с запаздыванием с помощью решений более простых уравнений без запаздывания // Вестник НИЯУ МИФИ. 2020. Т. 9. № 2. С. 115–128.

15. *Polyanin A.D.* Construction of functional separable solutions in implicit form for non-linear Klein–Gordon type equations with variable coefficients // International Journal of Non-Linear Mechanics, 2019. V. 114. P. 29–40.

16. *Zhurov A.I., Polyanin A.D.* Symmetry reductions and new functional separable solutions of nonlinear Klein–Gordon and telegraph type equations // Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 2020. V. 27. № 2. P. 227–242.

17. *Сорокин В.Г.* Численное интегрирование нелинейных уравнений типа Клейна – Гордона с запаздыванием методом прямых // Вестник НИЯУ МИФИ, 2019. Т. 8. № 3. С. 232–247.

18. *Ockendon J.R., Tayler A.B.* The dynamics of a current collection system for an electric locomotive // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, 1971. V. 332. P. 447–468.

19. *Dehghan M., Shakeri F.* The use of the decomposition procedure of Adomian for solving a delay differential equation arising in electrodynamics // Physica Scripta, 2008. V. 78. P. 065004.

20. *Ajello W.G., Freedman H.I., Wu J.* Analysis of a model representing stage-structured population growth with state-dependent time delay//SIAM Journal on Applied Mathematics, 1992. V. 52. P. 855–869.

21. *Mahler K.* On a special functional equation // Journal of the London Mathematical Society, 1940. V. 1. P. 115–123.

22. *Ferguson T.S.* Lose a dollar or double your fortune. Proceedings of the 6th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, V. 3. Berkeley: University California Press, 1972. P. 657–666.

23. *Robinson R.W.* Counting Labeled Acyclic Digraphs. New Directions in the Theory of Graphs. New York: Academic Press, 1973. P. 239–273.

24. *Gaver D.P.* An absorption probablility problem // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1964. V. 9. P. 384–393.

25. *Zhang F., Zhang Y.* State estimation of neural networks with both time-varying delays and norm-bounded parameter uncertainties via a delay decomposition approach // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013. V. 18. P. 3517–3529.

26. Yang X., Song Q., Cao J., Lu J. Synchronization of coupled Markovian reaction-diffusion neural networks with proportional delays via quantized control // IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2019. V. 30. P. 951–958.

27. *Wan P., Sun D., Chen D., Zhao M., Zheng L.* Exponential synchronization of inertial reaction-diffusion coupled neural networks with proportional delay via periodically intermittent control // Neurocomputing, 2019. V. 356. P. 195–205.

28. *Hall A.J., Wake G.C.* A functional differential equation arising in the modeling of cell growth // The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B, Applied mathematics, Computer & control abstracts, 1989. V. 30. P. 424–435.

29. *Hall A.J., Wake G.C., Gandar P.W.* Steady size distributions for cells in one dimensional plant tissues. Journal of Mathematical Biology, 1991. V. 30. P. 101–123.

30. *Derfel G., van Brunt B., Wake G.C.* A cell growth model revisited // Functional Differential Equations, 2012. V. 19. P. 71–81.

31. *Амбарцумян В.А.* К теории флуктуаций яркости в Млечном пути // Доклады Академии наук СССР, 1944. Т. 44. С. 244–247.

32. *Efendiev M., van Brunt B., Wake G.C., Zaidi A.A.* A functional partial differential equation arising in a cell growth model with dispersion // Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2018. V. 41. P. 1541–1553.

33. *Liu C.-S.* Basic theory of a class of linear functional differential equations with multiplication delay. arXiv, 2018. URL: https://arxiv.org/pdf/1605.06734 (accessed 10.09.2023).

34. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Nonlinear pantograph-type diffusion PDEs: Exact solutions and the principle of analogy // Mathematics, 2021. V. 9. P. 511.

35. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions // Mathematics, 2021. V. 9. P. 345.

36. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Review of methods for constructing exact solutions of equations of mathematical physics based on simpler solutions // Theoretical and Mathematical Physics, 2022. V. 211. P. 567–594.

37. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Reductions and exact solutions of nonlinear wave- type PDEs with proportional and more complex delays // Mathematics, 2023. Vol. 11. P. 516.

38. *Abazari R., Ganji M.* Extended two-dimensional DTM and its application on nonlinear PDEs with proportional delay // International Journal of Computer Mathematics, 2011. V. 88. P. 1749–1762.

39. *Grover D., Sharma D., Singh P.* Accelerated HPSTM: An efficient semi-analytical technique for the solution of nonlinear PDE's. // Nonlinear Engineering, 2020. V. 9. P. 329–337.

40. *Sakar M.G., Uludag F., Erdogan F.* Numerical solution of time-fractional nonlinear PDEs with proportional delays by homotopy perturbation method // Applied Mathematical Modelling, 2016. V. 40. P. 6639–6649.

41. *Bekela A.S., Belachew M.T., Wole G.A*. A numerical method using Laplace-like transform and variational theory for solving time-fractional nonlinear partial differential equations with proportional delay // Advances in Difference Equations, 2020. V. 2020. P. 586.

42. *Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd ed. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2016.

43. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

44. *Rodrí uez F., Roales M., Martín J.A.* Exact solutions and numerical approximations of mixed problems for the wave equation with delay // Applied Mathematics and Computation, 2012. V. 219. №. 6. P. 3178–3186.

45. Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Об устойчивости и неустойчивости решений реакционно-диффузионных и более сложных уравнений с запаздыванием // Вестник НИЯУ МИФИ, 2018. Т. 7. № 5. С. 389–404.

46. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I.* Delay Ordinary and Partial Differential Equations. Boca Raton, London: CRC Press, 2024.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 4, pp. 211–222

SOLUTIONS OF LINEAR INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR KLEIN–GORDON TYPE EQUATIONS WITH CONSTANT AND PROPORTIONAL DELAY

V.G. Sorokin

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526, Russia

e-mail: vsesor@gmail.com

Received September 19, 2023; revised September 19, 2023; accepted September 26, 2023

The paper deals with one-dimensional linear homogeneous Klein–Gordon type equations with constant and proportional delay, which, in addition to the desired functions $u(x, t)$, contain functions with constant delay of the form $u(x, t-\tau)$, where $\tau > 0$ is the constant delay, and functions with proportional delay of the form $u(x, pt)$, where p is the proportionality coefficient. Exact solutions of such equations expressed in elementary functions are given. Initial boundary value problems with general initial data and homogeneous boundary conditions of the first, second and third kind, as well as mixed boundary conditions, are formulated. A detailed description of solving these problems using the method of separation of variables is provided. As a result, analytical formulas for solutions of initial boundary value problems for linear homogeneous Klein-Gordon type equations with constant and proportional delay are obtained.

Keywords: linear homogeneous Klein–Gordon equations, partial differential equations with delay, initial-boundary value problems, closed-form solutions, exact solutions.

REFERENCES

1. *Bellman R., Cook K.* Differencial'no-raznostnye uravneniya. [Differential-difference equations]. Moscow: Mir Publ., 1967.

2. *Myshkis A.D.* Linejnye differencial'nye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom. [Linear differential equations with retarded argument]. Moscow: Nauka Publ., 1972.

3. *Elsgolts L.E., Norkin S.B.* Vvedenie v teoriyu differencial'nyh uravnenij s otklonyayushchimsya argumentom [Introduction to the theory of differential equations with deviating argument]. Moscow: Nauka Publ., 1971.

4. *Kuang Y.* Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. San Diego: Academic Press, 2012.

5. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Reakcionno-diffuzionnye uravneniya s zapazdyvaniem: Matematicheskie modeli i kachestvennye osobennosti. [Reaction-diffusion equations with delay: Mathematical models and qualitative features]. Vestnik NIYaU MIFI, 2017. Vol. 6. No. 1. Pp. 41–55 (in Russian).

6. *Wu J.* Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer, 1996.

7. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Resheniya linejnyh nachal'no-kraevyh zadach reakcionno-diffuzionnogo tipa s zapazdyvaniem. [Solutions of linear initial-boundary value problems of the reaction-diffusion type with delay]. Vestnik NIYaU MIFI, 2023. Vol. 12. No. 3 (in print).

8. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Generalized and functional separable solutions to nonlinear delay Klein–Gordon equations. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014. Vol. 19. Pp. 2676–2689.

9. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Vyazmin A.V.* Tochnye resheniya i kachestvennye osobennosti nelinejnyh giperbolicheskih reakcionno-diffuzionnyh uravnenij s zapazdyvaniem. [Exact solutions and qualita-

tive features of nonlinear hyperbolic reaction-diffusion equations with delay]. Teoreticheskie osnovy himicheskoj tekhnologii, 2015. Vol. 49. No. 5. Pp. 527–541 (in Russian).

10. *Sorokin V.G.* Tochnye resheniya nelinejnyh telegrafnyh uravnenij s zapazdyvaniem [Exact solutions of nonlinear telegraph equations with delay]. Vestnik NIYaU MIFI, 2019. Vol. 8. No. 5. Pp. 453–464 (in Russian).

11. *Long F.-S., Meleshko S.V.* On the complete group classification of the one- dimensional nonlinear Klein–Gordon equation with a delay. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2016. Vol. 39. Pp. 3255–3270.

12. *Long F.-S., Meleshko S.V.* Symmetry analysis of the nonlinear two- dimensional Klein–Gordon equation with a time-varying delay. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2017. Vol. 40. Pp. 4658–4673.

13. *Lobo J.Z., Valaulikar Y.S.* Group analysis of the one dimensional wave equation with delay. Applied Mathematics and Computation, 2020. Vol. 378. Pp. 125193.

14. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Postroenie tochnyh reshenij nelinejnyh uravnenij matematicheskoj fiziki s zapazdyvaniem s pomoshch'yu reshenij bolee prostyh uravnenij bez zapazdyvaniya [Construction of exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics with delay using solutions of simpler equations without delay]. Vestnik NIYaU MIFI, 2020. Vol. 9. No. 2. Pp. 115–128 (in Russian).

15. *Polyanin A.D.* Construction of functional separable solutions in implicit form for non-linear Klein-Gordon type equations with variable coefficients. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2019. Vol. 114. Pp. 29–40.

16. *Zhurov A.I., Polyanin A.D.* Symmetry reductions and new functional separable solutions of nonlinear Klein–Gordon and telegraph type equations. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 2020. Vol. 27. No. 2. Pp. 227–242.

17. *Sorokin V.G.* Chislennoe integrirovanie nelinejnyh uravnenij tipa Klejna – Gordona s zapazdyvaniem metodom pryamyh. [Numerical integration of nonlinear Klein-Gordon type equations with delay by the method of lines. Vestnik NIYaU MIFI, 2019. Vol. 8. No. 3. Pp. 232–247 (in Russian).

18. *Ockendon J.R., Tayler A.B.* The dynamics of a current collection system for an electric locomotive. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, 1971. Vol. 332. Pp. 447–468.

19. *Dehghan M., Shakeri F.* The use of the decomposition procedure of Adomian for solving a delay differential equation arising in electrodynamics. Physica Scripta, 2008. Vol. 78. Pp. 065004.

20. *Ajello W.G., Freedman H.I., Wu J.* Analysis of a model representing stage-structured population growth with state-dependent time delay. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1992. Vol. 52. Pp. 855–869.

21. *Mahler K.* On a special functional equation. Journal of the London Mathematical Society, 1940. Vol. 1. Pp. 115–123.

22. *Ferguson T.S.* Lose a dollar or double your fortune. Proceedings of the 6th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Vol. 3. Berkeley: University California Press, 1972. Pp. 657–666.

23. *Robinson R.W.* Counting Labeled Acyclic Digraphs. New Directions in the Theory of Graphs. New York: Academic Press, 1973. Pp. 239–273.

24. *Gaver D.P.* An absorption probablility problem. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1964. Vol. 9. Pp. 384–393.

25. *Zhang F., Zhang Y.* State estimation of neural networks with both time-varying delays and norm-bounded parameter uncertainties via a delay decomposition approach. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013. Vol. 18. Pp. 3517–3529.

26. *Yang X., Song Q., Cao J., Lu J.* Synchronization of coupled Markovian reaction-diffusion neural networks with proportional delays via quantized control. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2019. Vol. 30. Pp. 951–958.

27. *Wan P., Sun D., Chen D., Zhao M., Zheng L.* Exponential synchronization of inertial reaction-diffusion coupled neural networks with proportional delay via periodically intermittent control. Neurocomputing, 2019. Vol. 356. Pp. 195–205.

28. *Hall A.J., Wake G.C.* A functional differential equation arising in the modeling of cell growth. The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B, Applied mathematics, Computer & control abstracts, 1989. Vol. 30. Pp. 424–435.

29. *Hall A.J., Wake G.C., Gandar P.W.* Steady size distributions for cells in one dimensional plant tissues. Journal of Mathematical Biology, 1991. Vol. 30. Pp. 101–123.

30. *Derfel G., van Brunt B., Wake G.C.* A cell growth model revisited. Functional Differential Equations, 2012. Vol. 19. Pp. 71–81.

31. *Ambartsumyan V.A.* K teorii fluktuacij yarkosti v Mlechnom puti. [On the theory of brightness fluctuations in the Milky Way]. Doklady Akademii nauk SSSR, 1944. Vol. 44. Pp. 244–247 (in Russian).

32. *Efendiev M., van Brunt B., Wake G.C., Zaidi A.A.* A functional partial differential equation arising in a cell growth model with dispersion. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2018. Vol. 41. Pp. 1541–1553.

33. *Liu C.-S.* Basic theory of a class of linear functional differential equations with multiplication delay. arXiv. 2018. Available at: https://arxiv.org/pdf/1605.06734 (accessed 10.09.2023).

34. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Nonlinear pantograph-type diffusion PDEs: Exact solutions and the principle of analogy. Mathematics, 2021. Vol. 9. Pp. 511.

35. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions. Mathematics, 2021. Vol. 9. Pp. 345.

36. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Review of methods for constructing exact solutions of equations of mathematical physics based on simpler solutions. Theoretical and Mathematical Physics, 2022. Vol. 211. Pp. 567–594.

37. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Reductions and exact solutions of nonlinear wave- type PDEs with proportional and more complex delays. Mathematics, 2023. Vol. 11. P. 516.

38. *Abazari R., Ganji M*. Extended two-dimensional DTM and its application on nonlinear PDEs with proportional delay. International Journal of Computer Mathematics, 2011. Vol. 88. Pp. 1749–1762.

39. *Grover D., Sharma D., Singh P*. Accelerated HPSTM: An efficient semi-analytical technique for the solution of nonlinear PDE's. Nonlinear Engineering, 2020. Vol. 9. Pp. 329–337.

40. *Sakar M.G., Uludag F., Erdogan F*. Numerical solution of time-fractional nonlinear PDEs with proportional delays by homotopy perturbation method. Applied Mathematical Modelling, 2016. Vol. 40. Pp. 6639–6649.

41. *Bekela A.S., Belachew M.T., Wole G.A.* A numerical method using Laplace-like transform and variational theory for solving time-fractional nonlinear partial differential equations with proportional delay. Advances in Difference Equations, 2020. Vol. 2020. Pp. 586.

42. *Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd ed. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2016.

43. *Tikhonov A.N., Samarsky A.A.* Uravneniya matematicheskoj fiziki. [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka Publ., 1972.

44. *Rodrí uez F., Roales M., Martín J.A.* Exact solutions and numerical approximations of mixed problems for the wave equation with delay. Applied Mathematics and Computation, 2012. Vol. 219. No. 6. Pp. 3178–3186.

45. *Polyanin A.D., Sorokin V.G*. Ob ustojjchivosti i neustojjchivosti reshenijj reakcionno-diffuzionnykh i bolee slozhnykh uravnenijj s zapazdyvaniem [On the stability and instability of solutions of reaction–diffusion and more complex nonlinear equations with delay]. Vestnik NIYaU MIFI, 2018. Vol. 7. No. 5. Pp. 389–404 (in Russian).

46. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I.* Delay Ordinary and Partial Differential Equations. Boca Raton, London: CRC Press, 2024.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2023, т. 12, № 4, с. 223–232

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 537.8

НЕКОТОРЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ДВУМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

С.П. Баутин[1,*], О.А. Карелина[1,2,**], А.Г. Обухов[3,]***

[1]ФГАОУ ВО «Снежинский физико-технический институт Национального исследовательского ядерного университета МИФИ», Снежинск, 456776, Россия

[2]ФГУП «РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е.И. Забабахина», Снежинск, 456776, Россия

[3]Тюменкий индустриальный университет, Тюмень, 625000, Россия

[*]e-mail: spbautin@mail.ru

[**]e-mail: karelina-1999@inbox.ru

[***]e-mail: agobukhov@inbox.ru

Поступила в редакцию: 05.10.2023
После доработки: 06.10.2023
Принята к публикации: 10.10.2023

В работе используется методика представлений решений системы нелинейных уравнений движения в виде бесконечных тригонометрических рядов от двух пространственных переменных. Коэффициенты рядов являются искомыми функциями от времени, для которых выписана бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Начальные данные задаются в виде конечных тригонометрических сумм. Приближенные решения поставленных задач Коши также строятся в виде конечных отрезков тригонометрических рядов. При различных начальных данных в работе рассмотрены конкретные нестационарные двумерные периодические по пространственным переменным x, y течения газа и проанализированы их свойства.

Ключевые слова: система уравнений движения, задача Коши, тригонометрические ряды, приближенные решения, линии тока.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.295

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время для решения очень многих важных для практики проблем возникает необходимость исследования различных начально-краевых задач для нелинейных уравнений с частными производными. На сегодняшний день основным способом построения решений подобных задач являются разностные методы, при которых численно определяется конечное число значений искомых функций в отдельных изолированных точках. Но, несмотря на прогресс в разработке этих численных методов и на все увеличивающуюся производительность вычислительной техники, очень часто под вопросом остаются надежность и адекватность численных результатов, получаемых разностными методами.

Среди аналитических методов получения решений нелинейных уравнений с частными производными одним из основных является использование конечных или бесконечных представлений с применением различных систем базисных функций для разных функциональных пространств.

На протяжении более чем двухсотлетней истории исследований линейных уравнений с частными производными одним из востребованных функциональных базисов является базис из тригонометрических функций. Чуть менее десяти лет назад, т.е. минуя 200 лет после работ Ж.Б.Ж. Фурье, методика применения бесконечных тригонометрических рядов впервые была эффективно применена при построении решений нелинейной системы уравнений с частными производными смешанного типа для математического моделирования одномерных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа [1]. Недавно описанная в работе [1] методика представления с помощью тригонометрических рядов решений задач Коши была применена [2–5] к уравнению Бюргерса и к нелинейной системе из двух уравнений с частными производными в случае двух независимых пространственных переменных. В том числе удалось доказать сходимость этих рядов в окрестности точки $t = 0$ и при всех значениях независимых переменных x, y [2–5].

Меняя начальные условия, удается с помощью конечных отрезков тригонометрических рядов восстанавливать приближенные решения с очень интересными свойствами.

Цель данной работы состоит в следующем: перебирая разные начальные условия, получить сложные течения, в том числе имеющие области завихренных потоков и особенности типа «бесконечные градиенты» по пространственным переменным. Как показывает практика построения решений нелинейных уравнений с частными производными разностными методами, при их применении не удается надежно рассчитать течения с большими значениями производных по переменным x и y. И поэтому решения, полученные с помощью отрезков тригонометрических рядов, можно использовать как тесты для проверки точности решений, получаемых разностными методами.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве математической модели для приближенной передачи движений газа далее из полной системы уравнений Навье–Стокса [6] исследуются только уравнения движения в предположении постоянных значений термодинамических параметров плотности и температуры $\rho = 1, T = 1$:

$$\boldsymbol{V}_t + (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V} = \mu_0\left[\frac{1}{4}\nabla(\operatorname{div}\boldsymbol{V}) + \frac{3}{4}\Delta\boldsymbol{V}\right]. \quad (1)$$

В системе (1) введены безразмерные переменные. При этом за масштаб скорости u_{00} взята величина $\frac{1}{3}\cdot 10^3$ м/с, близкая к скорости звука в воздухе при нормальных условиях. За масштаб расстояния x_{00} берется величина, соответствующая геометрическим характеристикам конкретного исследуемого течения.

В данной работе рассматривается случай отсутствия зависимости от z и равенства нулю третей компоненты вектора скорости газа:

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0;\;\; v_3 = 0,$$

и вводятся обозначения $u = v_1, v = v_2$. В этом случае система (1) в подробной записи имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y = \mu_0\left(u_{xx} + \frac{3}{4}u_{yy} + \frac{1}{4}u_{xy}\right), \\ v_t + uv_x + vv_y = \mu_0\left(\frac{3}{4}v_{xx} + v_{yy} + \frac{1}{4}u_{xy}\right), \end{cases} \quad (2)$$

а третье уравнение системы (1) выполняется тождественно.

Далее о системе (2) и будет говориться как о системе уравнений движения.

В монографии [1] было предложено представлять одномерные решения полной системы уравнений Навье–Стокса в виде тригонометрических рядов.

В данной работе рассматривается случай двух пространственных переменных, и с учетом результатов из работ [1–5] используются следующие представления искомых функций u, v:

$$\begin{gathered} u(t,x,y) = u_1(t,x) + u_2(t,y) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,1}(t)\sin(kx) + \sum_{m=1}^{\infty} u_{m,2}(t)\sin(my), \\ v(t,x,y) = v_1(t,x) + v_2(t,y) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} v_{k,1}(t)\sin(kx) + \sum_{m=1}^{\infty} v_{m,2}(t)\sin(my). \end{gathered} \quad (3)$$

У искомых коэффициентов, зависящих от времени, стоят двойные индексы: первый индекс соответствует частоте гармоники, перед которой стоит этот коэффициент; второй индекс равен единице, если коэффициент стоит перед гармоникой, зависящей от пространственной переменной x, и равен двойке, если коэффициент стоит перед гармоникой, зависящей от пространственной переменной y.

В системе (2) в левых частях обоих уравнений оставим только частные производные по времени, а все остальные слагаемые из левых частей перенесем в правые части рассматриваемых уравнений, т.е. запишем систему (2) в нормальной форме:

$$\begin{cases} u_t = -uu_x - vu_y + \mu_0 \times \\ \times\left(u_{xx} + \frac{3}{4}u_{yy} + \frac{1}{4}u_{xy}\right), \\ v_t = -uv_x - vv_y + \mu_0 \times \\ \times\left(\frac{3}{4}v_{xx} + v_{yy} + \frac{1}{4}u_{xy}\right). \end{cases} \quad (4)$$

Уравнения в системе (4) проецируются сначала на базис

$$\{\sin(x), \sin(2x), \sin(3x), \dots\},$$

а затем на базис

$$\{\sin(y)\,,\ \sin(2y)\,,\ \sin(3y)\,, \dots\}.$$

В результате получается бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов $u_{k,1}(t), u_{k,2}(t),\ v_{k,1}(t), v_{k,2}(t)$:

$$u'_{\ell,1} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M}\sum_{m=1}^{M} m u_{k,1}(t) u_{m,1}(t) b_{k\ell m} - \\ -\mu_0 \ell^2\, u_{\ell,1};\ \ \ell = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

$$v'_{\ell,1} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M}\sum_{m=1}^{M} m u_{k,1}(t) v_{m,1}(t) b_{k\ell m} - \\ -\frac{3}{4}\mu_0 \ell^2\, v_{\ell,1};\ \ \ell = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

$$u'_{\ell,2} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M}\sum_{m=1}^{M} k v_{m,2}(t) u_{k,2}(t) b_{k\ell m} - \\ -\frac{3}{4}\mu_0 \ell^2\, u_{\ell,2};\ \ \ell = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

$$v'_{\ell,2} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M}\sum_{m=1}^{M} k v_{k,2}(t) u_{m,1}(t) b_{k\ell m} - \\ -\mu_0 \ell^2\, v_{\ell,1};\ \ \ell = 1, 2, 3, \dots, \quad (8)$$

в которых символ M означает бесконечность в случае рассмотрения бесконечных тригонометрических рядов, а в случае конечных отрезков тригонометрических рядов полагается $M = K$.

Для получения единственных решений систем (5)–(8) задаются начальные условия

$$u_{k,1}(0) = u_{k,1}^0;\ u_{k,2}(0) = u_{k,2}^0;\ v_{k,1}(0) = v_{k,1}^0; \\ v_{k,2}(0) = v_{k,2}^0,\ \ k = 1,2, \dots$$

такие, что числовые ряды

$$\sum_{k=1}^{M} u_{k,1}^0\,;\ \ \sum_{k=1}^{M} u_{k,2}^0\,;$$

$$\sum_{k=1}^{M} v_{k,1}^0\,;\ \ \sum_{k=1}^{M} v_{k,2}^0$$

сходятся абсолютно. Это соответствует тому, что для системы (4) заданы начальные условия

$$u(t,x,y)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{M} u_{k,1}^0 \sin(kx) + \\ + \sum_{k=1}^{M} u_{k,2}^0 \sin(ky)\,,$$

$$v(t,x,y)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{M} v_{k,1}^0 \sin(kx) + \\ \sum_{k=1}^{M} v_{k,2}^0 \sin(ky)\,.$$

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ КОНКРЕТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

При построении конкретных приближенных решений выбирается конечное число K – число слагаемых в тригонометрических суммах

$$u(t,x,y) = \\ = \sum_{k=1}^{K}\left[u_{k,1}\sin(kx) + u_{k,2}\sin(ky)\right],$$

$$v(t,x,y) = \\ = \sum_{k=1}^{K}\left[v_{k,1}\sin(kx) + v_{k,2}\sin(ky)\right]. \quad (9)$$

При помощи констант $u_{k,1}^0,\ u_{k,2}^0,\ v_{k,1}^0,\ v_{k,2}^0$ в момент времени $t = 0$ задаются начальные условия для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых верхние индексы в суммах берутся равными K, т.е. $M = K$. Переменная ℓ в этих системах принимает целые значения от единицы до K.

Полученные задачи Коши для систем (5)–(8) решаются численно при $0 \le t \le t_f$, где конечный момент времени t_f выбирается из смысла рассматриваемой задачи и ее решений.

Для анализа свойств получаемых решений далее приводятся графики кривых, передающих поведение коэффициентов из представлений (9), а также поверхности

$$u(t_1, x, y);\ \ v(t_1, x, y) \quad (10)$$

в заданные моменты времени $t = t_1$.

Также в заданные моменты времени $t = t_1$ численно строятся мгновенные линии тока, начинающиеся в конкретных точках ($x = x_j^0$, $y = y_j^0$), и которые задаются в параметрическом виде ($x_j(\xi)$, $y_j(\xi)$) в зависимости от формально введенной независимой переменной ξ. Здесь индекс j принимает целое значение от единицы до числа N, которое задает количество рассматриваемых в момент $t = t_1$ линий тока.

Функции $x_j(\xi)$ и $y_j(\xi)$, определяющие в параметрической форме мгновенные линии тока, являются решениями нижеследующих задач Коши:

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{d\xi} = u\left(t_1, x_j, y_j\right), \\ \frac{dy_j}{d\xi} = v\left(t_1, x_j, y_j\right), \\ \quad x_j\big|_{\xi=0} = x_j^0, \\ \quad \mathrm{y_j}\big|_{\xi=0} = y_j^0. \end{cases} \quad (11)$$

Для детализации результатов расчетов вводится следующее обозначение сосчитанных вариантов. Название «Вариант *k-ℓ-m-n*» означает, что в начальных условиях для систем (5)–(8) ненулевые значения имеют только коэффициенты:

$$u_{k,1}(0) = u_{\ell,2}(0) = v_{m,1}(0) = \\ = v_{n,2}(0) = 0.1, \qquad (12)$$

и у которых начальные значения для простоты последующего анализа все взяты равными одной десятой.

Для большей наглядности результаты расчетов оформлены в отдельные фильмы, ссылки на которые приводятся ниже.

Результаты расчета варианта 3-3-5-5

Число слагаемых в тригонометрических суммах (9) взято $K = 300$, начальные распределения искомых функций имеют следующий вид:

$$u(0, x, y) = 0.1\sin(3x) + 0.1\sin(3y),$$

$$v(0, x, y) = 0.1\sin(5x) + 0.1\sin(5y). \qquad (13)$$

Поведение коэффициентов конечных сумм (9) приведено на рис. 1–4.

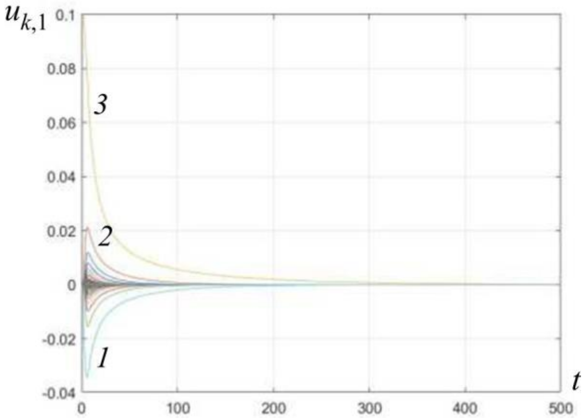


Рис. 1. Поведение коэффициентов $u_{k,1}(t)$

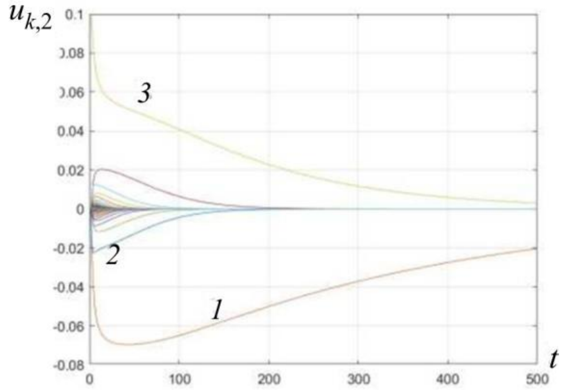


Рис. 2. Поведение коэффициентов $u_{k,2}(t)$

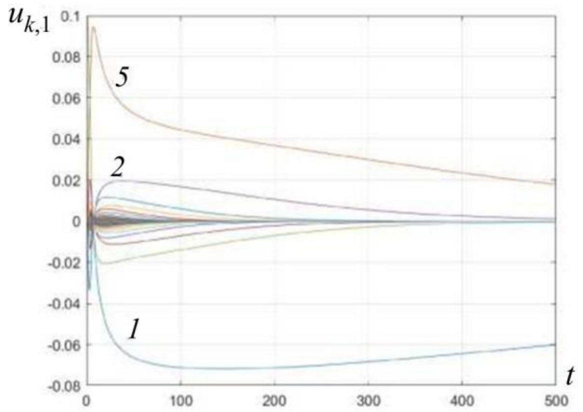


Рис. 3. Поведение коэффициентов $v_{k,1}(t)$

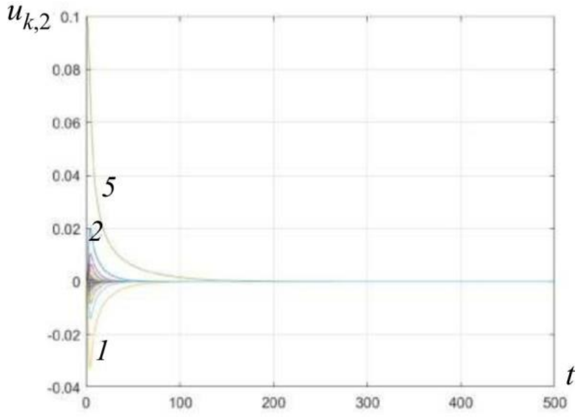


Рис. 4. Поведение коэффициентов $v_{k,2}(t)$

Номера, стоящие возле кривых на приведенных выше графиках, задают значения первого индекса у коэффициентов. Из анализа поведения кривых на рис. 1–4 следует, что основные динамические изменения течений происходят при $0 \le t \le 20$.

Изменение поведения поверхностей $u(t_1, x, y)$ и $v(t_1, x, y)$ с течением времени представлено на рис. 5–9.

Практически во все положительные моменты времени на этих поверхностях хорошо выявляются «вертикальные части», на которых значения модулей частных производных по пространственным переменным принимают достаточно большие значения.

При увеличении времени поверхности $u(t_1, x, y)$ и $v(t_1, x, y)$ стремятся к некоторым «предельным» положениям (см. рис. 9).

Далее, на рис. 10, 11 в разные моменты времени приведены мгновенные линии тока.

Фактически до моментов времени порядка $t = 10 \div 20$ невозможно понять возникающую конфигурацию течения. И только начиная со времени порядка $t = 30 \div 50$, можно высказывать предположения об итоговом характере течения.

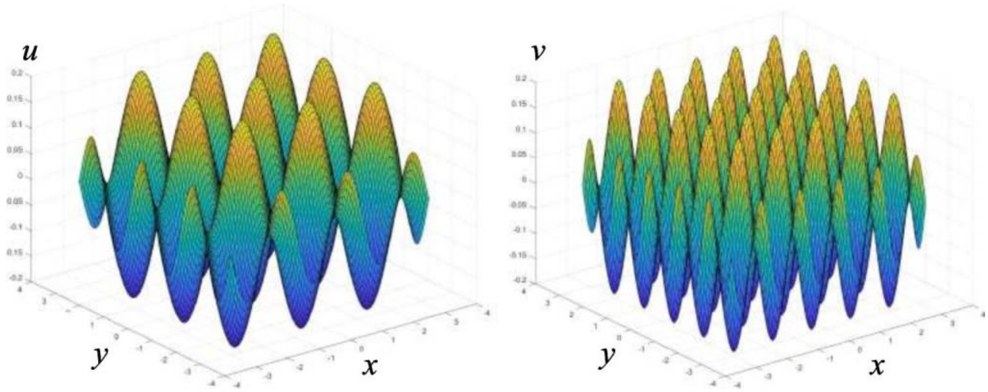


Рис. 5. Поверхности $u(t_1,x,y)$, $v(t_1,x,y)$ в момент времени $t = 0$

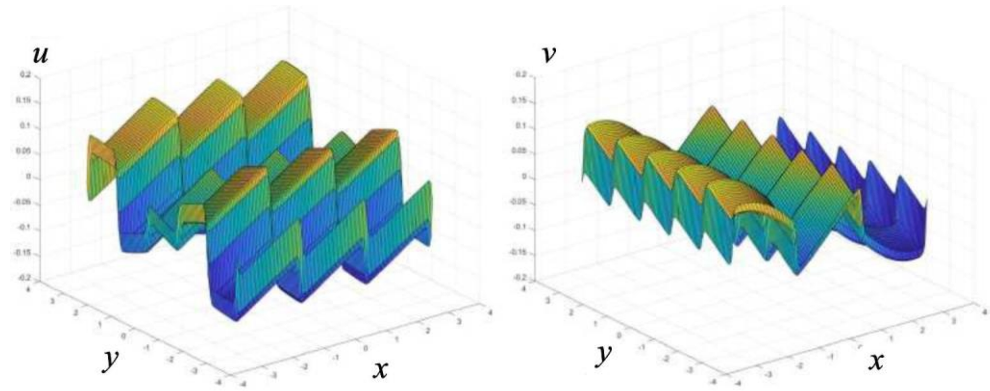


Рис. 6. Поверхности $u(t_1,x,y)$, $v(t_1,x,y)$ в момент времени $t = 20$

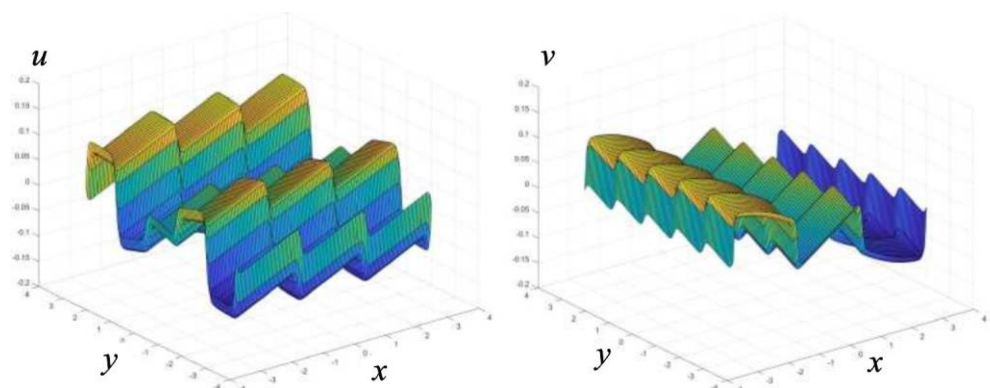


Рис. 7. Поверхности $u(t_1,x,y)$, $v(t_1,x,y)$ в момент времени $t = 30$

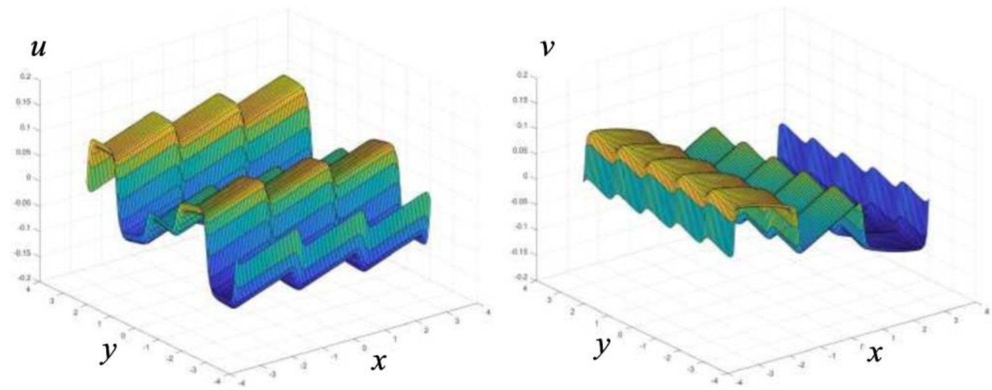


Рис. 8. Поверхности $u(t_1,x,y)$, $v(t_1,x,y)$ в момент времени $t = 40$

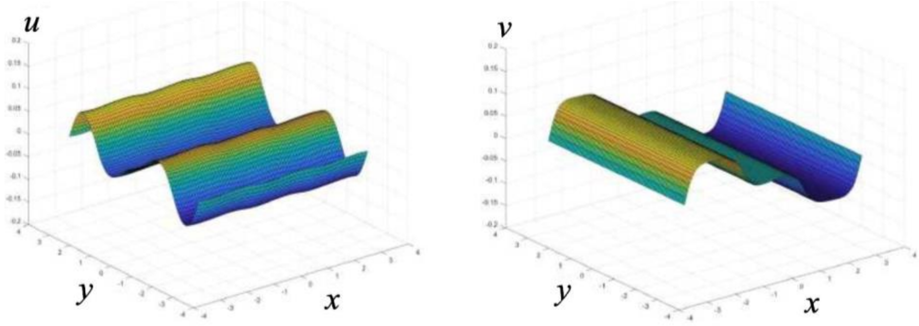


Рис. 9. Поверхности $u(t_1, x, y)$, $v(t_1, x, y)$ в момент времени $t = 200$

Общее движения потока в этом варианте оказалось следующим. Имеется два вертикальных потока. Поток в левой части течения идет снизу вверх; в правой части – сверху вниз. В результате их взаимодействия сами потоки частично изменяют направления движения. С учетом направлений линий тока в четырех углах, приведенных на рис. 10, 11, можно предположить общее окружное движение вокруг центральной области, оно идет по ходу часовой стрелки. В центральной области образуется несколько вихревых областей – до пяти штук. Но с течением времени фактически остается три вихревых области. Два самых верхних и два самых нижних вихря вращаются по ходу часовой стрелки. Вихрь в центральной части вращается против хода часовой стрелки. Линии тока этого центрального вихря соприкасаются с линиями тока двух верхних и двух нижних вращающихся потоков. Поэтому их направления движения соответствует вращению в разные стороны зацепленных шестеренок, что и отражает свойство вязкости газа. А пары вращающихся областей в верхней и нижней частях вращаются в одну сторону потому, что не имеют соприкасающихся линий тока, а разделяются между собой только точечной областью (точки A, B на правой части рис. 11).

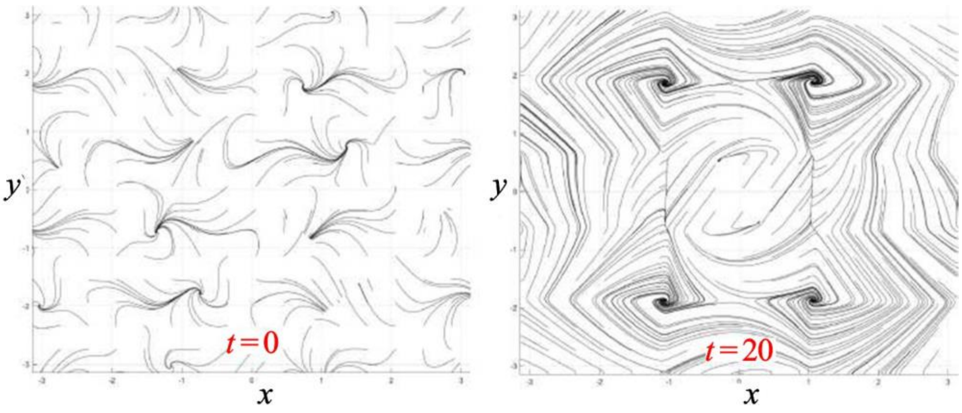


Рис. 10. Мгновенные линии тока при $t = 0$ и $t = 20$

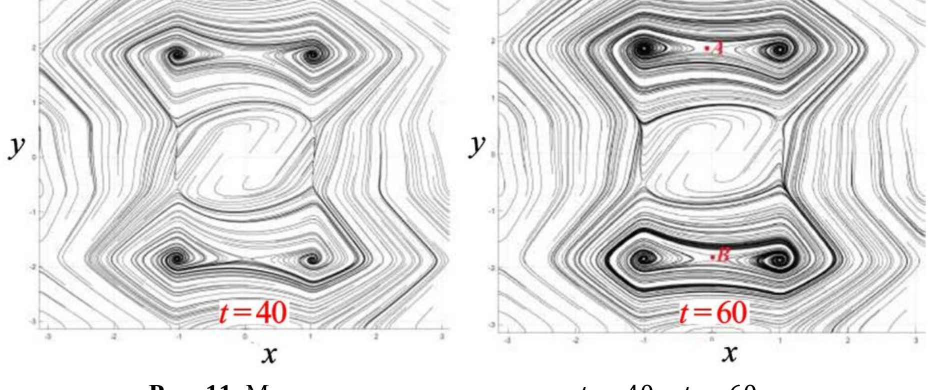


Рис. 11. Мгновенные линии тока при $t = 40$ и $t = 60$

По результатам расчетов этого варианта сделан фильм[1].

Число слагаемых в тригонометрических суммах (9) взято $K = 300$, начальные распределения искомых функций имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u(0,x,y) &= 0.1\sin(4x) + 0.1\sin(2y), \\ v(0,x,y) &= 0.1\sin(2x) + 0.1\sin(4y). \end{aligned} \tag{14}$$

На рис. 12, 13 в разные моменты времени приведены мгновенные линии тока.

Как и в других вариантах, фактически до момента времени порядка $t = 10 \div 20$ невозможно понять возникающую конфигурацию течения. И только начиная со времени порядка $t = 30 \div 50$, можно высказать предположение об итоговом характере течения.

Результаты расчета варианта 4-2-2-4

Общее движение потока в варианте 4–22–4 оказалось следующим. С течением времени в потоке образуется много вихревых областей. В центральной части четко выделены четыре ячейки, в которых вращение идет в соответствии с направлением вращения зацепленных шестеренок. В верхней и нижней ячейках вращение идет против хода часовой стрелки, а в левой и правой – по ходу часовой стрелки. Ячейки, в которых вращаются потоки, имеют четко выраженную ромбоидальную форму.

По результатам расчетов этого варианта сделан фильм[2].

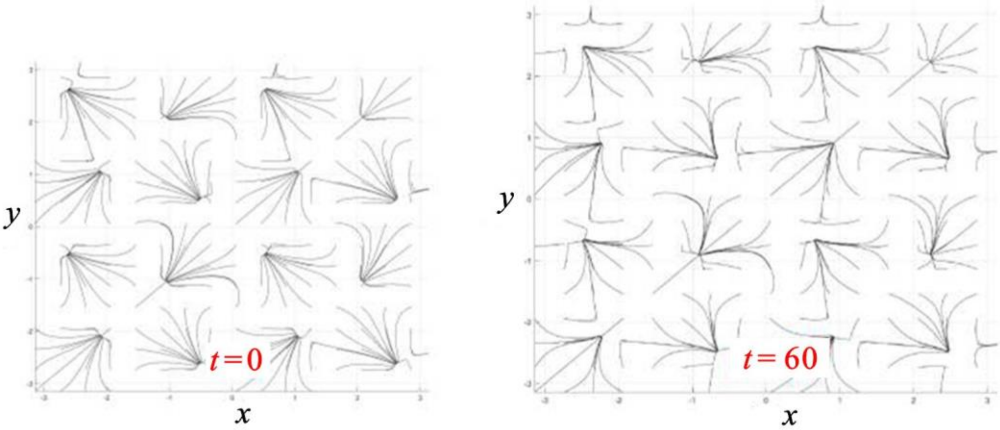


Рис. 12. Мгновенные линии тока при $t = 0$ и $t = 60$

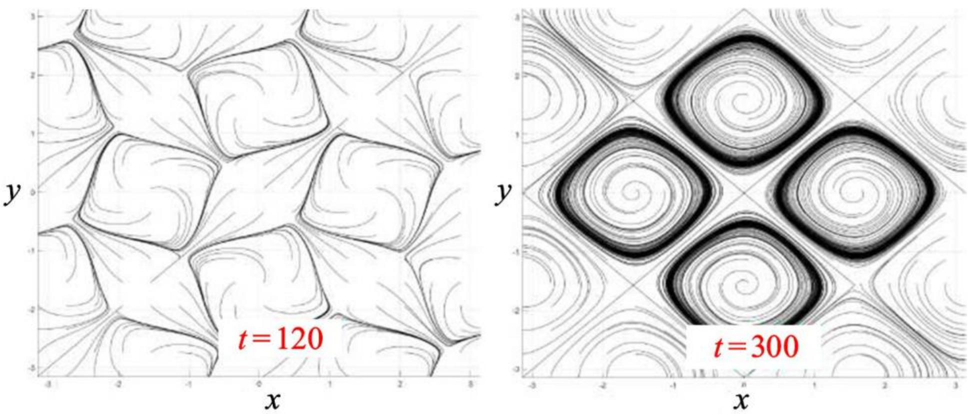


Рис. 13. Мгновенные линии тока при $t = 120$ и $t = 300$

---

[1] Баутин С.П., Карелина О.А., Обухов А.Г. Результаты расчета варианта 3-3-5-5 для системы уравнений движения. [Электронный ресурс]. URL: https://vk.com/video-71669107 456239195 (дата обращения: 30.08.2023).

[2] Баутин С.П., Карелина О.А., Обухов А.Г. Результаты расчета варианта 4-2-2-4 для системы уравнений движения. [Электронный ресурс]. URL: https://vk.com/video-71669107 456239196 (дата обращения: 27.09.2023).

Результаты расчета варианта 5-5-5-5

Число слагаемых в тригонометрических суммах (9) взято $K = 300$, начальные распределения искомых функций имеют следующий вид:

$$u(0, x, y) = 0.1\sin(5x) + 0.1\sin(5y),$$
$$v(0, x, y) = 0.1\sin(5x) + 0.1\sin(5y). \quad (15)$$

На рис. 14–15 в разные моменты времени приведены мгновенные линии тока.

Общий факт: фактически до момента времени порядка $t = 10 \div 20$ невозможно понять возникающую конфигурацию течения. И только начиная со времени порядка $t = 30 \div 50$, можно высказать предположение об итоговом характере течения.

Общее движение потока в варианте 5-5-5-5 оказалось следующим. Картина течения аналогична картине варианта 2-4-4-2, но имеется сорок штук ромбоидальных областей. В соседних соприкасающихся потоках направление вращения определяется по правилу зацепленных шестеренок.

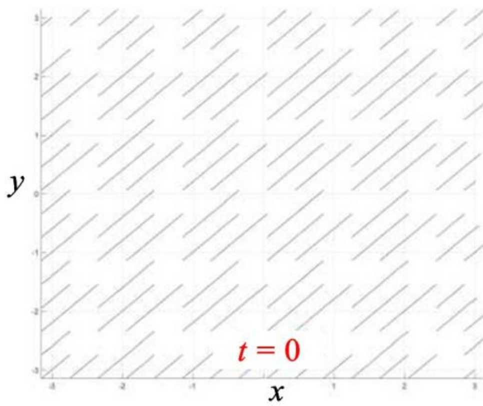
По результатам расчетов этого варианта сделан фильм[1].

В фильмах[2,3] приведены результаты расчетов двух других вариантов: 2-3-3-5 и 5-7-9-1.

Общее движение потока в варианте 2-3-3-5 оказалось следующим. Имеются четыре горизонтальных потока, и в соседних потоках разные направления движения газа. Между соседними потоками образуются застойные зоны. Но только между вторым и третьим встречными потоками четко образуется одно вращательное движение в положительном направлении. Это направление движения полностью определяется направлениями прилегающих горизонтальных потоков: нижний идет слева направо, а верхний – справа налево. Поэтому движение между ними происходит против хода часовой стрелки.

Общее движение потока в варианте 5-7-9-1 такое. Имеют место два вертикальных встречных потока. Левый поток идет снизу вверх, правый поток – сверху вниз. В застойной зоне образуют один овальный вихрь, вращающийся по ходу часовой стрелки. Движение среды в вариантах 5-7-9-1 и 2-3-3-5 практически топологически одинаковое: при повороте одного потока на прямой угол получается картина движения, очень похожая на движение в другом потоке.

Особо подчеркнем, что во всех описанных потоках четко прослеживается влияние вязкости газа на направления вращения газа в соприкасающихся областях.



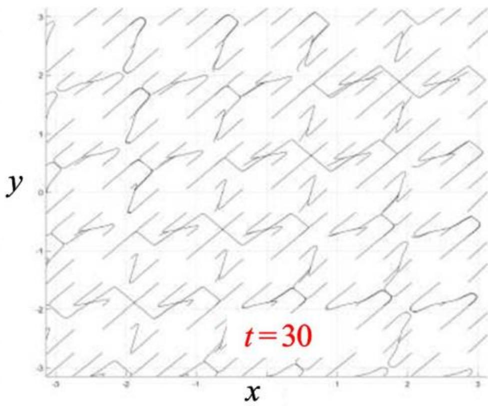


Рис. 14. Мгновенные линии тока при $t = 0$ и $t = 30$

[1] Баутин С.П., Карелина О.А., Обухов А.Г. Результаты расчета варианта 5-5-5-5 для системы уравнений движения. [Электронный ресурс]. URL: https://vk.com/video-71669107 456239197 (дата обращения: 27.09.2023).

[2] Баутин С.П., Карелина О.А., Обухов А.Г. Результаты расчета варианта 2-3-3-5 для системы уравнений движения. [Электронный ресурс]. URL: https://vk.com/video-71669107 456239194 (дата обращения: 27.09.2023).

[3] Баутин С.П., Карелина О.А., Обухов А.Г. Результаты расчета варианта 5-7-9-1 для системы уравнений движения. [Электронный ресурс]. URL: https://vk.com/video-71669107 456239198 (дата обращения: 27.09.2023).

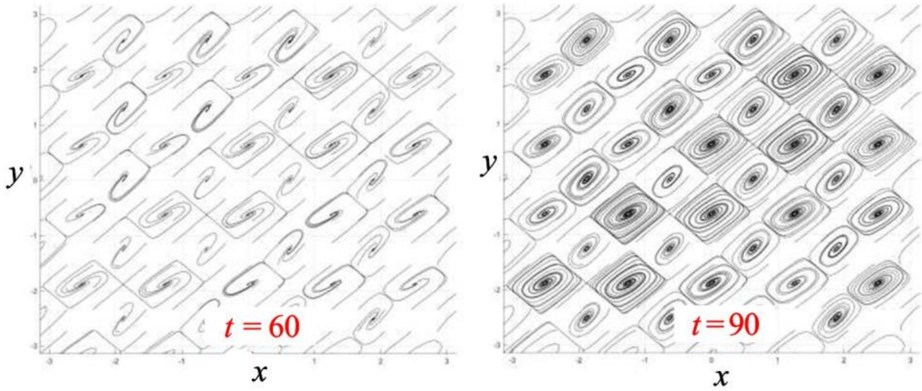


Рис. 15. Мгновенные линии тока при $t = 60$ и $t = 90$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе приведены примеры конкретных приближенных решений поставленных задач Коши при использовании начальных отрезков тригонометрических рядов. Коэффициенты этих начальных отрезков определяются при численном решении конечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Проанализированы свойства этих решений, которые описывают течения вязкого теплопроводного газа при постоянных значениях плотности и температуры. В том числе выделены случаи с несколькими областями, в которых имеют место закрученные течения газа, что характерно для турбулентных течений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баутин С.П., Замыслов В.Е., Скачков П.П.* Математическое моделирование тригонометрическими рядами одномерных течений вязкого теплопроводного газа. Новосибирск: Наука: Екатеринбург: УрГУПС, 2014.

2. *Баутин С.П., Замыслов В.Е.* Сходимости бесконечных тригонометрических рядов, решающих уравнение Бюргерса. Снежинск: СФТИ НИЯУ МИФИ, 2022.

3. *Баутин С.П., Замыслов В.Е.* Представление решений уравнения Бюргерса тригонометрическими рядами // Вестник национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», 2022. Т. 11. № 4. С. 305–318.

4. *Баутин С.П., Карелина О.А., Обухов А.Г.* Нестационарные двумерные периодические решения уравнений движения. Снежинск: СФТИ НИЯУ МИФИ, 2023.

5. *Баутин С.П., Карелина О.А., Обухов А.Г.* Представление решений системы уравнений движения с помощью тригонометрических рядов // Вестник национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», 2023. Т. 12. № 1. С. 39–51.

6. *Баутин С.П.* Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 4, pp. 223–232

SOME UNSTEADY TWO-DIMENSIONAL GAS FLOWS, DETERMINED USING TRIGONOMETRIC SERIES

S.P. Bautin[1,*], O.A. Karelina[1,2,**], A.G. Obukhov[3,]***

[1]Snezhinsk Institute of Physics and Technology, National Research Nuclear University MEPhI, Snezhinsk, 456776 Russia

[2] Federal State Unitary Enterprise «Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin Al – Russia Research Institute of technical Physics», Snezhinsk, 456776 Russia

[3]Tyumen Industrial University, Tyumen, 625000 Russia

[*]e-mail: spbautin@mail.ru

[**]e-mail: karelina-1999@inbox.ru

[***]e-mail: agobukhov@inbox.ru

Received September 5, 2023; revised September 6, 2023; accepted October 10, 2023

The work uses a technique for representing solutions to a system of nonlinear equations of motion in the form of infinite trigonometric series of two spatial variables. The coefficients of the series are the desired functions of time, for which an infinite system of ordinary differential equations is written. The initial data are specified in the form of finite trigonometric sums. Approximate solutions to the stated Cauchy problems are also constructed in the form of finite segments of trigonometric series. For various initial data, the work considers specific nonstationary two-dimensional gas flows that are periodic in the spatial variables *x, y* and analyzes their properties.

Keywords: system of equations of motion, Cauchy problem, trigonometric series, approximate solutions, streamlines.

REFERENCES

1. *Bautin S.P., Zamyslov V.E., Skachkov P.P.* Matematicheskoe modelirovanie trigonometricheskimi ryadami odnomernyh techenij vyazkogo teploprovodnogo gaza. [Mathematical modeling of one-dimensional flows of viscous heat-conducting gas by trigonometric series]. Novosibirsk, Science Publ., Ekaterinburg. UrGUPS Publ., 2014.

2. *Bautin S.P., Zamyslov V.E.* Skhodimosti beskonechnyh trigonometricheskih ryadov, reshayushchih uravnenie Byurgersa . [Convergence of infinite trigonometric series solving the Burgers equation]. Snezhinsk, SFTI NIYAU MEPhI Publ., 2022.

3. *Bautin S.P., Zamyslov V.E.* Predstavlenie reshenij uravneniya Byurgersa trigonometricheskimi ryadami. [Representation of solutions to the Burgers equation by trigonometric series]. Vestnik NIYaU MIFI, 2022. Vol. 11. No. 4. Pp. 305–318.

4. *Bautin S.P., Karelina O.A., Obukhov A.G.* Nestacionarnye dvumernye periodicheskie resheniya uravnenij dvizheniya. [Nonstationary two-dimensional periodic solutions of equations of motion]. Snezhinsk, SFTI NRNU MEPhI Publ., 2023.

5. *Bautin S.P., Karelina O.A., Obukhov A.G*. Predstavlenie reshenij sistemy uravnenij dvizheniya s pomoshch'yu trigonometricheskih ryadov. [Representation of solutions to a system of equations of motion using trigonometric series]. Vestnik NIYaU MIFI, 2023. Vol. 12. No. 1. Pp. 39–51 (in Russian).

6. *Bautin S.P.* Harakteristicheskaya zadacha Koshi i ee prilozheniya v gazovoj dinamike. [The characteristic Cauchy problem and its applications in gas dynamics]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2009.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2023, т. 12, № 4, с. 233–242

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.6, 533.6

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСЗВУКОВЫХ СВЕРХАЛЬФВЕНОВСКИХ МГД-ТЕЧЕНИЙ С УСКОРЕНИЕМ В УЗКИХ КОАКСИАЛЬНЫХ КАНАЛАХ В ПРИСУТСТВИИ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

***Т.Р. Калимуллин*[1],*, *Е.В. Степин*[2]**

[1]*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия*

[2]*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 125047, Россия*

**e-mail: t.r.kalimullin@mail.ru*

Поступила в редакцию: 27.09.2023
После доработки: 13.10.2023
Принята к публикации: 17.10.2023

Статья посвящена численным исследованиям течений плотной горячей плазмы в коаксиальных каналах плазменных ускорителей. Плазма рассматривается как сплошная электропроводящая среда, поведение которой описывается в терминах магнитной газодинамики (МГД). В работе используется математическая модель с нестационарными уравнениями «идеальной» одножидкостной магнитной газодинамики, полученная в квазиодномерном приближении. Целью работы является исследование влияния геометрии канала ускорителя в форме сопла и внешнего продольного магнитного поля на параметры установившихся во времени трансзвуковых сверхальфвеновских ускорительных МГД-течений, представляющих наибольший прикладной интерес в разработке плазменных двигателей. Продемонстрировано, что продольное магнитное поле вызывает вращение потока и незначительно снижает ускорительные характеристики канала. Установлено, что расположение «перетяжки», где достигается минимальное сечение канала, практически не влияет на входные и выходные значения потока, но существенным образом сказывается на параметрах потока внутри области канала. Показано, что геометрия канала влияет на величину критического продольного магнитного поля, соответствующего границе сверхальфвеновского режима течения.

Ключевые слова: плазменные двигатели; математическое моделирование; численное моделирование; магнитная газодинамика; продольное магнитное поле; геометрия канала.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.270

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы

Математическое моделирование и численные исследования играют важную роль в современной науке и технике, так как сокращают затраты на проведение натурных физических экспериментов. В частности, вычислительные модели для плазменной техники на данный момент являются одним из основных объектов исследования в цикле разработки и ввода этих изделий в эксплуатацию.

Одними из примеров такой техники являются плазменные двигатели, которые исследовались с 60-х гг. прошлого века [1] и с 1971 г. используются в космических аппаратах для корректировки траектории полета, стабилизации движения, а более мощные разновидности могут применяться как маршевые двигательные установки для ближних и дальних космических перелетов [2]. Основным конструкционным элементом этих двигателей являются плазменные ускорители.

Рассматриваемые ускорители используют в качестве топлива вещество в состоянии плазмы, вследствие чего имеют ряд преимуществ в сравнении с реактивными двигателями, использующими в качестве рабочего вещества атомарные газы. Эти преимущества, в первую очередь, связаны с тем, что в плазменных двигателях в кинетическую энергию выходного потока преобразуется не только энергия, полученная из химических реакций горения топлива, но и электромагнитная энергия системы.

Одним из примеров таких мощных ускорителей, демонстрирующих рекордные показатели тяги, удельного импульса и скорости истекающего плазменного потока, является квазистационарный сильноточный плазменный ускоритель (КСПУ) [3], спроектированный по идеям [4] и инициативе А.И. Морозова – одного из пионеров советской плазменной техники. Принцип его работы основан на ускорении плазмы в скрещенных электрическом и магнитном полях [5].

При построении математической модели процессов в таком ускорителе плазма рассматривается как сплошная электропроводящая среда и может быть описана в терминах механики сплошных сред. Правомерность такого подхода обеспечивается диапазоном параметров плазменного потока (в первую очередь, концентрации частиц), наблюдаемых при работе ускорителя, а именно: число Кнудсена $\mathrm{Kn} \ll 1$, т.е. длина свободного пробега частиц плазмы много меньше характерного размера системы. Таким образом, инструментом исследования настоящей работы является математическая модель с уравнениями «идеальной» (без учета диссипативных эффектов: теплопроводность, магнитная и газодинамическая вязкости) одножидкостной (электронная и ионная компонента имеют единые макроскопические параметры) магнитной газодинамики (МГД) [6].

Некоторые из разрабатываемых прототипов КСПУ используют в своей работе также внешнее магнитное поле [7], которое создается за счет внешних источников, например, установку можно поместить внутрь соленоида. Во внешнем поле классификация МГД-течений усложняется, и в ней можно выделить следующие классы течений: сверхальфвеновский и доальфвеновский [8]. При этом в зависимости от отношения скорости потока к одной из характерных скоростей сигнала в плазме (быстрой и медленной магнитозвуковой и альфвеновской скоростям звука), существует целый спектр возможных типов МГД-течений, которые могут возникать в канале ускорителя. Так, например, в работе [9] был численно исследован процесс установления типов течения, близких к альфвеновскому. Отмечается также [8], что существует предельное (критическое) значение продольного магнитного поля, при котором происходит переход сверхальфвеновского режима течения на доальфвеновский. В приложениях наиболее интересно рассматривать сверхальфвеновский трансзвуковой режим МГД-течения с ускорением, реализуемый в коаксиальных каналах типа сопла, в которых происходит переход скорости потока через скорость быстрого магнитного звука.

Представленные в работе результаты получены для модели МГД-течений в квазиодномерном приближении (см., например, [10]), которая позволяет оценить качественные закономерности и количественные характеристики потока вдоль оси ускорителя, осредняя их зависимость по поперечному сечению канала, при этом предполагается, что нижняя граница канала является постоянной. Численные исследования влияния криволинейной геометрии нижней границы канала на параметры установившихся во времени МГД-течений представлены в работе [11]. С расчетами двумерных осесимметричных МГД-течений рассматриваемого типа можно ознакомиться в работе [12], где обращено внимание на существенное влияние ориентации профиля одного из электродов на характеристики ускоряемого плазменного потока. В статье [13] представлены результаты расчетов компрессионных МГД-течений, возникающих в канале с укороченным центральным электродом, а также исследовано влияние внешнего продольного магнитного поля на параметры компрессии потока.

Цель работы

Данная работа посвящена численному исследованию влияния геометрии электродов и внешнего продольного магнитного поля на трансзвуковые сверхальфвеновские ускорительные МГД-течения в узких коаксиальных каналах плазменных ускорителей типа сопла, при этом основное внимание уделяется нераскрытым ранее вопросам о влиянии расположения «перетяжки» канала, в которой достигается его минимальное сечение, на параметры ускорения потока и величину критического продольного магнитного поля, при котором сверхальфвеновский режим течения меняется на доальфвеновский.

Объект моделирования

Объектом моделирования является коаксиальный канал плазменного ускорителя длины L, образованный двумя коаксиальными электродами с геометрией $r_1(z)$ и $r_2(z)$, подключенными к внешнему источнику электрического тока (рис. 1) [9].

Плазма, являясь электропроводящей средой, замыкает образованную электрическую цепь, и в ней возникает разрядный ток плотности j. Втекающий в центральный электрод электрический ток создает азимутальное магнитное поле $\mathbf{H}_{\perp}$, которое при взаимодействии с током $\mathbf{j}$ вызывает ускорение потока за счет силы Ампера $\mathbf{F}_{\parallel} = (1/c)\, \mathbf{j} \times \mathbf{H}_{\perp}$. Внешнее продольное магнитное поле $\mathbf{H}_{\parallel}$ при взаимодействии с тем же током $\mathbf{j}$ вызывает вращение потока с силой $\mathbf{F}_{\perp} = (1/c)\,\mathbf{j} \times \mathbf{H}_{\parallel}$.

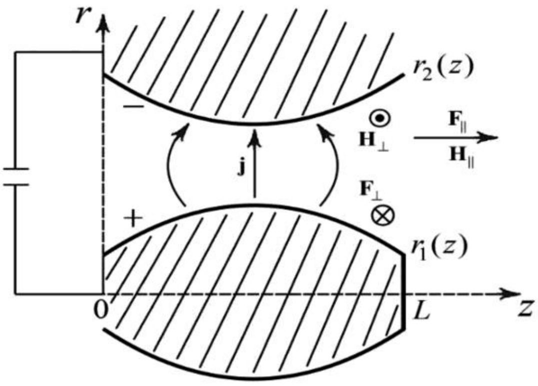


Рис. 1. Схема канала ускорителя в цилиндрических координатах (r, φ, z). Сечение плоскостью $\varphi = \mathrm{const}$

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Постановка задачи

Рассматриваем систему уравнений «идеальной» одножидкостной магнитной газодинамики, которая замыкается уравнением состояния идеального газа [10]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \rho\left(\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right) = -\mathrm{grad}\, p + \mathbf{j}\times\mathbf{H} \\ \rho\left(\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}\,\varepsilon)\right) + p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{H}), \end{cases} \qquad (1)$$

где $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$, $\mathbf{j} = \mathrm{rot}\,\mathbf{H}$.

Магнитное поле должно удовлетворять условию соленоидальности

$$\mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0.$$

Система (1) представлена в безразмерных переменных. Единицами измерения являются характерные для постановки задачи физические параметры процесса:

$$\rho_{\mathrm{unit}} = \rho_0,\ H_{\mathrm{unit}} = H_0,$$

$$\mathrm{v}_{\mathrm{unit}} = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}},\ \mathrm{p}_{\mathrm{unit}} = \frac{H_0^2}{4\pi},$$

где ρ_0 – плотность плазмы на входе в канал; H_0 – характерное значение напряженности магнитного поля на входе в канал. Скорость и давление измеряются в магнитных единицах.

В работе исследуются трансзвуковые сверхальфвеновские течения, у которых на входе в канал скорость плазмы меньше быстрой магнитозвуковой скорости, а на выходе – больше.

Для быстрой магнитозвуковой скорости имеет место следующее выражение [9]:

$$C_f = \sqrt{\begin{array}{c} \dfrac{1}{2}\left(C_T^2 + C_{Alfz}^2 + C_{Alf\phi}^2\right) + \\ + \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(C_T^2 + C_{Alfz}^2 + C_{Alf\phi}^2\right)^2 - 4C_T^2 C_{Alfz}^2} \end{array}},$$

где $C_T^2 = \gamma p/\rho$ – квадрат тепловой скорости звука; $C_{Alfz}^2 = H_z^2/\rho$, $C_{Alf\phi}^2 = H_\phi^2/\rho$ – квадрат продольной и азимутальной составляющих альфвеновской скорости сигнала соответственно.

Для корректной постановки задачи также необходимо ввести дополнительные граничные и начальные условия. Для численного моделирования интересующих нас трансзвуковых сверхальфвеновских МГД-течений с ускорением достаточно задать граничные условия только на входе в канал: все характеристики системы уравнений входят на левой и выходят из правой границы области определения задачи [10].

В качестве граничных условий на входе в канал выступают известные параметры втекающего в ускоритель плазменного потока, а на электродах учитываются условия непроницаемости для плазмы и магнитного поля.

В качестве начальных условий могут выступать любые, так как основной интерес представляет стационарный режим течения. Однако они должны обеспечивать начальный разгон плазмы.

Квазиодномерное приближение

Обсуждаемая модель рассматривается в квазиодномерном приближении, которое применяется для исследования течения газа и плазмы в узких каналах переменного сечения с небольшим относительно его длины поперечным размером.

Суть приближения состоит в том, что оно достаточно строго описывает зависимость свойств течения от продольной координаты вдоль канала и не учитывает детали их зависимости от поперечных координат, допуская усреднение по поперечному сечению [10]. В результате независимой пространственной переменной является только одна – продольная координата.

Тогда система уравнений «идеальной» одножидкостной магнитной газодинамики (1) в квазиодномерном приближении будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_z S}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \rho v_z S}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho v_z^2 + p + \frac{H_\phi^2}{2}\right) S}{\partial z} = \\ = \left(p + \frac{H_\phi^2}{2}\right) \frac{dS}{dz} \\ \frac{\partial \rho v_\phi S}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_\phi v_z - H_z H_\phi) S}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \rho \varepsilon S}{\partial t} + \frac{\partial \rho \varepsilon v_z S}{\partial z} + p \frac{\partial v_z S}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial H_\phi S}{\partial t} + \frac{\partial (v_z H_\phi - v_\phi H_z) S}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $S(z)$ – площадь поперечного сечения, выраженная в безразмерных переменных.

В рассматриваемой модели поток продольного магнитного поля $H_z S = \text{const}$, и его следует считать заданным.

Система замыкается следующим уравнением состояния:

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon = \frac{\beta}{2}\rho T. \quad (3)$$

В уравнении (3) фигурирует безразмерный параметр $\beta = 8\pi p_0 / H_0^2$ – отношение газового и магнитного давлений. Стоит отметить, что этот параметр классически встречается при моделировании процессов в плазменной технике и позволяет оценить совокупное влияние термодинамической и электромагнитной природы процесса на исследуемое явление.

Граничные и начальные условия

Как было отмечено ранее, граничные условия задаются только на входе в канал и выглядят следующим образом:

$$\rho = 1,\ v_\phi = 0,\ \varepsilon = \frac{\beta}{2(\gamma - 1)},\ H_\phi = 1.$$

Граничные условия на электродах (верхней и нижней границе) уже были учтены при выводе системы уравнений (2).

Начальные же условия для квазиодномерной модели могут быть любыми, так как рассматривается нестационарная задача, в ходе решения которой осуществляется выход на стационарный режим течения. Однако эти условия должны обеспечивать начальный разгон плазмы. Поэтому начальные условия задаются следующим образом:

$$H_\phi = (1 - 0.9z).$$

Метод расчета

Численное решение поставленной задачи будет строиться на основе метода коррекции потоков по Борису–Буку [14, 15], реализуемого в три этапа:

- транспортно-диффузионный;
- антидиффузионный;
- коррекционный.

На первом этапе используется разностная схема низкого порядка точности и вводится численная диффузия. Для уменьшения эффекта искусственной вязкости применяется алгоритм антидиффузии. При этом она является причиной усиления уже имеющихся максимумов и минимумов, а также причиной появления новых «нефизичных» экстремумов, что нивелируется на третьем этапе коррекцией потоков.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Верификация модели

Предваряя последующие численные исследования о влиянии геометрии канала и внешнего продольного магнитного поля на параметры исследуемых МГД-течений, в работе была проведена верификация рассматриваемой выше математической модели и реализация ее численного алгоритма решения в программном коде. Для этого были использованы результаты расчетов стационарной модели, построенной на базе первых интегралов системы (2) при $\partial/\partial t \equiv 0$, т.е. на базе законов сохранения [16].

На рис. 2 приведены результаты расчетов стационарной задачи (пунктирная линия) и нестационарной задачи (сплошная линия) при

$$\beta = 1, H_z S = 0.1, S = 2(z - 0.5)^2 + 0.5.$$

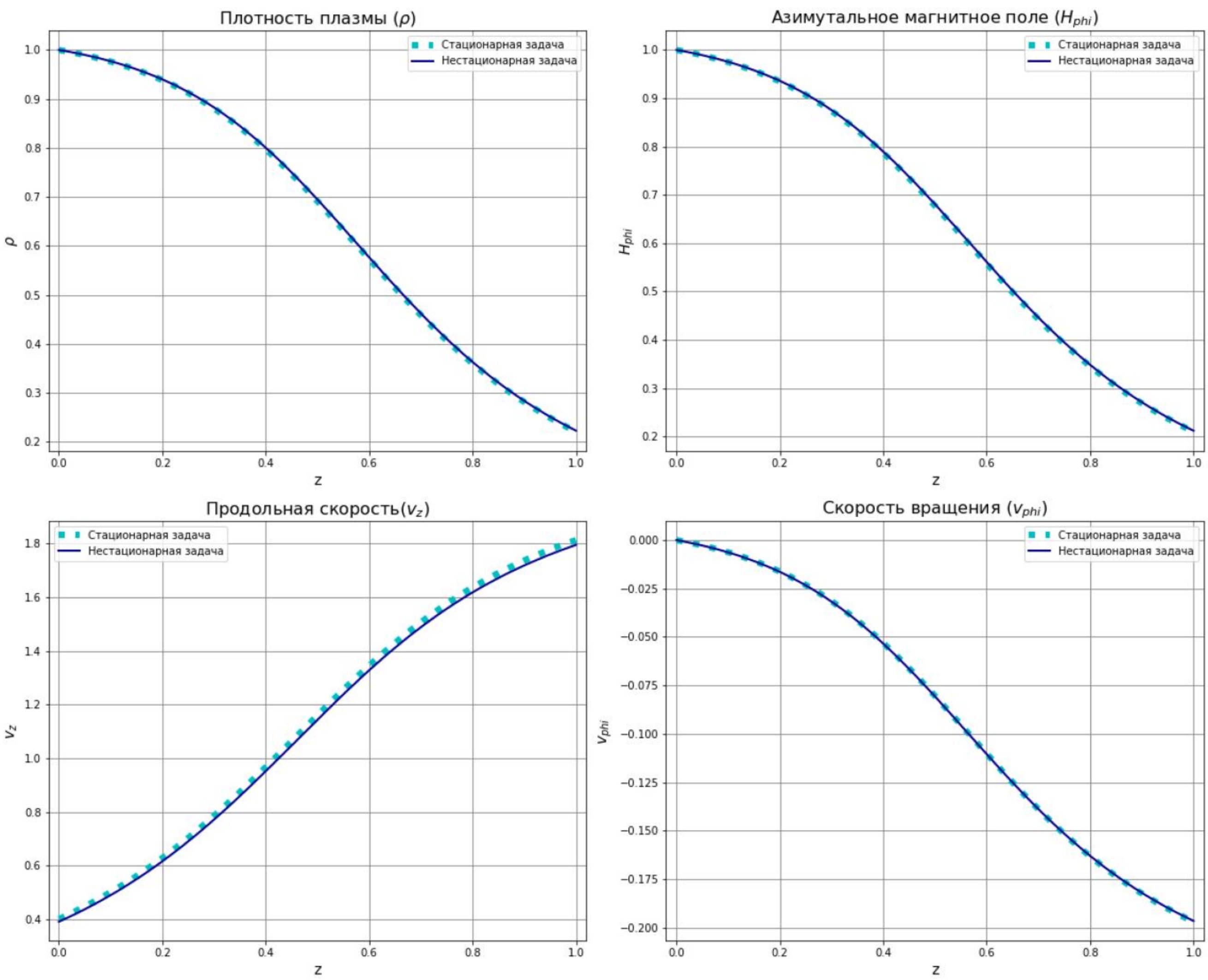


Рис. 2. Верификация численной модели

Как видно из рисунка, результаты сходятся в пределах погрешности метода расчета, что говорит о корректности выбора модели, реализации численного метода и работы написанного алгоритма.

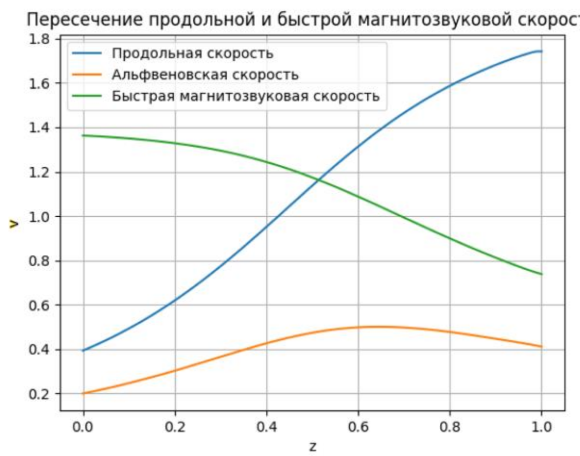


Рис. 3. Скорость плазмы
и характерные скорости сигнала

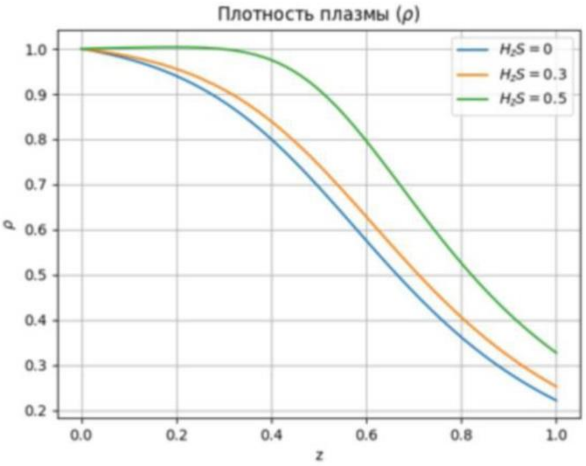
С другой стороны, адекватность модели и полученных численных результатов также следует из соблюдения требования перехода продольной скорости плазмы через быструю магнитозвуковую скорость точно в центре канала, где достигается его минимальное сечение (рис. 3).

Исследование влияния внешнего продольного магнитного поля

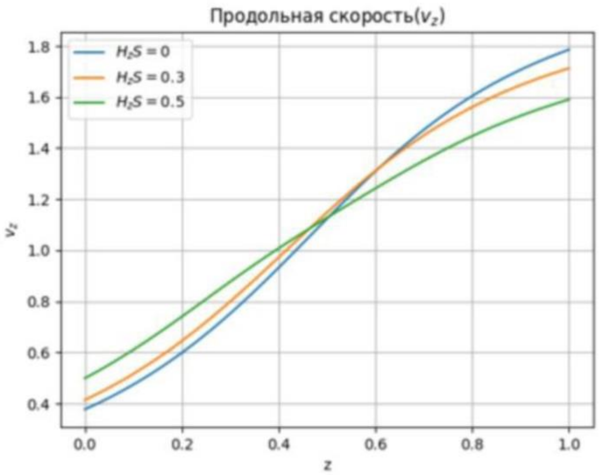
Следующий этап проверки адекватности полученной модели и ее численной реализации заключался в исследовании зависимости параметров рассматриваемых трансзвуковых сверхальфвеновских МГД-течений с ускорением от величины внешнего продольного магнитного поля.

Для параметра $\beta = 1$ и различных значений потока внешнего продольного магнитного поля $H_z S$ в рассматриваемой геометрии канала

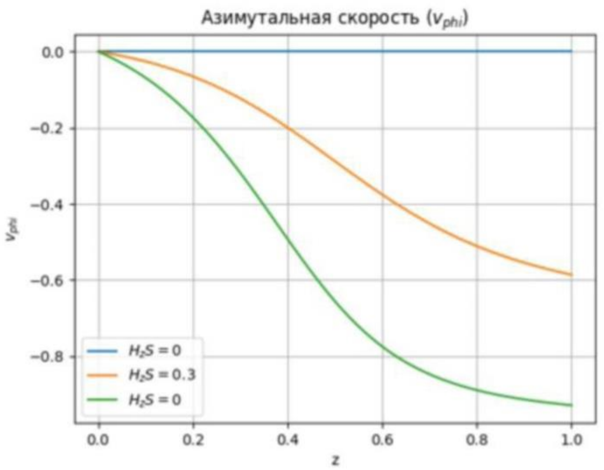
$S = 2(z-0.5)^2 + 0.5$ были построены распределения основных макроскопических параметров плазмы (рис. 4).



а



б



в

Рис. 4. Распределение вдоль канала: *а*) плотности плазмы; *б*) продольной скорости плазмы; *в*) азимутальной скорости плазмы при различных значениях продольного поля

Видно, что продольное магнитное поле вызывает вращение плазменного потока (рис. 4,*в*) и уменьшает расход тепловой энергии, соответствующий интенсивности падения плотности вдоль оси канала (рис. 4,*а*). В совокупности это вызывает перераспределение накопленной энергии в системе, и ускорительные характеристики канала, которые выражаются в разности выходной и входной скоростей потока, падают (рис. 4,*б*).

В серии расчетов определено критическое значение внешнего продольного магнитного поля $(H_zS)_{cr} \approx 0.52$, при котором исследуемый трансзвуковой сверхальфвеновский режим течения еще устанавливается (рис. 5).

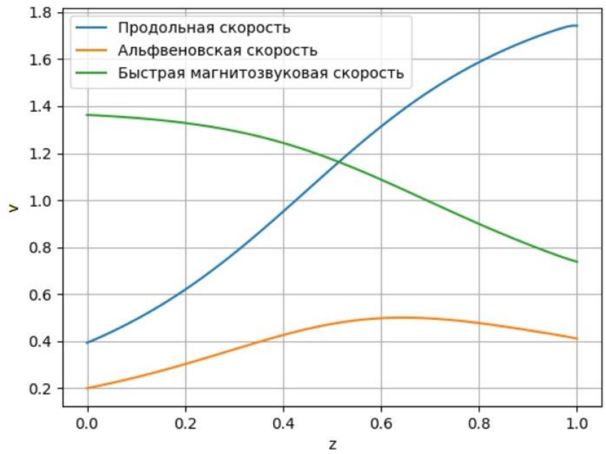


Рис. 5. Распределение скоростей вдоль канала при критическом значении внешнего продольного магнитного поля

При $H_zS > (H_zS)_{cr}$ режим течения меняется со сверхальфвеновского на доальфвеновский, что, с одной стороны, требует задание дополнительных граничных условий на выходе из канала, а с другой стороны, выходит за рамки поставленных в настоящей работе задач.

Обозначенные результаты и выводы совпадают с полученными ранее в аналогичных исследованиях [9].

Исследование влияния геометрии канала

Одной из задач настоящей работы является исследование зависимости распределения параметров плазмы от геометрии канала, а именно, от расположения «перетяжки/перемычки», где достигается минимальное его сечение. Рассмотренные конфигурации представлены на рис. 6.

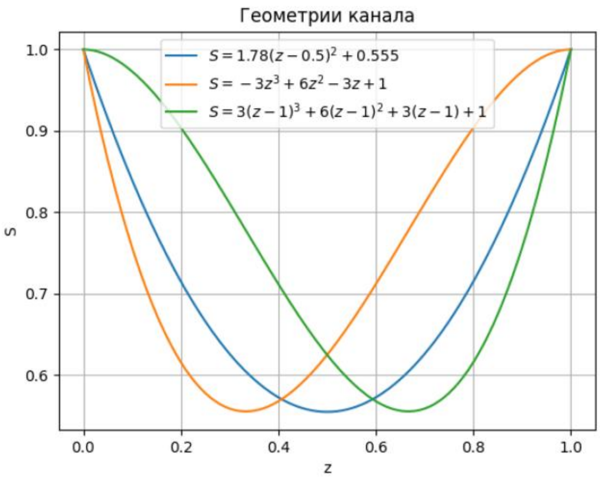


Рис. 6. Рассматриваемые геометрии канала типа сопла

Для параметра $\beta = 1$ и потока внешнего продольного магнитного поля $H_z S$, соответствующего предкритическому режиму течения, в рассматриваемых геометриях канала были построены распределения макроскопических параметров плазмы (рис. 7).

Из рисунков видно, что несмотря на незначительную разницу во входных и выходных значениях параметров ускоряемого плазменного потока, расположение перетяжки существенным образом влияет на характер этих распределений вдоль оси внутри области канала. Интенсивность падения плотности, а значит, и расход тепловой энергии, ярче выражены при смещении «перетяжки» ближе ко входу в канал. Эта же закономерность наблюдается и для напряженности магнитного поля, а значит, расхода электромагнитной энергии. Также расположение «перетяжки» влияет на прирост продольной скорости потока и скорости его вращения вдоль оси канала.

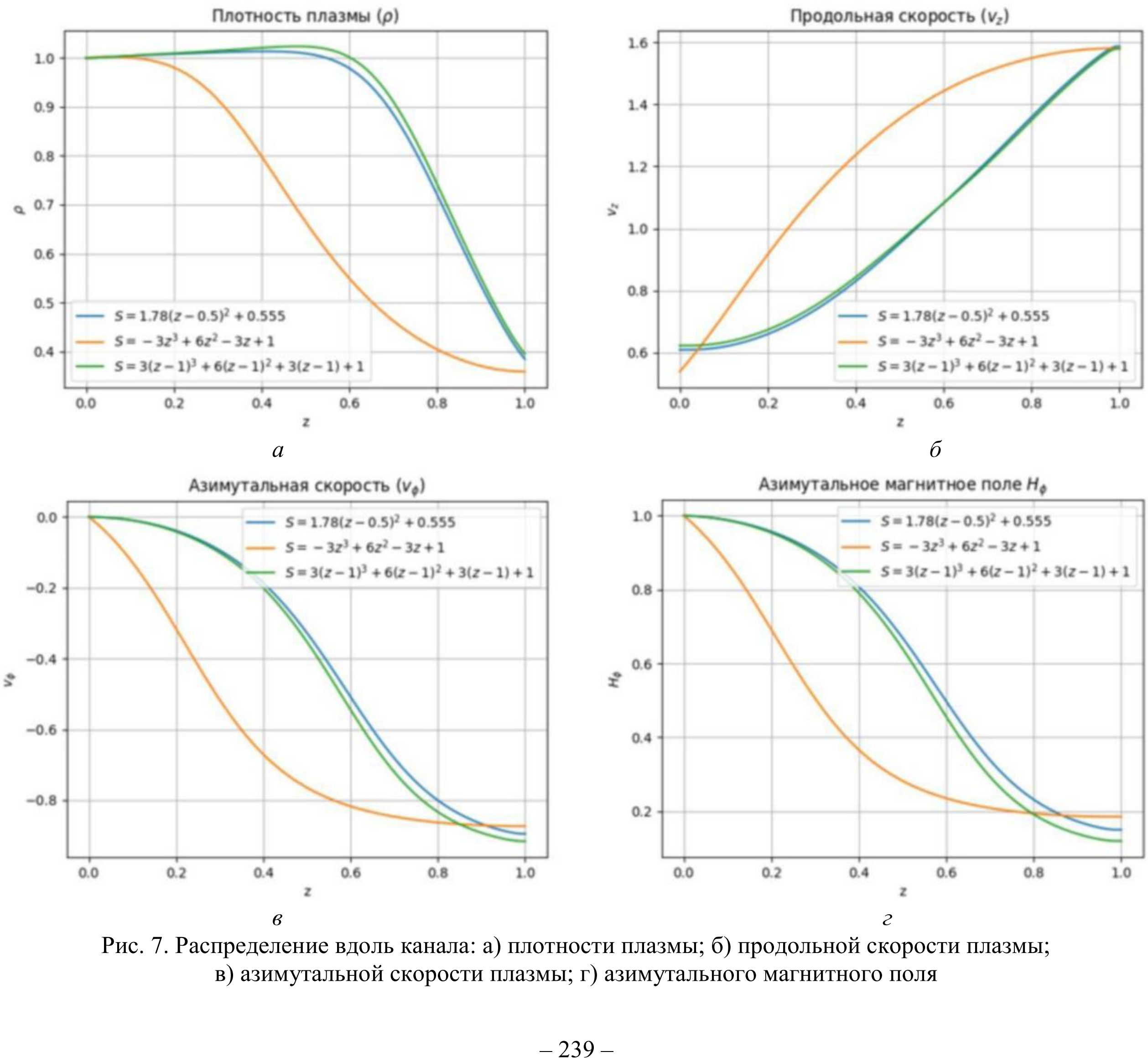


Рис. 7. Распределение вдоль канала: а) плотности плазмы; б) продольной скорости плазмы; в) азимутальной скорости плазмы; г) азимутального магнитного поля

Но основной результат состоит в том, что в целом расположение «перетяжки» не влияет на интегральные характеристики исследуемого типа МГД-течения.

Также для каждой рассмотренной геометрии было определено критическое значение потока продольного магнитного поля, при котором режим течения еще остается сверхальфвеновским (табл. 1).

Таблица 1. Критические значения потока продольного магнитного поля

Геометрия	Значение критического потока $(H_zS)_{cr}$
$S = -3z^3 + 6z^2 - 3z + 1$	0.54
$S = 1.78(z - 0.5)^2 + 0.555$	0.58
$S = 3(z - 1)^3 + 6(z - 1)^2 + 3(z - 1) + 1$	0.6

Видно, что величина $(H_zS)_{cr}$ растет при смещении «перетяжки» вправо, т.е. с прикладной точки зрения диапазон допустимых значений продольного магнитного поля расширяется.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе было проведено численное моделирование течений плотной горячей плазмы в каналах плазменных ускорителей. В качестве инструмента исследования была использована начально-краевая задача с уравнениями «идеальной» одножидкостной магнитной газодинамики в квазиодномерной постановке. Численная реализация этой задачи была построена на основе метода коррекции потоков (FCT).

Программная реализация была осуществлена на языке программирования Python 3. Результатами исследования являются серии вычислительных экспериментов о влиянии основных физических и геометрических параметров установки на трансзвуковые сверхальфвеновские МГД-течения с ускорением. Полученные результаты визуализированы и проинтерпретированы с точки зрения физики исследуемого явления и их прикладной значимости.

Научная новизна работы состоит в исследовании влияния расположения «перетяжки» канала в форме сопла – геометрического места области канала, в котором достигается его минимальное сечение – на параметры ускоряемого плазменного потока и величину критического значения продольного магнитного поля, при котором режим течения меняется со сверхальфвеновского на доальфвеновский.

Установлено, что расположение «перетяжки» не влияет на интегральные характеристики исследуемого типа МГД-течения, а ее смещение к выходу из канала расширяет диапазон допустимых для сверхальфвеновского режима течения значений продольного поля. Полученные результаты имеют несомненную прикладную значимость и могут быть использованы в разработке плазменных двигателей актуального и перспективного назначения, работающих по принципу ускорения плазмы в скрещенных электрическом и магнитном полях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морозов А.И., Есипчук Ю.В., Тилинин Г.Н., Трофимов А.В., Шаров Ю.А., Щепкин Г.Я.* Экспериментальное исследование плазменного ускорителя с замкнутым дрейфом электронов и протяженной зоной ускорения // ЖТФ, 1972. Т. 42. Вып. 1. С. 54–63.

2. *Морозов А.И.* Физические основы космических электрореактивных двигателей. М.: Атомиздат, 1978. 328 с.

3. *Морозов А.И.* Введение в плазмодинамику. М.: Физматлит, 2008. 616 с.

4. *Волков Я.Ф., Кулик Н.В., Маринин В.В., Морозов А.И., Соляков Д.Г., Стальцов В.В., Терешин В.И., Тиаров М.А., Цупко Б.Ю., Чеботарев В.В.* Анализ параметров потоков плазмы, генерируемых полноблочным КСПУ Х-50 // Физ. плазмы, 1992. Т. 18. С. 1392.

5. *Морозов А.И.* Принципы коаксиальных стационарных плазменных ускорителей (КСПУ) // Физ. плазмы, 1990. Т. 16. Вып. 2. С. 131–146.

6. *Куликов А.Г., Любимов Г.А.* Магнитная гидродинамика. М.: Логос, 2005. 328 с.

7. *Климов Н.С., Гуторов К.М., Коваленко Д.В., Козлов А.Н., Коновалов В.С., Подковыров В.Л., Ярошевская А.Д.* Спектры излучения в потоках ионизующихся газов для установки КСПУ-Т с продольным полем // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2022. № 12. 32 с.

8. *Брушлинский К.В., Жданова Н.С.* Стационарные МГД-течения в соплах с внешним продольным магнитным полем // Изв. АН. Механика жидкости и газа, 2004. № 3. С. 135–146.

9. *Styopin E.V.* Numerical simulation of near-Alfven MHD flows relaxation with a longitudinal magnetic field // J. Plasma Physics, 2015. Vol. 81. 905810309.

10. *Брушлинский К.В.* Математические основы вычислительной механики жидкости, газа и плазмы. Долгопрудный: «Интеллект», 2017. 268 с.

11. *Степин Е.В.* Стационарные МГД-течения в коаксиальных каналах криволинейной конфигурации // Вестник Национального исследовательского

ядерного университета «МИФИ», 2015. Т. 4. № 5. С. 407–420.

12. *Брушлинский К.В., Жданова Н.С., Степин Е.В.* Ускорение плазмы в коаксиальных каналах с профилированными электродами и продольным магнитным полем // ЖВМиМФ, 2018. Т. 58. № 4. С. 607–617.

13. *Брушлинский К.В., Степин Е.В.* Численная модель компрессионных течений плазмы в каналах в присутствии продольного магнитного поля // Дифференциальные уравнения, 2019. Т. 55. № 7. С. 929–939.

14. *Boris J.P. and Book D.L.* SHASTA, a fluid transport algorithm that works // Journal of Computational Physics, 1973. Vol. 11. Pp. 38–69.

15. *Оран Э.* Численное моделирование реагирующих потоков. М: Мир, 1990. 660 с.

16. *Ковалева А.С., Калимуллин Т.Р., Степин Е.В.* Математическое моделирование стационарных МГД-течений в узких каналах плазменных ускорителей // IX Международная конференция «Лазерные, плазменные исследования и технологии», ЛаПлаз-2023; Сборник научных трудов. Москва, Россия: НИЯУ МИФИ, 2023. С. 145.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 4, pp. 233–242

NUMERICAL SIMULATION OF TRANSONIC SUPER-ALFVENIC MHD FLOWS WITH ACCELERATION IN NARROW COAXIAL CHANNELS IN THE PRESENCE OF A LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD

***T.R. Kalimullin*[1*]*, E.V. Styopin*[2]**

[1]*National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, 115409, Russia*
[2]*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, 125047, Russia*
**e-mail:* kalimullin02@mail.ru

Received September 27, 2023; revised October 13, 2023; accepted October 17, 2023

The article is devoted to numerical studies of dense hot plasma flows in coaxial channels of plasma accelerators. Plasma is considered as a continuous electrically conducting medium, the behavior of which is described in terms of magnetic hydro dynamics (MHD). The work uses a mathematical model with nonstationary equations of “ideal” single-fluid magnetic hydro dynamics, obtained in a quasi-one-dimensional approximation. The purpose of the work is to study the influence of the geometry of the accelerator channel in the form of a nozzle and the external longitudinal magnetic field on the parameters of steady-state transonic super-Alfvénic acceleration MHD flows, which are of the greatest applied interest in the development of plasma engines. It has been demonstrated that a longitudinal magnetic field causes rotation of the flow and slightly reduces the acceleration characteristics of the channel. It has been established that the location of the “waist”, where the minimum cross-section of the channel is achieved, has practically no effect on the input and output flow values, but significantly affects the flow parameters inside the channel area. It is shown that the channel geometry affects the value of the critical longitudinal magnetic field corresponding to the boundary of the super-Alfvénic flow regime.

Keywords: plasma engines; math modeling; numerical modeling; magnetic hydro dynamics; longitudinal magnetic field; channel geometry.

REFERENSES

1. *Morozov A.I., Esipchuk Yu.V., Tilinin G.N., Trofimov A.V., Sharov Yu.A., Shchepkin G.Ya.* Eksperimental'noe issledovanie plazmennogo uskoritelya s zamknutym drejfom elektronov i protyazhennoj zonoj uskoreniya. [Experimental study of a plasma accelerator with closed electron drift and an extended acceleration zone]. ZhTF, 1972. Vol. 42, is. 1. Pp. 54–63 (in Russian).

2. *Morozov A.I.* Fizicheskie osnovy kosmicheskih elektroreaktivnyh dvigatelej [Physical foundations of space electric propulsion engines]. Moscow, Atomizdat Publ., 1978. 328 p. (in Russian).

3. *Volkov Ya.F., Kulik N.V., Marinin V.V., Morozov A.I., Solyakov D.G., Staltsov V.V., Tereshin V.I., Tiarov M.A., Tsupko B. .Yu., Chebotarev V.V.* Analiz parametrov potokov plazmy, generiruemyh polnoblochnym KSPU H-50. [Analysis of parameters of plasma flows generated by full-block KSPU X-50]. Phys. plasma, 1992. Vol. 18. Pp. 1392 (in Russian).

4. *Morozov A.I.* Vvedenie v plazmodinamiku [Introduction to plasmodynamics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008. 616 p. (in Russian).

5. *Morozov A.I.* Principy koaksial'nyh stacionarnyh plazmennyh uskoritelej (KSPU) [Principles of coaxial stationary plasma accelerators (CSPA)]. Phys. plasma, 1990. Vol. 16, is. 2. Pp. 131–146 (in Russian).

6. *Kulikov A.G., Lyubimov G.A.* Magnitnaya gidrodinamika. [Magnetic hydrodynamics]. Moscow, Logos Publ., 2005. 328 p. (in Russian).

7. *Klimov N.S., Gutorov K.M., Kovalenko D.V., Kozlov A.N., Konovalov V.S., Podkovyrov V.L., Yaroshevskaya A.D.* Spektry izlucheniya v potokah ionizuyushchihsya gazov dlya ustanovki KSPU-T s prodol'nym polem. [Radiation spectra in flows of ionizing gases for the KSPU-T installation with a longitudinal field]. Preprints of the Institute for Problems of Mathematics named after. M.V. Keldysh, 2022. No. 12. 32 p. (in Russian).

8. *Brushlinsky K.V., Zhdanova N.S.* Stacionarnye MGD-techeniya v soplah s vneshnim prodol'nym magnitnym polem. [Stationary MHD flows in nozzles with an external longitudinal magnetic field]. Izv. AN. Mechanics of liquid and gas, 2004. No. 3. Pp. 135–146 (in Russian).

9. *Styopin E.V.* Numerical simulation of near-Alfven MHD flows relaxation with a longitudinal magnetic field. J. Plasma Physics, 2015. Vol. 81. 905810309.

10. *Brushlinskiy K.V.* Matematicheskiye osnovy vychislitel'noy mekhaniki zhidkosti, gaza i plazmy. [Mathematical foundations of computational mechanics of liquid, gas and plasma]. Dolgoprudnyy, Intellekt Publ., 2017. 268 p. (in Russian).

11. *Styopin E.V.* Stacionarnye MGD-techeniya v koaksial'nyh kanalah krivolinejnoj konfiguracii . [Stationary MHD flows in coaxial channels of a curvilinear configuration]. Vestnik NIYaU MIFI, 2015. Vol. 4. No. 5. Pp. 407–420. (in Russian).

12. *Brushlinsky K.V., Zhdanova N.S., Stepin E.V.* Uskorenie plazmy v koaksial'nyh kanalah s profilirovannymi elektrodami i prodol'nym magnitnym polem. [Plasma acceleration in coaxial channels with profiled electrodes and a longitudinal magnetic field]. ZhVMiMF, 2018. Vol. 58. No. 4. Pp. 607–617 (in Russian).

13. *Brushlinsky K.V., Styopin E.V.* Chislennaya model' kompressionnyh techenij plazmy v kanalah v prisutstvii prodol'nogo magnitnogo polya. [Numerical model of compression plasma flows in channels in the presence of a longitudinal magnetic field]. Differential equations, 2019. Vol. 55. No. 7. Pp. 929–939 (in Russian).

14. *Boris J.P. and Book D.L.* SHASTA, a fluid transport algorithm that works. Journal of Computational Physics, 1973. Vol. 11. Pp. 38–69.

15. *Oran E.* Chislennoe modelirovanie reagiruyushchih potokov. [Numerical modeling of reacting flows]. Moscow, Mir Publ., 1990. 660 p. (in Russian).

16. *Kovaleva A.S., Kalimullin T.R., Styopin E.V.* Matematicheskoe modelirovanie stacionarnyh MGD-techenij v uzkih kanalah plazmennyh uskoritelej. [Mathematical modeling of stationary MHD flows in narrow channels of plasma accelerators]. IX International Conference «Laser, Plasma Research and Technologies», LaPlaz-2023; Collection of scientific papers. Moscow, Russia: National Research Nuclear University MEPhI, 2023. P. 145 (in Russian).

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2023, т. 12, № 4, с. 243–250

УДК 004.5

МЕТОДИКА ТЕСТИРОВАНИЯ МНОГОКАНАЛЬНОГО ЧЕЛОВЕКО-МАШИННОГО ИНТЕРФЕЙСА

Т.И. Возненко
Институт интеллектуальных кибернетических систем,
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, 115409, Россия
e-mail: *TIVoznenko@mephi.ru*

Поступила в редакцию: 10.09.2023
После доработки: 10.09.2023
Принята к публикации: 22.09.2023

В настоящее время актуальными задачами являются исследование и разработка эффективного человеко-машинного интерфейса для робототехнических комплексов. Для повышения эффективности управления робототехническим комплексом могут быть использованы несколько интерфейсов, работающие в параллельном режиме. В частности, существует многоканальный человеко-машинный интерфейс, который подразумевает взаимодействие нескольких интерфейсов. Существуют различные алгоритмы взаимодействия нескольких интерфейсов, направленные на выбор команды, которую необходимо передать на робототехнический комплекс в данный момент времени. Для обоснования целесообразности использования алгоритмов взаимодействия необходимо применять методику тестирования многоканального человеко-машинного интерфейса. В данной статье рассматриваются различные подходы к реализации данной методики: на основе метода статистических испытаний и на основе моделирования результатов. По результатам сбора статистики формируются матрицы ошибок. В данной статье рассмотрены различные виды матриц ошибок, а также метрики, которые могут быть использованы для оценки эффективности работы человеко-машинного интерфейса с учетом ошибок первого и второго рода. В случае моделирования результатов, в данной статье были рассмотрены моделирование на основе выбора вида распределения и моделирование на основе генерирования матрицы ошибок. Моделирование результатов может быть использовано при невозможности сбора большой статистики, для проверки целесообразности использования алгоритмов взаимодействия.

Ключевые слова: человеко-машинный интерфейс, многоканальный интерфейс, матрица ошибок, тестирование человеко-машинного интерфейса.
DOI: 10.26583/vestnik.2023.266

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время актуальными являются исследования, посвященные робототехническим комплексам [1–2]. Причем существуют направления, посвященные как автономным робототехническим комплексам [3–4], так и исследованию человеко-машинных интерфейсов для автоматизированных систем [5–6]. Для повышения эффективности управления исследуются реализации с параллельным использованием нескольких интерфейсов. В частности, существует реализация многоканального интерфейса [7], которая подразумевает взаимодействие нескольких человеко-машинных интерфейсов. Для тестирования алгоритмов взаимодействия необходимо получить информацию о работе каждого человеко-машинного интерфейса. Данная информация может быть получена двумя способами:

- на основе метода статистических испытаний (сбора статистики);
- на основе моделирования результатов.

В данной статье рассматриваются подходы к реализации методики тестирования многоканального интерфейса.

СБОР СТАТИСТИКИ

В случае сбора статистики необходимо выполнить каждую команду определенное количество раз, а результат распознавания записать в матрицу ошибок [8]. Матрица ошибок при статистической классификации показана в табл. 1. Строки матрицы соответствуют количеству случаев распознавания команды Ki как команды Kj. Таким образом, по диагонали матрицы расположены случаи правильного распознавания команд.

Таблица 1. Матрица ошибок при статистической классификации [8]

Ист.\ рез.	K_1	$K_н$	…	K_N
K_1	σ_{11}	σ_{12}	…	σ_{1N}
K_2	σ_{21}	σ_{22}	…	σ_{2N}
…	…	…	…	…
K_N	σ_{N1}	σ_{N2}	…	σ_{NN}

Существуют два способа представления данных в матрице ошибок: с помощью абсолютных количеств и нормализованные по классам [9]. В случае абсолютных количеств элементы матрицы – это количественные результаты распознавания. В случае нормализации по классам сначала формируется матрица на основе абсолютных значений, которая затем нормализуется (путем деления элементов на сумму элементов строки, в которой находится данный элемент). В результате, сумма элементов каждой строки нормализованной матрицы ошибок равняется единице. В случае матрицы ошибок с нормализованными значениями элементы матрицы ошибок показывают вероятность распознавания команды *Ki* как команды *Kj*. Иными словами, с помощью статистической классификации можно получить априорные вероятности распознавания команд. В данной работе предлагается в основном рассматривать матрицу ошибок с абсолютными значениями.

Существуют несколько видов размерностей матриц ошибок: квадратные и прямоугольные. Рассмотрим разные виды матриц ошибок, которые встречаются в научных работах, связанных с распознаванием команд при помощи интерфейса, с учетом того, что общее количество команд равно *n*.

В работе [10], посвященной алгоритму распознавания жестов с помощью акселерометра, можно увидеть результат тестирования, представленный в виде данной квадратной матрицы размером 8×8 (рис. 1). Размер данной матрицы $n \times n$.

В работе [11] представлен результат жестового распознавания в виде прямоугольной матрицы 5×6 (рис. 2). В последнем столбце данной матрицы, в отличие от квадратной матрицы, рассматриваются случаи, когда жест не был распознан в последнем столбце. Размер данной матрицы $n \times (n + 1)$.

	92.1	0.1	2.4	1.9	0.1	2.9	0.6	0.1
	1.6	91.6	1.3	1.1	0.7	0.4	2.7	0.6
	0.5	0	95.9	1.2	0.7	1.7	0	0
	0.3	0	1.6	96.2	0.7	1.1	0	0.1
	0.3	0	1.5	0.6	97.0	0.5	0	0.1
	2.4	0	2.4	2.3	1.0	91.7	0.1	0
	3.4	1.9	2.6	1.7	0.4	0.7	89.2	0
	1.1	0.6	1.7	0.9	0.8	0.7	0	94.2

Рис. 1. Квадратная матрица ошибок размером 8×8 [10]

В работе [12] представлен результат жестового распознавания в виде квадратной матрицы ошибок размером 5×5 со случаем отсутствия команды (рис. 3). Размер данной матрицы $(n + 1) \times (n + 1)$. В общем виде сложность составления такой матрицы заключается в адекватной оценке отсутствия команды, поскольку существуют два совершенно разных случая: когда никакая команда не выполняется, и когда происходит выполнение некоторого действия, которое может быть ложно распознано как команда. Полное определение действий, не являющихся выполнением командами, которые могут привести к ложному распознаванию команд, является нетривиальной задачей. Поэтому данный вид матрицы не сильно распространен, а если и используется, то при ее составлении рассматривается отсутствие действия от оператора.

	Down-Up	Inf.	Up-Down	Up-Pause-Down	Down-Pause-Up	Un-known
Down-Up	**0.94**	0	0	0	0	0.06
Infinity	0.07	**0.83**	0.04	0	0.03	0.03
Up-Down	0	0	**1**	0	0	0
Up-Pause-Down	0	0	0.05	**0.9**	0	0.05
Down-Pause-Up	0	0	0	0	**0.96**	0.04

Рис. 2. Прямоугольная матрица ошибок размером 5×6 [11] со случаем нераспознавания команд

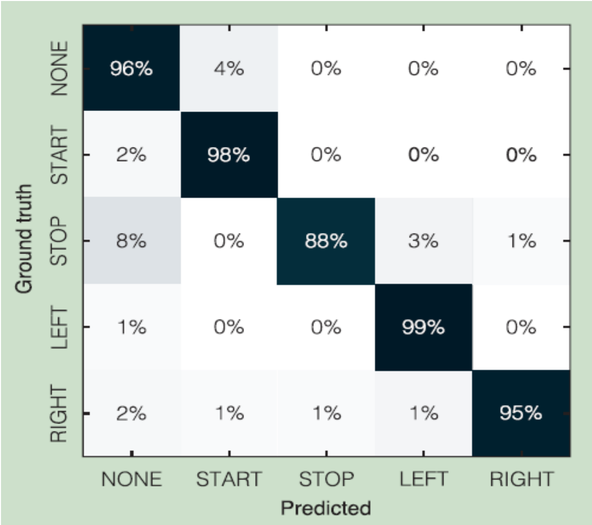


Рис. 3. Квадратная матрица ошибок размером 5×5 со случаем отсутствия команды [12]

На основе анализа полученных матриц проводится оценка работы интерфейса. Рассмотрим возможные метрики, которые могут быть использованы для оценки эффективности работы интерфейса.

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ ИНТЕРФЕЙСА

Оценка эффективности работы интерфейса – численный показатель, который выбирается таким образом, чтобы выполнить наиболее важное требование, предъявленное к интерфейсу [13]. Рассмотрим метрики, которые могут быть использованы для оценки эффективности работы интерфейса, на основе анализа матрицы ошибок размером $n \times (n+1)$. Для этого рассмотрим метрики, которые могут быть использованы для оценки одной команды.

Для оценки одной команды можно использовать метрики, рассчитанные на основе результата бинарной классификации. В случае классификации необходимо определить, что является положительным (positive) классом, а что является отрицательным (negitive) классом [14]. В данном случае в качестве positive рассматривается распознанная команда. А в случае negative – не распознанная команда. Если рассмотреть одну команду, то возможны четыре случая результата классификации (табл. 2):

TP, true positive – количество случаев, когда команда была распознана, когда она была вызвана оператором на исполнение;

FP, false positive – количество случаев, когда команда была распознана, когда она не была вызвана оператором на исполнение;

FN, false negative – количество случаев, когда команда не была распознана, когда она была вызвана оператором на исполнение;

TN, true negative – количество случаев, когда команда не была распознана, когда она не была вызвана оператором на исполнение.

Метрика FP показывает количество ложноположительных срабатываний, т.е. случаев, когда команда была распознана, хотя она не была отдана оператором. Другим названием метрики FP является «ошибка первого» рода.

Метрика FN показывает количество ложноотрицательных срабатываний, т.е. случаев, когда команда была не распознана, хотя она была отдана оператором. Другим названием метрики FN является ошибка «второго рода».

Таблица 2. Классификация случаев распознавания команды

Вызов команды оператором	Результат распознавания команды	
	Распознана (Positive)	Не распознана (Negative)
Команда была вызвана	TP	FN
Команда не была вызвана	FP	TN

Матрица ошибок может быть составлена на основе сбалансированного или несбалансированного набора данных. Несбалансированный набор данных означает, что сумма каждой строки для матрицы ошибок с абсолютными значениями неодинакова. Для несбалансированного набора данных существует множество метрик, например ACCBal, SinACC, AU1U [9].

На практике при вызове команд возможно наличие несбалансированной выборки за счет вызова одних команд чаще, чем других. Также несбалансированная выборка может быть в случае, если команды вызываются оператором равномерно, но при вызове одной команды может быть ложно распознано несколько других команд [15]. Однако в данной работе предлагается сделать допущение о равномерном использовании всех команд и распознавании максимум одной команды при вызове одной команды. И при данном допущении необходимо провести исследование матрицы ошибок только для сбалансированной выборки.

Для сбалансированной выборки существует множество метрик, связанных с оценкой ошибок первого и второго рода, например точность, чувствительность и специфичность, F1-мера, *G*-мера, MTnP [16] и др. Ошибки первого и второго рода являются одинаково критичными в случае распознавания команд, поскольку случаи, когда выполняется команда, которая не была отдана, так и случаи, когда отданная команда не была выполнена, могут привести к критическим последствиям. Таким образом, необходимо рассматривать метрику, которая основана как на ошибках первого рода, так и на ошибках второго рода. Также в данной работе предлагается рассмотреть метрику, которая не учитывает случаи TN, поскольку, если количество рассматриваемых команд будет большое, то значение TN будет значительно больше остальных значений TP, FP и FN. В случае выбора метрики выбор наиболее эффективно работающей команды определяется экстремальным значением, т.е. максимальным или минимальным значением метрики. Например, можно выбрать команду с максимальным значением TP или команду с минимальным значением FP. В данной работе предлагается рассмотреть метрики, максимальное значение которых приводит к наилучшему результату. В табл. 3 представлена сравнительная характеристика различных метрик, где для каждой из них была приведена оценка по шкале от 0 до 3, где 3 – максимальный балл. Балл начисляется метрике в следующих случаях:

если метрика учитывает ошибку первого рода (FP) – чем меньше FP, тем больше значение метрики;

если метрика учитывает ошибку второго рода (FN) – чем меньше FN, тем больше значение метрики;

если метрика не учитывает случаи true negative (TN).

На практике самыми распространенными являются метрики ACC и F1-мера. Метрика ACC учитывает случаи TN, из-за чего высокое значение ACC для команды может быть достигнуто за счет других команд. Метрика F1 является средним гармоническим между TPR и PPV, что позволяет учитывать ошибки первого и второго рода. Метрика *G* является средним геометрическим между TPR и PPV, что также позволяет учитывать ошибки первого и второго рода. Однако в общем виде среднее гармоническое является более пессимистичной оценкой так как согласно неравенству о среднем арифметическом (*A*), геометрическом (*G*) и гармоническом (*H*) (рис. 4) [17]:

$$H \leq G \leq A. \quad (1)$$

Но если предположить, что работа идет с высокоэффективными интерфейсами, где количество ошибок при распознавании будет минимально, и, следовательно, значения TPR и PPV будут максимальными, то оценки среднего геометрического (*G*) и среднего гармонического (*H*) являются схожими. И поэтому в таких случаях можно говорить о том, что оценка на основе метрик F1, *G*-меры и MTnP является схожей.

Таблица 3. Метрики для оценки эффективности работы команды

Название метрики	Формула	Балл
Accuracy (ACC), точность	$\frac{TP+TN}{TP+FP+TN+FN}$	2
True Positive Rate (TPR), чувствительность	$\frac{TP}{TP+FN}$	2
True Negative Rate (TNR), специфичность	$\frac{TN}{TN+FP}$	1
Positive Predictive Value (PPV), прогнозируемое положительное значение	$\frac{TP}{TP+FP}$	2
Negative Predictive Value (NPV), отрицательное прогнозное значение	$\frac{TN}{TN+FN}$	1
Оценка F1	$2 \cdot \frac{PPV \cdot TPR}{PPV+TPR}$	3
Коэффициент корреляции Мэтьюза (MCC)	$\frac{TP \cdot TN - FP \cdot FN}{\sqrt{(TP+FP)(TP+FN)(TN+FP)(TN+FN)}}$	2
Индекс Фаулкса–Мальлоуса, *G*-мера	$\sqrt{PPV \cdot TPR}$	3
MTnP [16]	$TPR \cdot PPV$	3

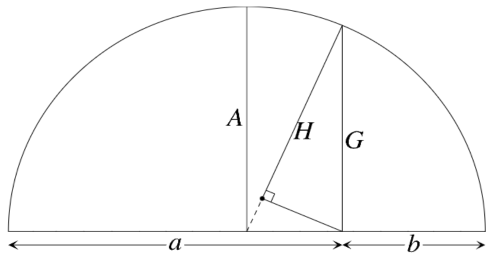


Рис. 4. Сравнение среднего арифметического (A), среднего геометрического (G) и среднего гармонического (H) между a и b [17]

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим второй способ получения информации об интерфейсе человеко-машинного взаимодействия. В случае моделирования результатов происходит определение вида распределения, которому соответствует работа интерфейса, и на основе параметров данного распределения происходит моделирование эксперимента. Существует множество распределений, которые можно использовать для оценки работы интерфейса: нормальное, биномиальное, мультиномиальное [18]. Однако при оценке работы системы одним из наиболее часто используемых способов является метод статистических испытаний проводимых по схеме Бернулли [19–20].

При разработке интерфейсов для робототехнических комплексов требуется провести оценку эффективности их работы, которая определяется как вероятность р – правильного распознавания передаваемых команд. Одним из наиболее часто используемых приемов определения такой вероятности является метод статистических испытаний, проводимых по схеме Бернулли, при которой случайная величина, описывающая результат испытания, может принимать только два значения – «успех» и «неудача». Разработанную систему подвергают испытаниям и оценивают количество успешных распознаваний команд и количество ошибок. При проведении n независимых испытаний вычисляют частоту успехов [21]:

$$p \approx W_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \,, \qquad (2)$$

которая является максимально правдоподобной оценкой вероятности p – правильного распознавания передаваемых команд. Таким образом, задав вероятность распознавания p для каждого интерфейса, можно построить дискриминантную функцию, в которой для всех возможных распознанных комбинаций команд-интерфейсов ставится в соответствие команда, которую нужно выполнить [18].

Еще одним способом является генерация самих матрицы ошибок. В работе [22] для каждого интерфейса определяется параметр Base, который является минимально правильным количеством распознавания команды (TP). А остальные (100 – Base) случаев распределяются случайным образом между остальными состояниями команды. Например, при Base = 90 может быть получена следующая матрица ошибок размера $n \times (n+1)$, где $n = 5$:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 92 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 94 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 95 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 91 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 90 & 8 \end{pmatrix}.$$

Отличие данного способа заключается в возможности учета ошибок первого и второго рода. Данный способ позволяется работать с матрицами ошибок так же, как если бы они были получены в результате проведения сбора статистики.

Моделирование результатов можно провести в случае, если сбор большой статистики является невозможным или слишком затратным. При выборе вида распределения или генерирования матрицы ошибок можно сделать выводы о целесообразности работы алгоритмов взаимодействия и провести их дальнейшую доработку. Как и в случае со сбором статистики, при моделировании результатов проводится оценка эффективности работы интерфейса на основе рассмотренных ранее метрик.

ВЫВОДЫ

В данной статье были рассмотрены различные методики тестирования многоканального человеко-машинного интерфейса, методики на основе сбора статистики и на основе моделирования результатов. При сборе статистики необходимо уделить внимание виду набора данных (сбалансированному или несбалансированному), на основе которого составляется матрица ошибок. Для анализа матриц ошибок были рассмотрены различные метрики, которые могут быть использованы для оценки эффективности работы человеко-машинного интерфейса. Была показана важность учета ошибок первого и второго рода, а также целесообразность использования метрик F1, G-меры и MTnP для высокоэффективных интерфейсов. В случае моделирования результатов было рассмотрено моделирование на основе выбора вида распределения и на основе генерирования матрицы ошибок. Моделирование результатов помогает при отсутствии большой статистики и может быть использовано для обоснования целесообразности использования алгоритмов. Однако после тестирования алгоритмов на основе моделирования необходимо провести итоговое тестирование с участием оператора, чтобы подтвердить целесообразность использования алгоритмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бочаров Н.А., Парамонов Н.Б., Славин О.А., Суминов К.А*. Математические и программные модели задач технического зрения робототехнических комплексов на основе микропроцессоров «Эльбрус» // Труды Института системного программирования РАН, 2022. Т. 34. № 6. С. 85–100. DOI: 10.15514/ISPRAS-2022-34(6)-6.
2. *Бочаров Н.А.* Исследование подходов к унификации бортовых вычислительных комплексов // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2023. № 1 (231). С. 275-287. DOI: 10.18522/2311-3103-2023-1-275-287.
3. *Бочаров Н.А., Парамонов Н.Б., Славин О.А., Янко Д.В*. Оценка перспектив использования вычислительных средств семейства «Эльбрус» при реализации алгоритмов распознавания в современных робототехнических комплексах // Вопросы радиоэлектроники. 2018. № 2. С. 99–105.
4. *Бочаров Н.А., Парамонов Н.Б., Сапачев И.Д.* Реализация алгоритмов группового управления на языке Java в среде ОС «Эльбрус» // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2016. Т. 12. № 1. С. 108–114.
5. *Баранов И.А.* Человеко-машинный интерфейс контроля и управления прикладными программами для ВК на базе микропроцессоров SPARC и «Эльбрус» в АСУТП // Вопросы радиоэлектроники. 2013. Т. 4. № 3. С. 201-212.
6. *Егоров Г.А., Белоногов А.Д., Островский М.А., Рейзман Я.А.* Реализация человеко-машинного интерфейса в интегрированной технологии проектирования автоматизированных систем контроля и управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 7. С. 56–62.
7. *Gridnev A.A., Voznenko T.I., Chepin E.V.* The decision-making system for a multi-channel robotic device control // Procedia computer science, 2018. Vol. 123. P. 149–154. DOI: 10.1016/j.procs.2018.01.024.
8. *Чабан Л.Н.* Методы и алгоритмы распознавания образов в автоматизированном дешифрировании данных дистанционного зондирования. М.: МИИГАиК, 2016. 94 с.
9. *Старовойтов В.В., Голуб Ю.И.* Об оценке результатов классификации несбалансированных данных по матрице ошибок // Информатика, 2021. Т. 18. № 1. С. 61–71. DOI: 10.37661/10.37661/1816-0301-2021-18-1-61-71.
10. *Liu J., Zhong L., Wickramasuriya J., Vasudevan V.* uWave: Accelerometer-based personalized gesture recognition and its applications // Pervasive and Mobile Computing, 2009. Vol. 5. No. 6. Pp. 657–675. DOI: 10.1016/j.pmcj.2009.07.007.
11. *Abdelnasser H., Youssef M., Harras K.A.* Wigest: A ubiquitous wifi-based gesture recognition system // 2015 IEEE conference on computer communications (INFOCOM), IEEE, 2015. Pp. 1472–1480. DOI: 10.1109/INFOCOM.2015.7218525.
12. *Nuzzi C., Pasinetti S., Lancini M., Docchio F., Sansoni G.* Deep learning-based hand gesture recognition for collaborative robots // IEEE Instrumentation & Measurement Magazine, 2019. Vol. 22. № 2. Pp. 44–51. DOI: 10.1109/MIM.2019.8674634.
13. *Мирошник И.В.* Согласованное управление многоканальными системами // Л.: Энергоатомиздат, 1990. 128 с.
14. *Мюллер А., Гвидо С.* Введение в машинное обучение с помощью Python. Руководство для специалистов по работе с данными. СПб.: ООО «Альфа-книга», 2017. 480 с.
15. *Petrova A.I., Voznenko T.I., Chepin E.V.* The impact of artifacts on the BCI control channel for a robotic wheelchair // Advanced Technologies in Robotics and Intelligent Systems. Mechanisms and Machine Science. Springer, Cham, 2020. Vol. 80. Pp. 105–111. DOI: 10.1007/978-3-030-33491-8_12.
16. *Voznenko T.I., Gridnev A.A., Kudryavtsev K.Y., Chepin E.V.* The decomposition method of multichannel control system based on extended bci for a robotic wheelchair // Biologically Inspired Cognitive Architectures Meeting, Springer, Cham, 2019. Pp. 562–567. DOI: 10.1007/978-3-030-25719-4_73.
17. *Cantrell D.W.* Pythagorean means// Math World, 2003. [Электронный ресурс]. URL: https://mathworld.wolfram.com/PythagoreanMeans.html (Дата обращения: 24.07.2023).
18. *Бишоп К.М.* Распознавание образов и машинное обучение. М.: Вильямс, 2020. 960 с.
19. *Zhang L., Wang C., Arinez J., Biller S.* Transient analysis of Bernoulli serial lines: Performance evaluation and system-theoretic properties // IIE Transactions, 2013. Vol. 45. № 5. P. 528–543. DOI: 10.1080/0740817X.2012.721946.
20. *Naebulharam R., Zhang L.* Bernoulli serial lines with deteriorating product quality: performance evaluation and system-theoretic properties // International Journal of Production Research, 2014. Vol. 52. № 5. Pp. 1479–1494. DOI: 10.1080/00207543.2013.847982.
21. *Кибзун А.И., Горяинова Е.Р., Наумов А.В., Сиротин А.Н.* Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами. М.: Физматлит, 2002. 224 с.
22. *Voznenko T.I., Gridnev A.A., Chepin E.V., Kudryavtsev K.Y.* The command interpretation in decomposition method of multi-channel control for a robotic device // Procedia Computer Science, 2020. Vol. 169. Pp. 152–157. DOI: 10.1016/j.procs.2020.02.127.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 4, pp. 243–250

METHODOLOGY OF TESTING MULTI-CHANNEL HUMAN-MACHINE INTERFACE

T.I. Voznenko
Institute of Cyber Intelligence Systems,
National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, 115409, Russia
e-mail: TIVoznenko@mephi.ru

Received September 10, 2023; revised September 10, 2023; accepted September 22, 2023

Currently, the research and development of an effective human-machine interface for robotic complexes is relevant. To increase the efficiency of controlling a robotic complex, several interfaces operating in parallel mode can be used. In particular, there is a multi-channel human-machine interface, which involves the interaction of several interfaces. There are various algorithms for the interaction of several interfaces aimed at selecting a command that needs to be sent to the robotic complex at a given time. To justify the feasibility of the interaction algorithms, it is necessary to apply a methodology for testing a multi-channel human-machine interface. This article considers different approaches to the implementation of this methodology: based on the statistical test method and based on modeling of results. Based on the results of statistics collection, confusion matrices are formed. In this article, different types of confusion matrices are considered, as well as metrics that can be used to evaluate the efficiency of the human-machine interface taking into account type I and II errors. In the case of modeling the results, this article are considered modeling based on the type of distribution and modeling based on generating a confusion matrix. Simulation of results can be used when it is impossible to collect large statistics, to check the feasibility of using interaction algorithms.

Keywords: human-machine interface, multi-channel interface, confusion matrix, human-machine interface testing.

REFERENCES

1. *Bocharov N.A., Paramonov N.B., Slavin O.A., Suminov K.A.* Matematicheskie i programmnye modeli zadach tekhnicheskogo zreniya robototekhnicheskih kompleksov na osnove mikroprocessorov «El'brus». [Mathematical and software models of technical vision tasks of robotic complexes based on «Elbrus» microprocessors]. Proceedings of the Institute for System Programming of the RAS (Proceedings of ISP RAS), 2022. Vol. 34. No. 6. Pp. 85–100 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2022-34(6)-6.

2. *Bocharov N.A.* Issledovanie podhodov k unifikacii bortovyh vychislitel'nyh kompleksov [Study of approaches to the unification of on-board computers]. Izvestiya SFedU. Engineering Sciences, 2023. No. 1(231). Pp. 275–287 (in Russian) DOI: 10.18522/2311-3103-2023-1-275-287.

3. *Bocharov N.A., Paramonov N.B., Slavin O.A., Yanko D.V.* Otsenka perspektiv ispol'zovaniya vychislitel'nykh sredstv semeystva «El'brus» pri realizatsii algoritmov raspoznavaniya v sovremennykh robototekhnicheskikh kompleksakh [Evaluation of the prospects for the use of computing tools of the «Elbrus» family in the implementation of recognition algorithms in modern robotic complexes]. Voprosy radioelektroniki [Questions of radio electronics], 2018. No. 2. Pp. 99–105 (in Russian).

4. *Bocharov N.A., Paramonov N.B., Sapachev I.D.* Realizaciya algoritmov gruppovogo upravleniya na yazyke Java v srede OS «El'brus». [Implementation of algorithms of group control on Java language in OS «Elbrus» environment]. Sovremennye informacionnye tekhnologii i IT-obrazovanie [Modern information technologies and IT education], 2016. Vol. 12. No. 1. Pp. 0108–114 (in Russian).

5. *Baranov I.A.* Cheloveko-mashinnyj interfejs kontrolya i upravleniya prikladnymi programmami dlya VK na baze mikroprocessorov SPARC i «El'brus» v ASUTP. [Human-machine interface for monitoring and managing application programs for computers based on SPARC and Elbrus microprocessors in automated process control systems]. Voprosy radioelektroniki. [Questions of radio electronics], 2013. Vol. 4. No. 3. Pp. 201–212 (in Russian).

6. *Egorov G.A., Belonogov A.D., Ostrovskij M.A., Rejzman Ya.* A. Realizaciya cheloveko-mashinnogo interfejsa v integrirovannoj tekhnologii proektirovaniya avtomatizirovannyh sistem kontrolya i upravleniya. [Implementation of human-machine interface in integrated technology for designing automated monitoring and control systems]. Mekhatronika, avtomatizaciya, upravlenie. [Mechatronics, automation, control], 2011. No. 7. Pp. 56–62 (in Russian).

7. *Gridnev A.A., Voznenko T.I., Chepin E.V.* The decision-making system for a multi-channel robotic device control. Procedia computer science, 2018. Vol. 123. Pp. 149–154. DOI: 10.1016/j.procs.2018.01.024.

8. *Chaban L.N.* Metody i algoritmy raspoznavaniya obrazov v avtomatizirovannom deshifrirovanii dannyh distancionnogo zondirovaniya. [Methods and algorithms for pattern recognition in automated interpretation of

remote sensing data]. Moscow, MIIGAiK Publ., 2016. 94 p. (in Russian).

9. *Starovoitov V.V., Golub Yu.I.* Ob ocenke rezul'tatov klassifikacii nesbalansirovannyh dannyh po matrice oshibok [About the confusion-matrix-based assessment of the results of imbalanced data classification]. Informatics, 2021. Vol. 18. No. 1. Pp. 61–71 (in Russian) DOI: 10.37661/10.37661/1816-0301-2021-18-1-61-71.

10. *Liu J., Zhong L., Wickramasuriya J., Vasudevan V.* uWave: Accelerometer-based personalized gesture recognition and its applications. Pervasive and Mobile Computing, 2009. Vol. 5. No. 6. Pp. 657–675. DOI: 10.1016/j.pmcj.2009.07.007

11. *Abdelnasser H., Youssef M., Harras K.A.* Wigest: A ubiquitous wifi-based gesture recognition system. 2015 IEEE conference on computer communications (INFOCOM), IEEE, 2015. Pp. 1472–1480. DOI: 10.1109/INFOCOM.2015.7218525

12. *Nuzzi C., Pasinetti S., Lancini M., Docchio F., Sansoni G*. Deep learning-based hand gesture recognition for collaborative robots. IEEE Instrumentation & Measurement Magazine, 2019. Vol. 22. No. 2. Pp. 44–51. DOI: 10.1109/MIM.2019.8674634

13. *Miroshnik I.V.* Soglasovannoe upravlenie mnogo-kanal'nymi sistemami. [Coordinated control of multi-channel systems]. Leningrad, Energoatomizdat Publ., 1990. 128 p. (in Russian).

14. *Müller A.C., Guido S.* Vvedenie v mashinnoe obuchenie s pomoshch'yu Python. Rukovodstvo dlya specialistov po rabote s dannymi. [Introduction to machine learning with Python: a guide for data scientists]. Saint Petersberg, OOO Al'fa-kniga Publ., 2016. 398 p. (in Russian).

15. *Petrova A.I., Voznenko T.I., Chepin E.V.* The impact of artifacts on the BCI control channel for a robotic wheelchair. Advanced Technologies in Robotics and Intelligent Systems. Mechanisms and Machine Science. Springer, Cham, 2020. Vol. 80. Pp. 105–111. DOI: 10.1007/978-3-030-33491-8_12.

16. *Voznenko T.I., Gridnev A.A., Kudryavtsev K.Y., Chepin E.V.* The decomposition method of multichannel control system based on extended bci for a robotic wheelchair. Biologically Inspired Cognitive Architectures Meeting, Springer, Cham, 2019. Pp. 562–567. DOI: 10.1007/978-3-030-25719-4_73.

17. *Cantrell D.W.* Pythagorean means // Math World, 2003. Available at: https://mathworld.wolfram.com/PythagoreanMeans. html (accessed 24.07.2023).

18. *Bishop C.M.* Raspoznavanie obrazov i mashinnoe obuchenie. [Pattern Recognition and Machine Learning]. Moscow: Vil'yams Publ., 2006. 738 p. (in Russian).

19. *Zhang L., Wang C., Arinez J., Biller S*. Transient analysis of Bernoulli serial lines: Performance evaluation and system-theoretic properties. IIE Transactions, 2013. Vol. 45. No. 5. Pp. 528–543. DOI: 10.1080/0740817X.2012.721946.

20. *Naebulharam R., Zhang L.* Bernoulli serial lines with deteriorating product quality: performance evaluation and system-theoretic properties. International Journal of Production Research, 2014. Vol. 52. No. 5. Pp. 1479–1494. DOI: 10.1080/00207543.2013.847982.

21. *Kibzun A.I., Goryainova E.R., Naumov A.V., Sirotin A.N.* Teoriya veroyatnostei i matematicheskaya statistika: bazovyi kurs s primerami i zadachami. [Probability theory and mathematical statistics. Basic course with examples and tasks]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002. 224 p. (in Russian).

22. *Voznenko T.I., Gridnev A.A., Chepin E.V., Kudryavtsev K.Y.* The command interpretation in decomposition method of multi-channel control for a robotic device. Procedia Computer Science, 2020. Vol. 169. Pp. 152–157. DOI: 10.1016/j.procs.2020.02.127.