

<https://vestnikmephi.elpub.ru>

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ»



Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ»

Том 12 № 5 2023 СЕНТЯБРЬ - ОКТЯБРЬ

Основан в июле 2012 г.
Выходит 6 раз в год
ISSN: 2304-487X

Главный редактор
М.Н. Стриханов

Редакционная коллегия:

А.В. Аксёнов, Pavel Bedrikovetsky,
А.М. Гальпер, С.Г. Гаранин, Vladimir S. Gerjikov, Н.Н. Евтихийев,
Yalchin Efendiev, Alexei I. Zhurov, Н.П. Калашников, Н.И. Каргин,
С.А. Кащенко, О.Н. Крохин,
Н.А. Кудряшов (*заместитель главного редактора*),
Raytcho Lazarov, О.В. Нагорнов, А.Д. Полянин,
В.В. Цегельник, Б.Н. Четверушкин,
М.А. Чмыхов (*ответственный секретарь*), William E. Schiesser

Выпускающий редактор: Н.В. Ермолаева

Адрес редакции: 115409, Москва, Каширское ш., 31,
Вестник НИЯУ МИФИ
Интернет: <https://vestnikmephi.elpub.ru>
Электронная почта: vestnik@mephi.ru

Москва
НИЯУ МИФИ

СОДЕРЖАНИЕ

Том 12, № 5, 2023

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

- Экспериментальное исследование надмолекулярной структуры сывороточного альбумина** 255
А.В. Волкова, М.Э. Бузоверя
- Комптоновское рассеяние космического гамма-излучения на электронах в радиационных поясах Земли** 262
Д.Н. Морозова, А.В. Кузнецов, А.Г. Майоров, К.С. Челидзе
-

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

- Радиационные испытания фантома мелкого лабораторного животного, изготовленного методами трехмерной печати** 268
А.А. Григорьева, А.А. Булавская, Е.А. Бушмина, В.А. Куйвалайнен, И.А. Милойчикова, С.Г. Стучебров
-

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

- Точные решения и редукции нестационарных уравнений математической физики типа Монжа – Ампера** 276
А.Д. Полянин
-

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

- Оценка геометрических отклонений между МРТ- и КТ-изображениями при планировании радиохирургии** 289
Б.Д. Заволович, И.И. Банникова, А.В. Далечина, В.В. Костюченко, П.Н., Рябов, А.В. Голанов
- Применение математических преобразований для определения профиля медицинского электронного пучка** 299
М.А. Банищикова, А.А. Булавская, А.А. Григорьева, И.А. Милойчикова, С.Г. Стучебров
-

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

- Точные решения дифференциальных, интегральных, функциональных и других математических уравнений** 306
А.В. Аксенов

Contents

Volume 12, Number 5, 2023

THEORETICAL AND EXPERIMENTAL PHYSICS

- Experimental study of the supramolecular serum albumin structure** 255
A.V. Volkova, M.E. Buzoverya
- Compton scattering of cosmic gamma radiation by electrons in the earth's radiation belts** 262
D.N. Morozova, A.V. Kuznetsov, A.G., Mayorov, K.S. Chelidze
-

TECHNICAL PHYSICS

- Radiation testing of a small laboratory animal phantom created by fused filament fabrication** 268
A.A. Grigorieva, A.A. Bulavskaya, E.A. Bushmina, V.A. Kuyvalaynen, I.A. Miloichikova, S.G. Stuchebrov
-

MATHEMATICAL MODELS AND NUMERICAL METHODS

- Exact solutions and reductions of unsteady equations of mathematical physics of the Monge–Ampere type** 276
A.D. Polyanin
-

APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

- Assessment of geometrical discrepancies between MRT- and CT-images in radiosurg** 289
B.D. Zavolovich, I. I. Bannikova, A.V. Dalechina, V.V. Kostjuchenko, P.N. Ryabov, A.V. Golanov
- Application of mathematical transformations for the medical electron beam profile determination** 299
M.A. Banshchikova, A.A. Bulavskaya, A.A. Grigorieva, I.A. Miloichikova, S.G. Stuchebrov
-

BRIEF MESSAGES

- Exact solutions of differential, integral, functional and other mathematical equations** 306
A.V. Aksenov

УДК 539.2

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАДМОЛЕКУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ СЫВОРОТОЧНОГО АЛЬБУМИНА

А.В. Волкова^{1,*}, М.Э. Бузоверя^{1,2,**}

¹СарФТИ НИЯУ МИФИ, Саров, 607189, Россия

²ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», Саров, 607188, Россия

*e-mail: avv3031@gmail.com

**e-mail: mebuzoverya@gmail.com

Поступила в редакцию: 30.09.2023

После доработки: 08.11.2023

Принята к публикации: 14.11.2023

В работе представлены результаты экспериментальных исследований водно-солевых растворов сывoroточного альбумина человека (САЧ), который рассматривается как аналог биожидкостей организма. Наблюдаемые структурные эффекты в дегидратированных пленках рассмотрены с учетом концепции надмолекулярной организации полимерного тела и его многоуровневой структуры. Для изучения образцов была разработана и опробована единая комплексная методика, включающая в себя исследования надмолекулярной структуры (НМС) всей капли на оптическом уровне (микроуровень) и морфологии глобулярных структурных элементов альбуминовой пленки (наноуровень) методом атомно-силовой микроскопии (АСМ). Обработка фаций САЧ с помощью программно-аппаратного комплекса «Морфо» позволила установить зависимости НМС фации от концентрации альбумина. На оптическом уровне удалось наблюдать сложноступенчатый механизм изменения надмолекулярной структуры водно-солевых фаций альбумина. Исследование показало, что с повышением концентрации белка площадь области кристаллизации дендритов падает. При концентрации 10 % САЧ происходит структурный переход: дендритно-фрактальная морфология сменяется системой трещин и отдельных конкреций. Методом атомно-силовой микроскопии была выявлена глобулярная структура белковой матрицы. Проведена оценка размеров единичной глобулы и белковых ассоциатов, и плотности их упаковки в зависимости от концентрации.

Ключевые слова: сывoroточный альбумин, надмолекулярная структура, оптическая микроскопия, атомно-силовая микроскопия.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.284

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время все больше исследователей рассматривают биологические объекты не только в рамках классических методов, но и с точки зрения современной физики. Одной из областей повышенного интереса является изучение биологических структур в твердом состоянии. Поскольку биожидкости (БЖ) являются важной диагностической субстанцией, исследования проводятся, в первую очередь, с целью усовершенствования и разработки новых и простых методик диагностики патологических состояний организма [1]. Для диагностики широкого круга заболеваний используется внешний вид фации – пленки, которая образуется при дегидратации биожидкости. Специфика структуры фации определяется присутствующими в биожидкости веществами, комплексом их каче-

ственных и количественных параметров. В области морфологического анализа БЖ на настоящий момент эмпирический поиск маркеров опережает развитие теории структурообразования белковых систем. Большое количество экспериментального материала и описательный подход позволяют интерпретировать структуру фаций. В основном, при анализе изображений БЖ и их обработке рассматриваются частные задачи, относящиеся к отдельным структурным элементам или фрагментам фаций [2–5]. В работе [6] показано, что такие системные признаки фаций, как ориентация трещин, форма и слитность конкреций, ширина белковой зоны и др., также имеют большое диагностическое значение. В настоящее время интерес к количественной обработке фаций БЖ и поиску количественных маркеров не прекращается [7–9].

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАДМОЛЕКУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ СЫВОРОТОЧНОГО АЛЬБУМИНА

Биологические жидкости являются многокомпонентными системами и содержат в себе различные растворенные вещества. Именно они, а также состояние белка определяют структуру пространственного расположения элементов фазии (пленки), которая образуется при гидратации. Все особенности структуры многокомпонентных систем фиксируются на фазии. К примеру, основными элементами БЖ, имеющих высокую концентрацию белка (в норме от 65–80 г/л), таких как сыворотка крови, являются трещины и конкреции. Для таких фазий БЖ как слюна, ликвор, слеза и др. (концентрация белка ниже 65 г/л) структурные элементы – дендриты, фракталы, включения, трещины. Т.е. концентрация белка является одним из основных факторов, определяющих паттерн фазий [10]. Следовательно, при изменении концентрации белка в растворителе получается набор различных паттернов БЖ.

Помимо практической ценности существует и фундаментальный аспект данной проблемы. Современные исследователи уделяют все больше внимания процессам, определяющим механизмы формирования структур БЖ [11, 12]. Молекулы белка представляют собой природные наночастицы, которые обладают всеми свойствами наносистем. Получение наноматериала (в данном случае пленки) основано на принципах самоорганизации структур в объеме и на границах раздела фаз. В настоящее время в исследовании материалов разной природы используется многоуровневый подход, особенно ярко выраженный в полимерных системах [13]. Для выявления закономерностей структурообразования необходимо определение количественных параметров БЖ на разных масштабных уровнях.

Цель работы – экспериментальное исследование водно-солевых растворов сывороточного альбумина, который рассматривается как аналог БЖ, и оценка возможности получения количественных параметров фазий на микро- и наноуровне.

ОБРАЗЦЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Объектами исследования являлись растворы сывороточного альбумина человека (САЧ) с разным содержанием белка (от 2 до 10 %). Растворы изготавливались путем разбавления 20 %-ного водного раствора альбумина 0.9 %-ным раствором NaCl до нужной концентрации, и далее пробы подготавливали для мик-

роскопии методом открытой дегидратации на стеклянной подложке.

На микроуровне образцы исследовали на программно-аппаратном комплексе «Морфо» на основе оптического микроскопа «Полам» с универсальным пакетом программ для обработки изображений любых БЖ с получением как интегральных, так и детальных морфологических параметров (собственная разработка лаборатории СарФТИ НИЯУ МИФИ) [14]. В настоящей работе рассчитывался интегральный параметр – площадь зоны дендритно-фрактальных структур.

АСМ-исследования проводились на сканирующем зондовом микроскопе Solver Next производства НТ МДТ (г. Зеленоград) в полуконтактном режиме. При анализе использовалась комплексная методика АСМ исследования: мода топографии и фазовый контраст, силовая спектроскопия на воздухе с использованием зонда марки NSG10/TiN с полем сканирования от 90×90 до 0.3×0.3 мкм. Обработка АСМ-изображений проводилась с помощью штатного программного обеспечения ImageAnalysisP9.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Согласно ключевому положению структурной механики, свойства и структура полимерного тела определяются на молекулярном уровне, а реализуются – на надмолекулярном [15]. Поскольку белки являются природными полимерами, данную концепцию надмолекулярной системной организации можно применить для их исследования. Для всех высокомолекулярных соединений характерно наличие надмолекулярных структур (НМС), представление о которых прочно вошло в физику полимеров. В работах [16–17], отмечается значительная роль НМС в функционировании и организации биосистем.

НМС полимерного тела включает в себя внутреннюю структуру и характер взаимодействия между элементами, образующими макроскопическую структуру полимерного тела, и их взаимное расположение. Как отмечалось, свойства полимеров определяются их молекулярным строением, но проявляются через последующие уровни их надмолекулярной организации. Говоря об уровне, необходимо указывать шкалу масштабов НМС [18].

В настоящей работе процесс структурообразования исследовался на разных уровнях надмолекулярной организации.

На оптическом уровне исследовалась надмолекулярная структура всей капли (микроуровень), а на атомно-силовом микроскопе – морфология глобулярных структурных элементов альбуминовой пленки (наноуровень).

Известно, что структура пленок, получаемых из растворов полимеров, и их свойства определяются самой структурой раствора [16]. В работах [19–20] было дано объяснение особенностей структурообразования альбумина в диапазоне

концентраций 0.02–10 %. Структура САЧ концентрации от 0.2–2 % подобна структуре слюны, мочи, слезы. Структура САЧ 10–20 % подобна структуре фаций сыворотки крови.

ОПТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

На рис. 1 приведены типичные структуры дегидратированной капли САЧ разной концентрации.

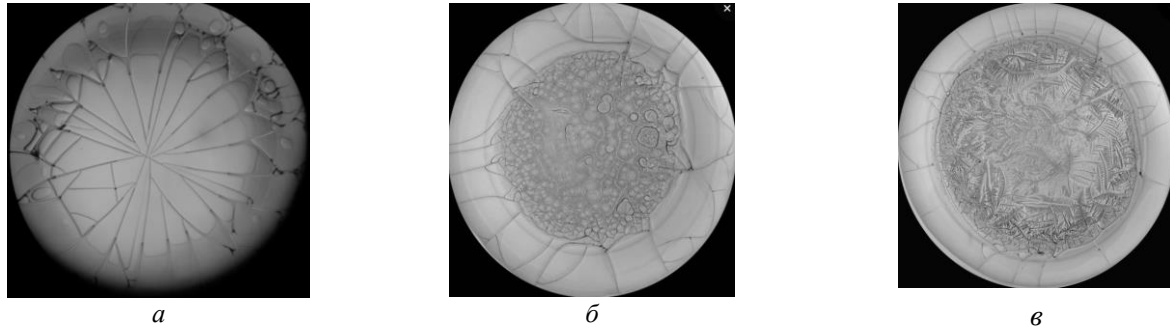


Рис. 1. Фация капли САЧ, $\times 25$: а – 10 %; б – 8 %; в – 2 %

В данной работе за эталонную (исходную) фацию была принята фация 10 % раствора альбумина, поскольку ее структура морфологически близка к структуре сыворотки крови «норма». С изменением концентрации растворителя в системе удалось наблюдать сложно-ступенчатый механизм изменения надмолекулярной структуры водно-солевых фаций альбумина.

Для фаций водно-солевого раствора САЧ концентрации от 2.0–9.5 % характерно наличие ярко выраженных зон из структур различной сложности и плотности упаковки (см. рис. 1). Для низких концентраций белка характерны рыхлая центральная часть фации из развернутых форм белковых ассоциатов и стекловидная краевая зона. Начиная с концентрации 6–8 %, появляются надмолекулярные образования глобулярного типа, структура центра капли уплотняется. Обработка фаций с помощью программно-аппаратного комплекса «Морфотест» показывает, что с повышением концентрации белка

площадь области кристаллизации дендритов падает (рис. 2). При достижении 10 %-й концентрации наблюдается структурный переход: исчезает зона дендритно-фрактальных структур, образуются отдельности с конкрециями и система трещин (см. рис. 1,а).



Рис. 2. Зависимость площади области кристаллизации дендритов от концентрации САЧ

АСМ-ИССЛЕДОВАНИЕ

Общим структурным элементом капли САЧ разной концентрации является стекловидная матрица. Строение пленок БЖ на наноуровне до недавнего времени не исследовалось с достаточной тщательностью. Возможно, это связано с тем, что по результатам многочисленных исследований поверхность пленок на оптическом

уровне получалась довольно гладкой и однородной.

В настоящей работе методом АСМ была визуализирована стекловидная часть пленок. На сканах $90 \times 90 - 10 \times 10$ мкм структура для всех концентраций представляет собой бесструктурную матрицу с единичными вертикальными пиками разной величины, формы и количеством в зависимости от концентрации (рис. 3).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАДМОЛЕКУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ СЫВОРОТОЧНОГО АЛЬБУМИНА



Рис. 3. АСМ-скан фации САЧ, размер 10×10 мкм, содержание альбумина: *a* – 2 %; *б* – 1 0%

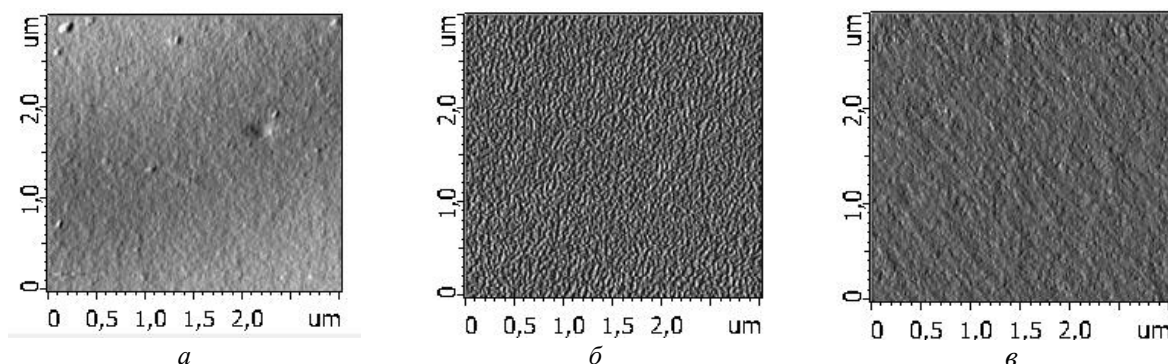


Рис. 4. АСМ-скан, фазовый контраст 3×3 мкм: *a* – 2 % САЧ; *б* – 6 % САЧ; *в* – 10 % САЧ

Тонкая глобулярная структура начинает выявляться на сканах 3×3 мкм и меньше. Наиболее контрастные снимки бесструктурной матрицы были получены в режиме «фазового контраста» (рис. 4).

Для 2 % САЧ характерна неоднородная структура. На фоне слабо развитой глобулярной структуры выделяются крупные ассоциаты. Для 6 %-ного раствора САЧ наблюдалось более четкое проявление глобул и формирование коротких цепочек. Для концентрации 10 % наблюдается структура с наиболее плотной упаковкой структурных элементов.

Анализ АСМ-изображений показал, что с изменением концентрации САЧ меняются раз-

меры и плотность упаковки белковых ассоциатов на наноуровне (табл. 1).

Таблица 1. Размеры ассоциатов глобул для пленок разной концентрации САЧ, размер скана 3×3 мкм

Концентрация раствора САЧ	2 %	6 %	10 %
Размер ассоциатов, нм	50–100	25–50	25–30

На скане 0.3×0.3 мкм 10 %-ного раствора удалось измерить размер единичной глобулы, который составил 2 нм (рис. 5).

Таким образом, первичной структурной единицей является глобула. В результате ассоциации глобул образуются более сложные НМС.

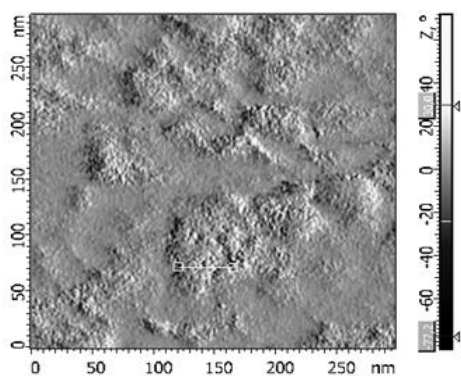
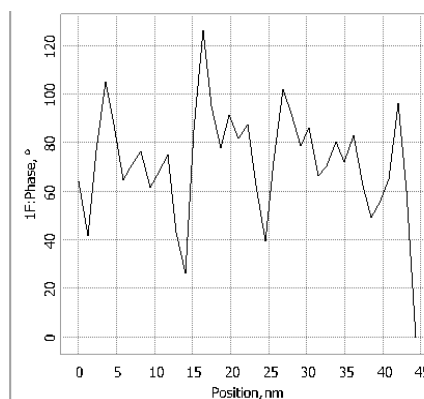


Рис. 5. АСМ-скан САЧ 10 % с профилем сечения, фазовый контраст, 0.3×0.3 мкм



Сопоставление результатов оптических и АСМ-исследований взаимно дополняет друг друга и дает более полное представление о механизмах структурообразования фаций БЖ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате исследования проведена количественная параметризация фаций водно-солевого раствора концентрации 2–10 % САЧ:

- на микроуровне:
 - проведена количественная обработка всей дегидратированной капли САЧ водно-солевого раствора концентрации 2–10 % САЧ;
 - получена зависимость площади дендрито-фрактальных структур от концентрации САЧ;
 - установлено, что с увеличением концентрации от 2 до 10 % площадь этой зоны фации падает; при 10 % САЧ наблюдается структурный переход;
- на наноуровне:
 - выявлена глобулярная структура стекло-видной части белковых пленок/фаций;
 - измерен размер элементарной глобулы;
 - показано влияние концентрации белка на размеры и плотность упаковки глобулярных ассоциатов в пленках САЧ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чуракова Ю.А., Антонова А.А. Микросталлография как стандартный метод оценки состояния слюны // Тихоокеанский медицинский журнал, 2020. № 2 (80). С. 79–81.
2. Петров В. О. Автоматизация анализа растровых изображений твердой фазы биологической жидкости медико-биологических препаратов: Автореф. дис. канд. техн. наук. Волгоград, 2009. 150 с.
3. Быстревская А.А., Деев Л.А. Морфометрия фаций слезной жидкости у здоровых людей различных возрастных групп // Материалы III Всерос. научно-практической конф. «Функциональная морфология биологических жидкостей». М., 2004. С. 16–17.
4. Петров В.О., Камаев В.А., Поройский С.В. Алгоритм текстурной сегментации растровых изображений при решении прикладных задач медико-биологического анализа // Современные проблемы науки и образования. 2009. № 6–3. С. 105–110.
5. Тарасевич Ю.Ю. Процессы самоорганизации в высыхающих каплях многокомпонентных жидкостей: эксперименты, теории, приложения. Краткий обзор публикаций за 2010–2012 годы // Материалы II Международной конференции «Процессы самоорганизации в высыхающих каплях многокомпонентных жидкостей: эксперименты, теории, приложения». Астрахань: Издательский дом «Астраханский университет», 2012. С. 231–239.
6. Шабалин В.Н., Шатохина С.Н. Морфология биологических жидкостей человека. М.: Хризостом, 2001. 304 с.
7. Шабалин В.В. Биофизические механизмы формирования твердофазных структур биологических жидкостей человека: Автореф. дис. д-ра биол. наук. ФГБНУ Ин-т физиологии им. И.П. Павлова РАН. СПб., 2018. 45 с.
8. Чиканова Е.С., Федосеев В.Б., Голованова О.А. Биожидкости и фракталы: количественный критерий самоорганизации капли // Вестник Омского университета, 2015. № 4 (78). С. 45–49.
9. Василенко А.С. Методы анализа фаций биологических жидкостей (обзор литературы) // Вестник студенческого научного общества ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», 2021. С. 28.
10. Бузовера М.Э., Щербак Ю.П., Шишпор И.В. Количественная оценка микроструктурной неоднородности фаций биожидкостей // Журнал технической физики, 2014. Т. 84. №. 10. С. 133–138.
11. Рожков С.П., Горюнов А.С., Крупнова М.Ю. Сопряженность конформационных и фазовых состояний сывороточного альбумина в солевых растворах по данным метода ЭПР спиновых меток // Труды Карельского научного центра Российской академии наук, 2020. № 11. С. 38–53.
12. Гордеева В.Ю. Теоретическое исследование влияния термо- и концентрационно-капиллярных эффектов на динамику тонкого слоя испаряющейся полярной жидкости: Дисс. канд. физ.-мат. наук, Пермь, 2014. 154 с.
13. Андриевский Р.А. Основы наноструктурного материаловедения. М.: Бином, 2012. 252 с.
14. Каталог Ярмарки инновационных медицинских высокотехнологичных проектов «Атоммед-2008». Саров: ФГОУ ВПО СарФТИ, 2008.
15. Гуль В.Е. Структура и прочность полимеров. М.: Химия, 1978. 328 с.
16. Кудряшова Е.В., Гладилин А.К., Левашов А.В. Белки в надмолекулярных ансамблях: исследование структуры методом разрешенно-временной флуоресцентной анизотропии // Успехи биологической химии, 2002. Т. 42. С. 257–294.
17. Рожков С.П., Горюнов А. С. Кластеризация белковых молекул в водно-солевых растворах лизоцима // Ученые записки Петрозаводского государственного университета, 2012. №. 4. С. 13–18.
18. Тагер А.А. Физикохимия полимеров. М.: Химия, 1978. 544 с.
19. Бузовера М.Э., Шишпор И.В., Щербак Ю.П. Возможности использования комбинированных оптических и АСМ исследований альбумина // Журнал технической физики, 2018. Т. 88. №. 2. С. 300–305.
20. Бузовера М.Э., Шишпор И.В., Щербак Ю.П. Экспериментальное исследование микроструктур фаций сывороточного альбумина. // Журнал технической физики, 2012. Т. 82. Вып. 9. С.87–94.

EXPERIMENTAL STUDY OF THE SUPRAMOLECULAR SERUM ALBUMIN STRUCTURE

A.V. Volkova^{a,*}, M.E. Buzoverya^{a,b,**}

^aSarPhTI MEPhI, Sarov, 607189, Russia

^bFSUE RFNC-VNIIEF, Sarov, 607188, Russia

*e-mail: avv3031@gmail.com

**e-mail: mebuzoverya@gmail.com

Received September 30, 2023; revised November 08, 2023; accepted November 14, 2023

The paper presents the results of experimental studies of water-salt solutions of serum albumin (SAC), which is considered as an analogue of body fluids. The observed structural effects in dehydrated films are considered taking into account the concept of the supramolecular organization of the polymer body and its multilevel structure. To study the samples, a single complex technique was developed and tested, including studies of the supramolecular structure of the entire drop at the optical level (microlevel) and the morphology of the globular structural elements of the albumin film (nanolevel) by atomic force microscopy (AFM). Processing of SAC facies with the help of the Morpho hardware and software complex allowed us to establish the dependence of the NM facies on the albumin concentration. At the optical level, it was possible to observe a complex-step mechanism of changes in the supramolecular structure of water-salt facies of albumin. The study showed that with an increase in protein concentration, the area of the crystallization area of dendrites decreases. At a concentration of 10 % SAC, a structural transition occurs: the dendritic-fractal morphology is replaced by a system of cracks and individual nodules. The globular structure of the protein matrix was revealed by atomic force microscopy. The size of a single globule and protein associates, and the density of their packaging, depending on the concentration, were estimated.

Keywords: serum albumin, supramolecular structure, optical microscopy, atomic force microscopy.

REFERENCES

1. Churakova Y.A., Antonova A.A. Mikrokristallografiya kak standartnyj metod ocenki sostoyaniya slyuny [Microcrystallography as a standard method for assessing the state of saliva]. Pacific Medical Journal, 2020. No. 2 (80). Pp. 79–81 (in Russian).
2. Petrov V.O. Avtomatizatsiya analiza rastrovyyh izobrazhenij tverdoj fazy biologicheskoy zhidkosti mediko-biologicheskikh preparatov [Automation of the analysis of raster images of the solid phase of biological fluid of biomedical preparations. Avtoref. dis. kand. tekhn. nauk]. Volgograd, 2009. 150 p.
3. Bystrevskaya A.A., Deev L.A. Morfometriya facij slyoznoj zhidkosti u zdorovyh lyudej razlichnyh vozrastnyh grupp [Morphometry of lacrimal fluid facies in healthy people of various age groups]. Materiali III Vse-ros. nauchno-prakticheskoi konf. «Funktsionalnaya morfologiya biologicheskikh zhidkostey» [Materials of the III All-Russian Scientific and practical conference. «Functional morphology of biological fluids»]. Moscow, 2004. Pp. 16–17 (in Russian).
4. Petrov V.O., Kamaev V.A., Poroyskiy S.V. Algoritm teksturnoj segmentatsii rastrovyyh izobrazhenij pri reshenii prikladnyh zadach mediko-biologicheskogo analiza [Algorithm of textural segmentation of raster images in solving applied problems of biomedical analysis]. Modern problems of science and education. 2009. No. 6–3. Pp. 105–110 (in Russian).
5. Tarasevich Y.Y. Processy samoorganizatsii v vy-syhayushchih kaplyakh mnogokomponentnyh zhidkostey: eksperimenty, teorii, prilozheniya. Kratkij obzor publikacij za 2010–2012 gody [Self-organization processes in drying drops of multicomponent liquids: experiments, theories, applications. A brief review of publications for 2010–2012]. Materiali II Mezhdunarodnoi konferentsii «Protseessi samoorganizatsii v visikhayushchikh kaplyakh mnogokomponentnykh zhidkostey: eksperimenty, teorii, prilozheniya» [Proceedings of the II International Conference «Self-organization processes in drying drops of multicomponent liquids: experiments, theories, applications»]. Astrakhan, Izdatel'skij dom «Astrahanskij universitet» Publ., 2012. Pp. 231–239 (in Russian).
6. Shabalin V.N., Shatokhina S.N. Morfologiya biologicheskikh zhidkostey cheloveka [Morphology of human biological fluids]. Moscow, Hrizostom Publ., 2001. 304 p.
7. Shabalin V.V. Biofizicheskie mekhanizmy formirovaniya tverdogaznykh struktur biologicheskikh zhidkostey cheloveka [Biophysical mechanisms of formation of solid-phase structures of human biological fluids. Abstract. dis. doct. biol. sciences]. Saint Petersburg, FGBNU Pavlov Institute of Physiology of the Russian Academy of Sciences Publ., 2018. 45 p.

8. Chikanova E.S., Fedoseev V.B., Golovanova O.A. Biozhidkosti i fraktaly: kolichestvennyj kriterij samoorganizacii kapli [Bio-liquids and fractals: quantitative criterion of self-organization of droplets]. Bulletin of Omsk University, 2015. No. 4 (78). Pp. 45–49 (in Russian).
9. Vasilenko A.S. Metody analiza facij biologicheskikh zhidkostej (obzor literatury) [Methods of analysis of facies of biological fluids (literature review)]. Bulletin of the Student Scientific Society of the Donetsk National University, 2021. P. 28 (in Russian).
10. Buzoverya M.E., Shcherbak Y.P., Shishpor I.V. Kolichestvennaya ocenka mikrostrukturnoj neodnorodnosti facij biozhidkostej [Quantitative assessment of microstructural heterogeneity of biofluid facies]. Journal of Technical Physics, 2014. Vol. 84. No. 10. Pp. 133–138 (in Russian).
11. Rozhkov S.P., Goryunov A.S., Krupnova M.Y. Sopryazhennost' konformacionnyh i fazovyh sostoyanij syvorotochnogo al'bmina v solevykh rastvorah po dannym metoda EPR spinovyh metok [Conjugacy of conformational and phase states of serum albumin in salt solutions according to the EPR method of spin labels]. Trudy Karelskogo nauchnogo centra Rossijskoj akademii nauk [Proceedings of the Karelian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences], 2020. No. 11. Pp. 38–53 (in Russian).
12. Gordeeva V.Y. Teoreticheskoe issledovanie vliyaniya termo-i koncentracionno-kapillyarnykh effektov na dinamiku tonkogo sloya isparayushchejsya polarnoj zhidkosti [Theoretical study of the influence of thermo- and concentration-capillary effects on the dynamics of a thin layer of evaporating polar liquid. Diss. candid. phys.-math. sci.]. Perm', 2014. 154 p.
13. Andrievsky R.A. Osnovy nanostrukturnogo materialovedeniya [Fundamentals of nanostructured materials science]. Moscow, Binom Publ., 2012. 252 p.
14. Katalog YArmaki innovacionnyh medicinskih vysokotekhnologichnykh proektov «Atommed-2008» [Catalogue of the Fair of Innovative medical high-tech projects «Atommed-2008»]. Sarov, FGOU VPO «SarFTI», 2008 (in Russian).
15. Gul V.E. Struktura i prochnost' polimerov [Structure and strength of polymers]. Moscow, Chemistry Publ., 1978. 328 p.
16. Kudryashova E.V., Gladilin A.K., Levashov A.V. Belki v nadmolekulyarnykh ansamblyah: issledovanie struktury metodom razreshenno-vremennoj fluorescentnoj anizotropii [Proteins in supramolecular ensembles: a study of the structure by the method of time-resolved fluorescent anisotropy]. Advances in biological chemistry, 2002. Vol. 42. Pp. 257–294 (in Russian).
17. Rozhkov S.P., Goryunov A.S. Klasterizaciya belkovykh molekul v vodno-solevykh rastvorah lizocima [Clustering of protein molecules in aqueous salt solutions of lysozyme]. Scientific notes of Petrozavodsk State University, 2012. No. 4. Pp. 13–18 (in Russian).
18. Tager A.A. Fizikohimiya polimerov [Physical chemistry of polymers]. Moscow, Chemistry Publ., 1978. 544 p.
19. Buzoverya M.E., Shishpor I.V., Shcherbak Y.P. Vozmozhnosti ispol'zovaniya kombinirovannykh opticheskikh i ASM issledovanij al'bmina [Possibilities of using combined optical and AFM studies of albumin]. Journal of Technical Physics, 2018. Vol. 88. No. 2. Pp. 300–305 (in Russian).
20. Buzoverya M.E., Shishpor I.V., Shcherbak Y.P. Eksperimental'noe issledovanie mikrostruktur facij syvorotochnogo al'bmina. [Experimental study of microstructures of serum albumin facies]. Journal of Technical Physics, 2012. Vol. 82. Is. 9. Pp. 87–94 (in Russian).

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

УДК 523.4-854

КОМПТОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ КОСМИЧЕСКОГО ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЯ
НА ЭЛЕКТРОНАХ В РАДИАЦИОННЫХ ПОЯСАХ ЗЕМЛИ

Д.Н. Морозова^{1,*}, А.В. Кузнецов², А.Г. Майоров¹, К.С. Челидзе¹

¹Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

²Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, 150000, Россия

*e-mail: dashia110999@mail.ru

Поступила в редакцию: 03.10.2023

После доработки: 12.10.2023

Принята к публикации: 24.10.2023

По данным эксперимента PAMELA обнаружены высыпания электронов из радиационного пояса Земли в моменты регистрации гамма-всплесков внеземного происхождения, что порождает гипотезу о взаимосвязи этих явлений. В работе приводятся оценки количества электронов, испытавших взаимодействие с гамма-квантами посредством эффекта Комптона и изменивших свою энергию и траектории в приближении так называемой «игрушечной модели». Получены формула для определения сечения взаимодействия гамма-кванта и покоящегося электрона в зависимости от угла вылета электрона и энергетический спектр вылетевших электронов. В распределении вторичных электронов по энергиям наблюдается узкий пик вблизи максимальной энергии, которая близка к энергии начального гамма-кванта. Проведена оценка верхней границы для вклада рассматриваемого процесса в превышение темпа счета электронов над фоновым значением, зарегистрированных в эксперименте PAMELA. Получено, что предложенный механизм не позволяет объяснить наблюдаемый эффект, рассчитанный темп счета электронов оказывается на несколько порядков ниже, что объясняется малым сечением комптоновского рассеяния.

Ключевые слова: PAMELA, Fermi-LAT, гамма-всплеск, радиационный пояс Земли, высыпания частиц.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.273

ВВЕДЕНИЕ

Физика космических лучей в околоземном пространстве является важным направлением современных экспериментальных и теоретических исследований. В том числе сегодня активно изучаются характеристики радиационных поясов Земли (РПЗ) и процессов, происходящих с захваченными частицами [1]. Один из них проявляется в виде высыпаний захваченных космических лучей из внутреннего и внешнего радиационных поясов под действием электромагнитного излучения разной природы [2–5]. В экспериментах по регистрации заряженных частиц в околоземном пространстве [6–10] высыпания наблюдаются в виде резкого увеличения числа заряженных частиц во временных рядах данных – всплесков.

Существует ряд работ, посвященных взаимосвязи наблюдаемых всплесков с различными солнечно-магнитными и геофизическими процессами [11–15]. Действительно, некоторые из наблюдаемых всплесков частиц можно связать с

такими явлениями, но, по-видимому, это не все процессы, вызывающие высыпания частиц. До настоящего времени внимание не уделялось влиянию на потоки заряженных частиц в околоземном пространстве электромагнитного излучения галактического или внегалактического происхождения. Известно, что гамма-всплески являются наиболее мощным источником гамма-излучения во Вселенной, поэтому решено рассмотреть их как возможную причину возникновения высыпаний частиц из РПЗ. На текущий момент уже проведена обработка экспериментальных данных, в работах [16] и [17] описывается анализ темпов счета детекторов времяпролетной системы в эксперименте PAMELA [18] в моменты регистрации гамма-всплесков обсерваторией Fermi [19]. Обнаружено несколько событий, когда возникает значимое отклонение темпа счета от фоновых значений в момент прихода излучения гамма-всплеска. Данная статья посвящена теоретическому обоснованию наблюдаемого эффекта для высыпаний частиц в момент прихода к Земле гамма-всплеска

GRB090323002. В этот период времени в эксперименте PAMELA наблюдается увеличение темпа счета над фоном в нескольких измерительных конфигурациях (триггерах) [20], в том числе в одной из них до $dN/dt \approx 40 \text{ с}^{-1}$. При этом необходимая минимальная энергия электронов для выработки триггеров около 100 МэВ.

В качестве наиболее естественного объяснения наблюдаемого эффекта можно предложить процесс комптон-эффекта космического гамма-кванта на захваченном в РПЗ электроне. В этом случае предполагается, что гамма-квант в результате взаимодействия передает электрону количество энергии, достаточное для выхода из радиационного пояса, после чего электрон регистрируется прибором. Учитывая, что интервал энергий гамма-квантов в гамма-всплеске – от кэВ до десятков ГэВ, а для регистрации прибором электрону необходимо иметь энергию свыше 100 МэВ, в работе использовано приближение покоящегося начального электрона.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

Энергетический спектр гамма-излучения обычно имеет степенной вид:

$$\frac{dI_\gamma}{d\omega} = k \left(\frac{\omega}{\text{МэВ}} \right)^{-\gamma}, \quad (1)$$

где I_γ – полный поток гамма-квантов; k – коэффициент пропорциональности; ω – энергия начального гамма-кванта.

Из измерений прибора LAT [21], входящего в состав обсерватории Fermi, можно получить зависимость потока гамма-квантов от энергии в диапазоне от 100 МэВ до 10 ГэВ (низкие энергии, наблюдаемые прибором GBM, не использованы в работе из-за порога регистрации электронов прибором PAMELA). В качестве примера рассмотрен гамма-всплеск GRB090323002, значения спектрального индекса γ и полного потока гамма-квантов I_γ взяты из публикации [22, табл. 4].

Коэффициент k вычислен следующим образом:

$$I_\gamma = \int_a^b k \left(\frac{\omega}{\text{МэВ}} \right)^{-\gamma} d \left(\frac{\omega}{\text{МэВ}} \right) = k \frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{\omega}{\text{МэВ}} \right)^{1-\gamma}, \quad (2)$$

где $a = 100 \text{ МэВ}$; $b = 10 \text{ ГэВ}$. Тогда

$$k = I_\gamma (1 - \gamma) / (\omega / \text{МэВ})^{1-\gamma} \Big|_a^b = 3.32 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1} \text{ МэВ}^{-1}.$$

МЕТОДИКА

Используя инвариантное выражение для сечения комптон-эффекта [23], несложно записать его в системе покоя начального электрона в виде распределения конечных электронов по углу вылета:

$$\frac{1}{\pi r^2} \frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{16m^2(\omega+m)^2 \cos \theta \sin \theta}{((\omega+m)^2 - \omega^2 \cos^2 \theta)^2} \times \left\{ \frac{m^2}{4\omega^2} \left(1 - \frac{m}{E' - p' \cos \theta} \right)^2 + \frac{m}{2\omega} \left(1 - \frac{m}{E' - p' \cos \theta} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{m}{E' - p' \cos \theta} + \frac{E' - p' \cos \theta}{m} \right) \right\},$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad (3)$$

где r – классический радиус электрона; ω – энергия начального гамма-кванта; m – масса электрона; θ – угол вылета; $E' = m \frac{(\omega+m)^2 + \omega^2 \cos^2 \theta}{(\omega+m)^2 - \omega^2 \cos^2 \theta}$ – энергия и $p' = \sqrt{E'^2 - m^2}$ – импульс конечного электрона.

Также можно записать инвариантное сечение комптон-эффекта [23] в системе покоя начального электрона в виде энергетического спектра вылетевших электронов:

$$\frac{1}{\pi r^2} \frac{d\sigma}{dE'} = \frac{m}{\omega^2} \left\{ \left(\frac{m(E' - m)}{\omega(\omega - E' + m)} \right)^2 - \frac{2m(E' - m)}{\omega(\omega - E' + m)} + \frac{\omega - E' + m}{\omega} + \frac{\omega}{\omega - E' + m} \right\},$$

$$m \leq E' \leq \frac{2\omega^2 + 2m\omega + m^2}{2\omega + m}. \quad (4)$$

Расчеты показывают, что вторичные электроны имеют направление движения, в основном совпадающее с направлением первичного гамма-кванта от гамма-всплеска, в распределении по энергиям наблюдается узкий пик вблизи максимальной энергии, которая близка к энергии начального гамма-кванта. Например, на рис. 1 изображены распределения сечения взаимодействия по углу вылета (слева) и по энергии (справа) электрона после взаимодействия с гамма-квантом с энергией 100 МэВ.

Для расчета указанного выше превышения темпа счета электронов над фоном, во-первых, необходимо определить число комптоновских событий, в которых рождается электрон с определенной энергией и углом вылета по отношению к направлению потока гамма-квантов. Во-вторых, рассчитать вероятность попадания данного электрона в детектор с учетом его распространения в магнитосфере Земли. В статье рассмотрена первая часть работы.

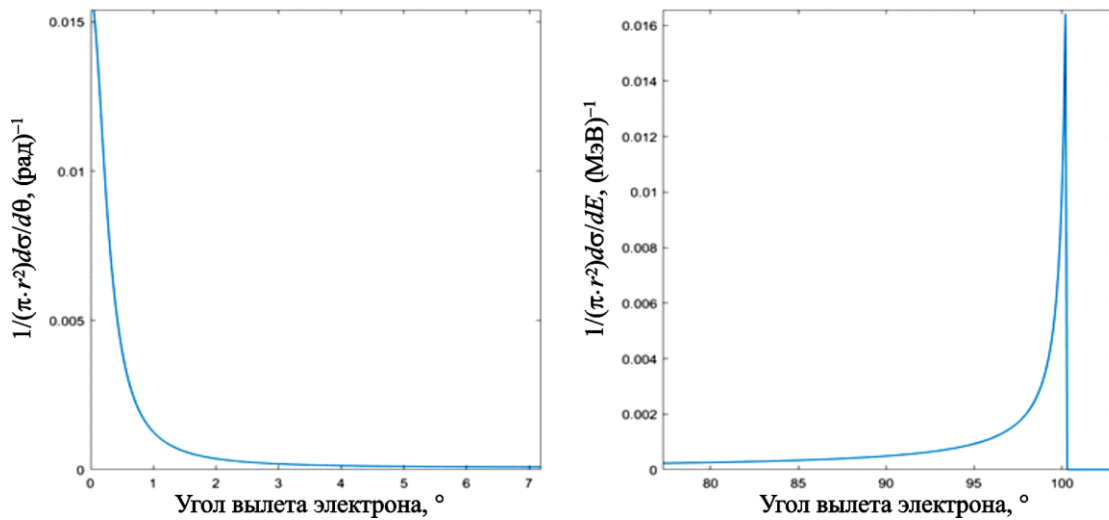


Рис. 1. Распределение сечения взаимодействия по углу вылета (слева) и по энергии (справа) электрона после взаимодействия с гамма-квантом с энергией 100 МэВ

Число комптоновских событий, приходящихся на объем dV и интервал времени dt , в которых рождается электрон с энергией в интервале от E' до $E' + dE'$, вылетающий в телесный угол $d\Omega'$, определяется выражением:

$$\frac{dv}{dE' d\Omega'} = c \frac{d\sigma}{dE' d\Omega'} \frac{1}{c} \frac{dI_\gamma}{d\omega} d\omega n_e dV dt, \quad (5)$$

где $dI_\gamma/d\omega$ – спектр гамма-квантов в гамма-всплеске; n_e – концентрация электронов в данной точке радиационного пояса; c – скорость света, дифференциальное сечение комптон-эффекта по энергиям и углам вылета конечных электронов определяется известным выражением [21], которое можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dE' d\Omega'} = 2\alpha^2 \frac{p'}{m\omega\omega'} \delta(\omega + m - \omega' - E') \times \\ \times \left[\left(\frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right)^2 + \left(\frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \left(\frac{u-m^2}{s-m^2} + \frac{s-m^2}{u-m^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь α – постоянная тонкой структуры; ω и ω' – энергии начального и конечного гамма-квантов; s, u – переменные Манделштама; δ – функция, выражающая закон сохранения энергии.

Для расчета по формуле (5) использован приведенный выше спектр гамма-квантов в гамма-всплеске $dI_\gamma/d\omega$. Также требуется задать пространственное распределение концентрации электронов в радиационном поясе, но в работе рассмотрена «игрушечная модель», которая позволяет оценить верхнюю границу для вклада комптон-эффекта в обсуждаемое превышение

над фоном темпа счета электронов, зарегистрированных в эксперименте PAMELA. Предполагается, что каждый гамма-квант из гамма-всплеска «выбивает» из радиационного пояса строго один электрон, передавая ему всю свою энергию и импульс (см. рис. 1), а также не учитывается влияние магнитосферы на движение выбитой частицы. Тогда темп счета электронов в детекторе, обусловленный данным процессом, можно представить в виде:

$$\frac{dN}{dt} = \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} d\omega \frac{dI_\gamma}{d\omega} \cdot \Delta S, \quad (7)$$

где ΔS – рабочая площадь детектора, а в качестве $\omega_{\min}$ следует взять максимальную из двух величин: либо нижнюю границу спектра гамма-квантов в гамма-всплеске, либо величину порога регистрации электронов детектором.

Подставляя (1) в (7) и интегрируя от 100 МэВ до 10 ГэВ, при рабочей площади детектора $\Delta S = 20 \text{ см}^2$ получаем для темпа счета электронов в детекторе $dN/dt = 1.2 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, что на несколько порядков меньше ожидаемого значения $dN/dt \approx 40 \text{ с}^{-1}$. Попытаемся экстраполировать формулу (4) на меньшие значения $\omega_{\min}$, пока что не принимая во внимание величину порога регистрации электронов детектором. Тогда для получения величины 40 с^{-1} следует положить $\omega_{\min} = 0.88 \text{ МэВ}$.

Таким образом, «игрушечная модель» с приближением покоящихся начальных электронов и даже стопроцентной конверсией гамма-квантов в электроны через комптон-эффект не позволяет объяснить обсуждаемое превышение над фоном темпа счета электронов, зарегистри-

КОМПТОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ КОСМИЧЕСКОГО ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЯ НА ЭЛЕКТРОНАХ В РАДИАЦИОННЫХ ПОЯСАХ ЗЕМЛИ

рованных в эксперименте PAMELA, если рассматривать нижнюю границу, для которой определен поток I_γ в каталогах гамма-всплесков эксперимента Fermi. Наблюдаемый эффект может быть объяснен при выборе нижней энергетической границы гамма-квантов ~ 1 МэВ, однако при этом необходимо рассматривать изменение питч-углового распределения захваченных частиц для возникновения высыпания, а также уйти от приближения покоящегося электрона.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проводился анализ гипотезы о существовании взаимосвязи высыпаний частиц из радиационных поясов Земли с гамма-всплесками внеземного происхождения. В качестве предполагаемого механизма взаимодействия захваченных электронов с гамма-квантами рассмотрен эффект комптоновского рассеяния. Приведена «игрушечная модель», предполагающая приближение покоящегося электрона, а также допускающая рассеяние каждого гамма-кванта на электроны с передачей ему всей энергии. Модель применена для анализа наблюдаемого в эксперименте PAMELA отклонения темпа счета частиц от фоновых значений в момент прихода гамма-излучения от всплеска GRB090323002. Показано, что рассмотренный процесс в таком приближении не позволяет объяснить экспериментальный результат для значений минимальной энергии гамма-кванта около 100 МэВ, однако при ее понижении до ~ 1 МэВ согласие с измерениями может быть достигнуто.

Дальнейшее развитие работы связано с учетом энергетического и пространственного распределений захваченных электронов, расчетом высыпаний частиц вследствие изменения их питч-углового распределения под действием космического гамма-излучения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-72-10161, <https://rscf.ru/project/19-72-10161/>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kovtyukh A.S. Ion Composition of the Earth's Radiation Belts in the Range from 100 keV to

100 MeV/nucleon: Fifty Years of Research // Space Science Reviews, 2018. V. 214. № 124. 30 p.

2. Sgrigna V., Carota L., Conti L., et al. Correlations between earthquakes and anomalous particle bursts from SAMPEX/PET satellite observations // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics, 2005. V. 67. P. 1448–1455.

3. Parrot M., Berthelier J.J., Lebreton J.P., et al. Examples of unusual ionospheric observations made by the DEMETER satellite over seismic regions // Physics and Chemistry of the Earth, 2006. V. 31. P. 486–495.

4. Александрин С.Ю., Гальпер А.М., Кольдашов С.В. и др. Изучение локальных возмущений радиационного пояса в спутниковых экспериментах «АРИНА» и «ВСПЛЕСК» // Труды 31-й Всероссийской конференции по космическим лучам, М.: МГУ, 2010.

5. Fidani C., Battiston R., Burger W.J. A study of the correlation between earthquakes and NOAA satellite energetic particle bursts // Remote Sensing, 2010. V. 2, P. 2170–2184.

6. Akimov V.V., Voronov S.A., Galper A.M. et al. Gamma ray telescope GAMMA-1 // Space Science Review, 1988. V. 49. P. 111–124.

7. Baker, D.N., Mason, G.M., Figueroa, O. et al. An overview of the solar, anomalous, and magnetospheric particle explorer (SAMPEX) mission // IEEE Trans. Geosciences and Remote Sensing, 1993. V. 31. № 5. P. 531–541.

8. Voronov S.A., Galper A.M., Koldashov S.V. et al. Maria-2 charged particles' magnetic spectrometer // Приборы и техника эксперимента, 1991. № 2. P. 59–62.

9. Александров А.П., Воронов С.А., Гальпер А.М. и др. Эксперимент по исследованию потоков заряженных частиц высоких энергий на орбитальном научном комплексе Мир (эксперимент Мария-2). М.: МИФИ, 1988.

10. Бакалдин А.В., Батищев А.Г., Воронов С.А. и др. Эксперимент «АРИНА» на КА «Ресурс-ДК1» по изучению прогностических характеристик всплесков высокоэнергетичных заряженных частиц – предвестников землетрясений // Научная сессия МИФИ-2007. Т. 7 Астрофизика и космофизика. Проблемы современной математики. Физика пучков и ускорительная техника, 2007. С. 66–68.

11. Aleksandrin S.Yu., Galper A.M., Zharaspaev T.R., Koldashov S.V. Temporal and energy characteristics of high-energy electron bursts in the Earth's magnetosphere that are associated with geophysical processes // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics, 2015. V. 79. № 5. P. 646–648.

12. Aleksandrin S.Yu., Galper A.M., Koldashov S.V., et al. High-energy charged particle bursts in the near-Earth space as earthquake precursors // Annales Geophysicae, 2003. V. 21. Is. 2. P. 597–602.

13. Galper A.M., Koldashov S.V., Voronov S.A. High-energy particle flux variations as earthquake pre-

dictors // *Advances in Space Research*, 1995. V. 15. Is. 11. P. 131–134.

14. Molchanov O.A., Majaeva O.A., Protopopov M.L. Observation of electromagnetic emissions of seismic origin on board INTERCOSMOS-24 satellite // *Cosmic Research*, 1992. V. 32. № 6. P. 128–137.

15. Гальпер А.М., Дмитриенко В.В., Никитина Н.В. и др. О возможности предсказания землетрясений по изменению потоков высокоэнергичных заряженных частиц в околоземном космическом пространстве. М.: МИФИ, 1988.

16. Morozova D.N., Mayorov A.G. Search for the Relationship between Particle Precipitation from the Earth's Radiation Belt and Cosmic Gamma-Ray Bursts // *Physics of Atomic Nuclei*, 2021. V. 84. Is. 9. P. 1636–1640.

17. Морозова Д.Н., Майоров А.Г. Взаимосвязь высыпаний частиц из радиационного пояса Земли и космических гамма-всплесков // Труды XVII Конференции молодых ученых «Взаимодействие полей и излучения с веществом», 2022. С. 240–242.

18. Picozza P., Galper A.M., Castellini G., et al. PAMELA – a payload for antimatter matter exploration

and light-nuclei astrophysics // *Astroparticle Physics*, 2007. V. 27. № 4. P. 296–315.

19. von Kienlin A., Meegan C.A., Paciesas W.S. et al. The Fourth Fermi-GBM Gamma-Ray Burst Catalog: A Decade of Data // *The Astrophysical Journal*, 2020. V. 893. № 1. P. 46–50.

20. Barbarino G., Boscherini M., Campana D., et al. The PAMELA time-of-flight system status report // *Nuclear Physics B – Proceedings Supplements*, 2003. V. 125. P. 298–302.

21. Atwood W.B., Abdo A., Ackermann M., et al. The Large Area Telescope on the Fermi gamma-ray space telescope mission // *The Astrophysical Journal*, 2009. V. 697. P. 1071–1102.

22. Ackermann M., Ajello K., Asano M., et al. The first Fermi-LAT gamma-ray burst catalog // *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 2013. Vol. 209. № 1. article id. 11. 90 p.

23. Берестецкий В.Б., Лифушиц Е.М., Путаевский Л.П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989. 728 с.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 5, pp. 262–267

COMPTON SCATTERING OF COSMIC GAMMA RADIATION BY ELECTRONS IN THE EARTH'S RADIATION BELTS

D.N. Morozova¹, A.V. Kuznetsov², A.G. Mayorov¹, K.S. Chelidze¹

¹National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, 115409, Russia

²Yaroslavl State University named after. P.G. Demidova, Yaroslavl, 150000, Russia

*e-mail: dashia110999@mail.ru

Received October 03, 2023; revised October 12, 2023; accepted October 24, 2023

According to the PAMELA experiment, precipitation of electrons from the Earth's radiation belt was detected at the moments of recording gamma-ray bursts of extraterrestrial origin, which gives rise to a hypothesis about the relationship of these phenomena. The work provides estimates of the number of electrons that have experienced interaction with gamma quanta through the Compton effect and have changed their energy and trajectories in the so-called approximation. «toy model» A formula has been obtained for determining the cross section for the interaction of a gamma quantum and a stationary electron depending on the electron emission angle and the energy spectrum of the emitted electrons. In the energy distribution of secondary electrons, a narrow peak is observed near the maximum energy, which is close to the energy of the initial gamma quantum. An estimate of the upper limit for the contribution of the process under consideration to the excess of the electron count rate over the background value recorded in the PAMELA experiment was carried out. It was found that the proposed mechanism does not explain the observed effect; the calculated electron count rate is several orders of magnitude lower, which is explained by the small Compton scattering cross section.

Keywords: PAMELA, Fermi-LAT, gamma-ray burst, Earth's radiation belt, particle precipitation.

REFERENCES

1. Kovtyukh A.S. Ion Composition of the Earth's Radiation Belts in the Range from 100 keV to 100 MeV/nucleon: Fifty Years of Research. *Space Science Reviews*, 2018. Vol. 214. No. 124. 30 p.

2. Sgrigna V., Carota L., Conti L., et al. Correlations between earthquakes and anomalous particle bursts from SAMPEX/PET satellite observations. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 2005. Vol. 67. Pp. 1448–1455.

3. Parrot M., Berthelier J.J., Lebreton J.P., et al. Examples of unusual ionospheric observations made by the

DEMETER satellite over seismic regions. *Physics and Chemistry of the Earth*, 2006. Vol. 31. Pp. 486–495.

4. Aleksandrin S.Yu., Galper A.M., Koldashov S.V. *et al.* Izucheniye lokalnykh vozmushcheniy radiatsionnogo poiasa v sputnikovykh eksperimentakh «ARINA» i «VSPLESK» [Studying Local Disturbances of the Radiation Belt in Satellite Experiments 'ARINA' and 'VSPLESK']. *Trudy 31 Vserossiyskoy konferentsii po kosmicheskim lucham*, Moscow, MGU, 2010 (in Russian).

5. Fidani C., Battiston R., Burger W.J. A study of the correlation between earthquakes and NOAA satellite energetic particle bursts. *Remote Sensing*, 2010. Vol. 2. Pp. 2170–2184.

6. Akimov V.V., Voronov S.A., Galper A.M. *et al.* Gamma ray telescope GAMMA-1. *Space Science Review*, 1988. Vol. 49. Pp. 111–124.

7. Baker D.N., Mason G.M., Figueroa O. *et al.* An overview of the solar, anomalous, and magnetospheric particle explorer (SAMPEX) mission. *IEEE Trans. Geosciences and Remote Sensing*, 1993. Vol. 31. No. 5. Pp. 531–541.

8. Voronov, S.A., Galper, A.M., Koldashov, S.V. *et al.* Maria-2 charged particles' magnetic spectrometer. *Pribori i Tehnika Eksperimenta*, 1991. No. 2. Pp. 59–62.

9. Aleksandrov A.P., Voronov S.A., Galper A.M. *et al.* Eksperiment po issledovaniyu potokov zarazhennykh chastits vysokikh energiy na orbital'nom nauchnom komplekse Mir (eksperiment Mariya-2) [Experiment on High-Energy Charged Particle Flux Studies on the Mir Orbital Scientific Complex (Maria-2 Experiment)]. Moscow, MIFI Publ, 1988 (in Russian).

10. Bakaldin A.V., Batishchev A.G., Voronov S.A., *et al.* Eksperiment «ARINA» na KA «Resurs-DK1» po izucheniyu prognozticheskikh kharakteristik vspleskov vysokoenergetichnykh zarazhennykh chastits – predvestnikov zemletryaseniya [The 'ARINA' Experiment on the 'Resource-DK1' Satellite for Studying Predictive Characteristics of High-Energy Charged Particle Bursts – Precursors to Earthquakes]. *Nauchnaya sessiya MIFI-2007. T. 7. Astrofizika i kosmofizika. Problemy sovremennoy matematiki. Fizika puchkov i uskoritel'naya tekhnika*, 2007. Pp. 66–68 (in Russian).

11. Aleksandrin S.Yu., Galper A.M., Zharaspaev T.R., Koldashov S.V. Temporal and energy characteristics of high-energy electron bursts in the Earth's magnetosphere that are associated with geophysical processes. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics*, 2015. Vol. 79. No. 5. Pp. 646–648.

12. Aleksandrin S.Yu., Galper, A.M., Koldashov S.V., *et al.* High-energy charged particle bursts in the near-Earth space as earthquake precursors. *Annales Geophysicae*, 2003. Vol. 21. Is. 2. Pp. 597–602.

13. Galper A.M., Koldashov S.V., Voronov S.A. High-energy particle flux variations as earthquake predictors. *Advances in Space Research*, 1995. Vol. 15. Is. 11. Pp. 131–134.

14. Molchanov O.A., Majaeva O.A., Protopopov M.L. Observation of electromagnetic emissions of seismic origin on board INTERCOSMOS-24 satellite. *Cosmic Research*, 1992. Vol. 32. No. 6. Pp. 128–137.

15. Galper A.M., Dmitrienko V.V., Nikitina N.V. *et al.* O vozmozhnosti predsazhaniya zemletryaseniya po izmeneniyu potokov vysokoenergetichnykh zarazhennykh chastits v okolozemnom kosmicheskom prostranstve [On the Possibility of Predicting Earthquakes Based on Changes in High-Energy Charged Particle Fluxes in Near-Earth Space]. Moscow, MIFI Publ, 1988 (in Russian).

16. Morozova D.N., Mayorov A.G. Search for the Relationship between Particle Precipitation from the Earth's Radiation Belt and Cosmic Gamma-Ray Bursts. *Physics of Atomic Nuclei*, 2021. Vol. 84. Is. 9. Pp. 1636–1640.

17. Morozova D.N., Mayorov A.G. Vzaimosvyaz' vysypaniy chastits iz radiatsionnogo poiasa Zemli i kosmicheskikh gamma-vspleskov [The Relationship between Particle Ejections from Earth's Radiation Belt and Cosmic Gamma-Ray Bursts]. *Trudy XVII Konferentsii molodykh uchenykh «Vzaimodeystviye poley i izlucheniya s veshchestvom»*, 2022. Pp. 240–242 (in Russian).

18. Picozza P., Galper A.M., Castellini G., *et al.* PAMELA – a payload for antimatter matter exploration and light-nuclei astrophysics. *Astroparticle Physics*, 2007. Vol. 27. No. 4. Pp. 296–315.

19. von Kienlin A., Meegan C.A., Paciesas W.S. *et al.* The Fourth Fermi-GBM Gamma-Ray Burst Catalog: A Decade of Data. *The Astrophysical Journal*, 2020. Vol. 893. No. 1. Pp. 46–50.

20. Barbarino G., Boscherini M., Campana D., *et al.* The PAMELA time-of-flight system status report. *Nuclear Physics B – Proceedings Supplements*, 2003. Vol. 125. Pp. 298–302.

21. Atwood W.B., Abdo A., Ackermann M., *et al.* The Large Area Telescope on the Fermi gamma-ray space telescope mission. *The Astrophysical Journal*, 2009. Vol. 697. Pp. 1071–1102.

22. Ackermann M., Ajello K., Asano M., *et al.* The first Fermi-LAT gamma-ray burst catalog. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 2013. Vol. 209. No. 1. Article id. 11. 90 p.

23. Berestetskii V.B., Lifshitz E.M., Pitayevskii L.P. *Kvantovaya elektrodinamika [Quantum Electrodynamics]*. Moscow, Nauka Publ., 1989. 728 p.

УДК 539.1.06

РАДИАЦИОННЫЕ ИСПЫТАНИЯ ФАНТОМА МЕЛКОГО ЛАБОРАТОРНОГО ЖИВОТНОГО, ИЗГОТОВЛЕННОГО МЕТОДАМИ ТРЕХМЕРНОЙ ПЕЧАТИ

А.А. Григорьева^{1,*}, А.А. Булавская¹, Е.А. Бушмина¹, В.А. Куйвалайнен¹, И.А. Милойчикова^{1,2}, С.Г. Стучебров¹

¹Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск, 634050, Россия

²Научно-исследовательский институт онкологии, Томский национальный исследовательский медицинский центр
Российской академии наук, Томск, 634009, Россия

*e-mail: agrigorieva@tpu.ru

Поступила в редакцию: 16.10.2023

После доработки: 16.10.2023

Принята к публикации: 24.10.2023

Для подтверждения новых радиотерапевтических методик лучевой терапии необходимо проводить большое количество исследований с применением ионизирующего излучения. Эти исследования зачастую осуществляются с помощью таких мелких лабораторных животных, как мыши и крысы, поэтому возникает вопрос об этических проблемах международного характера. В связи с этим актуальным является применение искусственных моделей животных, что позволит сократить количество используемых животных. В ранее проведенных исследованиях были изготовлены гомогенные монолитные тестовые объекты и проведены их дозиметрические испытания. Были определены параметры и материалы печати для наиболее точной имитации биологических тканей. В данном исследовании предлагается использовать методы трехмерного изготовления для разработки и изготовления гетерогенных объектов из различных материалов, что позволит создавать фантомы с высокой точностью за короткий срок. В работе был разработан и изготовлен дозиметрический фантом самца крысы. Были проведены его томографические и дозиметрические испытания. Была показана возможность изготовления дозиметрических фантомов мелких лабораторных животных методами трехмерной печати.

Ключевые слова: дозиметрия, дозиметрический фантом, 3D-печать, метод послойного наплавления, пленочные дозиметры, дозное распределение, компьютерная томография, гамма-аппарат.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.282

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день онкологические заболевания являются одной из самых актуальных проблем в мире. В России они занимают второе место по смертности [1] после болезней сердечно-сосудистой системы. Из-за этого возникает необходимость в разработке новых методов лечения злокачественных опухолей. В большинстве случаев для лечения злокачественных новообразований применяются методы лучевой терапии [2], которые основаны на использовании ионизирующего излучения (ИИ). Однако влияние ИИ может оказывать также пагубный эффект и на здоровые ткани и органы, близко расположенные к злокачественному очагу, в связи с чем проводят дозиметрическое планирование лучевой нагрузки.

В последнее время все чаще ведется разработка новых методов лучевой терапии, которые с высокой точностью адаптируют дозовое поле

к форме опухоли для меньшего риска здоровым тканям. Для ввода новых терапевтических методик в клиническую практику необходимо провести ряд доклинических исследований с использованием таких мелких лабораторных животных, как мыши и крысы, для оценки радиобиологического эффекта ИИ. Однако проведение доклинических исследований с использованием лабораторных животных обязывает проведение исследований *in-vivo*, следовательно, к подобным экспериментам накладываются требования по минимизации количества животных и уменьшению их страданий.

Помимо этого при интерпретации полученных результатов доклинических исследований необходимо учитывать проведение дополнительных манипуляций с животными, например проведение компьютерной томографии в диагностических целях, или ввод анестетиков, так как такие процедуры могут приводить к изменению роста опухолевых новообразований [3].

Использование фантомов мелких лабораторных животных позволило бы снизить количество используемых животных на различных этапах доклинических исследований.

Дозиметрические фантомы лабораторных животных представляют собой искусственные модели, которые могут быть применены для численной дозиметрической оценки взаимодействия ИИ с биологическими тканями животных. Наиболее распространенные на сегодняшний день фантомы лабораторных животных [4] представляют собой тканезквивалентные однородные цилиндрические объекты упрощенной геометрии или же гетерогенные цилиндрические объекты с вставками разной плотности, имитирующими отдельные виды тканей и органов. Подобные фантомы не предполагают использование различных дозиметрических устройств одновременно и не могут обеспечить достоверное распределение поглощенной дозы при взаимодействии с ИИ [5]. Поэтому встает вопрос о создании фантомов, которые будут повторять геометрические размеры и имитировать анатомически точный набор биологических тканей и органов животного с точки зрения взаимодействия с ИИ.

Для создания подобных фантомов могут быть применены современные технологии трехмерной печати (3D), которые уже зарекомендовали себя во многих областях от науки до здравоохранения [6].

Ранее авторами уже был апробирован метод изготовления гетерогенных тканезквивалентных объектов для оценки взаимодействия ИИ с веществом [7, 8]. Полученные результаты показали возможность использования технологий трехмерной печати для разработки и создания дозиметрических фантомов. Помимо этого используемые материалы в 3D-печати позволяют модифицировать их свойства для более точной имитации биологических тканей.

Поэтому целью данной работы стали разработка и радиационные испытания фантома мелкого лабораторного животного, изготовленного методами трехмерной печати.

1. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

1.1. Разработка объемных цифровых моделей мелкого лабораторного животного

Для создания фантома был выбран самец крысы, как один из часто применяемых в доклинических испытаниях вид лабораторных

животных. На первом этапе исследования для разработки объемных цифровых моделей лабораторного животного были использованы реальные томографические данные исследуемого мелкого лабораторного животного. В программном обеспечении 3D Slicer [9] по данным анатомических атласов [10] и рентгеновским плотностям послойно были выделены такие некоторые ткани и органы грызуна, как мягкие ткани, костные ткани, легкие, головной мозг и спинной мозг.

Далее полученные цифровые поверхности органов и тканей были преобразованы в трехмерную модель формата STL для дальнейшего использования в 3D-печати. На рис. 1 представлена разработанная цифровая объемная модель грызуна.

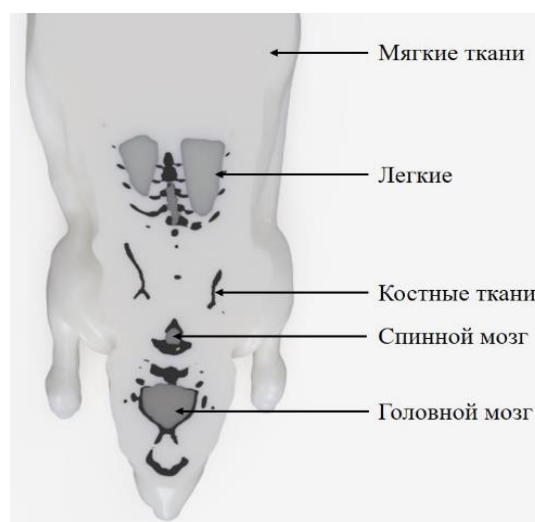


Рис. 1. Цифровая модель мелкого лабораторного животного

1.2. Размещение дозиметрического оборудования в фантоме

В программе Autodesk Fusion 360 [11] объемная модель мелкого лабораторного животного была разделена на три слоя разной толщины: верхний – 15 мм, средний – 11 мм, нижний – 11 мм. Данное разделение модели на слои обусловлено расположением критических органов животного. На рис. 2 представлена схема разделения трехмерной модели грызуна.

В данной работе используются пленочные дозиметры Gafchromic EBТ3 [12]. Данные дозиметры предназначены для измерения поглощенных доз ИИ. Пленочный дозиметр состоит из двух слоев толщиной по 125 мкм и активным слоем толщиной 28 мкм [12, 13].

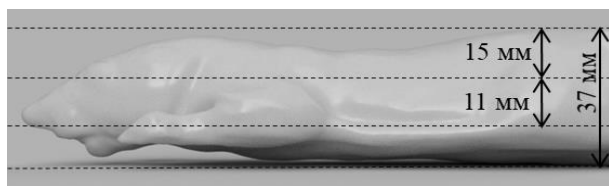


Рис. 2. Схема разделения модели мелкого лабораторного животного для размещения пленочных дозиметров в областях интереса

1.3. Изготовление дозиметрического фантома методом послойного наплавления

В работе используется технология 3D-печати – метод послойного наплавления [6]. Данный метод основан на том, что филамент подается на нагревательный блок, где нагревается и плавится до нужной температуры и выдавливается из сопла на рабочий стол, формируя трехмерный объект согласно цифровым исходным данным. Коэффициент заполнения определяет количество материала в детали, с его помощью можно изменять физическую плотность объекта. Ранее модель мелкого лабораторного животного была преобразована в формат пригодный для 3D-печати – STL. В программном обеспечении PrusaSlicer был сгенерирован G-код, код необходимый для 3D-принтера, в котором содержатся параметры изготовления объекта, температуры нагрева сопла и рабочей области и т.д.

Далее для печати необходимо было подобрать материалы, имитирующие биологические ткани лабораторного животного в отношении их взаимодействия с ИИ и оптимальные параметры работы 3D-принтера. В программе RadiAnt DICOM Viewer [14] по томографическим данным животного были определены рентгеновские плотности или индексы Хаунсфилда. Под шкалой индексов Хаунсфилда принимают шкалу линейного ослабления излучения по отношению к дистиллированной воде [15]. В табл. 1 представлены полученные значения.

Таблица 1. Значения индексов Хаунсфилда для различных тканей мелкого лабораторного животного

Биологическая ткань	Индексы Хаунсфилда, HU
Мягкие ткани	-14 ± 17
Костные ткани	738 ± 78
Легкие	-948 ± 12
Головной мозг	25 ± 9
Спинной мозг	67 ± 15

Сравнивания полученные значения индексов Хаунсфилда для биологических тканей со зна-

чениями индексов Хаунсфилда для образцов, изготовленных с помощью 3D-печати, в дальнейшем были определены материалы и параметры печати, которые соответствуют значениям биологических тканей животных.

В данной работе в качестве материала 3D-печати был выбран натуральный PLA-пластик (полилактид). PLA-пластик неприхотлив в работе и легко модифицируется с различными примесями. В ранее проведенных исследованиях [7, 8, 16–18] были разработаны филаменты (PLA + 30 % Cu), которые наиболее точно имитировали костные ткани по отношению их взаимодействия с ИИ. Исходя из этого, были подобраны материалы и параметры печати для изготовления фантома мелкого лабораторного животного. В табл. 2 приведены используемые материалы и коэффициенты заполнения изделия материалом при печати для различных тканей и органов.

Таблица 2. Материалы и параметры печати

Биологическая ткань	Материал	Коэффициент заполнения, %
Мягкие ткани	PLA	100
Костные ткани	PLA + 30 % Cu	100
Легкие	–	0
Головной мозг	PLA	95
Спинной мозг	PLA	95

Далее, используя 3D-принтер Original Prusa i3 MK3s [19], был изготовлен фантом мелкого лабораторного животного, состоящий из отдельных элементов в соответствии с рис. 2.

На рис. 3 показан изготовленный фантом мелкого лабораторного животного.

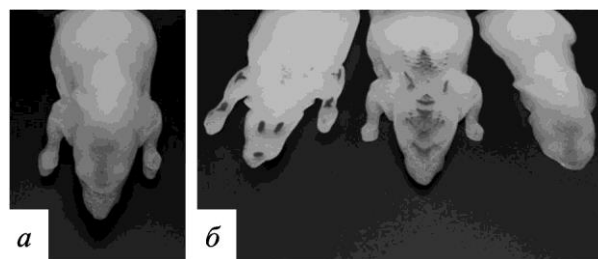


Рис. 3. Внешний вид фантома мелкого лабораторного животного, изготовленного методом послойного наплавления: а – фантом в сборке; б – фантом по слоям

Для определения соответствия геометрических параметров и индексов Хаунсфилда изготовленного макета фантома грызуна реальным данным животного было проведено томографическое исследование макета фантома.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЯ

2.1. Томографическое исследование изготовленного фантома

На следующем этапе работы с помощью компьютерного томографа Siemens Somatom Emotiom 6 [20] было проведено томографическое исследование макета фантома мелкого лабораторного животного, изготовленного с помощью технологии трехмерной печати. На рис. 4 представлены сагиттальные проекции оригинальных томографических данных грызуна и изготовленного дозиметрического фантома.

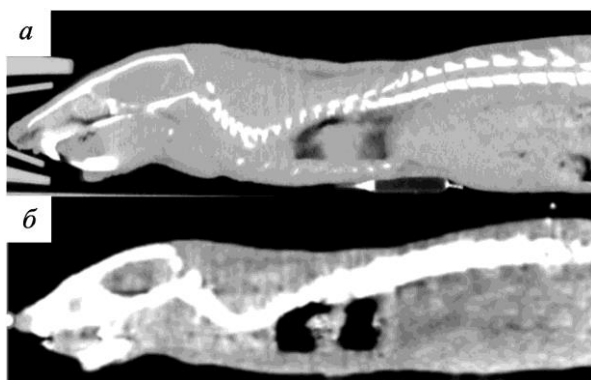


Рис. 4. Сагиттальные проекции компьютерной томографии: *а* – оригинальные данные грызуна; *б* – данные изготовленного дозиметрического фантома

Из рис. 4 видно, что форма и структура изготовленного фантома аналогична исходным томографическим данным грызуна. Также было проведено сравнение поперечных и продольных размеров в различных точках. Поперечные размеры изготовленного фантома в области грудной клетки составили 37.7 и 38.8 мм для исходных данных. Максимальная длина изготовленного объекта составила 144.5 и 146.5 мм для исходных данных. Было определено, что различия в геометрии мелкого лабораторного животного и изготовленного фантома находятся в пределах 3 %.

Для определения соответствия отдельных элементов фантома биологическим тканям грызуна с точки зрения взаимодействия с ИИ было проведено томографическое исследование изготовленного фантома. На рис. 5 приведены полученные средние значения индексов Хаунсфилда и их среднеквадратичные отклонения для разных тканей в программном обеспечении RadiAnt DICOM Viewer [14].

По результатам (рис. 5) видно, что все значения индексов Хаунсфилда для элементов изготовленного макета совпадают с соответствующими данными биологических тканей грызуна в пределах среднеквадратичного отклонения.

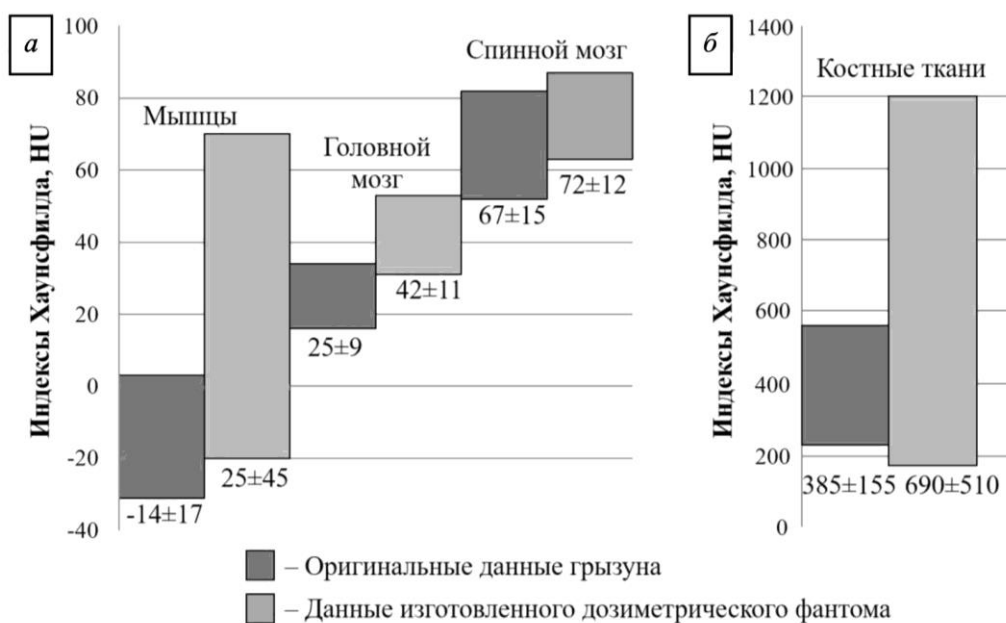


Рис. 5. Значения индексов Хаунсфилда для тканей лабораторного животного и элементов изготовленного макета: *а* – для мягких тканей; *б* – для костных тканей

2.2. Дозиметрические испытания макета фантома мелкого лабораторного животного на гамма-терапевтическом аппарате

В системе дозиметрического планирования XiO 5.1 были созданы планы облучения фантома мелкого лабораторного животного для области головы и области грудной клетки. Облучение проводилось на гамма-терапевтическом аппарате Theratron Equinox 80 [21]. Облучение проводилось с размером поля $5 \times 5 \text{ см}^2$ в динамическом режиме, для области головы использовалась одна арка $90-270^\circ$, для области грудной клетки – две арки $235-355^\circ$ и $135-5^\circ$. Предписанная доза составила 2.0 Гр в изоцентре.

На рис. 6 схематично представлены параметры облучения для области головы и области грудной клетки.

Для верификации плана облучения были использованы дозиметрические пленки Gafchromic EBT3 [12]. На рис. 7 представлено расположение пленок в области головы на глубине 15 мм от поверхности фантома, в области грудной клетки на глубинах 15 и 26 мм от поверхности фантома.

Согласно плану облучения, максимальная предписанная доза в области головы для первого слоя (15 мм) составила 1.98 Гр; в области грудной клетки для первого слоя (15 мм) – 1.97 Гр, для второго слоя (26 мм) – 1.85 Гр. Экспериментальные данные, полученные с помощью дозиметрических пленок Gafchromic EBT3, совпали с планом облучения в пределах неопределенности пленочного дозиметра, который составляет 5 % [13].

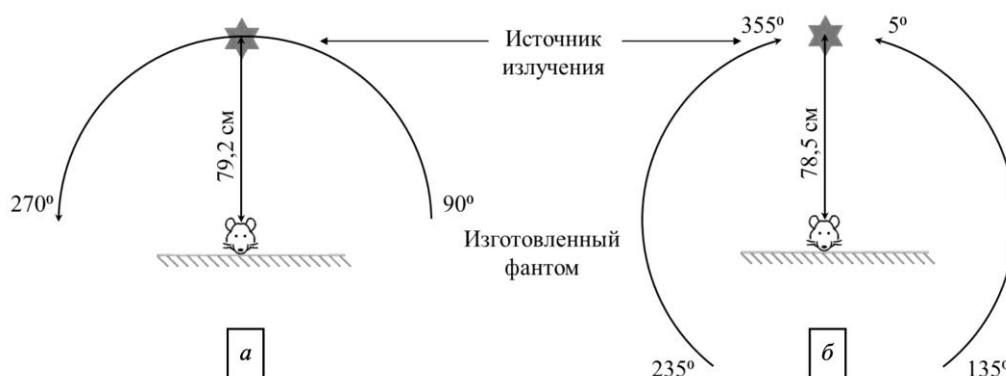


Рис. 6. Схема облучения для области: а – головы; б – грудной клетки

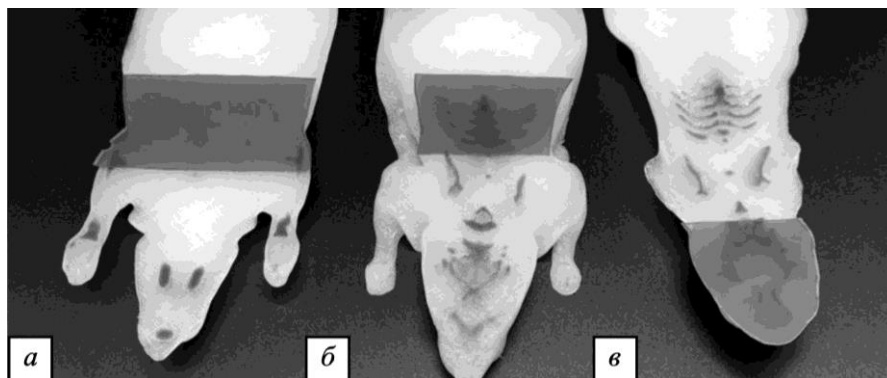


Рис. 7. Расположение дозиметрических пленок в изготовленном макете грызуна в области: а – грудной клетки на глубине 26 мм; б – грудной клетки на глубине 15 мм; в – головы на глубине 15 мм

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При проведении исследований было определено, что разработанный с помощью трехмерной печати дозиметрический фантом мелкого лабораторного животного успешно прошел томографические и дозиметрические испытания.

В ходе томографических испытаний изготовленного макета фантома грызуна были опре-

делены значения индексов Хаунсфилда для элементов, имитирующих биологические органы и ткани, полученные данные совпали с данными грызуна в пределах среднеквадратичного отклонения. Также определено, что точность геометрических размеров напечатанных элементов фантома с реальными томографическими данными грызуна лежит в пределах 3 %.

РАДИАЦИОННЫЕ ИСПЫТАНИЯ ФАНТОМА МЕЛКОГО ЛАБОРАТОРНОГО ЖИВОТНОГО, ИЗГОТОВЛЕННОГО МЕТОДАМИ ТРЕХМЕРНОЙ ПЕЧАТИ

В результате дозиметрических испытаний макета фантома мелкого лабораторного животного на гамма-терапевтическом аппарате с использованием пленочных дозиметров были получены значения поглощенных доз, которые совпадают с планом облучения в пределах погрешности дозиметра.

По результатам данной работы можно сказать, что выбранные материалы и параметры печати позволяют имитировать реальные органы и ткани мелкого лабораторного животного с точки зрения взаимодействия с ИИ.

Разработанный с помощью технологии трехмерной печати гетерогенный дозиметрический фантом мелкого лабораторного животного может быть использован для проведения доклинических исследований в области лучевой терапии.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-79-01232).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каприн А.Д., Старинский В.В., Шахаздова А.О. Злокачественные новообразования в 2019 г. М.: МНИОИ им. П.А. Герцена, филиал ФГБУ «НМИЦ радиологии» Минздрава России, 2020. 252 с.
2. Gerber D.E., Chan T.A. Recent advances in radiation therapy // *American family physician*, 2008. V. 78. № 11. P. 1254–1262.
3. DeWerd L.A. The phantoms of medical and health physics. Berlin: Springer, 2014. 290 p.
4. Mouse Phantom. Pre-clinical CT Phantoms. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.leedstestobjects.com/index.php/phantom/mousephantom/> (дата обращения: 19.06.2023).
5. Tillner F., Thute P., Löck S., Dietrich A., Fursov A., Haase R., Enghardt W. Precise image-guided irradiation of small animals: a flexible non-profit platform // *Physics in Medicine & Biology*, 2016. V. 61. № 8. P. 3084.
6. Canessa E. Fonda, C., Zennaro M., Deadline N. Low-cost 3D printing for science, education and sustainable development // *Low-Cost 3D Printing*, 2013. V. 11. № 1.
7. Stuchebrov S.G. Bulavskaya, A.A., Cherepennikov Y.M., Grigorieva A.A., Miloichikova I.A. Development of the patient-specific phantom of the human arm part using 3D printing // *Radiotherapy and Oncology*, 2021. V. 161. P. 1309–1310.
8. Bulavskaya A., Cherepennikov Y., Gavrikov B., Grigorieva A., Grigoriev E., Miloichikova I., Stuchebrov S. Applicability of poly (styrene–butadiene–styrene) for three-dimensional printing of tissue-equivalent samples // *3D Printing and Additive Manufacturing*, 2022. V. 9. № 5. P. 399–404.
9. 3D Slicer image computing platform [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.slicer.org/> (дата обращения: 05.07.2023).
10. Ноздрачев А.Д., Поляков Е.Л. Анатомия крысы (лабораторные животные). СПб.: Лань, 2001. 159 с.
11. Autodesk Fusion 360 [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.autodesk.com/products/fusion-360/overview?term=1-YEAR&tab=subscription> (дата обращения: 05.07.2023).
12. GAFCHROMIC EBT3 [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://gafchromic.ru/docs/EBT-3.pdf> (дата обращения: 05.07.2023).
13. Marroquin E.Y.L., Herrera Gonzalez J.A., Camacho Lopez M.A., Barajas J.E.V., García-Garduño O.A. Evaluation of the uncertainty in an EBT3 film dosimetry system utilizing net optical density // *Journal of applied clinical medical physics*, 2016. V. 17. № 5. P. 466–481.
14. RadiAnt DICOM Viewer [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.radiantviewer.com/ru/> (дата обращения: 05.07.2023).
15. DenOtter T.D., Schubert J. Hounsfield Unit. StatPearls Publishing LLC, Treasure Island (FL), 2019.
16. Grigorieva A.A., Bulavskaya A.A., Miloichikova I.A., Cherepennikov Y.M., Stuchebrov S.G. Determination of the test-samples electron density via dual energy computer tomography // *Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing, 2021. V. 1843. № 1. P. 012021.
17. Miloichikova I., Bulavskaya A., Cherepennikov Y., Gargioni E., Grigorieva A., Stuchebrov S., Wegner M. Development of a digital three-dimensional rodent model for production of small laboratory animal phantoms // *European journal of nuclear medicine and molecular imaging*, 2021. V. 48. P. S577.
18. Stuchebrov S.G., Bulavskaya A.A., Cherepennikov Y.M., Grigorieva A.A., Miloichikova I.A., Gargioni E. Making a copy of conventional anthropomorphic phantom section by 3D printing // *European Journal of Nuclear Medicine and Molecular Imaging*, 2020. V. 47. P. 313–314.
19. Original Prusa I3 MK3 [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://educube.ru/products/3d-printer-original-prusa-i3-mk3-sobranny/> (дата обращения: 05.07.2023).
20. Siemens Somatom Emotion 6. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://radio-med.ru/makers/kt/4-sreznnye-kt/kompyuternyy-tomograf-siemens-somatom-emotion-6/> (дата обращения: 05.07.2023).
21. Theratron Equinox 80 [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.theratronics.ca/product-equinox.html> (дата обращения: 05.07.2023).

RADIATION TESTING OF A SMALL LABORATORY ANIMAL PHANTOM CREATED BY FUSED FILAMENT FABRICATION

A.A. Grigorieva^{1,*}, A.A. Bulavskaya¹, E. A. Bushmina¹, V.A. Kuyvalaynen¹, I. A. Miloichikova^{1,2}, S.G. Stuchebrov¹

¹National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, 634050, Russia

²Cancer Research Institute, Tomsk National Research Medical Center, Russian Academy of Science, Tomsk, 634009, Russia

*e-mail: agrigorieva@tpu.ru

Received October 16, 2023; revised October 16, 2023; accepted October 24, 2023

In order to validate new radiotherapeutic techniques, a large number of studies using ionizing radiation are required. Such studies are often carried out using small laboratory animals, such as mice and rats, that is cause the ethical questions of the international scientific community. In this regard, the application of artificial animal models is relevant. It is allow to reduce the number of animals used. In previous studies, homogeneous monolithic test objects were fabricated and dosimetric tests were performed. 3D-printing parameters and materials were determined for the most accurate imitation of biological tissues. This study proposes to use fused filament fabrication techniques for design and creation of heterogeneous objects from different materials, which will allow the fabrication of phantoms with high accuracy in a short period of time. In this work, the male rat dosimetric phantom was designed and created. Its tomographic and dosimetric tests were carried out. The possibility of manufacturing dosimetric phantoms of small laboratory animals by fused filament fabrication methods was shown.

Keywords: dosimetry, dosimetric phantom, 3D printing, fused filament fabrication method, dosimetry film, dose distribution, computed tomography, gamma machine

REFERENCES

1. Kaprin A.D., Starinskij V.V., Shahazadova A.O. Zlokachestvennye novoobrazovaniya v 2019 godu [Malignant neoplasms in 2019]. M.: MNIOI im. P.A. Gercena, filial FGBU «NMIC radiologii» Minzdrava Rossii Publ., 2020. 252 p.
2. Gerber D.E., Chan T.A. Recent advances in radiation therapy. American family physician, 2008. Vol. 78. No. 11. Pp. 1254–1262.
3. DeWerd L.A. The phantoms of medical and health physics. Berlin, Springer, 2014. 290 p.
4. Mouse Phantom. Pre-clinical CT Phantoms. Available at: <https://www.leadstestobjects.com/index.php/phantom/mousephantom/> (accessed 19.06.2023).
5. Tillner F., Thute P., Löck S., Dietrich A., Fursov A., Haase R., Enghardt W. Precise image-guided irradiation of small animals: a flexible non-profit platform. Physics in Medicine & Biology, 2016. Vol. 61. No. 8. P. 3084.
6. Canessa E. Fonda C., Zennaro M., Deadline N. Low-cost 3D printing for science, education and sustainable development. Low-Cost 3D Printing, 2013. Vol. 11. No. 1.
7. Stuchebrov S.G. Bulavskaya, A.A., Cherepennikov Y.M., Grigorieva A.A., Miloichikova I.A. Development of the patient-specific phantom of the human arm part using 3D printing. Radiotherapy and Oncology, 2021. Vol. 161. Pp. 1309–1310.
8. Bulavskaya A., Cherepennikov Y., Gavrikov B., Grigorieva A., Grigoriev E., Miloichikova I., Stuchebrov S. Applicability of poly (styrene–butadiene–styrene) for three-dimensional printing of tissue-equivalent samples. 3D Printing and Additive Manufacturing, 2022. Vol. 9. No. 5. Pp. 399–404.
9. 3D Slicer image computing platform. Available at: <https://www.slicer.org/> (accessed 05.07.2023).
10. Nozdrachev A.D., Polyakov E.L. Anatomiya krysy (laboratornye zhivotnye) [Anatomy of a rat (laboratory animals)]. Saint Petersburg: Lan' Publ, 2001. 159 p.
11. Autodesk Fusion 360. Available at: <https://www.autodesk.com/products/fusion-360/overview?term=1-YEAR&tab=subscriptions> (accessed 05.07.2023).
12. Gafchromic (EBT2, EBT3, HD-810 et al.). Available at: <https://gafchromic.ru/catalog.php> (accessed 05.07.2023).
13. Marroquin E.Y.L., Herrera Gonzalez J.A., Camacho Lopez M.A., Barajas J.E.V., García-Garduño O.A. Evaluation of the uncertainty in an EBT3 film dosimetry system utilizing net optical density. Journal of applied clinical medical physics, 2016. Vol. 17. No. 5. Pp. 466–481.
14. RadiAnt DICOM Viewer. Available at: <https://www.radiantviewer.com/ru/> (accessed: 05.07.2023).
15. DenOtter T.D., Schubert J. Hounsfield Unit. StatPearls Publishing LLC, Treasure Island (FL), 2019.

РАДИАЦИОННЫЕ ИСПЫТАНИЯ ФАНТОМА МЕЛКОГО ЛАБОРАТОРНОГО
ЖИВОТНОГО, ИЗГОТОВЛЕННОГО МЕТОДАМИ ТРЕХМЕРНОЙ ПЕЧАТИ

16. Grigorieva A.A., Bulavskaya A.A., Miloichikova I.A., Cherepennikov Y.M., Stuchebrov S.G. Determination of the test-samples electron density via dual energy computer tomography. Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing, 2021. Vol. 1843. No. 1. Pp. 012021.

17. Miloichikova I., Bulavskaya A., Cherepennikov Y., Gargioni E., Grigorieva A., Stuchebrov S., Wegner M. Development of a digital three-dimensional rodent model for production of small laboratory animal phantoms European journal of nuclear medicine and molecular imaging, 2021. Vol. 48. P. S577.

18. Stuchebrov S.G., Bulavskaya A.A., Cherepennikov Y.M., Grigorieva A.A., Miloichikova I.A., Gargioni E. Making a copy of conventional anthropomorphic phantom section by 3D printing. European Journal of Nuclear Medicine and Molecular Imaging, 2020. Vol. 47. Pp. 313–314.

19. Original Prusa I3 MK3. Available at: <https://educube.ru/products/3d-printer-original-prusa-i3-mk3-sobrannyi/> (accessed: 05.07.2023).

20. Siemens Somatom Emotion 6. Available at: <https://radio-med.ru/makers/kt/4-sreznyie-kt/kompyuternyy-tomograf-siemens-somatom-emotion-6/> (accessed: 05.07.2023).

21. Theratron Equinox 80. Available at: http://www.theratronics.ca/product_equinox.html (accessed: 05.07.2023).

УДК 517.9

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И РЕДУКЦИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ТИПА МОНЖА – АМПЕРА

А.Д. Полянин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

e-mail: polyanin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию: 11.10.2023

После доработки: 11.10.2023

Принята к публикации: 24.10.2023

Исследуются нелинейные нестационарные уравнения математической физики с тремя независимыми переменными, которые содержат первую производную по времени и квадратичную комбинацию вторых производных по пространственным переменным типа Монжа – Ампера. Отдельные уравнения такого типа встречаются, например, в электронной магнитной гидродинамике и дифференциальной геометрии. В данной работе описано одиннадцатипараметрическое преобразование, сохраняющее вид исследуемого класса нелинейных уравнений. Рассмотрены двумерные и одномерные редукции, приводящие к более простым уравнениям в частных производных с двумя независимыми переменными или обыкновенным дифференциальным уравнениям. Получены автомодельные и другие инвариантные решения. Методами обобщенного разделения переменных построен ряд новых точных решений, многие из которых выражаются через элементарные функции.

Ключевые слова: нелинейные уравнения математической физики, нестационарные уравнения типа Монжа – Ампера, магнитная гидродинамика, автомодельные и инвариантные решения, решения с обобщенным разделением переменных, решения в элементарных функциях, одномерные и двумерные редукции.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.299

ВВЕДЕНИЕ

1. В плазменной электронной магнитной гидродинамике встречается нелинейное нестационарное уравнение математической физики типа Монжа – Ампера [1–3]:

$$u_t = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2. \quad (1)$$

В [4] были получены точные решения уравнения (1) в виде произведения функций разных аргументов: $u = X(x)Y(y)T(t)$. В [5] описано многопараметрическое преобразование, сохраняющее вид уравнения (1), а также двумерные и одномерные редукции, приводящие его к более простым уравнениям в частных производных с двумя независимыми переменными (в том числе к стационарным уравнениям типа Монжа – Ампера, нестационарным уравнениям теплопроводности и уравнениям нелинейной теории фильтрации) или обыкновенным дифференциальным уравнениям. Кроме того, методами обобщенного разделения переменных в [5] были построены точные решения, многие из которых допускают представление в элементарных функциях. В стационарном случае уравнение

(1) вырождается в однородное уравнение Монжа – Ампера, общее решение которого можно представить в параметрической форме [6]. Преобразования и точные решения этого и родственных стационарных уравнений типа Монжа – Ампера, которые возникают в газовой динамике (см., например, [7–9]), можно найти [9–11].

2. В данной работе будет анализироваться обобщенное уравнение магнитной гидродинамики с нелинейностью типа Монжа – Ампера

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = \sigma(u_t)^m, \quad (2)$$

где m и σ – некоторые постоянные. Уравнение (2) в частном случае $m = \sigma = 1$ переходит в уравнение электронной магнитной гидродинамики (1).

При $m = -1$ нестационарное уравнение типа Монжа – Ампера (2) и его обобщение на случай многих переменных, когда левая часть заменяется на $\det[u_{x_i x_j}]$, рассматривались во многих работах (см., например, [12–17]), в которых исследовались вопросы существования и единственности решений для различных внутренних и внешних начально-краевых задач. К нелиней-

ным уравнениям вида (2) сводятся также некоторые имеющие геометрические приложения параболические уравнения Монжа – Ампера [18–21].

3. Методы построения решений дифференциальных уравнений, основанные на упрощении уравнений, обычно называются редукциями. Наиболее важными для нелинейных уравнений математической физики являются одномерные редукции, используя которые, удастся представить их решения в терминах решений гораздо более простых обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В данной работе под точными решениями нелинейных уравнений математической физики понимаются решения, которые выражаются:

- (i) через элементарные функции;
- (ii) в квадратурах (с помощью элементарных функций и неопределенных интегралов);
- (iii) через решения ОДУ или систем ОДУ.

Отметим, что на практике точные решения нелинейных уравнений математической физики с частными производными используются для формулировки тестовых задач, предназначенных для оценки точности и верификации численных и приближенных аналитических методов.

Редукции и точные решения нелинейных уравнений с частными производными чаще всего строятся с использованием методов группового анализа [10, 22, 23], методов обобщенного и функционального разделения переменных [11, 24–26], метода дифференциальных связей [11, 25–27] и некоторых других аналитических методов [11, 26, 28–30].

В данной работе для поиска точных решений обобщенного уравнения магнитной гидродинамики (2) в основном использованы различные модификации метода обобщенного разделения переменных [11, 24–26] и приведенные в [11] точные решения более простых, чем исходное, промежуточных редуцированных уравнений с меньшим числом независимых переменных. Особое внимание уделяется построению простых точных решений, которые выражаются через элементарные функции. Отметим, что наличие нелинейности в правой части (2) существенно усложняет анализ этого уравнения.

НЕКОТОРЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. При $m \neq 2$ преобразование

$$\bar{x} = a_1x + b_1y + c_1, \quad \bar{y} = a_2x + b_2y + c_2,$$

$$\bar{t} = pt + q, \quad \bar{u} = ku + a_3x + b_3y + c_3, \quad (3)$$

$$k = |a_1b_2 - a_2b_1|^{\frac{2}{2-m}} p^{-\frac{m}{2-m}}, \quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0,$$

где $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, p, q$ – произвольные постоянные, приводит исходное уравнение (2) к уравнению точно такого же вида.

Одиннадцатипараметрическое инвариантное преобразование (3) позволяет с помощью более простых частных решений уравнения (2) строить его более сложные точные решения. А именно, если $u = \Phi(x, y, t)$ – решение уравнения (2), то функция

$$u = \frac{1}{k} \Phi(a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2, pt + q) + a_4x + b_4y + c_4,$$

$$k = |a_1b_2 - a_2b_1|^{\frac{2}{2-m}} p^{-\frac{m}{2-m}}, \quad k \neq 2,$$

где $a_4 = -a_3/k, b_4 = -b_3/k, c_4 = -c_3/k$ – новые произвольные постоянные, также является решением этого уравнения.

2. При $m = 2$ преобразование

$$\begin{aligned} \bar{x} &= a_1x + b_1y + c_1, \quad \bar{y} = a_2x + b_2y + c_2, \\ \bar{t} &= pt + q, \quad \bar{u} = ku + a_3x + b_3y + c_3, \quad (4) \\ p &= |a_1b_2 - a_2b_1|, \quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \end{aligned}$$

где $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, k, q$ – произвольные постоянные, приводит исходное уравнение (2) к уравнению точно такого же вида.

3. В полярных координатах r, φ , где $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, исходное уравнение (2) принимает вид

$$r^{-2} u_{rr} (u_{\varphi\varphi} + ru_r) - \left[(r^{-1} u_{\varphi})_r \right]^2 = \sigma(u_t)^m. \quad (5)$$

Это уравнение будет использовано далее для построения точных решений рассматриваемого уравнения.

4. В эллиптических координатах r, φ , где $x = ar \cos \varphi, y = br \sin \varphi$ (a и b – положительные константы), уравнение (2) записывается так:

$$r^{-2} u_{rr} (u_{\varphi\varphi} + ru_r) - \left[(r^{-1} u_{\varphi})_r \right]^2 = (ab)^2 \sigma(u_t)^m. \quad (6)$$

Видно, что уравнение (6) отличается от уравнения (5) только переобозначением коэффициента σ .

ДВУМЕРНЫЕ И ОДНОМЕРНЫЕ РЕДУКЦИИ, ОСНОВАННЫЕ НА ИНВАРИАНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

1. Переходя в (2) к переменным типа бегущей волны

$$u = U(\xi, \eta), \quad \xi = x + a_1 t, \quad \eta = y + a_2 t, \quad (7)$$

где a_1 и a_2 – произвольные постоянные, приходим к двумерному уравнению типа Монжа – Ампера

$$U_{\xi\xi}U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta}^2 = \sigma(a_1 U_\xi + a_2 U_\eta)^m, \quad (8)$$

которое не зависит явно от новых переменных ξ и η .

2. При $m \neq 2$, переходя в (2) к переменным автомодельного типа

$$u = t^{\frac{2\alpha+2\beta+m}{m-2}} U(\xi, \eta), \quad \xi = x t^\alpha, \quad \eta = y t^\beta, \quad (9)$$

где α и β – произвольные постоянные, получим двумерное уравнение типа Монжа – Ампера с переменными коэффициентами при младших производных:

$$U_{\xi\xi}U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta}^2 = \sigma \left(\alpha \xi U_\xi + \beta \eta U_\eta + \frac{2\alpha+2\beta+m}{m-2} U \right)^m. \quad (10)$$

Эквивалентную форму представления решения можно получить из (9), взяв вместо второго аргумента комбинацию обоих аргументов $\zeta = \xi^{-\beta} \eta^\alpha = x^{-\beta} y^\alpha$, что приводит к двумерному решению вида

$$u = t^{\frac{2\alpha+2\beta+m}{m-2}} U(\xi, \zeta), \quad \xi = x t^\alpha, \quad \zeta = y^\alpha x^{-\beta}. \quad (11)$$

Замечание 1. Подставляя $\alpha = \beta = 0$ в (9), приходим к двумерному решению с мультипликативным разделением переменных:

$$u = t^{\frac{m}{m-2}} U(x, y).$$

3. При $m \neq 2$, переходя в (2) к переменным предельного автомодельного типа

$$u = \exp \left[\frac{2(\alpha + \beta)}{m-2} t \right] U(\xi, \eta), \quad (12)$$

$$\xi = x \exp(\alpha t), \quad \eta = y \exp(\beta t),$$

где α и β – произвольные постоянные, получим другое двумерное уравнение типа Монжа – Ам-

пера с переменными коэффициентами при младших производных:

$$U_{\xi\xi}U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta}^2 = \sigma \left(\alpha \xi U_\xi + \beta \eta U_\eta + \frac{2(\alpha + \beta)}{m-2} U \right)^m. \quad (13)$$

Эквивалентную форму представления решения можно получить из (12), взяв вместо второго аргумента комбинацию обоих аргументов $\zeta = \xi^{-\beta} \eta^\alpha = x^{-\beta} y^\alpha$, что приводит к двумерному решению вида

$$u = \exp \left[\frac{2(\alpha + \beta)}{m-2} t \right] U(\xi, \zeta), \quad (14)$$

$$\xi = x \exp(\alpha t), \quad \zeta = y^\alpha x^{-\beta}.$$

4. При $m \neq 2$, переходя в (2) к инвариантным переменным

$$u = t^{\frac{m}{m-2}} U(\xi, \eta), \quad (15)$$

$$\xi = x + \lambda_1 \ln t, \quad \eta = y + \lambda_2 \ln t,$$

где λ_1 и λ_2 – произвольные постоянные, получим еще одно двумерное уравнение типа Монжа – Ампера с постоянными коэффициентами:

$$U_{\xi\xi}U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta}^2 = \sigma \left(\lambda_1 U_\xi + \lambda_2 U_\eta + \frac{m}{m-2} U \right)^m. \quad (16)$$

5. Уравнение (2) при $m \neq 2$ с использованием инвариантных переменных

$$u = x^{\frac{2}{2-m}} U(\xi, \eta), \quad (17)$$

$$\xi = t + \alpha \ln x, \quad \eta = y + \beta \ln x,$$

где α и β – произвольные постоянные, редуцируется к двумерному уравнению, которое здесь опускается. Значениям $\alpha = \beta = 0$ соответствует решение с мультипликативным разделением переменных.

6. Уравнение (2) при $m \neq 2$ с использованием инвариантных переменных

$$u = \exp \left(\frac{\alpha m - 2\beta}{2-m} x \right) U(\xi, \eta), \quad (18)$$

$$\xi = t \exp(\alpha x), \quad \eta = y \exp(\beta x),$$

редуцируется к двумерному уравнению, которое здесь опускается.

7. Уравнение (2) при $m \neq 2$ с использованием инвариантных переменных разного типа

$$u = \exp\left(\frac{2\alpha}{m-2}x\right)U(\xi, \eta), \quad (19)$$

$$\xi = t + \beta x, \quad \eta = y \exp(\alpha x),$$

редуцируется к двумерному уравнению, которое здесь опускается.

8. При $m = 2$ имеются решения с мультипликативным разделением переменных вида

$$u = e^{\lambda t}U(x, y), \quad (20)$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $U = U(x, y)$ описывается двумерным уравнением

$$U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2 = \sigma\lambda^2 U^2.$$

9. При $m = 2$ имеются другие решения с мультипликативным разделением переменных

$$u = e^{\gamma x}U(y, t). \quad (21)$$

где γ – произвольная постоянная, а функция $U = U(y, t)$ описывается двумерным уравнением

$$UU_{yy} - U_y^2 = \sigma\gamma^{-2}U_t^2.$$

Замечание 2. Более сложные двумерные редукции уравнения (2) можно получить, заменив в (7), (9), (12), (15), (17)–(21) пространственные переменные их произвольными линейными комбинациями по правилу $x \Rightarrow a_1x + b_1y$ и $y \Rightarrow a_2x + b_2y$.

10. Одномерные редукции и точные решения можно получить, например, используя двумерные редукции. Проиллюстрируем сказанное на нескольких конкретных примерах.

В представлении (11) будем считать, что функция V зависит только от второго аргумента. В результате приходим к одномерному инвариантному решению

$$u = t^{\frac{2\alpha+2\beta+m}{m-2}}V(\zeta), \quad \zeta = y^\alpha x^{-\beta}. \quad (22)$$

Параметры α и β выбираются так, чтобы после подстановки выражения (22) в исходное уравнение (2) получилось ОДУ для функции $V = V(\zeta)$.

В представлении (14) будем считать, что функция V зависит только от второго аргумента. В результате приходим к одномерному инвариантному решению

$$u = \exp\left[\frac{2(\alpha+\beta)}{m-2}t\right]V(\zeta), \quad \zeta = y^\alpha x^{-\beta}. \quad (23)$$

Параметры α и β выбираются так, чтобы после подстановки выражения (23) в исходное уравнение (2) получилось ОДУ для функции $V = V(\zeta)$.

При $m = 2$ имеется решение вида

$$u = \exp(a_1x + b_1y + c_1t)U(\xi), \quad \xi = a_2x + b_2y + c_2t,$$

где $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ – произвольные постоянные, а функция $U = U(\xi)$ удовлетворяет автономному ОДУ

$$UU''_{\xi\xi} - (U'_\xi)^2 = \sigma(a_1b_2 - a_2b_1)^{-2}(c_1U + c_2U'_\xi)^2. \quad (24)$$

Уравнение (24) при $c_1 = 0$ легко интегрируется и имеет простое решение:

$$U = (A\xi + B)^{-k}, \quad k = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{\sigma c_2^2},$$

где A, B – произвольные постоянные.

При $c_2 = 0$ общее решение уравнения (24) дается формулой

$$U = A \exp(\lambda \xi^2 + B\xi), \quad \lambda = \frac{1}{2}\sigma c_1^2 (a_1b_2 - a_2b_1)^{-2},$$

где A, B – произвольные постоянные.

РЕДУКЦИИ С АДДИТИВНЫМ РАЗДЕЛЕНИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ, ВЕДУЩИЕ К СТАЦИОНАРНЫМ УРАВНЕНИЯМ МОНЖА – АМПЕРА

1. Уравнение (2) имеет решения с аддитивным разделением переменных вида

$$u = At + w(x, y), \quad (25)$$

где A – произвольная постоянная, а функция w описывается неоднородным уравнением Монжа – Ампера с постоянной правой частью:

$$w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2 = \sigma A^m. \quad (26)$$

2. Нетрудно проверить, что уравнение (2) допускает точное решение с аддитивным разделением переменных вида (25), которое выражается в элементарных функциях:

$$u = C_1x^2 + C_2xy + \frac{1}{4C_1}(\sigma A^m + C_2^2)y^2 + C_4x + C_5y + At + C_6, \quad (27)$$

где $A, C_1, \dots, C_5$ ($C_1 \neq 0$) – произвольные постоянные.

3. Используя результаты [11], можно получить, например, следующие точные решения вида (25) уравнения (2):

$$\begin{aligned} u &= At \pm \frac{\sqrt{-\sigma A^m}}{C_2} x (C_1 x + C_2 y) + \\ &+ \varphi(C_1 x + C_2 y) + C_3 x + C_4 y + C_5, \\ u &= At + \frac{1}{x + C_1} \left(C_2 y^2 + C_3 y + \frac{C_3^2}{4C_2} \right) + \\ &+ \frac{\sigma A^m}{12C_2} (x^3 + 3C_1 x^2) + C_4 y + C_5 x + C_6, \\ u &= At \pm \frac{2\sqrt{-\sigma A^m}}{3C_1 C_2} (C_1 x - C_2^2 y^2 + C_3)^{3/2} + \\ &+ C_4 x + C_5 y + C_6, \end{aligned}$$

где $C_1, \dots, C_6$ – произвольные постоянные, $\varphi = \varphi(z)$ – произвольная функция.

Замечание 3. При $\sigma A^m < 0$ общее решение неоднородного уравнения Монжа – Ампера (26) можно представить в параметрическом виде [6, 11].

4. Уравнение (2) допускает более сложные, чем (25), решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = (ax + by + c)t + w(x, y), \quad (28)$$

где a, b, c – произвольные постоянные, а функция w описывается неоднородным уравнением Монжа – Ампера с переменной правой частью:

$$w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2 = \sigma(ax + by + c)^m. \quad (29)$$

При $a = 1, b = c = 0$ уравнение (29) имеет, например, следующие точные решения с обобщенным разделением переменных:

$$\begin{aligned} w &= \pm \frac{2\sqrt{-\sigma}}{m+2} x^{\frac{m+2}{2}} y + C_1 y + \varphi(x), \\ w &= C_1 y^2 + C_2 xy + \frac{C_2^2}{4C_1} x^2 + \\ &+ \frac{\sigma}{2C_1(m+1)(m+2)} x^{m+2} + C_3 x + C_4 y + C_5, \\ w &= \frac{1}{x} \left(C_1 y^2 + C_2 y + \frac{C_2^2}{4C_1} \right) + \\ &+ \frac{\sigma}{2C_1(m+2)(m+3)} x^{m+3} + C_3 x + C_4 y + C_5, \end{aligned}$$

где $\varphi(x)$ – произвольная функция; $C_1, \dots, C_5$ – произвольные постоянные.

РЕДУКЦИИ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ РАЗДЕЛЕНИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ, ВЕДУЩИЕ К СТАЦИОНАРНЫМ УРАВНЕНИЯМ МОНЖА – АМПЕРА

1. Уравнение (2) при $m \neq 2$ имеет решения с мультипликативным разделением переменных:

$$u = (t + A)^{\frac{m}{m-2}} U(x, y), \quad (30)$$

где A – произвольная постоянная, а функция $U = U(x, y)$ описывается стационарным уравнением Монжа – Ампера

$$U_{xx} U_{yy} - U_{xy}^2 = \sigma \left(\frac{m}{m-2} \right)^m U^m. \quad (31)$$

Уравнение (31), в свою очередь, допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$U = x^{\frac{2}{2-m}} \theta(y),$$

где $\theta = \theta(y)$ удовлетворяет автономному ОДУ:

$$2m\theta\theta''_{yy} - 4(\theta'_y)^2 = \sigma(m-2)^2 \left(\frac{m}{m-2} \right)^m \theta^m.$$

Подстановка $Z(\theta) = (\theta'_y)^2$ приводит это уравнение к линейному ОДУ первого порядка:

$$m\theta Z'_\theta - 4Z = \sigma(m-2)^2 \left(\frac{m}{m-2} \right)^m \theta^m,$$

которое легко интегрируется.

2. Уравнение (2) при $m = 2$ допускает решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = e^{\lambda t} U(x, y), \quad (32)$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $U = U(x, y)$ описывается стационарным уравнением Монжа – Ампера

$$U_{xx} U_{yy} - U_{xy}^2 = \sigma \lambda^2 U^2. \quad (33)$$

Уравнение (33) допускает решение с мультипликативным разделением переменных:

$$U = C_1 e^{\beta x} \theta(y), \quad \theta = \exp \left[\frac{1}{2} \sigma \left(\frac{\lambda}{\beta} \right)^2 y^2 + C_2 y \right],$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

РЕДУКЦИЯ С ОБОБЩЕННЫМ
РАЗДЕЛЕНИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ,
ПРИВОДЯЩАЯ К ДВУМЕРНОМУ
НЕСТАЦИОНАРНОМУ УРАВНЕНИЮ

1. Уравнение (2) допускает решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \frac{1}{2} y^2 + axy + \frac{1}{2} a^2 x^2 + by + U(x, t), \quad (34)$$

где a, b – произвольные постоянные, а функция $U = U(x, t)$ описывается сравнительно простым нелинейным уравнением

$$U_{xx} = \sigma U_t^m. \quad (35)$$

Для уравнения магнитной гидродинамики (1), что соответствует $m = \sigma = 1$, редуцированное уравнение (35) является линейным уравнением теплопроводности.

Некоторые точные решения уравнения (35) описаны ниже.

2. Уравнение (35) имеет простое решение с аддитивным разделением переменных:

$$U = At + \frac{1}{2} \sigma A^m x^2 + Bx + C,$$

где A, B, C – произвольные постоянные.

3. Уравнение (35) имеет точное решение в виде произведения функций разных аргументов $U = T(t)X(x)$, в том числе простое решение:

$$U = A(t + C_1)^{\frac{m}{m-1}} (x + C_2)^{\frac{2}{1-m}},$$

$$A = \left[\frac{2(m+1)(m-1)^{m-2}}{\sigma m^m} \right]^{\frac{1}{m-1}},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

4. Уравнение (35) имеет решение типа бегущей волны:

$$U = U(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $U(z)$ описывается простым автономным ОДУ

$$U''_{zz} = \sigma \lambda^m (U'_z)^m,$$

общее решение которого при $m \neq 1, 2$ определяется формулой

$$U = \frac{1}{(2-m)\sigma \lambda^m} \left[(1-m)\sigma \lambda^m z + C_1 \right]^{\frac{2-m}{1-m}} + C_2,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Уравнение (35) имеет также более общее решение вида

$$u = ax^2 + bx + ct + U(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где a, b, c, λ – произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается автономным ОДУ

$$U''_{zz} = \sigma (\lambda U'_z + c)^m - 2a.$$

5. Уравнение (35) допускает автомодельное решение

$$U = t^{\frac{m+2\beta}{m-1}} V(\zeta), \quad \zeta = xt^\beta,$$

где функция $V(\zeta)$ описывается неавтономным ОДУ

$$V''_{\zeta\zeta} = \sigma \left(\frac{m+2\beta}{m-1} V + \beta \zeta V'_\zeta \right)^m.$$

6. Уравнение (35) имеет инвариантное решение вида

$$U = t^{\frac{m}{m-1}} \theta(z), \quad z = x + \beta \ln t, \quad (36)$$

где β – произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(z)$ описывается автономным ОДУ

$$\theta''_{zz} = \sigma \left(\frac{m}{m-1} \theta + \beta \theta'_z \right)^m.$$

Общее решение этого уравнения при $\beta = 0$, что соответствует решению с мультипликативным разделением переменных (36), можно представить в неявной форме.

7. Уравнение (35) имеет другое инвариантное решение вида

$$U = \exp \left(\frac{2\beta}{m-1} t \right) W(\xi), \quad \xi = x \exp(\beta t), \quad (37)$$

где β – произвольная постоянная, а функция $W = W(\xi)$ описывается неавтономным ОДУ

$$W''_{\xi\xi} = \sigma \left(\frac{2\beta}{m-1} W + \beta \xi W'_\xi \right)^m.$$

8. Уравнение (35) при $m = -1$ с помощью преобразования Эйлера [11]

$$U(x, t) + w(\xi, \tau) = x\xi, \quad x = w_\xi, \quad t = -\tau/\sigma,$$

приводится к линейному уравнению теплопроводности

$$w_\tau = w_{\xi\xi}.$$

РЕДУКЦИЯ К СТАЦИОНАРНОМУ УРАВНЕНИЮ МОНЖА – АМПЕРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ ТИПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

1. Уравнение (2) допускает решения с обобщенным разделением переменных комбинированного типа

$$\begin{aligned} u &= C_1x^2 + C_2xy + C_3y^2 + \\ &+ C_4x + C_5y + C_6t + U(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (38)$$

$$\xi = a_1x + b_1y + \lambda_1t, \quad \eta = a_2x + b_2y + \lambda_2t,$$

где C_i, a_j, b_j, λ_j ($i = 1, \dots, 6; j = 1, 2$) – произвольные постоянные; ξ и η – новые переменные типа бегущей волны, а функция $U = U(\xi, \eta)$ описывается стационарным уравнением типа Монжа – Ампера

$$\begin{aligned} &(a_1b_2 - b_1a_2)^2(U_{\xi\xi}U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta}^2) + \\ &+ 2(a_1^2C_3 + b_1^2C_1 - a_1b_1C_2)U_{\xi\xi} + \\ &+ 2(a_2^2C_3 + b_2^2C_1 - a_2b_2C_2)U_{\eta\eta} + \\ &+ 2[2a_1a_2C_3 + 2b_1b_2C_1 - (a_1b_2 + a_2b_1)C_2]U_{\xi\eta} + \\ &+ 4C_1C_3 - C_2^2 = \sigma(C_6 + \lambda_1U_\xi + \lambda_2U_\eta)^m. \end{aligned} \quad (39)$$

2. Рассмотрим специальный случай (38)–(39), положив

$$a_1 = a, b_1 = b, \lambda_1 = \lambda, a_2 = b_2 = 0, \lambda_2 = 1, \eta = t,$$

что соответствует решению вида

$$\begin{aligned} u &= C_1x^2 + C_2xy + C_3y^2 + \\ &+ C_4x + C_5y + C_6t + U(\xi, t), \end{aligned} \quad (40)$$

$$\xi = ax + by + \lambda t,$$

где C_i, a, b, λ ($i = 1, \dots, 6$) – произвольные постоянные. В этом случае функция $U = U(\xi, t)$ описывается нелинейным уравнением

$$\begin{aligned} &2(a^2C_3 + b^2C_1 - abC_2)U_{\xi\xi} = \\ &= \sigma(C_6 + U_t + \lambda U_\xi)^m - 4C_1C_3 + C_2^2. \end{aligned} \quad (41)$$

3. В частности, взяв в (40)–(41) функцию U с одним аргументом ξ , приходим к нелинейному ОДУ автономного вида

$$\begin{aligned} &2(a^2C_3 + b^2C_1 - abC_2)U_{\xi\xi}'' = \\ &= \sigma(C_6 + \lambda U_\xi')^m - 4C_1C_3 + C_2^2. \end{aligned} \quad (42)$$

Подстановка $W(\xi) = U_\xi'$ приводит его к ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными. При выполнении условий $4C_1C_3 - C_2^2 = 0, m \neq 1, 2$, общее решение уравнения (42) записывается так:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{A(2-m)}[A(1-m)\xi + B_1]^{\frac{2-m}{1-m}} - \frac{C_6}{\lambda}\xi + B_2, \\ A &= \frac{\sigma\lambda^m}{2(a^2C_3 + b^2C_1 - abC_2)}, \end{aligned}$$

где B_1 и B_2 – произвольные постоянные.

РЕДУКЦИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ КООРДИНАТАМ

1. В переменных, одна из которых время, а другая задается параболической функцией по пространственным переменным

$$u = U(z, t), \quad z = y + ax^2, \quad (43)$$

где a – произвольная постоянная, уравнение (2) редуцируется к двумерному уравнению

$$2aU_zU_{zz} = \sigma(U_t)^m. \quad (44)$$

Некоторые точные решения уравнения (44) описаны ниже.

2. Редуцированное уравнение (44) допускает решения с аддитивным разделением переменных

$$U = C_1t \pm \frac{2}{3} \frac{\sqrt{\sigma C_1^m}}{a} (z + C_2)^{3/2} + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

3. Уравнение (35) при $m \neq 2$ имеет простое решение в виде произведения степенных функций разных аргументов

$$\begin{aligned} U &= A(t + C_1)^{\frac{m}{m-2}}(z + C_2)^{\frac{3}{2-m}}, \\ A &= \left[-\frac{18a(m+1)(m-2)^{m-3}}{\sigma m^m} \right]^{\frac{1}{m-2}}, \end{aligned}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

4. Уравнение (44) имеет решения типа бегущей волны:

$$U = U(\xi), \quad \xi = z + \lambda t \equiv y + ax^2 + \lambda t, \quad (45)$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $U(z)$ описывается автономным ОДУ

$$2aU''_{\xi\xi} = \sigma\lambda^m (U'_\xi)^{m-1},$$

общее решение которого при $m \neq 2, 3$ определяется формулой

$$U = \frac{1}{\kappa(3-m)} [\kappa(2-m)\xi + C_1]^{\frac{3-m}{2-m}} + C_2, \quad \kappa = \frac{\sigma\lambda^m}{2a},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Замечание 4. Более общее, чем (45), решение уравнения (44) можно получить, если искать решение в виде

$$U = Ct + W(\xi), \quad \xi = z + \lambda t \equiv y + ax^2 + \lambda t.$$

5. Уравнение (44) при $m \neq 2$ допускает автономные решения:

$$U = t^{\frac{m+3\beta}{m-2}} V(\zeta), \quad \zeta = zt^\beta,$$

где β – произвольная постоянная, а функция $V = V(\zeta)$ описывается неавтономным ОДУ

$$2aV'_\zeta V''_{\zeta\zeta} = \sigma \left(\frac{m+3\beta}{m-2} V + \beta\zeta V'_\zeta \right)^m.$$

6. Уравнение (44) при $m \neq 2$ имеет инвариантные решения вида

$$U = t^{\frac{m}{m-2}} f(\eta), \quad \eta = z + \lambda t,$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $f = f(\eta)$ описывается автономным ОДУ

$$2af'_\eta f''_{\eta\eta} = \sigma \left(\frac{m}{m-2} f + \lambda f'_\eta \right)^m.$$

7. Уравнение (44) при $m \neq 2$ допускает также другие инвариантные решения:

$$U = \exp\left(\frac{3\beta}{m-2}t\right) g(\tau), \quad \tau = \exp(\beta t)z,$$

где β – произвольная постоянная, а функция $g = g(\tau)$ описывается неавтономным ОДУ

$$2ag'_\tau g''_{\tau\tau} = \sigma \left(\frac{3\beta}{m-2} g + \beta\tau g'_\tau \right)^m.$$

8. Уравнение (44) при $m = 2$ имеет простые решения экспоненциального вида

$$U = A \exp[kz \pm (2ak^3/\sigma)^{1/2}t],$$

где A, k – произвольные постоянные. Имеются также более сложные решения вида $U = e^{\lambda t} \varphi(z)$, где функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается автономным ОДУ, общее решение которого можно представить в неявном виде.

РЕДУКЦИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ КВАДРАТИЧНОГО ВИДА ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ КООРДИНАТАМ

1. В переменных, одна из которых время, а другая квадратична относительно пространственных переменных,

$$u = U(z, t), \quad z = ax^2 + bxy + cy^2 + kx + sy, \quad (46)$$

где a, b, c, k, s – произвольные постоянные, уравнение (2) редуцируется к двумерному нестационарному уравнению

$$2(Az + B)U_z U_{zz} + AU_z^2 = \sigma(U_t)^m; \quad (47)$$

$$A = 4ac - b^2, \quad B = as^2 + ck^2 - bks.$$

Отметим, что в зависимости от коэффициентов квадратичных слагаемых a, b, c в (46), кривая $z = \text{const}$ может быть эллипсом (при $A = 4ac - b^2 > 0$), гиперболой (при $A < 0$) или параболой (при $A = 0$).

Рассмотрим некоторые классы точных решений, которые допускает уравнение (47).

2. Редуцированное уравнение (47) допускает решения с аддитивным разделением переменных

$$U = Ct + \zeta(z),$$

где C – произвольная постоянная, а функция $\zeta = \zeta(z)$ описывается нелинейным ОДУ

$$2(Az + B)\zeta'_z \zeta''_{zz} + A(\zeta'_z)^2 = \sigma C^m,$$

которое легко интегрируется, поскольку допускает понижение порядка и одновременно линеаризуется с помощью подстановки $w(z) = (\zeta'_z)^2$. В результате получим

$$\zeta = \pm \int \left(\frac{C_1}{Az+B} + \frac{\sigma C^m}{A} \right)^{1/2} dz + C_2,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные (отметим, что интеграл правой части можно выразить через элементарные функции).

3. При $4ac - b^2 \neq 0$, $m \neq 2$, редуцированное уравнение (47) допускает решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$U = t^{\frac{m}{m-2}} f(z),$$

где функция $f = f(z)$ описывается неавтономным ОДУ

$$2(Az+B)f'_z f''_{zz} + A(f'_z)^2 = \sigma \left(\frac{m}{m-2} \right)^m f^m,$$

которое имеет простое частное решение:

$$f = k(Az+B)^{\frac{2}{2-m}},$$

$$k = \left[\frac{4A^3(m+2) \left(\frac{m-2}{m} \right)^m}{\sigma(2-m)^3} \right]^{\frac{1}{m-2}}.$$

4. При $4ac - b^2 \neq 0$, $m \neq 2$, редуцированное уравнение (47) допускает решения квазиавто-модельного вида

$$U = t^{\frac{m+2\beta}{m-2}} V(\eta), \quad \eta = (Az+B)t^\beta, \quad (48)$$

где β – произвольная постоянная, а функция $V = V(\eta)$ удовлетворяет нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$2\eta V'_\eta V''_{\eta\eta} + (V'_\eta)^2 = \sigma A^{-3} \left(\frac{m+2\beta}{m-2} V + \beta \eta V'_\eta \right)^m. \quad (49)$$

5. При $4ac - b^2 \neq 0$ преобразование

$$t = t, \quad z = \frac{\sqrt{|A|}}{2} \rho^2 - \frac{B}{A}, \quad U = W(\rho, t),$$

приводит уравнение (47) к каноническому виду

$$\text{sign } A \rho^{-1} W_\rho W_{\rho\rho} = \sigma (W_t)^m. \quad (50)$$

РЕДУКЦИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

1. Уравнение (5), записанное в полярных координатах $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, допускает не

зависящие от угловой переменной радиально-симметричные решения, которые описываются двумерным уравнением

$$r^{-1} u_r u_{rr} = \sigma (u_t)^m, \quad (51)$$

которое с точностью до переобозначения независимой переменной совпадает с уравнением (50) при $A > 0$. Три точных решения уравнения (51) получим, используя результаты, приведенные в пп. 2–4 предыдущего раздела.

2. Уравнение (51) имеет точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u = (C_1 C_2^2)^{\frac{1}{m}} t + C_2 \int \sqrt{\sigma C_1 r^2 + C_3} dr + C_4,$$

где $C_1, \dots, C_4$ – произвольные постоянные (при различных знаках произведения σC_1 интеграл в правой части выражается через разные элементарные функции).

3. Уравнение (51) при $m \neq 2$ допускает автономное решение

$$u = t^{\frac{m+4\gamma}{m-2}} F(z), \quad z = rt^\gamma,$$

где γ – произвольная постоянная, а функция $F = F(z)$ описывается ОДУ

$$z^{-1} F'_z F''_{zz} = \sigma \left(\frac{m+4\gamma}{m-2} F + \gamma z F'_z \right)^m. \quad (52)$$

4. Уравнение (5) при $m \neq 2$ имеет также точные решения с разделением переменных вида

$$u = r^{\frac{4}{2-m}} v(\varphi, t), \quad (53)$$

где функция $v = v(\varphi, t)$ описывается двумерным уравнением

$$\frac{4(2+m)}{(2-m)^2} v \left(v_{\varphi\varphi} + \frac{4}{2-m} v \right) - \left(\frac{2+m}{2-m} \right)^2 v_\varphi^2 = \sigma v_t^m. \quad (54)$$

5. Поскольку уравнение (54) не зависит явно от независимых переменных, то оно имеет решение типа бегущей волны:

$$v = v(Z), \quad Z = \varphi + \lambda t,$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $v = v(Z)$ описывается автономным ОДУ

$$\frac{4(2+m)}{(2-m)^2} v \left(v''_{zz} + \frac{4}{2-m} v \right) - \left(\frac{2+m}{2-m} \right)^2 (v'_z)^2 = \sigma \lambda^m (v'_z)^m.$$

6. Уравнение (54) допускает решение с мультипликативным разделением переменных вида

$$v = (t + C)^{\frac{m}{m-2}} V(\varphi),$$

где C – произвольная постоянная, а функция $V = V(\varphi)$ описывается автономным ОДУ

$$\begin{aligned} \frac{4(2+m)}{(2-m)^2} V \left(V''_{\varphi\varphi} + \frac{4}{2-m} V \right) - \left(\frac{2+m}{2-m} \right)^2 (V'_\varphi)^2 = \\ = \sigma \left(\frac{m}{m-2} \right)^m V^m. \end{aligned}$$

Имеется также более общее решение вида

$$v = (t + C_1)^{\frac{m}{m-2}} V(\zeta), \quad \text{где} \quad \zeta = \varphi + C_2 \ln(t + C_1).$$

КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Исследуется обобщенное уравнение электронной магнитной гидродинамики с нелинейностью типа Монжа – Ампера

$$u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = \sigma (u_t)^m,$$

которое встречается также в дифференциальной геометрии. Рассматриваются двумерные и одномерные редукции, приводящие его к более простым уравнениям с частными производными с двумя независимыми переменными (в том числе к стационарным уравнениям типа Монжа – Ампера) или обыкновенным дифференциальным уравнениям. Описаны некоторые автомодельные и другие инвариантные решения. Построен ряд решений с обобщенным разделением переменных, которые выражаются в элементарных функциях. Полученные результаты могут быть использованы для оценки точности и анализа адекватности численных методов решения сильно нелинейных задач математической физики.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена по теме государственного задания (регистр. № 123021700057-0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smirnov V.V., Chukbar K.V. «Phonons» in two-dimensional vortex lattices // Journal of Experimental and Theoretical Physics, 2001. V. 93. № 1. P. 126–135.
2. Zaburdaev V.Yu., Smirnov V.V., Chukbar K.V. Nonlinear dynamics of electron vortex lattices // Plasma Physics Reports, 2014. V. 30. № 3. P. 214–217.
3. Ohkitani K., Sultu F. Al. Singularity formation in the Smirnov–Chukbar–Zaburdaev equation for the deformation of vortex lattices // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2013. V. 46. № 20.
4. Dubinov A.E., Kitayev I.N. New exact solutions of the equation of non-linear dynamics of a lattice of electronic vortices in plasma in the framework of electron magnetohydrodynamics // Magnetohydrodynamics, 2020. V. 56. № 4. P. 369–375.
5. Полянин А.Д. Преобразования, редукции и точные решения одного сильно нелинейного уравнения электронной магнитной гидродинамики // Вестник НИЯУ МИФИ, 2023. Т. 12. № 4. С. 201–210.
6. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3, Ч. 1. М.: Гостехиздат, 1933.
7. Martin M.N. The propagation of a plane shock into a quiet atmosphere // Canadian Journal of Mathematics, 1953. V. 3. P. 165–187.
8. Rozhdestvenskii B.L., Yanenko N.N. Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics. Providence: American Mathematical Society, 1983, 676 p.
9. Хабиров С.В. Неизэнтропические одномерные движения газа, построенные с помощью контактной группы неоднородного уравнения Монжа – Ампера // Математический сборник, 1990. V. 181. № 12. P. 1607–1622.
10. Ibragimov N.H. (ed.). CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 1. Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. Boca Raton: CRC Press, 1994.
11. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Non-linear Partial Differential Equations. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.
12. Крылов Н.В. Последовательности выпуклых функций и оценки максимума решения параболического уравнения // Сибирский математический журнал, 1976. Т. 17. № 2. С. 226–236.
13. Spiliotis J. Certain results on a parabolic type Monge – Ampere equation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1992. V. 163. № 2. P. 484–511.
14. Chen L., Wang G., Lian S. Convex-monotone functions and generalized solution of parabolic Monge – Ampere equation // Journal of Differential Equations, 2002. V. 186. № 2. P. 558–571.
15. Tang L. Regularity results on the parabolic Monge – Ampere equation with VMO type data // Journal of Differential Equations, 2013. V. 255. № 7. P. 1646–1656.

16. Dai L. Exterior problems of parabolic Monge – Ampere equations for $n = 2$ // *Computational & Applied Mathematics*, 2014. V. 67. № 8. P. 1497–1506.
17. Dai L., Cheng H. The first initial-boundary value problem of parabolic Monge – Ampere equations outside a bowl-shaped domain // *Boundary Value Problems*, 2021. № 29. Режим доступа: <https://doi.org/10.1186/s13661-021-01505-w>
18. Ивочкина Н.М., Ладыженская О.А. О параболических уравнениях, порожаемых симметрическими функциями собственных значений гессиана или главными кривизнами искомой поверхности. Ч. I: Параболические уравнения Монжа – Ампера // *Алгебра и анализ*. 1994. Т. 6. № 3. С. 141–160.
19. Wang J., Yang J., Liu X. The initial and Neumann boundary value problem for a class parabolic Monge – Ampere equation // *Abstract and Applied Analysis*. V. 2013. № 535629. Режим доступа: <http://dx.doi.org/10.1155/2013/535629>.
20. Tang L. Boundary regularity on the parabolic Monge – Ampere equation // *Journal of Differential Equations*, 2015. V. 259. P. 6399–6431.
21. Loftin J., Tsui M.P. Ancient solutions of the affine normal flow // *Journal of Differential Geometry*, 2008. V. 78. P. 113–162.
22. Ovsiannikov L.V. *Group Analysis of Differential Equations*. New York: Academic Press, 1982.
23. Olver P.J. *Application of Lie Groups to Differential Equations*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2000.
24. Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. *Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics*. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2007.
25. Полянин А.Д., Журов А.И. Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. М.: ИПМех РАН, 2020.
26. Polyanin A.D., Zhurov A.I. *Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs*. Boca Raton–London: CRC Press, 2022.
27. Сидоров А.Ф., Шанеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.
28. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Изд. Дом «Интеллект», 2010.
29. Aksenov A.V., Polyanin A.D. Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions // *Mathematics*, 2021. V. 9. № 4. 345.
30. Аксенов А.В., Полянин А.Д. Обзор методов построения точных решений уравнений математической физики, основанных на использовании более простых решений // *Теоретическая и математическая физика*, 2022. V. 211. № 2. P. 567–594.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 5, pp. 276–288

EXACT SOLUTIONS AND REDUCTIONS OF UNSTEADY EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS OF THE MONGE – AMPERE TYPE

A.D. Polyanin

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526, Russia
e-mail: polyanin@ipmnet.ru

Received October 11, 2023; revised October 11, 2023; accepted October 24, 2023

Nonlinear unsteady equations of mathematical physics with three independent variables containing the first derivative in time and a quadratic combination of the second derivatives in spatial variables of the Monge – Ampere type are investigated. Separate equations of this type are found, for example, in electron magnetohydrodynamics and differential geometry. In this paper, an eleven-parameter transformation preserving the form of the class of nonlinear equations under study is described. Two-dimensional and one-dimensional reductions leading to simpler partial differential equations with two independent variables or ordinary differential equations are considered. Self-similar and other invariant solutions are obtained. By methods of generalized separation of variables, a number of exact solutions are constructed, many of which are expressed in terms of elementary functions.

Keywords: nonlinear equations of mathematical physics, unsteady equations of the Monge – Ampere type, magnetohydrodynamics, exact solutions, self-similar and invariant solutions, generalized separable solutions, solutions in elementary functions, one-dimensional and two-dimensional reductions.

REFERENCES

1. Smirnov V.V., Chukbar K.V. «Phonons» in two-dimensional vortex lattices. Journal of Experimental and Theoretical Physics, 2001. Vol. 93. No. 1. Pp. 126–135.
2. Zaburdaev V.Yu., Smirnov V.V., Chukbar K.V. Nonlinear dynamics of electron vortex lattices. Plasma Physics Reports, 2014. Vol. 30. No. 3. Pp. 214–217.
3. Ohkitani K., Sultu F. Al. Singularity formation in the Smirnov–Chukbar–Zaburdaev equation for the deformation of vortex lattices, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2013. Vol. 46. No. 20, 205501.
4. Dubinov A.E., Kitayev I.N. New exact solutions of the equation of non-linear dynamics of a lattice of electronic vortices in plasma in the framework of electron magnetohydrodynamics. Magnetohydrodynamics, 2020. Vol. 56. No. 4. Pp. 369–375.
5. Polyanin A.D., Preobrazvaniya. Redukcii i tochnye resheniya odnogo sil'no nelinejnogo uravneniya elektronnoj magnitnoj gidrodinamiki [Transformations, reductions and exact solutions of a highly nonlinear equation of electron magnetohydrodynamics], Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2023. Vol. 12. No. 4. Pp. 201–210 (in Russian).
6. Goursat E. Kurs matematicheskogo analiza. [A course of mathematical analysis]. Vol. 3, Part 1, Moscow, Gostekhizdat Publ., 1933 [in Russian].
7. Martin M.N. The propagation of a plane shock into a quiet atmosphere. Canadian Journal of Mathematics, 1953. Vol. 3. Pp. 165–187.
8. Rozhdestvenskii B.L., Yanenko N.N. Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics. Providence, American Mathematical Society, 1983. 676 p.
9. Khabirov S.V. Neizentropicheskie odnomernye dvizheniya gaza, postroennye s pomoshch'yu kontaktnoj gruppy neodnorodnogo uravneniya Monzha–Ampera [Nonisotropic one-dimensional gas motions obtained with the help of the contact group of the nonhomogeneous Monge – Ampere equation]. Matematicheskij sbornik, 1990, Vol. 181. No. 12. Pp. 1607–1622 (in Russian).
10. Ibragimov N.H. (ed.). CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 1, Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws, CRC Press. Boca Raton. 1994.
11. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. 2nd ed. CRC Press, Boca Raton, 2012.
12. Krylov N.V. Posledovatel'nosti vy'pukly'kh funkczij i ocenki maksimuma resheniya parabolicheskogo uravneniya [Sequences of convex functions, and estimates of the maximum of the solution of a parabolic equation]. Sibirskij matematicheskij zhurnal, 1976. Vol. 17. No. 2. Pp. 226–236 (in Russian).
13. Spiliotis J. Certain results on a parabolic type Monge – Ampere equation. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1992. Vol. 163. No. 2. Pp. 484–511.
14. Chen L., Wang G., Lian S. Convex-monotone functions and generalized solution of parabolic Monge – Ampere equation. Journal of Differential Equations, 2002. Vol. 186. No. 2. Pp. 558–571.
15. Tang L. Regularity results on the parabolic Monge – Ampere equation with VMO type data. Journal of Differential Equations, 2013. Vol. 255. No. 7. Pp. 1646–1656.
16. Dai L. Exterior problems of parabolic Monge – Ampere equations for $n = 2$, Computational & Applied Mathematics, 2014. Vol. 67. No. 8. Pp. 1497–1506.
17. Dai L., Cheng H. The first initial-boundary value problem of parabolic Monge – Ampere equations outside a bowl-shaped domain. Boundary Value Problems, 2021. No. 29; <https://doi.org/10.1186/s13661-021-01505-w>
18. Ivochkina N.M., Ladyzhenskaya O.A. O parabolicheskikh uravneniyah, porozhdaemyh simmetricheskimi funkciyami sobstvennyh znachenij Gessiana ili glavnymi kriviznami iskomoj poverhnosti. Chast' I: Parabolicheskie uravneniya Monzha – Ampera [On parabolic equations generated by symmetric functions of Hessian eigenvalues or the principal curvatures of the desired surface. Part I: Monge – Ampere parabolic equations], Algebra i analiz, 1994. Vol. 6. No. 3. Pp. 141–160 (in Russian).
19. Wang J., Yang J., Liu X. The initial and Neumann boundary value problem for a class parabolic Monge – Ampere equation. Abstract and Applied Analysis. Vol. 2013. No. 535629. <http://dx.doi.org/10.1155/2013/535629>.
20. Tang L. Boundary regularity on the parabolic Monge – Ampere equation. Journal of Differential Equations, 2015. Vol. 259. Pp. 6399–6431.
21. Loftin J., Tsui M.P. Ancient solutions of the affine normal flow. Journal of Differential Geometry, 2008. Vol. 78. Pp. 113–162.
22. Ovsiannikov L.V. Group Analysis of Differential Equations, Academic Press, New York, 1982.
23. Olver P.J. Application of Lie Groups to Differential Equations, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 2000.
24. Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2007.
25. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Metody razdeleniya peremennyh i tochnye resheniya nelinejnyh uravnenij matematicheskoy fiziki [Methods of Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear Equations of Mathematical Physics]. Moscow, IPMech RAS Publ., 2020 (in Russian).
26. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. Boca Raton–London, CRC Press, 2022.
27. Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N. Metod differentsial'nyh svyazej i ego prilozheniya v

gazovoj dinamike [Method of Differential Constraints and its Applications in Gas Dynamics]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1984 (in Russian).

28. *Kudryashov N.A.* Metody nelinejnoj matematicheskoj fiziki [Methods of Nonlinear Mathematical Physics]. Dolgoprudnyi, Izd. Dom Intellect Publ., 2010 (in Russian).

29. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using

simpler solutions, *Mathematics*, 2021. Vol. 9. No. 4. P. 345.

30. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Obzor metodov postroeniya tochnyh reshenij uravnenij matematicheskoj fiziki, osnovannyh na ispol'zovanii bolee prostyh reshenij [Review of methods for constructing exact solutions of equations of mathematical physics based on simpler solutions]. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2022. Vol. 211. No. 2. Pp. 567–594 (in Russian).

УДК 616.831-006:004.42

ОЦЕНКА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОТКЛОНЕНИЙ МЕЖДУ МРТ- И КТ-ИЗОБРАЖЕНИЯМИ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ РАДИОХИРУРГИИ

Б.Д. Заволович^{1,*}, И.И. Банникова^{1,2}, А.В. Далечина^{1,2}, В.В. Костюченко², П.Н. Рябов¹, А.В. Голанов³

¹Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

²Центр Гамма-нож при ФГАУ НМИЦ нейрохирургии им. академика Н.Н. Бурденко
Минздрава России, Москва, 125047, Россия,

³Деловой центр нейрохирургии ФГАУ НМИЦ нейрохирургии им. академика Н.Н. Бурденко Минздрава России,
Москва, 125047, Россия

*e-mail: bzavolovich@gmail.com

Поступила в редакцию: 25.09.2023

После доработки: 06.11.2023

Принята к публикации: 07.11.2023

МРТ (магнитно-резонансная томография) играет важнейшую роль при планировании радиохирургического лечения. С помощью МРТ создается контур мишени для облучения и критических структур. Этот метод визуализации позволяет с высокой точностью определить границы патологического очага, однако существуют определенные факторы (неоднородность постоянного магнитного поля, нелинейность поля градиента и т. д.), из-за которых МРТ-изображения более восприимчивы к пространственным искажениям в сравнении с изображениями, полученными посредством компьютерной томографии (КТ). Определение геометрических искажений на МРТ-изображениях – важнейший этап обеспечения точности радиохирургического лечения. Один из способов определения дисторсии заключается в выполнении МРТ- и КТ-сканирования специального фантома, внутри которого находятся пластиковые стержни и дальнейшем анализе положения стержней на МРТ- и КТ-изображениях. Как правило, сравнение МРТ- и КТ-изображений фантома проводится визуально, что является довольно субъективной и неточной оценкой. Цель нашей работы заключалась в разработке программного обеспечения (ПО) для автоматизации выполнения данного теста по гарантии качества МРТ-исследования. С помощью разработанного программного обеспечения было проведено сравнение МРТ в двух режимах T1 и T2 с результатами КТ. Было показано, что отклонения МРТ T1 и T2 от КТ превышали 1 мм в 3.5 % случаев и 0.1 % соответственно. Был проведен анализ направлений и величин отклонений по всему объему фантома. Наибольшие отклонения наблюдаются в нижней правой части аксиального среза фантома и преимущественно направлены к верхней левой части среза в случае T1 и к верху среза в случае T2. Данные результаты позволяют проводить планирование радиохирургического лечения. Использование данного ПО в клинической практике поможет ускорить проведение теста и устранить субъективные оценки смещений.

Ключевые слова: магнитно-резонансная томография; компьютерная томография; стереотаксическая радиохирургия; Гамма-нож; оценка дисторсии; Python.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.269

ВВЕДЕНИЕ

Стереотаксическая радиохирургия (СРХ) – метод лучевой терапии, позволяющий деструктивно воздействовать на глубинно расположенные патологические образования при помощи однократного облучения узкими пучками ионизирующего излучения [1]. При СРХ используется стереотаксическая техника локализации очага и смежных с ним критических структур для высокой точности позиционирования мишени. Данная высокотехнологичная методика соот-

ветствует принципу минимального инвазивного вмешательства [2]. Несмотря на появление в последнее время большого количества установок для стереотаксического облучения, Гамма-нож остается «золотым стандартом» современной радиохирургии [2]. Гамма-нож (ГН) впервые был внедрен в медицинскую практику в 1967 г. шведским нейрохирургом Ларсом Лекселлем. Внутри радиационного корпуса аппарата находятся 192 экранированных источника Co^{60} (рис. 1).

ОЦЕНКА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОТКЛОНЕНИЙ МЕЖДУ МРТ- И КТ-ИЗОБРАЖЕНИЯМИ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ РАДИОХИРУРГИИ

Данный инструмент позволяет подвести ионизирующее излучение в патологическую мишень с субмиллиметровой точностью¹. В настоящее время радиохирургическое лечение на Гамма-ноже ежегодно получают более миллиона пациентов по всему миру².

Для реализации радиохирургического лечения необходима жесткая система иммобилизации пациента. В системе Гамма-нож жесткую фиксацию головы пациента во время лечения обеспечивает стереотаксическая рама Лекселла³. Фиксирующее устройство крепится непосредственно к костям черепа пациента при помощи четырех специальных шипов под местной

анестезией (рис. 2). Стереотаксическая рама также является способом задания трехмерной системы координат для определения положения мишени в пространстве.

Для определения стереотаксических координат на раму устанавливается локалайзер – коробка с металлическими метками в форме буквы *N* (металлические линии для КТ и ангиографии, каналы со слабым раствором CuSO_4 для МРТ), которые видны на томограммах. Далее в системе планирования на основе меток локалайзера осуществляется привязка изображений к стереотаксической системе координат (рис. 3) [2].

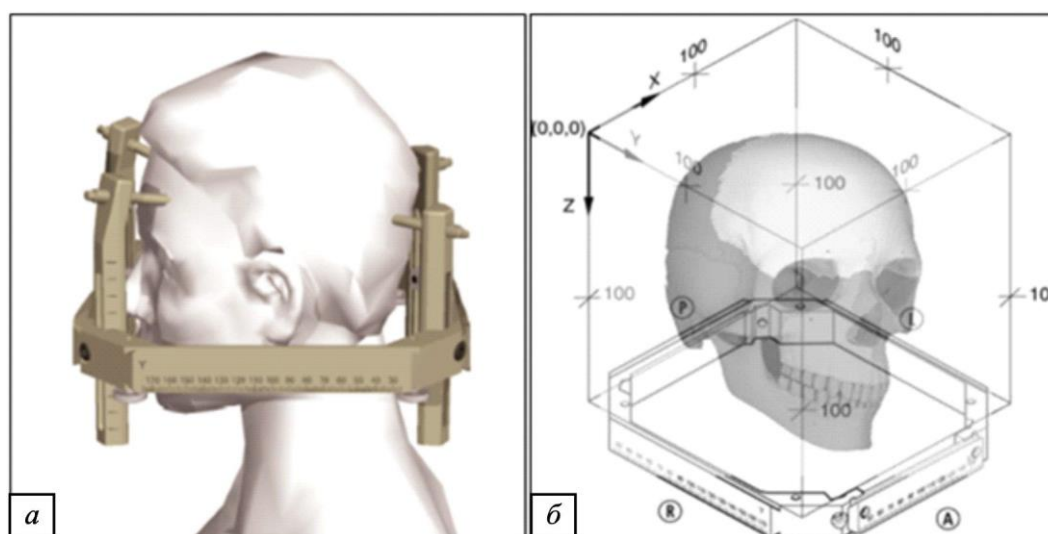


Рис. 2. *а* – стереотаксическая рама Лекселла, зафиксированная на голове пациента; *б* – стереотаксическая система координат, заданная при помощи стереотаксической рамы. Начало системы координат находится в точке сверху, сбоку, сзади за пределами рамы

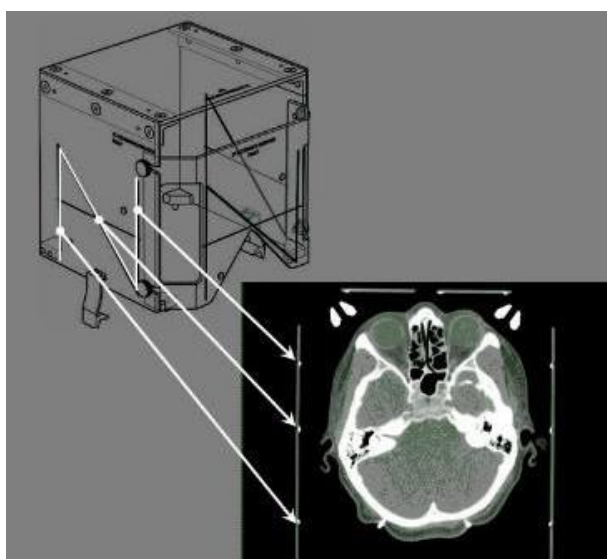


Рис. 3. Локалайзер с контрастными метками в форме буквы *N* и аксиальная проекция КТ пациента в стереотаксической раме

¹ Elekta. Leksell Gamma Knife® Perfexion™ product brochure: © 2019 Elekta AB. URL: <https://abexglobalhc.co.th/wp-content/uploads/2020/06/Leksell-Gamma-Knife-Perfexion-product-brochure.pdf> (дата обращения: 06.11.2023).

² Leksell Gamma Knife® Treatment Statistics Report 1968-2019, Leksell Gamma Knife Society. URL: <https://www.elekta.com/medical-affairs/bibliographies/LGKS%20Review%20of%20epidemiology.pdf> (дата обращения: 06.11.2023).

³ Elekta. Leksell Gamma Knife® Perfexion™ product brochure: © 2019 Elekta AB. URL: <https://abexglobalhc.co.th/wp-content/uploads/2020/06/Leksell-Gamma-Knife-Perfexion-product-brochure.pdf> (дата обращения: 06.11.2023).

Для визуализации патологических и критических структур требуется проведение топометрических исследований, таких как магнитно-резонансная томография (МРТ), компьютерная томография (КТ), ангиография [2].

Благодаря высокой контрастности мягких тканей головного мозга магнитно-резонансная томография (МРТ), в сравнении с компьютерной томографией (КТ), обеспечивает лучшее контрастное разрешение анатомических структур и патологических очагов [4]. МРТ-изображения более восприимчивы к пространственным искажениям, чем КТ. Геометрические искажения МРТ-изображений обусловлены неоднородностью статического магнитного поля и нелинейностью градиентных катушек. Однородность магнитного поля МРТ может быть нарушена несовершенной конструкцией магнита, колебаниями источника питания, внешними ферромагнитными объектами [6]. КТ обеспечивает более точную геометрическую локализацию с меньшим контрастным разрешением многих радиохирургических поражений [5]. Результат лечения может зависеть от степени искажения изображения. Точность подводимой дозы сильно зависит от точности МРТ-изображений, используемых для планирования лечения. Пространственные искажения на МРТ-изображениях (пространственная дисторсия) должны быть минимизированы для поддержания высокой точности доставки дозы при радиохирургическом лечении [5]. Для обеспечения высокой точности радиохирургической процедуры необходимо проводить регулярные проверки получаемых МРТ-снимков для планирования радиохирургического лечения. Величина геометрических искажений на МРТ определяется как различия в положении маркеров на КТ- и МРТ-изображениях. Поскольку компьютерная томография является менее восприимчивой к появлению пространственных искажений и может считаться геометрически точной, этот вид томографии используется в качестве эталонного. Для оценки пространственной точности на МРТ-изображениях обычно используются фантомы с различными вставками (маркерами), а также программы автоматического анализа пространственных искажений МРТ (Quasar Grid 3D, LAB-QA2GO, Assurance OSAQA Project, AutoQA+).

Оценка пространственных искажений МРТ в радиохирургии Гамма-ножа обычно произво-

дится с использованием цилиндрического МРТ-фантома (Elekta, Швеция) [5].

На данный момент не существует общедоступного программного обеспечения для автоматического вычисления различий в стереотаксических координатах на КТ- и МРТ-изображениях, используемых в радиохирургии. Кроме того, оценка пространственной точности МРТ обычно является только визуальной.

Цель нашей работы заключалась в разработке программного обеспечения для анализа МРТ и КТ-изображений, полученных при сканировании фантома Elekta для оценки пространственной точности МРТ-сканера, используемого для стереотаксической радиохирургии.

МРТ-ФАНТОМ

Для оценки расхождений между МРТ- и КТ-снимками был использован цилиндрический МРТ-фантом компании Elekta (Стокгольм, Швеция). Фантом изготовлен из акрилового пластика, имеет диаметр 180.5 мм и высоту 131 мм. В его объеме имеются 82 тонких стержня (маркера) диаметром 2 мм, закрепленных на двух круглых пластинах. Перед началом сканирования фантом был заполнен водой. Жесткую фиксацию фантома во время сканирования обеспечивала стереотаксическая рама (G frame GfD 1063) и специальные адаптеры (рис. 4).

Перед выполнением томографических исследований (МРТ и КТ) на стереотаксическую раму был установлен специальный локализационный бокс с нанесенными контрастными метками в форме буквы N (рис. 3). Метки использовались для определения стереотаксических координат при загрузке изображений в планирующую систему Leksell Gamma Plan, v. 11.1 (Elekta, Sweden).

КТ-изображения с толщиной среза 1.25 мм и размером вокселя $0.98 \times 0.98 \times 1.25$ мм были получены с помощью КТ-сканера (Optima CT580 W, GE Healthcare, США). МР-изображения в двух режимах (взвешенные изображения $T1$ и $T2$) были получены с помощью МРТ-сканера 1.5T (GE Signa HDxt 1.5 T, WI, США). Толщина среза изображения составляла 1 мм для каждой последовательности. $T2$ -взвешенные МРТ-изображения были получены только для «области интереса» – средней части фантома. Всего было получено 88 срезов.

ОЦЕНКА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОТКЛОНЕНИЙ МЕЖДУ МРТ- И КТ-ИЗОБРАЖЕНИЯМИ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ РАДИОХИРУРГИИ

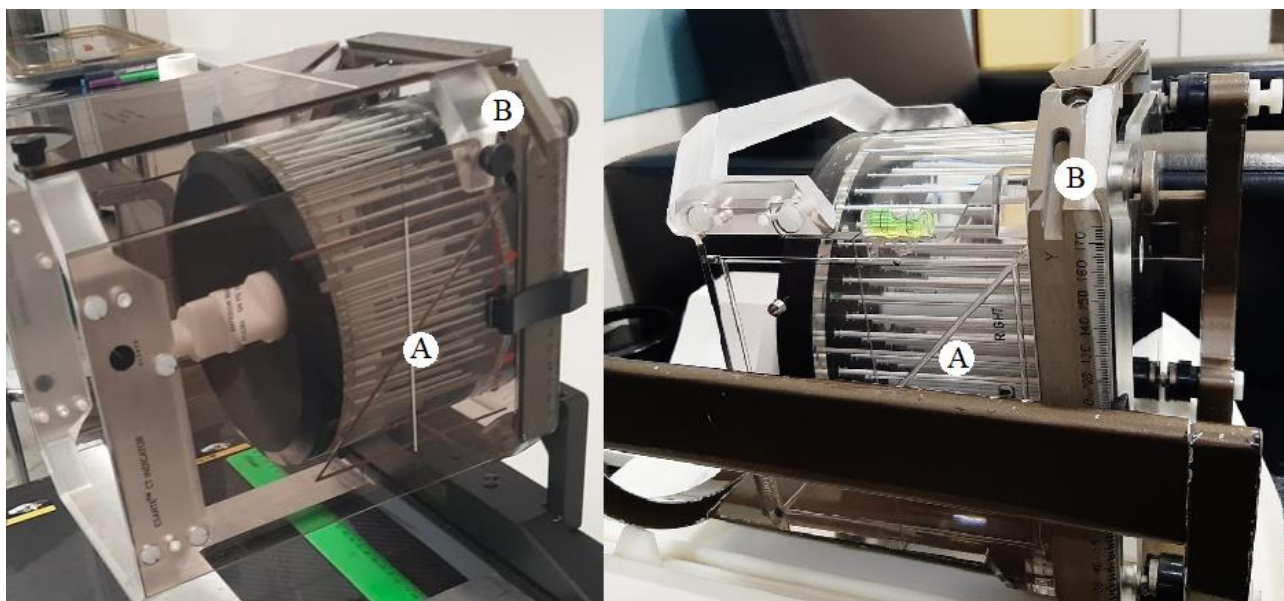


Рис. 4. МРТ-фантом Elekta с зафиксированной на нем стереотаксической рамой, специальные КТ- (слева) и МРТ- (справа) адаптеры с контрастными метками в форме буквы *N* (А) жестко прикреплены к стереотаксической раме (В)

Маркеры фантома были четко видны как на КТ-, так и на МРТ-изображениях. Аксиальные срезы томографических исследований фантома MR Elekta представлены на рис. 6. В планирующей системе было произведено ручное оконтуривание каждого маркера на всех срезах изображений КТ, T_1 , T_2 (рис. 5). Полученные изображения и контуры маркеров были выгружены из системы в формате DICOM-RT.

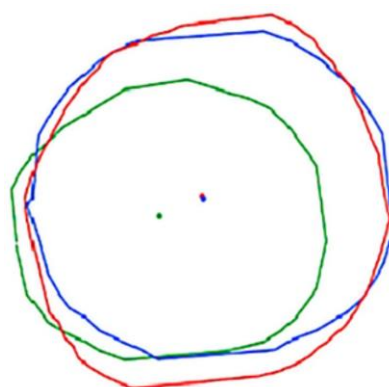


Рис. 5. Контуры маркеров (КТ – зеленый, T_1 – красный, T_2 – синий)

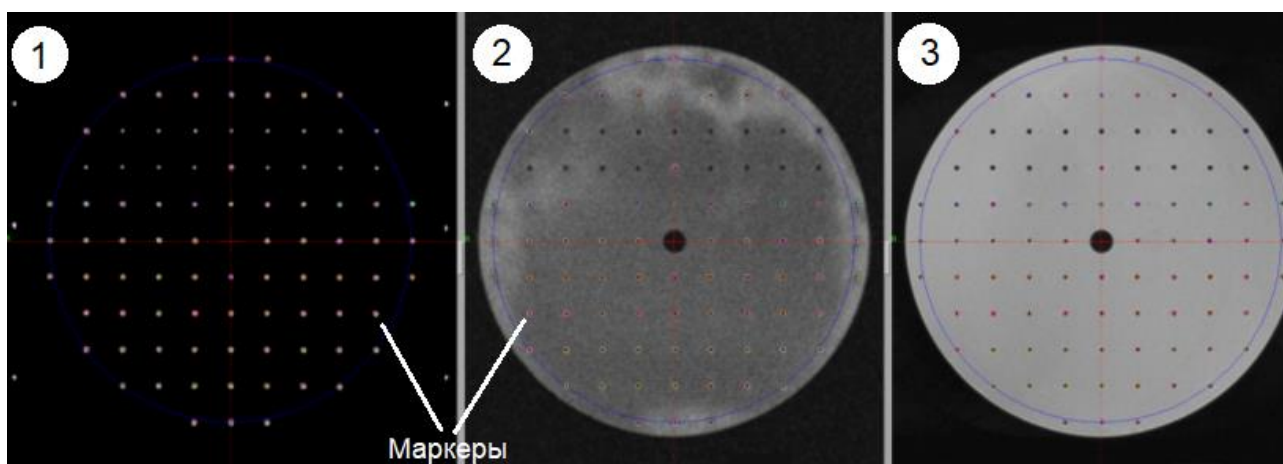


Рис. 6. Аксиальные изображения томографических исследований МРТ-фантома: КТ (1), МРТ в режиме T_1 (2), МРТ в режиме T_2 (3)

РАСЧЕТ ОТКЛОНЕНИЙ МЕЖДУ КООРДИНАТАМИ

Информация об изображениях хранилась в виде файлов формата DICOM – RT (Digital Imaging and Communications in Medicine). Метаданные в DICOM-файлах предоставляют все необходимые сведения об исследовании и пациенте, настройках оборудования, а также информацию для отрисовки изображения (размер, количество и толщина срезов и т. д.). В исходных файлах каждый контур в отдельности представлен в виде последовательности массивов координат (x, y, z). Каждый такой массив соответствует разным вариациям этого контура (на каждом аксиальном срезе контур представлен массивом координат). Количество доступных массивов для каждого стержня зависит от того, какая часть фантома исследовалась. Например, один из срезов фантома может содержать в себе изображения всех контуров КТ, но не содержать контуров $T2$ (или содержать частично), так как томография $T2$ проводилась только для «области интереса».

Начало системы координат, принятой в задаче, находится в верхнем правом углу (на рис. 7 она изображена зеркально). Изоцентр находится в точке с координатами (100, 100, 100) мм и соответствует геометрическому центру фантома. Рассчитываемые отклонения изображены на рис. 7 в виде синих стрелок.

Чтобы оценить различия между стереотаксическими координатами КТ- и МРТ-изображений, необходимо рассчитать отклонения между центрами отмеченных маркеров. В нашем случае отклонения по координате Z невозможно определить из-за того, что в фантоме стоит стержневая вставка. Во фронтальной и сагиттальной плоскости МРТ- и КТ-изображений вдоль стержней нет таких точек, координаты которых можно было бы сравнить. Таким образом, в задаче рассматриваются отклонения только в аксиальной плоскости. Координата центра контура рассчитывается как среднее арифметическое координат точек контура:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Для расчета отклонений используются следующие формулы:

$$D_{T1} = \sqrt{(X_{КТ} - X_{T1})^2 + (Y_{КТ} - Y_{T1})^2},$$

$$D_{T2} = \sqrt{(X_{КТ} - X_{T2})^2 + (Y_{КТ} - Y_{T2})^2},$$

где D_{T1} и D_{T2} – отклонения центров $T1$ и $T2$ от КТ, X и Y – соответствующие координаты.

Далее производим оценку отклонений для каждого маркера на срезе – данную процедуру выполняем для всех срезов исследования.

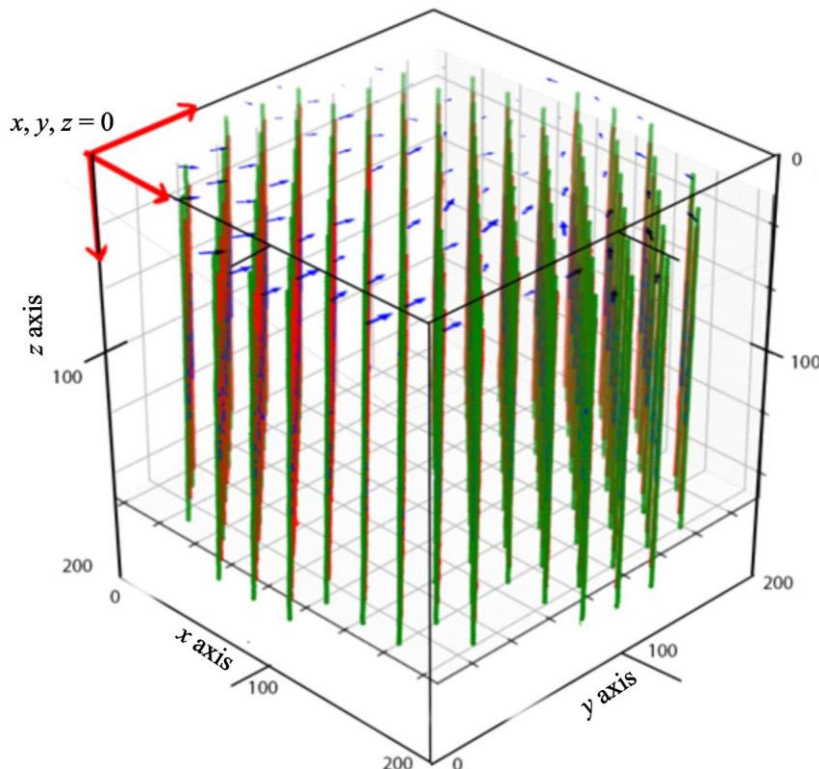


Рис. 7. Система координат, принятая в задаче

ОЦЕНКА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОТКЛОНЕНИЙ МЕЖДУ МРТ- И КТ-ИЗОБРАЖЕНИЯМИ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ РАДИОХИРУРГИИ

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Программное обеспечение было разработано при помощи языка программирования Python. Вводными данными являются файл DICOM-RT Structure Set и DICOM-изображения КТ. Из DICOM-файлов КТ извлекаются данные о начале координат (origin) и расстоянии между пикселями (pixel spacing), необходимые для линейного преобразования координат. Программа определяет координаты центров маркеров, заносит их в три массива (КТ, T1 и T2) и рассчитывает отклонения между центрами. Пользователь указывает, какую область фантома необходимо обработать (перед запуском выводится список доступных срезов). Обработка одного среза занимает приблизительно 15 с. Весь фантом обрабатывается 15–20 мин. ПО оснащено консольным интерфейсом. После выполнения расчетов выводятся основные характеристики отклонений (минимальное, максимальное и среднее отклонение) для всего фантома, графики плотности распределения отклонений, а также изображения аксиального среза фантома с контурами. Возможен экспорт изображений срезов с рассчитанными отклонениями (рис. 12). Области фантома, отклонения в которых превышают заданную пользователем величину, выделяются цветом (рис. 11). Предусмотрена функция просмотра рассчитанных центров в трехмерном виде (например, как на рис. 7), данную модель можно вращать и увеличивать для визуальной оценки смещений. Файлы DICOM обрабатываются при помощи библиотеки Ruidicom. Для вывода изображений и построения графиков используется библиотека Matplotlib. Программный код загружен в GitHub – репозиторий, доступный по ссылке [7].

РЕЗУЛЬТАТЫ

На первом этапе работы были рассчитаны отклонения маркеров в «зоне интереса» (соответствует слоям $Z = (91 \div 114)$ мм). Далее были рассчитаны отклонения не только в «зоне интереса», но и по всему фантому. Результаты обоих расчетов представлены в табл. 1.

На рис. 8 изображены графики плотности распределения вероятностей отклонений T1 и T2 от КТ для «зоны интереса» и всего фантома, соответственно.

Дисторсия на МРТ-изображениях при планировании стереотаксической радиохирургии должна быть меньше 1.0 мм [3]. В данной работе показано, что количество отклонений между координатами маркеров на КТ- и МРТ-изображениях, превышающих 1.0 мм, составляет 3.5 % от общего числа, средняя величина отклонения составляет 0.5 мм со среднеквадратическим отклонением 0.25 мм.

На рис. 9 изображена диаграмма рассеяния отклонений для каждого среза. Поскольку изоцентр находится в середине фантома, отчетливо видно, как прямые распадаются на две части. Это говорит о различном порядке роста отклонений по мере отдаления по разные стороны от изоцентра.

На рис. 10 изображены контуры маркера. Контуры на КТ, T1 и T2 выделены зеленым, красным и синим цветом соответственно. На рис. 11 показан аксиальный срез фантома с маркерами и контурами. Темно-серые зоны обозначают те центры, отклонения которых превышают 0.5 мм.

Таблица 1. Результаты для всего фантома

Отклонения маркеров	T1 vs КТ	T2 (область интереса) vs КТ	T1 (область интереса) vs КТ
Минимальное отклонение, мм	0.02	0.01	0.03
Максимальное отклонение, мм	1.51	1.08	1.31
Среднее отклонение, мм	0.52	0.44	0.50
Среднеквадратичное отклонение, мм	0.25	0.18	0.23
Общее количество рассчитанных отклонений	5040	1991	2026
Процент отклонений, превышающих 0.5 мм	49.6 %	35.4 %	47.2 %
Процент отклонений, превышающих 1.0 мм	3.5 %	0.1 %	2.5 %

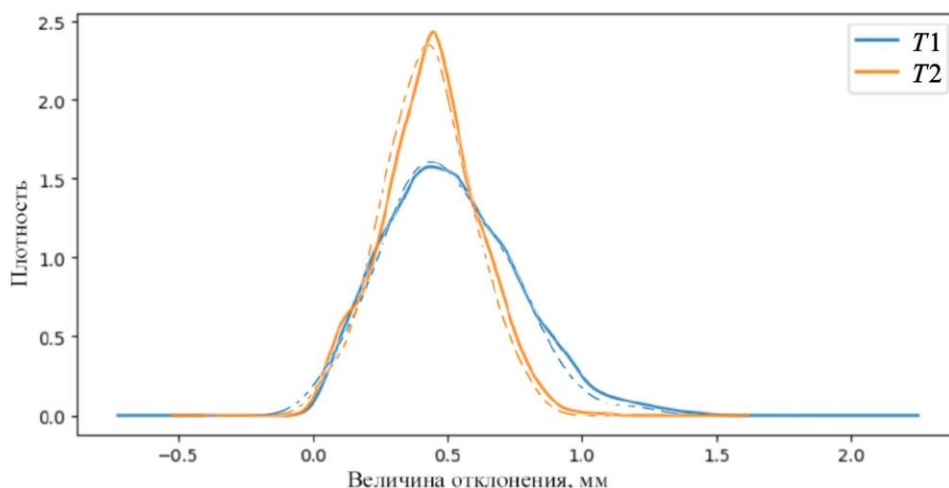


Рис. 8. Кривые плотности распределения отклонений центров $T1$ и $T2$ от КТ в области интереса (пунктир) и по всему фантому (сплошная кривая)

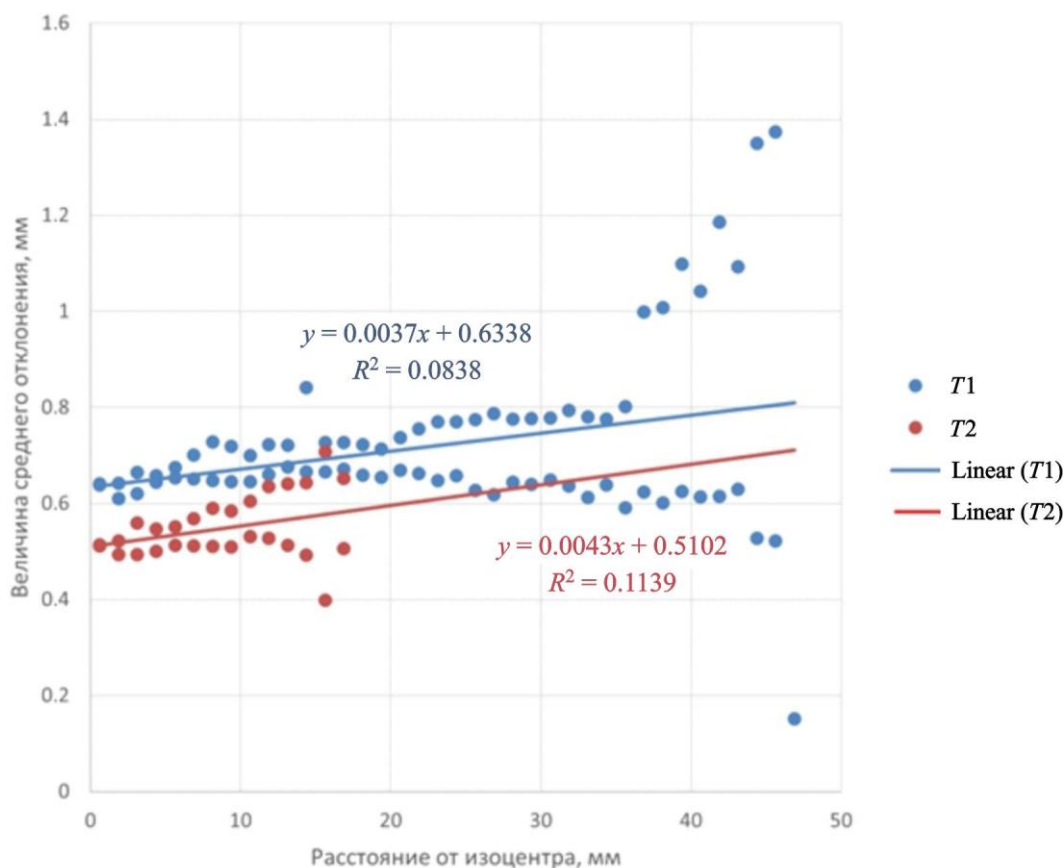


Рис. 9. Диаграмма рассеяния отклонений в зависимости от расстояния до изоцентра

На рис. 12 изображены направления смещений координат $T1$ (синий) и $T2$ (красный) от КТ. Координата $Z = 100$ мм соответствует изоцентру. По мере приближения к краям фантома отклонения растут по величине, но практически неизменны по направлению. При рассмотрении отклонений $T2$ от КТ видно, что смещения на

срезе преимущественно направлены к верхней части.

Более подробные изображения доступны в директории /resources репозитория [7]. Полученные изображения позволяют оценить величину и направление отклонений. Данные результаты получены путем обработки заранее размеченных вручную изображений.

ОЦЕНКА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОТКЛОНЕНИЙ МЕЖДУ МРТ- И КТ-ИЗОБРАЖЕНИЯМИ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ РАДИОХИРУРГИИ

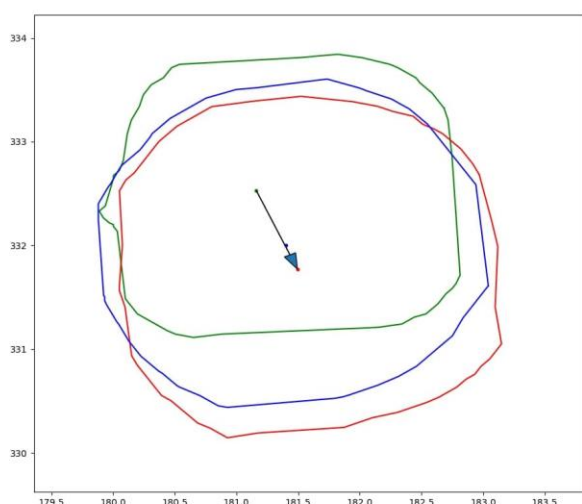


Рис. 10 Смещение центра $T2$ от КТ, обозначенное вектором, в отдельном контуре

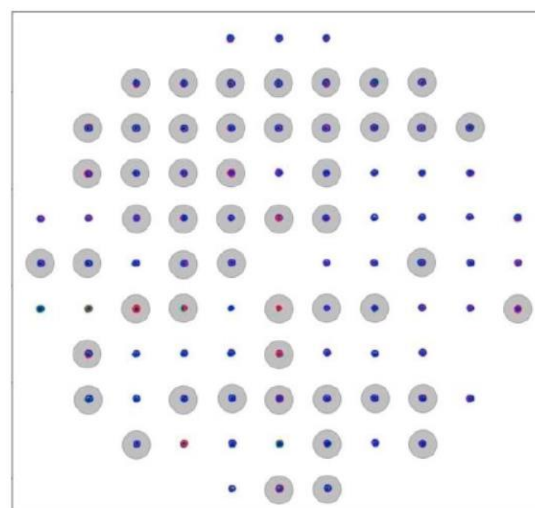


Рис. 11. Визуальное представление отклонений, чья величина превышает 0.5 мм ($Z = 96$ мм)

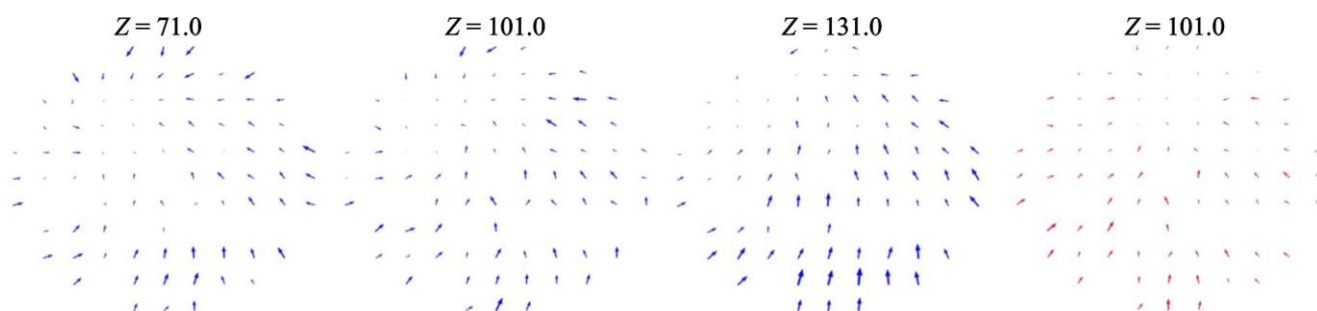


Рис. 12. Аксиальные срезы фантома ($T1$ – синий, $T2$ – красный) с векторами, направленными в стороны смещений

ОБСУЖДЕНИЕ

В данной работе рассмотрены результаты оценки геометрических различий между МРТ- и КТ-изображениями при помощи написанного ПО.

Для проведения стереотаксической радиохирургии необходимо, чтобы отклонения не превышали 1 мм [3]. Было продемонстрировано с помощью МРТ-фантома Elekta, что отклонения, превышающие 1 мм, составляют не более 3.5 % от общего числа отклонений, среднее значение составляет 0.5 мм, а среднеквадратичное отклонение – 0.25 мм. Кроме того, были получены направления этих смещений, и построена послойная визуализация отклонений по всему фантому. На аксиальном срезе наименьшие отклонения наблюдаются в верхней левой части, наибольшие располагаются в нижней правой части, максимальное значение отклонения составило 1.5 мм, а среднее – 0.5 мм, и направлены они преимущественно к верхней левой части аксиального среза фантома в случае $T1$, и к

верхней части среза в случае $T2$. Данные результаты позволяют проводить планирование радиохирургического лечения, так как отклонения не превышают максимально допустимые значения (1 мм) [3].

Данный метод оценки геометрической точности, однако, имеет ряд недостатков.

Конструктивные особенности меток фантома позволяют оценивать геометрические различия только в плоскости XY . Измерение расхождений по оси Z данным методом не представляется возможным. Для оценки геометрической неточности по оси Z можно использовать фантом с сеткой из пересекающихся стержней. Различия между стереотаксическими координатами КТ- и МРТ-изображений оцениваются как отклонения между точками пересечения маркеров. Оцениваемые точки будут иметь три координаты, таким образом можно будет оценить геометрическую неточность по всем осям.

Для визуализации меток (стержней) фантома его объем заполняется водой. Кушетка КТ-сканера может провисать под тяжестью фанто-

ма при проведении томографического исследования, что может приводить к неаксиальности полученных изображений фантома. Это может быть причиной дополнительной неточности исследования.

Определение стереотаксических координат проводилось при помощи меток локализатора. Среднее и максимальное смещение меток локализатора при определении стереотаксических координат по МРТ- и КТ-исследованиям составляло 0.2 и 0.5 мм соответственно. В планирующей системе есть дополнительные инструменты корегистрации изображений. По данным компании Elekta, оцененные ошибки корегистрации КТ–МРТ не превышают 0.19 мм для толщины среза МРТ в 1 мм¹.

Ручная сегментация является основной причиной неточностей форм контуров. Кроме того, эта процедура является чрезвычайно времязатратной. Полный процесс ручного оконтуривания меток занимает 5–6 ч. В дальнейшем предполагается усовершенствование программного обеспечения для автоматической сегментации маркеров фантома.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанное программное обеспечение позволяет проводить автоматическую оценку пространственной точности стереотаксических МРТ изображений. На следующем этапе работы планируется отойти от использования ручной сегментации изображений, которая является причиной появления неточностей, связанных с человеческим фактором, а также большой продолжительности проведения данной процедуры.

Предполагается дальнейшее усовершенствование программного обеспечения и разработка нового функционала, в первую очередь для ав-

томатической сегментации маркеров фантома и последующего расчета отклонений.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке гранта Фонда содействия инновациям № 74534.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Костюченко В.В. История развития стереотаксического облучения. Гл. 1–3. Медицинская физика, 2015. Т. 2 (66). С. 52–65.
2. Голанов А.В., Костюченко В.В. Нейрорадиохирургия на Гамма-ноже. М.: ИП «Т.А. Алексеева». 2018. 960 с.
3. Putz F., Mengling V., Perrin R., et al. Magnetic resonance imaging for brain stereotactic radiotherapy // *Strahlenther Onkol*, 2020. V. 196. P. 444–456.
4. Pappas E.P., Seimenis I., Moutsatsos A., Georgiou E., Nomikos P., Karaiskos P. Characterization of system-related geometric distortions in MR images employed in Gamma Knife radiosurgery applications // *Physics in Medicine & Biology*, 2016. V. 61(19). P. 6993–7011.
5. Paštyková V., Novotný J. Jr., Veselský T., Urgošik D., Liščák R., Vymaza J. Assessment of MR stereotactic imaging and image co-registration accuracy for 3 different MR scanners by 3 different methods/phantoms: phantom and patient study // *Journal of Neurosurgery JNS*, 2018. V. 129 (Suppl. 1). P. 125–132.
6. Poetker D.M., Jursinic P.A., Runge-Samuelson C.L., Wackym P.A. Distortion of Magnetic Resonance Images Used in Gamma Knife Radiosurgery Treatment Planning: Implications for Acoustic Neuroma Outcomes. // *Otology & Neurotology*, 2005. V. 26(6). P. 1220–1228.
7. Репозиторий MRIphantom [Электронный ресурс]. URL: <https://github.com/Moscow-Gamma-Knife-Center/MRIphantom> (дата обращения: 06.11.2023).

¹ Elekta White paper. Accuracy of co-registration of planning images with CBCT images (n.d.). URL: <https://www.elekta.com/medical-affairs/bibliographies/Accuracy%20of%20co-registration%20of%20planning%20images%20with%20Cone%20Beam%20CT%20images%20white%20paper.pdf> (дата обращения: 06.11.2023).

ASSESSMENT OF GEOMETRICAL DISCREPANCIES BETWEEN MRT- AND CT-IMAGES IN RADIOSURGERY PLANNING

B.D. Zavolovich^{1*}, I.I. Bannikova^{1,2}, A.V. Dalechina¹, V.V. Kostjuchenko², P.N. Ryabov¹, A.V. Golanov³

¹National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, 115409, Russia

²Gamma Knife Center, N.N. Burdenko National Medical Research Center of Neurosurgery, Moscow, 125047, Russia

³N.N. Burdenko National Medical Research Center of Neurosurgery, Moscow, 125047, Russia

*e-mail: bzavolovich@gmail.com

Received September 25, 2023; revised November 6, 2023; accepted November 7, 2023

MRI (magnetic resonance imaging) plays a crucial role in planning radiosurgical treatment. MRI is used to create a contour of the tumour and critical structures. This imaging method allows the boundaries of the pathological lesion to be defined with high accuracy, but there are certain factors (inhomogeneity of the permanent magnetic field, nonlinearity of the gradient field, etc.) that make MR images more susceptible to spatial distortions compared to images obtained by computed tomography (CT). Determining geometric distortion in MRI images is a critical step in ensuring the accuracy of radiosurgical treatment. One way to determine distortion is to perform MRI and CT scans of a special phantom with plastic rods inside and then analyze the position of the rods on the MRI and CT images. As a rule, MRI and CT images of the phantom are compared visually, which is a rather subjective and inaccurate assessment. The purpose of our work was to develop software to automate the performance of this MRI quality assurance test. The developed software was used to compare MRI in two modes T1 and T2 with CT scans. Magnetic resonance imaging (MRI) is widely used for target delineation in stereotactic radiotherapy treatment planning. The calculated discrepancies between coordinates of the CT, T1 and T2 weighted images exceeded 1 mm in 3.5% and 0.1% of the points, respectively. Discrepancies' magnitude and directions were assessed. The largest discrepancies between T1 and CT are observed in the lower-right part of the phantom's axial slice, they are directed primarily to the higher-left part of the slice and reach maximum magnitude of 1.5 mm, the mean discrepancy is 0.5 mm. The discrepancies between T2 and CT are primarily directed to the higher-central part of the slice. These results are acceptable for stereotactic radiosurgery 15 planning. Using this software will speed up the procedure of verifying MRI quality and eliminate visual assessment of the discrepancies.

Keywords: MRI; CT; stereotactic radiosurgery; Elekta MR; Phantom, Python.

REFERENCES

1. Kostyuchenko V.V. Istoriya razvitiya stereotaksicheskogo oblucheniya. Glavy 1–3 [History of the development of stereotactic irradiation. Chapters 1–3]. Medicinskaya fizika, 2015. Vol. 2 (66). Pp. 52–65 [in Russian].
2. Golanov A.V., Kostyuchenko V.V. Nejroradiokhirurgiya na Gamma-nozhe [Neuroradiosurgery using Gamma Knife]. Moskva, IP «T.A. Alekseeva» Publ., 2018. 960 p. [in Russian].
3. Putz F., Mengling V., Perrin R. et al. Magnetic resonance imaging for brain stereotactic radiotherapy // Strahlenther Onkol, 2020. V. 196. Pp. 444–456.
4. Pappas E.P., Seimenis I., Moutsatsos A., Georgiou E., Nomikos P., Karaiskos P. Characterization of system-related geometric distortions in MR images employed in Gamma Knife radiosurgery applications. Physics in Medicine & Biology, 2016. Vol. 61(19). Pp. 6993–7011.
5. Paštyková V., Novotný J. Jr., Veselský T., Urgošik D., Liščák R., Vymaza J. Assessment of MR stereotactic imaging and image co-registration accuracy for 3 different MR scanners by 3 different methods/phantoms: phantom and patient study. Journal of Neurosurgery JNS, 2018. Vol. 129 (Suppl. 1). Pp. 125–132.
6. Poetker D.M., Jursinic P.A., Runge-Samuelson C.L., Wackym P.A. Distortion of Magnetic Resonance Images Used in Gamma Knife Radiosurgery Treatment Planning: Implications for Acoustic Neuroma Outcomes. Otology & Neurotology, 2005. Vol. 26(6). Pp. 1220–1228.
7. Repozitorij MRIphantom [Repository MRIphantom] Available at: <https://github.com/Moscow-Gamma-Knife-Center/MRIphantom> (accessed 06.11.2023) [in Russian].

УДК 51-73

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОФИЛЯ МЕДИЦИНСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

М.А. Банищикова^{1,}, А.А. Булавская¹, А.А. Григорьева¹, И.А. Милойчикова^{1,2}, С.Г. Стучебров¹*

¹Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Томск, 634050, Россия

²Научно-исследовательский институт онкологии, Томский национальный исследовательский медицинский центр
Российской академии наук, Томск, 634009, Россия

*e-mail: mab51@tpu.ru

Поступила в редакцию: 16.10.2023

После доработки: 16.10.2023

Принята к публикации: 24.10.2023

В настоящее время лучевая терапия является одним из методов лечения онкологических заболеваний. В данном методе ионизирующее излучение воздействует на раковые клетки, обеспечивая замедление их воспроизведения, однако при этом облучению подвергаются и здоровые ткани. Поэтому важным этапом планирования лечения является обеспечение контроля над энергетическим распределением пучка в каждой точке. В этих целях создаются различные детекторы, позволяющие определить поперечный профиль пучка. Однако большинство из них сами по себе не отвечают всем требованиям к современным медицинским детекторам, в числе которых обеспечение наилучшего энергетического и пространственного разрешения, а также небольшое время обработки данных и получения результата. Решением данной проблемы является метод многоугольного сканирования. Данный метод основан на многократном поступательном перемещении детектора в плоскости перпендикулярной оси пучка под разными углами. Далее необходимо осуществить восстановление изображения интенсивностей в виде пикселей различной яркости в градациях серого из полученных в эксперименте данных. Цель данной работы – оценка применимости основных видов математических преобразований для реализации метода многоугольного сканирования. В данной статье представлены результаты сравнения итерационного метода и метода обратного проецирования с фильтрацией при наличии полного и ограниченного количества данных. Установлено, что метод обратного проецирования с фильтрацией показывает меньшую точность при наличии большого количества данных, однако обеспечивает лучшее качество изображения при наличии меньшего количества данных в сравнении с итерационным методом.

Ключевые слова: ионизирующее излучение, электронный пучок, профиль пучка, диагностика пучков, математическое преобразование, итерационный метод, метод обратного проецирования с фильтрацией.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.277

ВВЕДЕНИЕ

Пучки ионизирующих излучений (ИИ) применяются в различных областях жизни человека, одной из которых является лучевая терапия. Данный метод лечения онкологических заболеваний подразумевает интенсивное воздействие ИИ на ткани человека.

Основной принцип лучевой терапии состоит в облучении раковых клеток для обеспечения их разрушения или замедления воспроизведения [1, 2]. В настоящее время предпринимаются различные меры по уменьшению дозовой нагрузки на организм человека при воздействии ИИ в процессе лучевой терапии, в том числе проводится контроль над характеристиками

пучка, а в частности над интенсивностью излучения в поперечной плоскости пучка.

Для определения распределения интенсивности пучка применяются различные виды детекторов, например сцинтилляционные, матричные, пленочные [3]. Однако многочисленные исследования [4–6] показывают, что ни один из них сам по себе не отвечает в полной мере основным требованиям, предъявляемым к современным медицинским детекторам.

Этим и обусловлена актуальность изучения и апробации нового метода, позволяющего за короткий промежуток времени определять поперечный профиль и пространственное распределение пучка с достаточно высоким разрешением.

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОФИЛЯ МЕДИЦИНСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

Ранее авторами был предложен метод многоугольного сканирования [7], который позволяет определить поперечный профиль пучков ИИ с помощью математической реконструкции набора проекций интенсивностей пучка, полученных под разными углами.

Математическая реконструкция для реализации этого метода должна позволять из набора проекционных данных получать двумерное распределение, что аналогично основной математической задаче компьютерной томографии. На сегодняшний день существует два основных вида математических преобразований: метод обратного проецирования с фильтрацией [8] и итерационный [9]. В первом методе для решения поставленной задачи используется обратное преобразование Радона, а во втором применяется решение системы линейных уравнений с помощью нескольких шагов итерации [8, 9].

Таким образом, цель исследования – оценка применимости двух основных видов математических преобразований для реализации метода многоугольного сканирования.

1. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

1.1. Метод многоугольного сканирования

Метод многоугольного сканирования позволяет определить поперечный профиль пучков ИИ с помощью математической реконструкции набора проекций интенсивностей пучка, полученных под разными углами. Для этого необходимо детектирующее устройство, которое будет обеспечивать поступательное перемещение детектора вдоль прямой, перпендикулярной направлению распространения пучка, и последующее многократное проведение аналогичных измерений при повороте детектирующей установки на фиксированный угол. Установка должна позволять проводить измерения с некоторым угловым шагом таким образом, чтобы общее угловое смещение детектора в плоскости перпендикулярной оси пучка составляло 180 или 360° (рис. 1).

В результате измерений интенсивности пучка под разными углами имеется набор данных, по которому и проводится математическая реконструкция.

1.2. Методы реконструкции изображений

Для восстановления изображения по набору проекций интенсивности пучка, полученных

под разными углами, нужно применять методы реконструкции. Наиболее распространенными из них являются метод обратного проецирования с фильтрацией и итерационный метод. Первый основан на использовании обратного преобразования Радона, второй – на решении системы линейных уравнений. Данные методы широко применяются для решения задач компьютерной томографии, что показано в ряде публикаций [10–12].

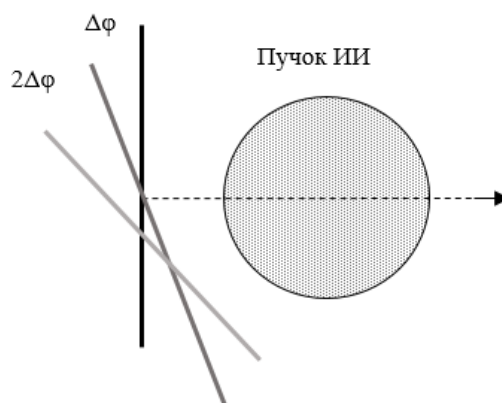


Рис. 1. Метод многоугольного сканирования

Метод обратного проецирования с фильтрацией. Восстановление изображения по проекциям является обратной задачей, для решения которой зачастую применяется метод обратного проецирования с фильтрацией, подразумевающий применение обратного преобразования Радона для получения итогового изображения.

Метод обратного проецирования с фильтрацией – быстрый и прямой метод определения поперечного профиля пучка. Метод состоит из двух основных этапов: фильтрация данных, полученных на детекторе вдоль направления строки по определенному правилу (например, размытие изображения или повышение резкости) и выполнение операции обратного проецирования, которая возможна благодаря обратному преобразованию Радона [13].

Преобразование Радона – интегральное преобразование функции нескольких переменных, которое в геометрическом смысле представляет собой интеграл от функции по направлению нормали к вектору $\vec{n}$, проходящей на расстоянии l от начала координат. К описанию преобразований Радона на рис. 2 представлен геометрический смысл данного преобразования.

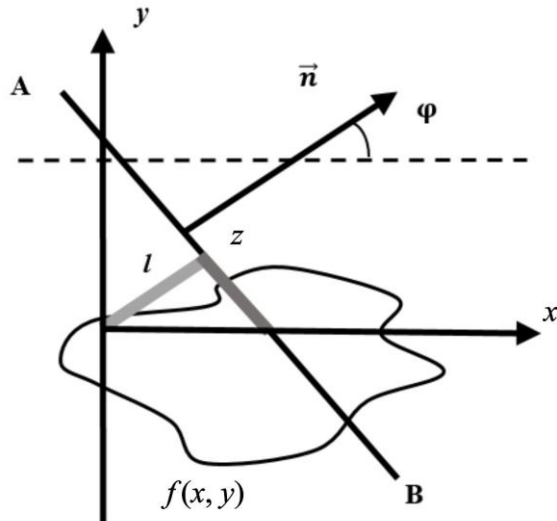


Рис. 2. Геометрический смысл преобразования Радона

Для случая, представленного на рис. 2, где $f(x, y)$ – функция двух действительных переменных, преобразование Радона будет иметь вид, представленный в формуле 1[13]:

$$R(l, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(l \cdot \cos \varphi - z \cdot \sin \varphi, l \cdot \sin \varphi + z \cdot \cos \varphi) dz. \quad (1)$$

Важным свойством этого преобразования является его обратимость, что и позволяет его использовать для поставленных в работе задач.

Для фильтрации данных в настоящей работе применяется фильтр, пропускающий верхние частоты входного сигнала и уменьшающий интенсивность нижних, за счет чего повышается контрастность изображения.

Однако во многих случаях невозможно точно решить обратную задачу восстановления изображения. В этом случае необходимо аппроксимировать решение, что может вызвать видимые артефакты реконструкции на изображении. Для устранения такого рода недостатков могут использоваться итерационные алгоритмы, которые приближаются к правильному решению за счет использования нескольких шагов итерации.

Итерационный алгебраический метод реконструкции. Одним из наиболее распространенных итерационных методов восстановления изображения является метод алгебраической реконструкции. Так же, как и метод обратного проецирования с фильтрацией, данный метод позволяет восстанавливать изображение из серии угловых проекций. Алгоритм итерационного алгебраического метода реконструкции представлен на рис. 3.

Процесс вычисления заключается в предположении начального изображения, далее вычисляются проекции на основе данного изображения, и полученные данные сравниваются с исходными проекциями. Затем создается новое изображение на основе разницы между рассчитанной и измеренной проекциями и процесс повторяется [14]. Таким образом, на каждой итерации изображение приобретает лучшее качество за счет циклической обработки. Под начальным изображением подразумевается некоторое однородное изображение, проекции которого впоследствии сравниваются с измеренными данными.

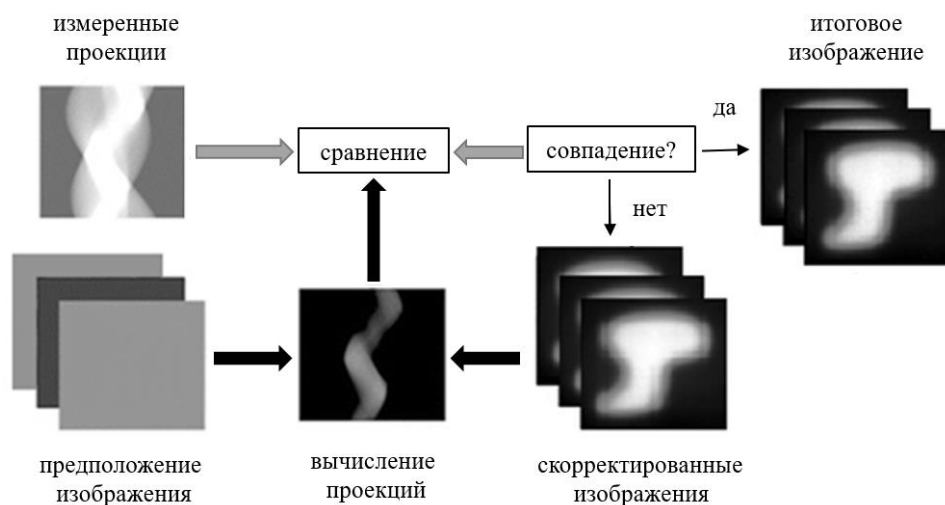


Рис. 3. Алгоритм итерационного алгебраического метода реконструкции изображений

1.3. Исходное изображение

В соответствии с целями работы для оценки применимости метода многоугольного сканирования было принято решение в качестве исходного изображения использовать экспериментально полученные результаты распределения интенсивности медицинского электронного пучка. В качестве источника электронов с энергией 6 МэВ использовался медицинский линейный ускоритель Elekta Synergy (ELEKTA Ltd, Швеция)¹. В качестве детекторов использовались пленочные дозиметры Gafchromic EBT3 (Ashland Advanced Materials, США)², которые наиболее часто применяются для определения поперечного распределения интенсивностей медицинских пучков.

Для имитации проведения метода многоугольного сканирования исходное изображение, полученное пленочным дозиметром, необходимо было представить в виде матриц значений яркости изображений в каждом пикселе. Затем путем суммирования значений по столбцам выбиралась строка значений, представляющая собой проекцию данного изображения на ось, проходящую под углом 0° к горизонтальной оси. Далее каждое изображение поворачивалось на фиксированный угол смещения и аналогично находились проекции интенсивности цвета под другими углами. В результате данных операций была получена синограмма – изображение полученной матрицы данных, в которой строки соответствуют проекциям исходного изображения на ось, а столбцы – углу смещения исходного изображения.

Исходная синограмма с полным набором данных содержала 343 точки в каждой проекции при повороте на 360° с угловым шагом – 1° . Также для оценки применимости данного под-

хода при реализации метода многоугольного сканирования была получена синограмма с ограниченным набором данных, которая содержала 35 точек в каждой проекции при повороте на 360° с угловым шагом – 10° .

Для обработки результатов методом обратного проецирования с фильтрацией использовались программные пакеты Diada³ и INKCT⁴, разработанные в Томском политехническом университете. Итерационный метод был реализован посредством использования среды Matlab⁵.

РЕЗУЛЬТАТЫ

В соответствии с целью работы для оценки возможности реализации метода многоугольного сканирования был использован метод обратного проецирования с фильтрацией и итерационный метод реконструкции изображений для синограмм с полным и ограниченным наборами данных. В итерационном методе было проведено десять итераций, так как последующее увеличение их числа не приводит к улучшению качества реконструированного изображения.

Исходное и реконструированные изображения представлены на рис. 4.

На изображениях видно, что при использовании метода обратного проецирования с фильтрацией для полного набора данных появляются артефакты реконструкции, в то время как итерационный метод дает более четкую картину. Однако при уменьшении количества известных данных метод обратного проецирования с фильтрацией позволяет приблизительно оценить форму получаемого распределения, в то время как итерационный метод не дает возможности даже оценить вид исходного изображения.

¹ Elekta Synergy. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.elekta.com/products/radiation-therapy/synergy/> (дата обращения: 15.09.2023).

² EBT Dosimetry Film. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.gafchromic.com/gafchromic-film/radiotherapy-films/EBT/index.asp> (дата обращения: 15.09.2023).

³ Diada [для обработки и анализа цифровых рентгеновских изображений и их последовательностей, управления устройствами их захвата] / разработчик – Лаборатория № 40 (Технической томографии и интроскопии), ТПУ – Томск: 1С, 2017. – 1 CDROM. – (1С: Электронная дистрибуция). – Электронная программа: электронная.

⁴ INKCT [Управление рентгеновским томографом крупных объектов] / разработчик Чахлов С.В., ТПУ. – Томск: 1С, 2015. – 1 CDROM. – (1С: Электронная дистрибуция). – Электронная программа: электронная.

⁵ MATLAB [среда разработки] / разработчик – Cleve Moler. – Salt Lake City: 1С. – 1 CDROM. – (1С: Электронная дистрибуция). – Электронная программа: электронная. URL: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html> (дата обращения: 15.09.2023).

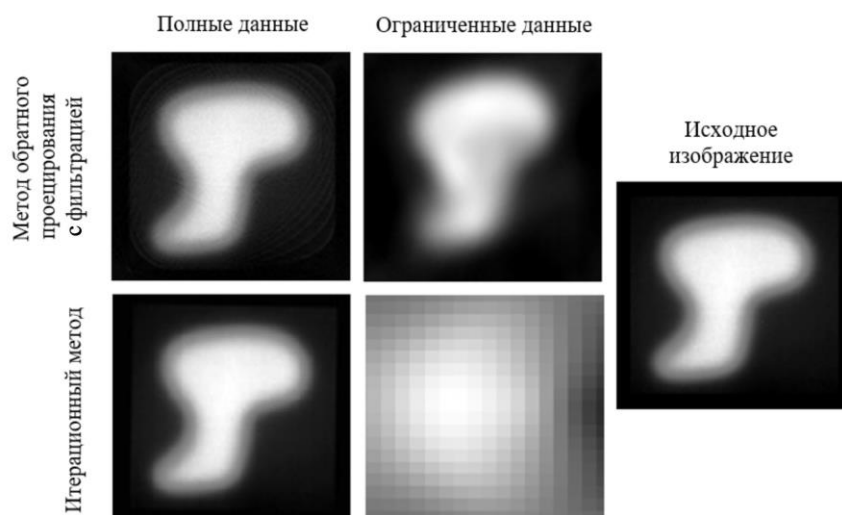


Рис. 4. Исходное и реконструированные изображения на основе полного и ограниченного набора данных

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В качестве параметра оценки качества реконструированных изображений применялось евклидово расстояние δ , которое вычисляется по формуле [15]:

$$\delta = \sqrt{\sum_i (m_i - e_i)^2}, \quad (2)$$

где m_i – количество пикселей начального изображения с определенной яркостью i , e_i – количество пикселей реконструированного изображения с определенной яркостью i .

Разрешение всех исследуемых изображений – 500×500 пикселей, тогда в случае полного несовпадения изображений евклидово расстояние будет составлять 500. Для оценки полученных результатов данное значение нормировалось на единицу. Таким образом, евклидово расстояние может меняться от 0 в случае идеального совпадения двух изображений до 1 при их полном несовпадении.

Были получены евклидовы расстояния для каждого реконструированного изображения, которые представлены в табл. 1.

Таблица 1. Евклидово расстояние реконструированных изображений

Метод реконструкции изображения	Евклидово расстояние	
	Полный набор данных	Ограниченный набор данных
Обратное проецирование с фильтрацией	0.14	0.17
Итерационный	0.07	0.77

При наличии большого количества проекционных данных результатом реконструкции для метода обратного проецирования с фильтрацией является изображение, на котором присутствует ряд артефактов, что мешает точной интерпретации данных. При таком же количестве данных метод итерационной реконструкции обеспечивает высокое качество итогового изображения распределения интенсивности пучка. Евклидово расстояние для изображений, полученных итерационным методом, в два раза меньше, чем при использовании метода обратного проецирования с фильтрацией.

Однако при уменьшении, как количества углов сканирования, так и количества детекторов, метод итерационной реконструкции является неприменимым, поскольку не позволяет даже визуально оценить форму начального распределения интенсивности пучка. Евклидово расстояние в данном случае близко к 1, что соответствует полному несовпадению исходного и реконструированного изображений. В то же время метод обратного проецирования с фильтрацией посредством аппроксимации заполняет недостающие данные и дает хотя бы некоторое представление о профиле пучка.

Таким образом, было определено, что использование метода обратного проецирования с фильтрацией для восстановления изображения поперечного профиля пучка является более эффективным в случае небольшого количества исходных данных, так как показывает возможность оценки размера и формы пучка по результатам реконструкции. При этом при большом наборе исходных данных оба метода показывают хороший результат реконструкции.

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОФИЛЯ МЕДИЦИНСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

Результаты данного исследования могут применяться для выбора наиболее оптимального варианта математической обработки экспериментальных данных в зависимости от набора исходных данных при определении профиля медицинских пучков методом многоугольного сканирования. Это, в свою очередь, позволит обеспечить безопасность пациентов и осуществить лучший контроль над характеристиками пучка при проведении процедур лучевой терапии.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-79-01232).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grégoire V., Guckenberger M., Haustermans K., Lagendijk J.W., Ménard C., Pötter R., Slotman B.J., Tanderup K., Thorwarth D., Herk M., Zips D. Image guidance in radiation therapy for better cure of cancer // *Molecular oncology*, 2020. V. 14. Is. 7. P. 1470–1491.
2. Lapen K., Yamada Y. The Development of Modern Radiation Therapy // *Current Physical Medicine and Rehabilitation Reports*, 2023. V. 11. P. 131–138.
3. DeWerd L.A. Accurate dosimetry for radiobiology // *International Journal of Radiation Oncology, Biology, Physics*, 2021. Vol. 111. Pp. 75–81.
4. Lin Z., Yang Z., Qiu J., Zhou S. Structured Scintillators for Efficient Radiation Detection // *Advanced science*, 2021. V. 9. P. 1–26.
5. Santos T., Ventura T., Lopes M. A review on radiochromic film dosimetry for dose verification in high energy photon beams // *Radiation Physics and Chemistry*, 2021. V. 179. P. 21–30.
6. Rosenfeld A.B., Biasi G., Petasecca M., Lerch M., Villani G., Feygelman V. Semiconductor dosimetry in modern external-beam radiation therapy // *Physics in Medicine & Biology*, 2020. V. 65. P. 1–26.
7. Bulavskaya A.A., Cherepennikov Y.M., Grigorieva A.A., Miloichikova I.A., Stuchebrov S.G. Multiangle scanning for measuring radiation beam profiles with a typical size of 10 millimetres // *Journal of Instrumentation*, 2022. V. 7. P. 70–74.
8. Adler J., Oktem O. Learned primal-dual reconstruction // *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2022. V. 6. P. 1322–1332.
9. Bertero M., Lanteri H., Zanni L. Iterative image reconstruction: a point of view // *Methods in Biomedical Imaging*, 2008. V. 1. P. 1–25.
10. Lu S., Yang B., Xiao Y., Liu S., Li M., Yin L., Zheng W. Iterative reconstruction of low-dose CT based on differential sparse // *Biomedical Signal Processing and Control*, 2023. V. 79. P. 152–159.
11. Willemink M.J., Noël P.B. The evolution of image reconstruction for CT – from filtered back projection to artificial intelligence // *European Radiology*, 2019. V. 29. P. 2185–2195.
12. Jung H. Basic Physical Principles and Clinical Applications of Computed Tomography // *Progress in Medical Physics*, 2021. V. 32. P. 1–17.
13. Schofield R., King L., Tayal U., Castellano I., Stirrup J., Pontana F., Earls J., Nicol E. Image reconstruction: Part 1 – understanding filtered back projection, noise and image acquisition // *Journal of Cardiovascular Computed Tomography*, 2020. V. 14. P. 219–225.
14. Greffier J., Frandon J., Larbi A., Beregi J.P., Pereira F. CT iterative reconstruction algorithms: a task-based image quality assessment // *European Radiology*, 2020. V. 30. P. 487–500.
15. Bulavskaya A.A., Bushmina E.A., Grigorieva A.A., Ermakova A.S., Miloichikova I.A., Stuchebrov S.G. Development of a Technique for Determining the Optimal Number of Projections when Realizing the Method of Multiangle Scanning of an Ionizing Radiation Beam // *Instruments and Experimental Techniques*, 2023. V. 66. Is. 4. P. 620–626.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 5, pp. 299–305

APPLICATION OF MATHEMATICAL TRANSFORMATIONS FOR THE MEDICAL ELECTRON BEAM PROFILE DETERMINATION

M.A. Banshchikova^{1,*}, A.A. Bulavskaya¹, A.A. Grigorieva¹, I.A. Miloichikova^{1,2}, S.G. Stuchebrov¹

¹National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, 634050, Russia;

²Cancer Research Institute, Tomsk National Research Medical Center, Russian Academy of Sciences, Tomsk, 634009, Russia

*e-mail: mab51@tpu.ru

Received October 16, 2023; revised October 16, 2023; accepted October 24, 2023

Currently, radiation therapy is often used for treating cancer. In this method, ionizing radiation affects cancer cells, slowing down their reproduction; however, healthy tissues are also exposed to the irradiation. Therefore, an

important stage of treatment planning is to ensure control over the energy distribution of the beam in the transverse plane. In order to obtain the transverse profile of the beam various detectors are created. However, most of them do not meet all the requirements for modern medical detectors, which include the high energy and spatial resolution, as well as the minimalizing of data processing and result obtaining. The multi-angle scanning method could be a solution of this problem. This method is based on repeated linear displacement of the detector in a plane perpendicular to the beam propagation axis at different angles. The data processing involves the reconstruction of beams' intensities image in the form of pixels of different brightness in grayscale from the data obtained in the experiment. The purpose of this study is to assess the applicability of the main types of mathematical transformations for the implementation of the multi-angle scanning method. This article presents the results of a comparison of the iterative method and the filtered back-projection method with the comprehensive and limited data given. It was found that the filtered back-projection method is less accurate in the presence of comprehensive dataset in contrast to the iterative method, but it still provides better image resolution when there is a limited data.

Keywords: ionizing radiation, electron beam, beam profile, beam analyzing, mathematical transformation, iterative method, filtered back-projection method.

REFERENCES

1. Grégoire V., Guckenberger M., Haustermans K., Lagendijk J.W., Ménard C., Pötter R., Slotman B.J., Tanderup K., Thorwarth D., Herk M., Zips D. Image guidance in radiation therapy for better cure of cancer. *Molecular oncology*, 2020. Vol. 14. No. 7. Pp. 1470–1491.
2. Lapen K., Yamada Y. The Development of Modern Radiation Therapy. *Current Physical Medicine and Rehabilitation Reports*, 2023. Vol. 11. Pp. 131–138.
3. DeWerd L.A. Accurate dosimetry for radiobiology. *International Journal of Radiation Oncology, Biology, Physics*, 2021. Vol. 111. Pp. 75–81.
4. Lin Z., Yang Z., Qiu J., Zhou S. Structured Scintillators for Efficient Radiation Detection. *Advanced science*. Vol. 9. Pp. 1–26.
5. Santos T., Ventura T., Lopes M. A review on radiochromic film dosimetry for dose verification in high-energy photon beams. *Radiation Physics and Chemistry*, 2021. Vol. 179. Pp. 21–30.
6. Rosenfeld A.B., Biasi G., Petasecca M., Lerch M., Villani G., Feygelman V. Semiconductor dosimetry in modern external-beam radiation therapy. *Physics in Medicine & Biology*. Vol. 65. Pp. 1–26.
7. Bulavskaya A.A., Cherepennikov Y.M., Grigorieva A.A., Miloichikova I.A., Stuchebrov S.G. Multiangle scanning for measuring radiation beam profiles with a typical size of 10 millimetres. *Journal of Instrumentation*, 2022. Vol. 7. Pp. 70–74.
8. Adler J., Oktem O. Learned primal-dual reconstruction. *IEEE Transactions on Medical Imaging*. Vol. 6. Pp. 1322–1332.
9. Bertero M., Lantéri H., Zanni L. Iterative image reconstruction: a point of view. *Methods in Biomedical Imaging*, 2008. Vol. 1. Pp. 1–25.
10. Lu S., Yang B., Xiao Y., Liu S., Li M., Yin L., Zheng W. Iterative reconstruction of low-dose CT based on differential sparse. *Biomedical Signal Processing and Control*, 2023. Vol. 79. Pp. 152–159.
11. Willemink M.J., Noël P.B. The evolution of image reconstruction for CT – from filtered back projection to artificial intelligence. *European Radiology*, 2019. Vol. 29. Pp. 2185–2195.
12. Jung H. Basic Physical Principles and Clinical Applications of Computed Tomography. *Progress in Medical Physics*, 2021. Vol. 32. Pp. 1–17.
13. Schofield R., King L., Tayal U., Castellano I., Stirrup J., Pontana F., Earls J., Nicol E. Image reconstruction: Part 1 – understanding filtered back projection, noise and image acquisition. *Journal of Cardiovascular Computed Tomography*, 2020. Vol. 14. Pp. 219–225.
14. Greffier J., Frandon J., Larbi A., Beregi J.P., Pereira F. CT iterative reconstruction algorithms: a task-based image quality assessment. *European Radiology*, 2020. Vol. 30. Pp. 487–500.
15. Bulavskaya A.A., Bushmina E.A., Grigorieva A.A., Ermakova A.S., Miloichikova I.A., Stuchebrov S.G. Development of a Technique for Determining the Optimal Number of Projections when Realizing the Method of Multiangle Scanning of an Ionizing Radiation Beam. *Instruments and Experimental Techniques*, 2023. Vol. 66. No. 4. Pp. 620–626.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517

**ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ, ИНТЕГРАЛЬНЫХ,
ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ И ДРУГИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

А.В. Аксенов

*Механико-математический факультет, Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия
e-mail: aksenov@mech.math.msu.su*

Поступила в редакцию: 19.09.2023

После доработки: 19.09.2023

Принята к публикации: 26.09.2023

Рассматриваются точные решения различных математических уравнений (алгебраических, тригонометрических, обыкновенных дифференциальных, с частными производными первого порядка, математической физики, интегральных, функциональных, дифференциальных с запаздыванием, функционально-дифференциальных и др.). Особое внимание уделяется уравнениям, которые встречаются в различных областях естественных и инженерных наук (в теории тепло- и массопереноса, теории волн, гидродинамике, газовой динамике, теории горения, теории упругости, общей механике, теоретической физике, нелинейной оптике, биологии, химической технологии, и др.), и уравнениям достаточно общего вида, которые зависят от нескольких свободных параметров или произвольных функций. Рассматриваются также уравнения, которые изучаются в университетах и технических вузах.

Ключевые слова: алгебраические уравнения; обыкновенные дифференциальные уравнения; уравнения с частными производными; уравнения математической физики; интегральные уравнения; функциональные уравнения; точные решения.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.300

В 2023 г. в издательстве Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН вышла в свет книга А.Д. Полянина «Точные решения дифференциальных, интегральных, функциональных и других математических уравнений» [1].

Линейные и нелинейные математические уравнения встречаются практически во всех областях естественных и технических наук, а также в некоторых областях экономических и гуманитарных наук. Данная книга посвящена краткому описанию точных решений математических уравнений различных типов, она содержит также некоторые преобразования и редукции, приводящие к более простым уравнениям.

Напомним, что решение называется *точным*, если оно при подстановке в рассматриваемое математическое уравнение превращает его в тождество. При этом не допускаются какие-либо приближения или упрощения уравнения, и не используются никакие априорные допущения. Важно отметить, что для различных типов математических уравнений понятие точного

решения допускает различные уточнения и модификации.

Точные решения математических уравнений всегда играли и продолжают играть огромную роль для формирования правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. В частности, точные решения нелинейных уравнений математической физики наглядно демонстрируют и позволяют лучше понять механизмы таких сложных нелинейных эффектов, как пространственная локализация процессов переноса, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях, существование режимов с обострением, возможная негладкость или разрывность искомых величин и др. Простые решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений широко используются для иллюстрации теоретического материала и некоторых приложений в учебных курсах университетов и технических вузов (по прикладной и вычислительной математике, асимптотическим методам, теоретической физике, теории тепло- и массопереноса,

гидродинамике, газовой динамике, теории волн, нелинейной оптике и др.).

Точные решения уравнений играют важную роль стандартных *математических эталонов*, которые могут быть использованы для проверки корректности и оценки точности различных численных, асимптотических и приближенных аналитических методов. Точные решения необходимы также для разработки и совершенствования соответствующих разделов компьютерных программ, предназначенных для аналитических вычислений (системы компьютерной алгебры Mathematica, Maple, Maxima и др.)

В данной книге рассматриваются следующие типы математических уравнений:

- алгебраические уравнения;
- тригонометрические, гиперболические и другие трансцендентные уравнения;
- обыкновенные дифференциальные уравнения;
- системы обыкновенных дифференциальных уравнений;
- уравнения с частными производными первого порядка;
- линейные уравнения математической физики;
- нелинейные уравнения математической физики;
- системы уравнений математической физики;
- линейные и нелинейные интегральные уравнения;
- разностные, возвратные и другие функциональные уравнения;
- обыкновенные дифференциальные уравнения с запаздыванием;
- обыкновенные функционально-дифференциальные уравнения;
- уравнения математической физики с запаздыванием;
- функционально-дифференциальные уравнения с частными производными.

Важно отметить, что решения математических уравнений разных типов часто явно или неявно связаны между собой. Например, решение линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами сводится к решению алгебраических уравнений, а решения алгебраических уравнений старших порядков строятся с помощью соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений и выражаются в терминах специальных функций. Решение уравнений с частными производными первого порядка сводится к инте-

грированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения многих линейных и нелинейных уравнений математической физики обычно ищутся методами разделения переменных (включая методы обобщенного и функционального разделения переменных) и методами группового анализа и выражаются через решения обыкновенных дифференциальных уравнений (так называемые одномерные редукции) или систем таких уравнений. Решения некоторых нелинейных уравнений математической физики сводятся к функциональным или функционально-дифференциальным уравнениям, а решения различных типов функциональных уравнений выражаются через решения обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений с частными производными. Решения некоторых классов интегральных уравнений строятся с помощью анализа соответствующих классов дифференциальных уравнений и наоборот. Решения уравнений математической физики с постоянным и пропорциональным запаздыванием часто выражаются через решения обыкновенных дифференциальных уравнений или обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием и т.д.

Тесные связи между решениями математических уравнений разных типов и послужили одной из основных мотивацией написания данной книги, в которой рассматриваются наиболее распространенные и некоторые другие точные решения различных уравнений.

При отборе материала автор отдавал наибольшее предпочтение следующим важным классам математических уравнений:

1) уравнениям, которые встречаются в различных областях естественных и инженерных наук (в теории тепло- и массопереноса, теории волн, гидродинамике, газовой динамике, теории горения, теории упругости, общей механике, теоретической физике, нелинейной оптике, химической технологии, биологии, экологии и др.);

2) уравнениям достаточно общего вида, которые зависят от свободных параметров или произвольных функций (точные решения таких уравнений представляют наибольший интерес для тестирования численных и приближенных аналитических методов);

3) уравнениям, которые изучаются в университетах и технических вузах.

Данная книга не имеет аналогов в мировой литературе. По содержанию и форме представления результатов она является мультипликативным справочником, в котором представлена

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ, ИНТЕГРАЛЬНЫХ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ И ДРУГИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

обширная коллекция точных решений различных математических уравнений. При составлении книги использован материал наиболее полных справочников по отдельным видам математических уравнений (обыкновенным дифференциальным, с частными производными и интегральным, см. [2–5]); включены также некоторые решения, приведенные в [6, 7]. Кроме того, добавлено много других, в том числе новых, решений.

Для максимального расширения круга потенциальных читателей с разной математической подготовкой автор по возможности старался избегать использования специальной терминологии. Поэтому некоторые результаты описаны схематически и упрощенно, чего вполне достаточно для их практического применения. Изложение материала ведется по принципу *от простого к сложному*. Многие разделы можно читать независимо друг от друга, что облегчает работу с материалом. Подробное оглавление позволяет быстро находить необходимую информацию.

По нашему мнению, данная книга будет полезной для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, аспирантов и студентов, специализирующихся в области прикладной математики, математической физики, вычислительной математики, механики, теории управления, биологии, биофизики, биохимии, медицины, химической технологии и экологии. Отдельные уравнения и их решения могут быть использованы в качестве иллюстративного материала на лекциях и семинарах по прикладной и вычислительной математике, дифференциальным уравнениям, уравнениям математической физики и интегральным уравнениям.

Заметим, что некоторые алгебраические, трансцендентные и функциональные уравнения могут быть полезны учителям математики физико-математических классов при проведении занятий, а также для составления контрольных работ и домашних заданий (путем фиксации в этих уравнениях свободных параметров).

Отметим, что электронная версия книги находится в свободном доступе в интернете

(https://eqworld.ipmnet.ru/Arts_Polyanin/Book_Polyanin_Mathematical_Equations_2023.pdf).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полянин А.Д. Точные решения дифференциальных, интегральных, функциональных и других математических уравнений. М.: ИПМех РАН, 2023. 600 с.
2. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. CRC Press, Boca Raton–London, 2018. 1427 p.
3. Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd Edition. CRC Press, Boca Raton–London, 2016.
4. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton–London, 2012.
5. Polyanin A.D., Manzhirov A.V. Handbook of Integral Equations, 2nd Edition. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton–London. 2008.
6. Polyanin A.D., Manzhirov A.V. Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. New York: Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton–London, 2007. 1544 p.
7. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I. Delay Ordinary and Partial Differential Equations. New York: CRC Press, Boca Raton, 2023. 434 p.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 5, pp. 306–309

EXACT SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL, INTEGRAL, FUNCTIONAL AND OTHER MATHEMATICAL EQUATIONS

A.V. Aksenov

¹ Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University,
Moscow, 119991, Russia

e-mail: aksenov@mech.math.msu.su

Received September 19, 2023; revised September 19, 2023; accepted September 26, 2023

Exact solutions of various mathematical equations are considered (algebraic, trigonometric, ordinary differential, first order partial derivatives, mathematical physics, integral, functional, delay differential, functional differential, etc.). Particular attention is paid to equations that are found in various fields of natural and engineering sciences (in

the theory of heat and mass transfer, wave theory, hydrodynamics, gas dynamics, combustion theory, elasticity theory, general mechanics, theoretical physics, nonlinear optics, biology, chemical technology, etc.) and equations of a fairly general form, which depend on several free parameters or arbitrary functions. Equations that are studied in universities and technical colleges are also considered.

Keywords: algebraic equations; ordinary differential equations; partial differential equations; equations of mathematical physics; integral equations; functional equations; exact solutions.

REFERENCES

1. *Polyanin A.D.* Exact solutions of differential, integral, functional and other mathematical equations. Moscow, Institute of Mechanics and Mechanics RAS Publ., 2023. 600 p. [in Russian].
2. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. CRC Press, Boca Raton–London, 2018. 1427 p.
3. *Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd Edition. CRC Press, Boca Raton–London, 2016.
4. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton–London, 2012.
5. *Polyanin A.D., Manzhirov A.V.* Handbook of Integral Equations, 2nd Edition. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton–London, 2008.
6. *Polyanin A.D., Manzhirov A.V.* Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. New York, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton–London, 2007., 1544 p.
7. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I.* Delay Ordinary and Partial Differential Equations. New York: CRC Press, Boca Raton, 2023. 434 p.