ISSN 2304-487X

Том 13, номер 2

МАРТ – АПРЕЛЬ 2024

https://vestnikmephi.elpub.ru

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ»

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ»

Том 13 № 2 2024 МАРТ - АПРЕЛЬ

Основан в июле 2012 г.
Выходит 6 раз в год
ISSN: 2304-487X

Адрес редакции: 115409, Москва, Каширское ш., 31,
Вестник НИЯУ МИФИ
Интернет: https://vestnikmephi.elpub.ru
Электронная почта: vestnik@mephi.ru

Москва
НИЯУ МИФИ

СОДЕРЖАНИЕ

Том 13, № 2, 2024

Contents

Volume 13 Number 2, 2024

THEORETICAL AND EXPERIMENTAL PHYSICS

MATHEMATICAL MODELS AND NUMERICAL METHODS

APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

AUTOMATION AND ELECTRONICS

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2024, т. 13, № 2, с. 61–65

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

УДК 54.148

ФОРМИРОВАНИЕ ВЫСТУПА НА ВЕРШИНЕ ГИДРОГЕЛЕВОГО ШАРОВОГО СЕГМЕНТА ПРИ ЕГО ЗАМЕРЗАНИИ

В.А. Дехтярь[1,*], А.Е. Дубинов[1,2,**]

[1]Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, Саров, Нижегородская обл., 607188, Россия

[2]Саровский физико-технический институт – филиал Национального исследовательского ядерного университета «Московский инженерно-физический институт», Саров, Нижегородская обл., 607186, Россия

**e-mail: valerik128@mail.ru*
***e-mail: dubinov-ae@yandex.ru*

Поступила в редакцию: 14.01.2024
После доработки: 04.03.2024
Принята к публикации: 19.03.2024

Известно, что при замерзании капли воды, сидящей на охлаждаемой горизонтальной плоской подложке, на вершине этой капли образуется острый конический выступ. В данной работе исследовался процесс замерзания предварительно насыщенных водой гидрогелевых шаровых сегментов, посаженных на горизонтальную охлаждающую плоскую поверхность. Поверхность охлаждалась с помощью элемента Пельтье. Впервые зарегистрировано образование острых конических выступов на вершинах гидрогелевых сегментов, аналогичных выступам, возникающих на замороженных каплях воды. Методом прямой видеовизуализации установлено, что в процессе замерзания гидрогелевых шаровых сегментов наблюдаются поднимающиеся вверх фронты затвердевания. Искривление этих фронтов и объемное расширение воды, содержавшейся в нанопорах гидрогеля, являются причиной появления выступов при их замерзании. Также установлено, что материал этих выступов после заморозки – лед. При этом следов полиакриламида в выступах обнаружено не было.

Ключевые слова: гидрогелевый шаровой сегмент, замерзание, выступ на вершине.
DOI: 10.26583/vestnik.2024.307
EDN FGDXFE

ВВЕДЕНИЕ

В физике воды известен любопытный эффект – при замерзании капли воды, сидящей на охлаждаемой горизонтальной плоской подложке, на вершине этой капли образуется острый конический выступ [1–9]. В настоящее время понятны физические причины образования выступа: искривление поднимающегося вверх фронта затвердевания и объемное расширение воды при замерзании. Было установлено, что выступ образуется даже при замерзании капли коллоидной суспензии с частицами размером в несколько нанометров [10]. Затем замерзшие капли суспензии подвергались сублимационному выпариванию. Совокупность описанных там процессов представляет собой технологию низкоплотной аэрогелевой 3D-печати.

Однако в недавнем исследовании [11] образование выступа при замерзании капли морской воды, наоборот, не было найдено.

Перечисленные и многие другие исследования формирования выступов при заморозке капель всегда имели дело с текучими средами. Возникают вопросы: как будет происходить заморозка в нетекучих средах, например в гидрогелях, и будут ли в них образовываться характерные выступы? Ответы на эти вопросы могут оказаться важными, например в технологиях низкоплотных материалов, получаемых при сублимационном выпаривании гидрогелей [12].

Целью данной работы было исследование заморозки гидрогелевых шаровых сегментов на предмет возможного формирования на их вершине выступов.

МАТЕРИАЛЫ, ОБОРУДОВАНИЕ И МЕТОДЫ

Для приготовления образцов брались сферические гранулы из полиакриламида (polyacrylamide) [13, 14]. В сухом состоянии гранулы имели диаметр ~ 2.5 мм и массу ~ 20 мг. Гранулы помещались в воду на сутки при комнатной температуре, где они насыщались водой. Гранулы принимали вид эластичных шаров, состоящих из бифазного материала – гидрогеля. При этом шары имели существенно бóльшие массу и диаметр по сравнению с исходными гранулами. Гидрогель получался прозрачным, и к тому же он имел показатель преломления, близкий к показателю преломления воды.

От гидрогелевого шара отрезался шаровой сегмент. Выбор именно такой геометрии образцов оказался весьма важным по двум причинам. Во-первых, шаровой сегмент был наиболее близким по форме к сидящей на горизонтальной плоскости капле воды (здесь еще раз напомним, что для образования выступа на вершине замерзшей капли ее форма должна вызывать искривления фронта затвердевания). Во-вторых, плоское основание шарового сегмента обеспечивает надежный тепловой контакт с холодильником.

На рис. 1 представлены фотоизображения исходной (сухой) гранулы, гидрогелевого шара и шарового сегмента рядом с линейкой. Эти изображения позволяют сопоставить их реальные размеры и форму.

Для проведения исследований был собран специальный стенд. Основу стенда составляет термоэлектрический преобразователь – элемент Пельтье марки TEC1-12706. При подключении к нему источника постоянного напряжения 12 В с током 6 А одна из поверхностей элемента охлаждается, а другая – нагревается. Размер охлаждаемой поверхности – $4{\times}4$ см^2. Для устойчивой работы на нагреваемой поверхности элемента устанавливался тепловой радиатор с вентилятором для отвода тепла. На охлаждаемой поверхности элемента закреплялась алюминиевая фольга толщиной 15 мкм. Для надежного термоконтакта между фольгой и охлаждаемой поверхностью элемента наносился слой термоклея толщиной 200 мкм. Было измерено, что свободная поверхность фольги в стенде охлаждается от 20° до −8 °C примерно за 20 с с момента включения элемента. Стенд ранее применялся для исследования заморозки капель воды в [9].

Шаровой сегмент помещался на поверхность алюминиевой фольги. Рядом для сравнения на фольгу наносилась также капля воды. Визуализация замерзания шарового гидрогелевого сегмента и капли осуществлялась с помощью ручного цифрового микроскопа Celestron (модель 44302-A), регистрирующего видео с частотой 20 кадров/с [15].

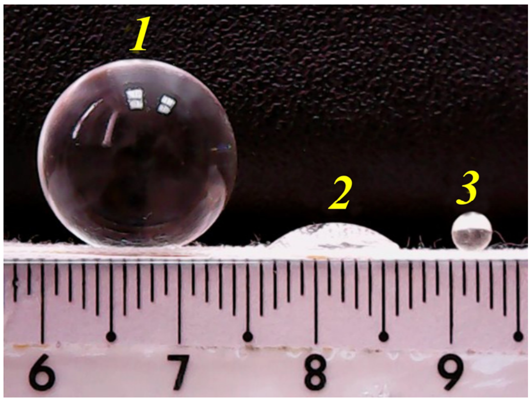


Рис. 1. Фото изображения гидрогелевого шара *1*, гидрогелевого шарового сегмента *2*, исходной сухой гранулы полиакриламида *3*; цифры на линейке – в сантиметрах

Исследования проводились в помещении при комнатной температуре 20 °C и нормальном атмосферном давлении – 750 Торр.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В результате экспериментов было установлено, что при замерзании гидрогелевых шаровых сегментов на их вершинах формируются выступы. При этом некоторые особенности замерзания жидких капель проявляются и при заморозке гидрогелевых образцов. В частности, в процессе замерзания зарегистрирован поднимающийся вверх фронт затвердевания гидрогеля, который в процессе своего подъема искривляется. На рис. 2 представлен один из примеров раскадровки видеозаписи основных стадий замерзания гидрогелевых образцов и капель воды.

Рис. 2,*a* показывает исходное состояние шарового гидрогелевого сегмента и капли воды до включения термоэлектрического преобразователя. Рис. 2,*b*,*c* демонстрируют следующую стадию охлаждения сегмента и капли, когда в них поднимается фронты затвердевания. Так как объем капли заметно меньше объема сегмента, то поднимающийся вверх фронт затвердевания воды (см. рис. 2,*b*) появляется несколько раньше, чем фронт затвердевания гидрогеля (см. рис. 2,*c*).

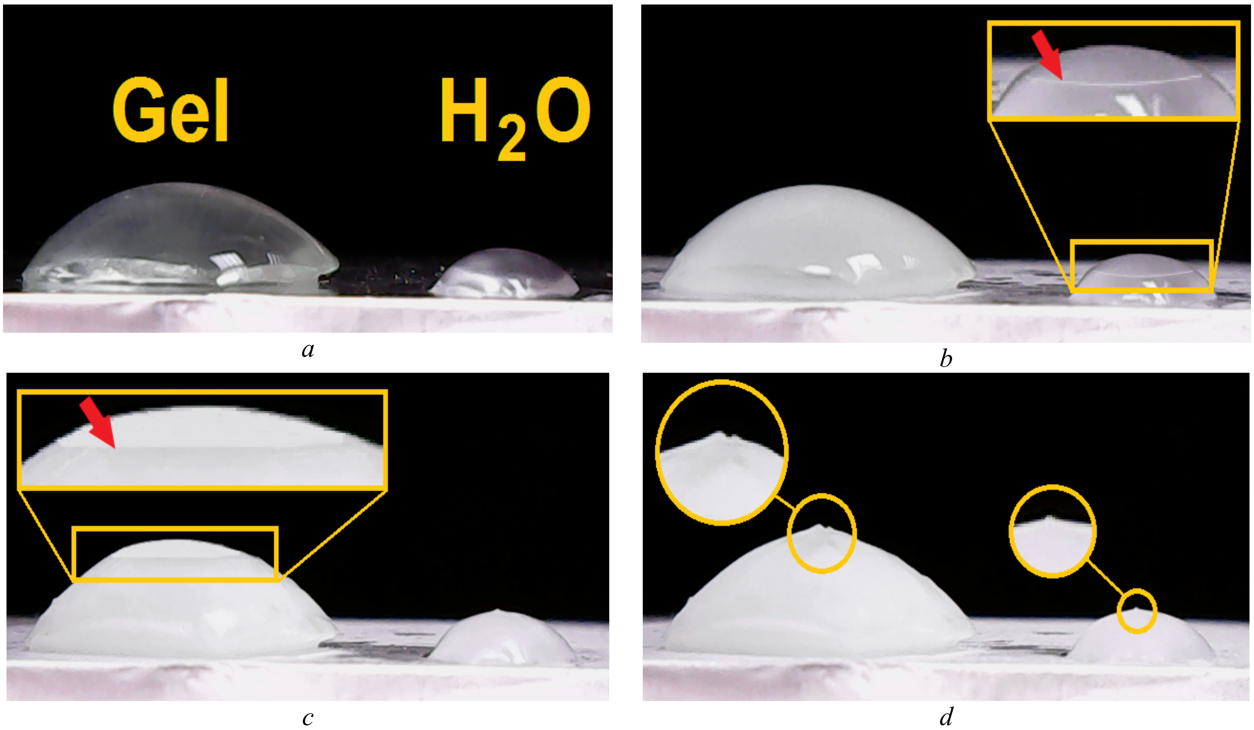


Рис. 2. Отдельные кадры видеозаписи процесса заморозки образцов: *a* – исходное состояние образцов; *b* – стадия охлаждения образцов (стрелка показывает на фронт затвердевания в капле воды); *c* – стадия охлаждения образцов (стрелка показывает фронт затвердевания в шаровом сегменте гидрогеля, а капля воды уже имеет выступ на вершине); *d* – завершающая стадия, когда оба образца имеют выступы на своих вершинах

На вершинах обоих образцов появляются выступы на заключительной стадии замерзания: для капли воды (см. рис. 2,*c*) и для шарового гидрогелевого сегмента (см. рис. 2,*d*), соответственно.

Было найдено, что замерзшие образцы гидрогеля теряли свою эластичность, т.е. становились твердыми. Изучение выступов на вершине гидрогелевых шаровых сегментов показало, что материал этих выступов после заморозки – лед. При этом следов полиакриламида в выступах не обнаружено. Это означает, что полиакриламидный остов шаровых сегментов не подвергается сильной деформации вблизи вершины. Эти данные могут оказаться важными в технологиях низкоплотных материалов, получаемых при сублимационном выпаривании гидрогелей.

Приведенный здесь пример замерзания образцов с формированием выступов был повторен не менее 10 раз.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовался процесс замерзания гидрогелевых шаровых сегментов, посаженных на горизонтальную охлаждаемую плоскую поверхность. Зарегистрировано образование выступов на вершинах сегментов. Подобные выступы возникают при замерзании жидких капель, в то время как в гидрогелях они зарегистрированы здесь впервые.

Установлено, что в процессе замерзания гидрогелевых шаровых сегментов наблюдаются поднимающиеся вверх фронты затвердевания. Искривление этих фронтов и объемное расширение воды, содержавшейся в гидрогеле, при замерзании сегментов являются причиной появления выступов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Anderson D.M., Grae Worster M., Davis S.H.* The case for a dynamic contact angle in containerless solidification // Journal of Crystal Growth, 1996. V. 163. № 3. Pp. 329–338. https://doi.org/10.1016/0022-0248(95)00970-1

2. *Enriquez O.R., Marin A. G., Winkels K.G., Snoeijer J.H.* Freezing singularities in water drops // Physics of Fluids, 2012. V. 24. № 9. P. 091102-1–2. http://dx.doi.org/10.1063/1.4747185

3. *Snoeijer J.H., Brunet P.* Pointy ice-drops: How water freezes into a singular shape // American Journal of Physics, 2012. V. 80. № 9. Pp. 764–771. https://doi.org/10.1119/1.4726201

4. *Marín A.G., Enríquez O.R., Brunet P., Colinet P., Snoeijer J.H.* Universality of tip singularity formation in freezing water drops // Physical Review Letters, 2014. V. 113. № 5. P. 054301. http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.054301

5. *Schetnikov A., Matiunin V., Chernov V.* Conical shape of frozen water droplets // American Journal of Physics, 2015. V. 83. № 1. Pp. 36–38.
https://doi.org/10.1119/1.4897499

6. *Ismail M.F., Waghmare P.R.* Universality in freezing of an asymmetric drop // Applied Physics Letters, 2016. V. 109. № 23. Pp. 234105.
http://dx.doi.org/10.1063/1.4971995

7. *Zhang X., Liu X., Min J., Wu X.* Shape variation and unique tip formation of a sessile water droplet during freezing // Applied Thermal Engineering, 2019. V. 147. № 1. Pp. 927–934.
https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2018.09.040

8. *Starostin A., Strelnikov V., Dombrovsky L.A., Shoval S., Gendelman O., Bormashenko E.* Effect of asymmetric cooling of sessile droplets on orientation of the freezing tip // Journal Colloid and Interface Science, 2022. V. 620. № 1. Pp. 179–186.
https://doi.org/10.1016/j.jcis.2022.04.019

9. *Dekhtyar V.A., Dubinov A.E., Kolesov H.N.* Observation of a plasma analogue of the Mpemba effect // High Energy Chemistry, 2023. V. 57. № 4. Pp. 293–297.
https://doi.org/10.31857/S0023119323040071

10. *Tetik H., Yang G., Tan W., Fong A., Lei S., Weker J.N., Lin D.* High speed in-situ X-ray imaging of 3D freeze printing of aerogels // Additive Manufacturing, 2020. V.26. №1. Pp. 191513-1–8.
https://doi.org/10.1016/j.addma.2020.101513

11. *Wan L., Liu X., Chu S., Wang M., Wang Z., Wang Y., Sun H.* Freezing characters study of the sessile seawater drop on a cold substrate // AIP Advances, 2023. V. 13. № 3. P. 035021-1–9.
https://doi.org/10.1063/5.0133949

12. *Jiang S., Agarwal S., Greiner A.* Low-density open cellular sponges as functional materials // Angewandte Chemie, International Edition, 2017. V. 56. № 49. Pp. 15520–15538.
http://dx.doi.org/10.1002/anie.201700684

13. *Dubinov A.E., Kozhayeva J.P.* Generating periodic pulse sequences of nanosecond spark discharges in an air gap between transparent hydrogel electrodes // Technical Physics Letters, 2019. V. 45. № 4. Pp. 383–385.
http://dx.doi.org/10.1134/S1063785019040242

14. *Dubinov A.E., Kozhayeva J.P.* Transparent hydrogel electrodes as a new class of electrodes for high-current nanosecond atmospheric-pressure discharges // High Energy Chemistry, 2019. V. 53. № 6. Pp. 425–428.
http://dx.doi.org/10.1134/S0018143919060031

15. *Dekhtyar V.A., Dubinov A.E.* Visualization of liquids flows in microfluidics and plasma channels in nanosecond spark microdischarges by means of digital microscopy // Scientific Visualization, 2023. V. 15. № 1. Pp. 1–16.
https://doi.org/10.26583/sv.15.1.01

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 2, pp. 61–65

TIP APPEARANCE ON TOP HYDROGEL BALL SEGMENT DURING ITS FREEZING

***V.A. Dekhtyar*[1,*]*, A.E. Dubinov*[1,2,**]**

[1]*Russian Federal Nuclear Center – All-Russia Scientific research Institute of Experimental Physics, Sarov, Nizhny Novgorod region, 607188,Russia*

[2]*Sarov Physical Technical Institute – the branch of National Research Nuclear University «Moscow Engineering Physics Institute», Sarov, Nizhny Novgorod region, 607186, Russia*

**e-mail:* valerik128@mail.ru

***e-mail:* dubinov-ae@yandex.ru

Received January 14, 2024; revised March 4, 2024; accepted March 19, 2024

It is known that when a drop of water sitting on a cooled horizontal flat substrate freezes, a sharp conical tip appears on the top of this drop. The process of freezing of hydrogel ball segments pre-saturated with water was studied. The segments were placed on a horizontal cooling flat surface. The surface was cooled by the Peltier element. The sharp conical tips appearance on the tops of hydrogel ball segments was recorded for the first time. They are similar to the tips appearing on the frozen water drops. It was established by direct video visualization that upward solidification fronts are observed during the freezing of hydrogel ball segments. These fronts curvature and volumetric expansion of water in hydrogel nano-pores are the reasons of tips appearance during freezing. It was also found that the material of these tips after freezing is ice. At the same time, no traces of polyacrylamide were found in the tips.

Keywords: hydrogel ball segments, freezing, tip on a top.

REFERENCES

1. *Anderson D.M., Grae Worster M., Davis S.H.* The case for a dynamic contact angle in containerless solidification. Journal of Crystal Growth, 1996. Vol. 163. No. 3. Pp. 329–338.
https://doi.org/10.1016/0022-0248(95)00970-1

2. *Enriquez O.R., Marin A.G., Winkels K.G., Snoeijer J. H.* Freezing singularities in water drops. Physics of Fluids, 2012. Vol. 24. No.9. Pp. 091102-1–2.
http://dx.doi.org/10.1063/1.4747185

3. *Snoeijer J.H., Brunet P.* Pointy ice-drops: How water freezes into a singular shape. American Journal of Physics, 2012. Vol. 80. No. 9. Pp. 764–771.
https://doi.org/10.1119/1.4726201

4.*Marín A.G., Enríquez O.R., Brunet P., Colinet P., Snoeijer J.H.* Universality of tip singularity formation in freezing water drops. Physical Review Letters, 2014. Vol. 113. No. 5. Pp. 054301.
http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.054301

5. *Schetnikov A., Matiunin V., Chernov V.* Conical shape of frozen water droplets. American Journal of Physics, 2015. Vol. 83. No. 1. Pp. 36–38.
https://doi.org/10.1119/1.4897499

6. *Ismail M.F., Waghmare P.R.* Universality in freezing of an asymmetric drop. Applied Physics Letters, 2016. Vol. 109. No. 23. Pp. 234105.
http://dx.doi.org/10.1063/1.4971995

7. *Zhang X., Liu X., Min J., Wu X.* Shape variation and unique tip formation of a sessile water droplet during freezing. Applied Thermal Engineering, 2019. Vol. 147. No. 1. Pp. 927–934.
https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2018.09.040

8. *Starostin A., Strelnikov V., Dombrovsky L.A., Shoval S., Gendelman O., Bormashenko E.* Effect of asymmetric cooling of sessile droplets on orientation of the freezing tip // Journal Colloid and Interface Science, 2022. Vol. 620. No. 1. Pp. 179–186.
https://doi.org/10.1016/j.jcis.2022.04.019

9. *Dekhtyar V.A., Dubinov A.E., Kolesov H.N.* Observation of a plasma analogue of the Mpemba effect. High Energy Chemistry, 2023. Vol. 57. No. 4. Pp. 293–297.
https://doi.org/10.31857/S0023119323040071

10. *Tetik H., Yang G., Tan W., Fong A., Lei S., Weker J.N., Lin D.* High speed in-situ X-ray imaging of 3D freeze printing of aerogels. Additive Manufacturing, 2020. Vol. 26. No. 1. Pp. 191513-1–8.
https://doi.org/10.1016/j.addma.2020.101513

11. *Wan L., Liu X., Chu S., Wang M., Wang Z., Wang Y., Sun H.* Freezing characters study of the sessile seawater drop on a cold substrate. AIP Advances, 2023. Vol. 13. No. 3. Pp. 035021-1–9.
https://doi.org/10.1063/5.0133949

12. *Jiang S., Agarwal S., Greiner A.* Low-density open cellular sponges as functional materials. Angewandte Chemie, International Edition, 2017. Vol. 56. No. 49. Pp.15520–15538.
http://dx.doi.org/10.1002/anie.201700684

13. *Dubinov A.E., Kozhayeva J.P.* Generating periodic pulse sequences of nanosecond spark discharges in an air gap between transparent hydrogel electrodes. Technical Physics Letters, 2019. Vol. 45. No. 4. Pp. 383–385.
http://dx.doi.org/10.1134/S1063785019040242

14. *Dubinov A.E., Kozhayeva J.P.* Transparent hydrogel electrodes as a new class of electrodes for high-current nanosecond atmospheric-pressure discharges. High Energy Chemistry, 2019. Vol. 53. No. 6. Pp. 425–428.
http://dx.doi.org/10.1134/S0018143919060031

15. *Dekhtyar V.A., Dubinov A.E.* Visualization of liquids flows in microfluidics and plasma channels in nanosecond spark microdischarges by means of digital microscopy. Scientific Visualization, 2023. Vol. 15. No. 1. Pp. 1–16.
https://doi.org/10.26583/sv.15.1.01

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2024, т. 13, № 2, с. 66–75

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.9

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С ПОМОЩЬЮ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ БОЛЕЕ ПРОСТЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Д. Полянин
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия
e-mail: polyanin ipmnet.ru

Поступила в редакцию: 24.01.2024
После доработки: 24.01.2024
Принята к публикации: 06.02.2024

Разработан метод построения точных решений нелинейных уравнений математической физики неавтономного вида, коэффициенты которых зависят от времени, путем использования решений с обобщенным или функциональным разделением переменных более простых уравнений математической физики автономного вида, коэффициенты которых не зависят от времени. Рассмотрены конкретные примеры построения точных решений нелинейных уравнений математической физики, коэффициенты которых произвольным образом зависят от времени. Показано, что решения с обобщенным и функциональным разделением переменных нелинейных уравнений математической физики с постоянным запаздыванием можно использовать для построения точных решений более сложных нелинейных уравнений математической физики с переменным запаздыванием общего вида. Описан ряд нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с переменным запаздыванием, которые допускают точные решения с обобщенным разделением переменных.

Ключевые слова: нелинейные уравнения математической физики, уравнения в частных производных с запаздыванием, методы решения, точные решения, решения с обобщенным разделением переменных, решения с функциональным разделением переменных.
DOI: 10.26583/vestnik.2024.318
EDN JGRBCV

ВВЕДЕНИЕ. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Точные решения уравнений математической физики играют важную роль для анализа качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Они наглядно демонстрируют и позволяют лучше понять механизмы таких сложных нелинейных эффектов, как пространственная локализация процессов переноса, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях, существование режимов с обострением, возможная негладкость или разрывность искомых величин и др. Простые решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений широко используются для иллюстрации теоретического материала и некоторых приложений в учебных курсах университетов и технических вузов (по прикладной математике, теоретической физике, теории тепло- и массопереноса, гидродинамике, газовой динамике, теории волн, нелинейной оптике и др.).

Точные решения уравнений играют важную роль стандартных математических эталонов, которые могут быть использованы в качестве тестовых задач для оценки точности различных численных и приближенных аналитических методов. Они необходимы также для разработки и совершенствования соответствующих разделов компьютерных программ, предназначенных для аналитических вычислений (системы компьютерной алгебры Mathematica, Maple и др.).

Под точными решениями нелинейных уравнений математической физики обычно понимаются решения, которые выражаются [1, 2]:

(i) через элементарные функции или в виде квадратур (т.е. с помощью элементарных функций и неопределенных интегралов);

(ii) через решения обыкновенных дифференциальных уравнений (далее – ОДУ) или систем таких уравнений.

Для более сложных уравнений математической физики с запаздыванием к точным решениям из пп. (i) и (ii) надо добавить решения, которые выражаются через решения ОДУ с запаздыванием или систем ОДУ с запаздыванием [3].

Наиболее распространенные методы построения точных решений нелинейных уравнений математической физики излагаются в [1, 4–15] (о методах построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием см. [3, 16]).

В данной работе будут описаны новые методы построения точных решений сложных нелинейных уравнений математической физики (в том числе и уравнений с запаздыванием), основанные на использовании решений с обобщенным или функциональным разделением переменных более простых уравнений математической физики. Эти методы базируются на принципе структурной аналогии решений, который формулируется следующим образом: *точные решения более простых уравнений могут служить основой для построения решений более сложных родственных уравнений.*

ОБЩИЕ ФОРМУЛИРОВКИ РАССМАТРИВАЕМЫХ ПРОБЛЕМ

Приведем общие формулировки двух важных проблем, которые обсуждаются в данной статье.

Проблема 1. Пусть известно точное решение $u = u(x, t)$ некоторого нелинейного уравнения математической физики, зависящего от свободных параметров $a_1, ..., a_p$. Возникает вопрос: в каких случаях можно что-либо сказать о точных решениях более сложного уравнения математической физики, полученного из исходного путем замены свободных параметров на произвольные функции $a_1(t), ..., a_p(t)$?

В следующем разделе будет показано, каким образом точные решения с обобщенным или функциональным разделением переменных нелинейных уравнений математической физики автономного вида, коэффициенты которых не зависят от времени, можно использовать для построения точных решений более общих нелинейных уравнений математической физики неавтономного вида, коэффициенты которых произвольным образом зависят от времени t.

Проблема 2. Пусть известно точное решение $u = u(x, t)$ некоторого нелинейного уравнения математической физики с постоянным запаздыванием τ. Возникает вопрос: в каких случаях можно что-либо сказать о точных решениях более сложного уравнения математической физики, полученного из исходного путем замены постоянного запаздывания τ на произвольное переменное запаздывание $\tau(t)$?

В предпоследнем разделе будет показано, каким образом точные решения с обобщенным или функциональным разделением переменных нелинейных уравнений математической физики с постоянным запаздыванием можно использовать для построения точных решений более сложных нелинейных уравнений математической физики с переменным запаздыванием общего вида.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕШЕНИЙ АВТОНОМНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ УРАВНЕНИЙ

Покажем, каким образом для построения точных решений уравнений математической физики неавтономного вида, коэффициенты которых зависят от времени t, можно использовать решения родственных более простых уравнений математической физики автономного вида, коэффициенты которых не зависят от времени. Используя принцип «от простого к сложному», последовательность и логику рассуждений в подобных случаях продемонстрируем на нескольких конкретных примерах, после анализа которых сформулируем общие выводы в виде утверждений.

Пример 1. Рассмотрим нелинейное уравнение реакционно-диффузионного типа

$$u_t = a_1 u u_{xx} + a_2, \qquad (1)$$

где a_1 и a_2 – свободные параметры. Уравнение (1) допускает точное решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по пространственной переменной

$$u = \psi_1(t)x^2 + \psi_2(t), \qquad (2)$$

где функции $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\psi_2 = \psi_2(t)$ удовлетворяют нелинейной системе ОДУ:

$$\psi_1' = 2a_1\psi_1^2, \quad \psi_2' = 2a_1\psi_1\psi_2 + a_2. \qquad (3)$$

Здесь и далее штрихи обозначают производные по t. Система (3) легко интегрируется, однако это нам далее не понадобится.

Заменив теперь формально в уравнении (1) параметры a_1 и a_2 на произвольные функции $a_1(t)$ и $a_2(t)$, получим

$$u_t = a_1(t) u u_{xx} + a_2(t). \qquad (4)$$

Легко проверить, что уравнение (4) также допускает точное решение вида (2), где функции $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\psi_2 = \psi_2(t)$ удовлетворяют нелинейной системе ОДУ (3), в которой параметры a_1 и a_2 надо соответственно заменить на произвольные функции $a_1(t)$ и $a_2(t)$.

Рассмотренный иллюстративный пример позволяет сделать простое обобщение, которое можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Утверждение 1. Пусть автономное нелинейное уравнение с частными производными

$$u_t = F(x, u, u_x, \ldots, u_x^{(n)};\ a_1, \ldots, a_p), \qquad (5)$$

зависящее от свободных параметров $a_1, \ldots, a_p$, имеет решение с обобщенным разделением переменных в виде полинома по пространственной переменной x:

$$u = \sum_{k=0}^{m} \psi_k(t) x^k. \qquad (6)$$

Тогда более сложное неавтономное уравнение с частными производными

$$u_t = F(x, u, u_x, \ldots, u_x^{(n)};\ \ a_1(t), \ldots, a_p(t)), \qquad (7)$$

которое получено из уравнения (5) формальной заменой параметров $a_1, \ldots, a_p$ на произвольные функции $a_1(t), \ldots, a_p(t)$, также допускает точное решение вида (6) с другими функциями $\psi_k(t)$.

Утверждение 1 является частным случаем сформулированного далее более общего утверждения 2.

Пример 2. Рассмотрим другое нелинейное уравнение реакционно-диффузионного типа

$$u_t = a_1 u_{xx} + u_x^2 + bu^2 + a_2 \quad (b > 0), \qquad (8)$$

где a_1, a_2, b – свободные параметры. Уравнение (8) допускает точное решение с обобщенным разделением переменных, содержащее тригонометрическую функцию x, вида

$$u = \psi_1(t)\cos(\sqrt{b}x) + \psi_2(t), \qquad (9)$$

где функции $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\psi_2 = \psi_2(t)$ удовлетворяют нелинейной системе ОДУ:

$$\begin{aligned} \psi_1' &= 2b\psi_1\psi_2 - a_1 b\psi_1, \\ \psi_2' &= b(\psi_1^2 + \psi_2^2) + a_2. \end{aligned} \qquad (10)$$

Заменив формально в уравнении (8) параметры a_1 и a_2 на произвольные функции $a_1(t)$ и $a_2(t)$, получим

$$u_t = a_1(t) u_{xx} + u_x^2 + bu^2 + a_2(t) \quad (b > 0). \qquad (11)$$

Легко проверить, что уравнение (11) также допускает точное решение вида (9), где функции $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\psi_2 = \psi_2(t)$ удовлетворяют нелинейной системе ОДУ (10), в которой параметры a_1 и a_2 надо заменить на произвольные функции $a_1(t)$ и $a_2(t)$.

Попытка аналогичным образом заменить константу b в уравнении (8) на произвольную функцию $b(t)$ отказывается безуспешной, поскольку в этом случае функция (9) при $b = b(t)$ уже не будет являться точным решением такого модифицированного уравнения. Это произошло потому, что координатная функция $\varphi(x) = \cos(\sqrt{b}x)$ в решении (9) явным образом зависит от параметра b.

Рассмотренный пример позволяет сделать достаточно очевидное обобщение, которое сформулируем в виде следующего утверждения.

Утверждение 2. Пусть автономное нелинейное уравнение с частными производными (5), зависящее от свободных параметров $a_1, \ldots, a_p$, имеет решение с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \sum_{k=1}^{m} \psi_k(t)\, \varphi_k(x), \qquad (12)$$

в котором все линейно независимые координатные функции $\varphi_k(x)$ не зависят от параметров $a_1, \ldots, a_p$, а функции $\psi_k = \psi_k(t)$ описываются автономной системой ОДУ:

$$\begin{gathered} \psi_k' = f_k(\psi_1, \ldots, \psi_m;\ a_1, \ldots, a_p), \\ k = 1, \ldots, m. \end{gathered} \qquad (13)$$

Тогда более сложное неавтономное уравнение с частными производными (7), которое получено из уравнения (5) формальной заменой параметров $a_1, \ldots, a_k$ на произвольные функции $a_1(t), \ldots, a_p(t)$, допускает точное решение вида (12), где координатные функции $\varphi_k(x)$ не меняются, а функции $\psi_k = \psi_k(t)$ описываются неавтономной системой ОДУ:

$$\psi_k' = f_k(\psi_1, \ldots, \psi_m;\ a_1(t), \ldots, a_p(t)),\quad k = 1, \ldots, m. \tag{14}$$

Это утверждение можно доказать, используя результаты [11] (см. также [1, 13]). Действительно, подставим (12) в автономное уравнение (5), а затем исключим производные по времени с помощью ОДУ (13). Заменив далее функции $\psi_k(t)$ на произвольные константы C_k, получим

$$F\left[\sum_{k=1}^{m} C_k \varphi_k(x)\right] = \sum_{k=1}^{m} f_k(C_1, \ldots, C_m;\ a_1, \ldots, a_p)\varphi_k(x), \tag{15}$$

где через $F[u]$ обозначена правая часть уравнения (5). Соотношения (15) означают (см. [1, 11]), что конечномерное линейное подпространство

$$L_m = \{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)\}, \tag{16}$$

элементами которого являются всевозможные линейные комбинации координатных функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$, входящих в решение (12), инвариантно относительно нелинейного дифференциального оператора по пространственной переменной x, стоящего в правой части автономного уравнения (5). Нелинейный дифференциальный оператор в правой части более сложного неавтономного уравнения с частными производными (7), полученного из уравнения (5) формальной заменой параметров $a_1, \ldots, a_k$ на произвольные функции $a_1(t), \ldots, a_p(t)$, параметрически зависит от времени t (содержит производные только по переменной x). Поэтому при подстановке выражения (12) в правую часть уравнения (7), функции $a_1(t), \ldots, a_p(t)$ ведут себя как константы [1], что в итоге и приводит неавтономной системе ОДУ (14) для функций $\psi_k = \psi_k(t)$.

Замечание 1. В левой части нелинейных уравнений (5) и (7) вместо первой производной u_t может стоять вторая производная u_{tt} или любая линейная комбинация производных по t вида $L[u] = \sum_{i=1}^{s} c_i(t) u_t^{(i)}$. В этом случае в левой части ОДУ (13) и (14) в утверждении 2 вместо первых производных ψ_k' должны стоять вторые производные ψ_k'' или выражения $L[\psi_k]$.

Утверждение 2 допускает упрощенную более краткую (но менее информативную) формулировку, которая приведена ниже.

Утверждение 2а. Пусть автономное уравнение с частными производными (5), зависящее от свободных параметров $a_1, \ldots, a_p$, имеет решение (12), в котором линейно независимые координатные функции $\varphi_k(x)$ не зависят от параметров $a_1, \ldots, a_p$. Тогда более сложное неавтономное уравнение с частными производными (7), полученное из уравнения (5) формальной заменой параметров $a_1, \ldots, a_k$ на произвольные функции $a_1(t), \ldots, a_p(t)$, также допускает точное решение вида (12), в котором координатные функции $\varphi_k(x)$ не меняются, а функции $\psi_k = \psi_k(t)$ описываются подходящей системой ОДУ.

Утверждения 1 и 2 можно обобщить также на случай нелинейных уравнений математической физики, которые допускают более сложные точные решения с функциональным разделением переменных. Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

Пример 3. Рассмотрим уравнение реакционно-диффузионного типа с логарифмической нелинейностью

$$u_t = a_1 u_{xx} + a_2 u \ln u, \tag{17}$$

где a_1 и a_2 – свободные параметры.

Уравнение (17) допускает точное решение с функциональным разделением переменных вида [1, 11]:

$$u = \exp[\psi_1(t)x^2 + \psi_2(t)x + \psi_3(t)], \tag{18}$$

где функции $\psi_n = \psi_n(t)$ (n = 1, 2, 3) удовлетворяют нелинейной системе ОДУ:

$$\begin{aligned} \psi_1' &= 4a_1\psi_1^2 + a_2\psi_1, \\ \psi_2' &= 4a_1\psi_1\psi_2 + a_2\psi_2, \\ \psi_3' &= a_2\psi_3 + 2a_1\psi_1 + a_1\psi_2^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Заменив теперь формально в уравнении (17) параметры a_1 и a_2 на произвольные функции $a_1(t)$ и $a_2(t)$, получим более сложное уравнение

$$u_t = a_1(t) u_{xx} + a_2(t) u \ln u \qquad (20)$$

Легко проверить, что уравнение (20) также допускает точное решение вида (18), где функции $\psi_n = \psi_n(t)$ (n = 1, 2, 3) удовлетворяют нелинейной системе ОДУ (19), в которой параметры a_1 и a_2 надо соответственно заменить на произвольные функции $a_1(t)$ и $a_2(t)$.

Рассмотренный иллюстративный пример позволяет сделать простое обобщение, приведенное ниже.

Утверждение 3. Пусть автономное нелинейное уравнение с частными производными (5), зависящее от свободных параметров $a_1, ..., a_p$, имеет решение с функциональным разделением переменных вида

$$u = U(z), \quad z = \sum_{k=0}^{m} \psi_k(t) x^k, \qquad (21)$$

где $U(z)$ – некоторая функция, не зависящая от параметров $a_1, ..., a_p$. Тогда более сложное неавтономное уравнение с частными производными (7), которое получено из уравнения (5) формальной заменой параметров $a_1, ..., a_p$ на произвольные функции $a_1(t), ..., a_p(t)$, также допускает точное решение вида (21) с той же самой функцией $U(z)$, но с другими функциями $\psi_k(t)$.

Данное утверждение доказывается путем перехода к новой переменной z в уравнениях (5) и (7) с использованием подстановки $u = U(z)$, после чего преобразованные уравнения будут иметь решения с обобщенным разделением переменных, к которым применимо утверждение 1.

Утверждение 3 допускает дальнейшее обобщение, описанное ниже.

Утверждение 4. Пусть автономное нелинейное уравнение с частными производными (5), зависящее от свободных параметров $a_1(t), ..., a_p(t)$, имеет решение с функциональным разделением переменных вида

$$u(x, t) = U(z), \quad \text{где} \quad z = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x) \psi_k(t), \qquad (22)$$

в котором все координатные функции $\varphi_k(x)$ и внешняя функция $U(z)$ не зависят от параметров $a_1, ..., a_p$, а функции $\psi_k = \psi_k(t)$ описываются автономной системой ОДУ (13). Тогда более сложное неавтономное уравнение с частными производными (7), которое получено из уравнения (5) формальной заменой параметров $a_1, ..., a_p$ на произвольные функции $a_1(t)$, …, $a_p(t)$, допускает точное решение вида (22), где координатные функции $\varphi_k(x)$ и функция $U(z)$ не меняются, а функции $\psi_k = \psi_k(t)$ описываются неавтономной системой ОДУ (14).

Утверждение 4 доказывается путем перехода к новой переменной z в уравнениях (5) и (7) с использованием подстановки $u = U(z)$, после чего преобразованные уравнения будут иметь решения с обобщенным разделением переменных, к которым применимо утверждение 2.

Утверждение 4 допускает упрощенную более краткую (но менее информативную) формулировку, которая приведена ниже.

Утверждение 4a. Пусть автономное уравнение с частными производными (5), зависящее от свободных параметров $a_1, ..., a_p$, имеет решение с функциональным разделением переменных (22), в котором координатные функции $\varphi_k(x)$ и внешняя функция $U(z)$ не зависят от параметров $a_1, ..., a_p$. Тогда более сложное неавтономное уравнение (7), полученное из уравнения (5) формальной заменой параметров $a_1, ..., a_p$ на произвольные функции $a_1(t), ..., a_p(t)$, также допускает точное решение вида (22), в котором координатные функции $\varphi_k(x)$ и функция $U(z)$ не меняются, а функции $\psi_k = \psi_k(t)$ описываются подходящей системой ОДУ.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Покажем, каким образом для построения точных решений уравнений математической физики с переменным запаздыванием общего вида можно использовать решения родственных более простых уравнений математической физики с постоянным запаздыванием. Последовательность и логику полезных предварительных рассуждений в подобных случаях продемонстрируем на двух конкретных примерах, после анализа которых сформулируем общие выводы в виде утверждений.

Пример 4. Рассмотрим реакционно-диффузионное уравнение с квадратичной нелинейностью и постоянным запаздыванием

$$u_t = a(uu_x)_x + b\bar{u}, \quad \bar{u} = u(x, t-\tau), \tag{23}$$

где τ = const > 0, которое допускает решение с обобщенным разделением переменных

$$u = \psi_1(t)x^2 + \psi_2(t), \tag{24}$$

где функции $\psi_1 = \psi_1(t)$, $\psi_2 = \psi_2(t)$ удовлетворяют нелинейной системе ОДУ с постоянным запаздыванием:

$$\begin{aligned} \psi_1' &= 6a\psi_1^2 + b\bar{\psi}_1, \quad \bar{\psi}_1 = \psi_1(t-\tau), \\ \psi_2' &= 2a\psi_1\psi_2 + b\bar{\psi}_2, \quad \bar{\psi}_2 = \psi_2(t-\tau). \end{aligned} \tag{25}$$

Заменив в (23) постоянную $\tau > 0$ на произвольную положительную функцию времени $\tau(t)$, получим более сложное нелинейное уравнение реакционно-диффузионного типа с квадратичной нелинейностью и переменным запаздыванием

$$u_t = a(uu_x)_x + b\bar{u}, \quad \bar{u} = u(x, t-\tau(t)). \tag{26}$$

Поскольку содержащий производные по x нелинейный член в правых частях уравнений (23) и (26) одинаков, естественно предположить, что степенная структура решений по пространственной переменной обоих уравнений также будет одинаковой, а изменятся только зависящие от t функциональные множители при различных степенях x.

Другими словами, ищем точные решения реакционно-диффузионного уравнения с переменным запаздыванием (26) в той же форме (24), что и решения исходного уравнения с постоянным запаздыванием (23). В итоге, для функций $\psi_1 = \psi_1(t)$, $\psi_2 = \psi_2(t)$ получим систему ОДУ (25), в которой τ надо заменить на $\tau(t)$.

Результаты, описанные в данном примере, допускают обобщение, сформулированное ниже.

Утверждение 5. Пусть нелинейное уравнение математической физики с постоянным запаздыванием

$$\begin{gathered} u_t = F\left(x, u, u_x, ..., u_x^{(n)};\ \bar{u}, \bar{u}_x, ..., \bar{u}_x^{(p)}\right), \\ \bar{u} = u(x, t-\tau), \end{gathered} \tag{27}$$

где $n > p$, имеет решение с обобщенным разделением переменных

$$u = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x)\psi_k(t), \tag{28}$$

в котором линейно независимые координатные функции $\varphi_k(x)$ не зависят от τ, а функции $\psi_k = \psi_k(t)$ описываются системой ОДУ с постоянным запаздыванием:

$$\begin{gathered} \psi_k' = f_k(\psi_1, ..., \psi_m; \bar{\psi}_1, ..., \bar{\psi}_m), \\ \bar{\psi}_k = \psi_k(t-\tau), \quad k = 1, ..., m. \end{gathered} \tag{29}$$

Тогда более сложное уравнение с переменным запаздыванием

$$\begin{gathered} u_t = F(x, u, u_x, ..., u_x^{(n)}; \bar{u}, \bar{u}_x, ..., \bar{u}_x^{(p)}), \\ \bar{u} = u(x, t-\tau(t)), \end{gathered} \tag{30}$$

которое получено из уравнения (27) формальной заменой постоянной τ на произвольную функцию времени τ (t), также допускает точное решение вида (28), где координатные функции $\varphi_k(x)$ не меняются, а функции $\psi_k = \psi_k(t)$ описываются системой ОДУ с переменным запаздыванием:

$$\begin{gathered} \psi_k' = f_k(\psi_1, ..., \psi_m; \bar{\psi}_1, ..., \bar{\psi}_m), \\ \bar{\psi}_k = \psi_k(t-\tau(t)), \ k = 1, ..., m. \end{gathered} \tag{31}$$

Доказательство утверждения 5 проводится аналогично доказательству утверждения 2.

Замечание 2. В левой части уравнений (27) вместо первой производной u_t может стоять любая линейная комбинация производных по t вида $L[u] = \sum_{i=1}^{s} a_i u_t^{(i)}$, причем коэффициенты a_i произвольным образом могут зависеть от времени, $a_i = a_i(t)$. В этом случае в левой части ОДУ (29) и (31) в утверждении 5 вместо первых производных ψ_k' должны стоять выражения $L[\psi_k]$.

Утверждение 5 можно обобщить на случай нелинейных уравнений математической физики с запаздыванием, которые допускают более сложные точные решения с функциональным разделением переменных. Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

Пример 5. Рассмотрим уравнение реакционно-диффузионного типа с двойной логарифмической нелинейностью и постоянным запаздыванием

$$u_t = u_{xx} + u(a\ln^2 u + b\ln\bar{u}),\quad \bar{u} = u(x,\, t-\tau), \tag{32}$$

которое при $a > 0$ допускает точное решение с функциональным разделением переменных вида [17]:

$$u = \exp[\psi_1(t)\varphi(x) + \psi_2(t)],\quad \varphi(x) = C_1\cos(\sqrt{a}x) + C_2\sin(\sqrt{a}x), \tag{33}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, а функции $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\psi_2 = \psi_2(t)$ удовлетворяют нелинейной системе ОДУ с постоянным запаздыванием:

$$\begin{gathered} \psi_1' = 2a\psi_1\psi_2 - a\psi_1 + b\bar{\psi}_1,\\ \bar{\psi}_1 = \psi_1(t-\tau),\\ \psi_2' = a(C_1^2 + C_2^2)\psi_1^2 + a\psi_2^2 + b\bar{\psi}_2,\\ \bar{\psi}_2 = \psi_2(t-\tau). \end{gathered} \tag{34}$$

Заменив теперь формально в уравнении (32) постоянную τ на произвольную функцию $\tau(t)$, получим более сложное уравнение

$$u_t = u_{xx} + u(a\ln^2 u + b\ln\bar{u}),\quad \bar{u} = u(x,\, t-\tau(t)). \tag{35}$$

Легко проверить, что уравнение (35) также допускает точное решение вида (33), где функции $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\psi_2 = \psi_2(t)$ удовлетворяют нелинейной системе ОДУ (34), в которой постоянную τ надо заменить на произвольную функцию $\tau(t)$.

Рассмотренный иллюстративный пример позволяет сделать обобщение, которое сформулируем в виде утверждения.

Утверждение 6. Пусть нелинейное уравнение с постоянным запаздыванием (27) имеет решение с функциональным разделением переменных вида

$$u(x,t) = U(z),$$

где

$$z = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x)\psi_k(t),$$

в котором линейно независимые координатные функции $\varphi_k(x)$ и внешняя функция $U(z)$ не зависят от параметра τ, а функции $\psi_k = \psi_k(t)$ описываются системой ОДУ с постоянным запаздыванием (29). Тогда более сложное уравнение с переменным запаздыванием (30), которое получено из уравнения (27) формальной заменой постоянной τ на произвольную функцию времени $\tau(t)$, допускает точное решение вида (28), где координатные функции $\varphi_k(x)$ и функция $U(z)$ не меняются, а функции $\psi_k = \psi_k(t)$ описываются системой ОДУ с переменным запаздыванием (31).

В табл. 1 приведены некоторые нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с переменным запаздыванием, допускающие точные решения с обобщенным и функциональным разделением переменных (использовались результаты, приведенные в [3]. Считается, что $\tau = \tau(t)$ произвольная положительная непрерывно дифференцируемая функция (в частности, в случае пропорционального запаздывания в уравнениях следует положить $\tau = (1 - p)t$, т. е. $\tau - t = pt$, где $0 < p < 1$). Отметим, что решения с функциональным разделением переменных двух последних уравнений в табл. 1 представлены в неявной форме.

КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Обнаружено, что точные решения с обобщенным и функциональным разделением переменных нелинейных уравнений математической физики автономного вида, коэффициенты которых не зависят от времени t, можно использовать для построения точных решений более общих нелинейных уравнений неавтономного вида, коэффициенты которых произвольным образом зависят от времени. Приведены примеры точных решений нелинейных неавтономных уравнений математической физики. Показано, что точные решения с обобщенным или функциональным разделением переменных нелинейных уравнений математической физики с постоянным запаздыванием позволяют находить точные решения более сложных нелинейных уравнений математической физики с переменным запаздыванием общего вида. Описаны некоторые нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с переменным запаздыванием, допускающие точные решения с обобщенным разделением переменных.

Таблица 1. Реакционно-диффузионные уравнения с переменным запаздыванием общего вида, допускающие решения с обобщенным функциональным разделением переменных

Исходное уравнение	Вид решений	Определяющее уравнение
$u_t = au_{xx} + uf(\bar{u}/u)$	$u = [C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)]\psi(t)$; $u = [C_1\exp(-\beta x) + C_2\exp(\beta x)]\psi(t)$; $u = (C_1 x + C_2)\psi(t)$	$\psi'_t = -a\beta^2\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$; $\psi'_t = a\beta^2\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$; $\psi'_t = \psi f(\bar{\psi}/\psi)$
$u_t = au_{xx} + bu\ln u +$ $+ uf(\bar{u}/u)$	$u = \varphi(x)\psi(t)$	$a\varphi''_{xx} = C_1\varphi - b\varphi\ln\varphi$, $\psi'_t = C_1\psi + b\psi\ln\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$
$u_t = au_{xx} + f(u - \bar{u})$	$u = C_2 x^2 + C_1 x + \psi(t)$	$\psi'_t = 2C_2 a + f(\psi - \bar{\psi})$
$u_t = au_{xx} + bu + f(u - \bar{u})$	$u = C_1\cos(\lambda x) + C_2\sin(\lambda x) + \psi(t)$, где $\lambda = \sqrt{b/a}$ (при $ab > 0$); $u = C_1\exp(-\lambda x) + C_2\exp(\lambda x) + \psi(t)$, где $\lambda = \sqrt{-b/a}$ (при $ab < 0$)	$\psi'_t = b\psi + f(\psi - \bar{\psi})$; $\psi'_t = b\psi + f(\psi - \bar{\psi})$
$u_t = a(u^k u_x)_x + uf(\bar{u}/u)$	$u = \varphi(x)\psi(t)$	$a(\varphi^k\varphi'_x)'_x = C_1\varphi$, $\psi'_t = C_1\psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$
$u_t = a(u^k u_x)_x +$ $+ bu^{k+1} + uf(\bar{u}/u)$	$u = \left[C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)\right]^{\frac{1}{k+1}}\psi(t)$, где $\beta = \sqrt{b(k+1)/a}$, $b(k+1) > 0$; $u = (C_1 e^{-\beta x} + C_2 e^{\beta x})^{\frac{1}{k+1}}\psi(t)$, где $\beta = \sqrt{-b(k+1)/a}$, $b(k+1) < 0$; $u = C_1\exp\left(-\dfrac{b}{2a}x^2 + C_2 x\right)\psi(t)$, при $k = -1$; $u = \varphi(x)\psi(t)$ (обобщает предыдущие решения)	$\psi'_t = \psi f(\bar{\psi}/\psi)$; $\psi'_t = \psi f(\bar{\psi}/\psi)$; $\psi'_t = \psi f(\bar{\psi}/\psi)$; $a(\varphi^k\varphi''_x)'_x + b\varphi^{k+1} = C_1\varphi$, $\psi'_t = C_1\psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$
$u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + f(u - \bar{u})$	$u = \dfrac{1}{\lambda}\ln(C_1\lambda x^2 + C_2 x + C_3) + \psi(t)$	$\psi'_t = 2aC_1 e^{\lambda\varphi} + f(\psi - \bar{\psi})$
$u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x +$ $+ be^{\lambda u} + f(u - \bar{u})$	$u = \dfrac{1}{\lambda}\ln[C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)] + \psi(t)$, где $\beta = \sqrt{b\lambda/a}$, $b\lambda > 0$; $u = \dfrac{1}{\lambda}\ln(C_1 e^{-\beta x} + C_2 e^{\beta x}) + \psi(t)$, где $\beta = \sqrt{-b\lambda/a}$, $b\lambda < 0$; $u = \varphi(x) + \psi(t)$ (обобщает предыдущие решения)	$\psi'_t = f(\psi - \bar{\psi})$; $\psi'_t = f(\psi - \bar{\psi})$; $a(e^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x + be^{\lambda\varphi} = C_1$, $\psi'_t = C_1 e^{\lambda\psi} + f(\psi - \bar{\psi})$
$u_t = [(a\ln u + b)u_x]_x -$ $- cu\ln u + uf(u/\bar{u})$	$u = \exp(\pm\lambda x)\psi(t)$, $\lambda = \sqrt{c/a}$	$\psi'_t = \lambda^2(a+b)\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$

$u_t = a[f'(u)u_x]_x + {}$ $+b+\dfrac{1}{f'(u)}g(f(u)-f(\bar u))$	$f(u)=\psi(t)-\dfrac{b}{2a}x^2+C_1x+C_2$	$\psi'_t = g(\psi-\bar\psi)$
$u_t = a[uf'(u)u_x]_x + {}$ $+\dfrac{1}{f'(u)}[bf(u)+cf(\bar u)]$	$f(u)=\varphi(t)x+\psi(t)$	$\varphi'_t = b\varphi + c\bar\varphi,$ $\psi'_t = b\psi + c\bar\psi + a\varphi^2$

Обозначения: $\bar u = u(x, t-\tau(t))$, $\bar\psi=\psi(t-\tau(t))$, $f(z)$ и $g(z)$ – произвольные функции; C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500440-9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. Boca Raton-London: CRC Press, 2022.
2. *Полянин А.Д.* Преобразования, редукции и точные решения одного сильно нелинейного уравнения электронной магнитной гидродинамики // Вестник НИЯУ МИФИ, 2023. Т. 12. № 4. С. 201–210.
3. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I.* Delay Ordinary and Partial Differential Equations. Boca Raton: CRC Press, 2023.
4. *Calogero F., Degasperis A*. Spectral Transform and Solitons: Tolls to Solve and Investigate Nonlinear Evolution Equations. Amsterdam: North Holland, 1982.
5. *Ovsiannikov L.V.* Group Analysis of Differential Equations. New York: Academic Press, 1982.
6. *Bluman G.W., Kumei S.* Symmetries and Differential Equations. New York: Springer, 1989.
7. *Ibragimov N.H. (ed.).* CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. V. 1, Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. Boca Raton: CRC Press, 1994.
8. *Olver P.J.* Application of Lie Groups to Differential Equations, 2nd ed. NewYork: Springer-Verlag, 2000.
9. *Kudryashov N.A*. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // Chaos, Solitons and Fractals. 2005. V. 24. № 5. Pp. 1217–1231.
10. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
11. *Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Chapman & Hall / CRCPress, Boca Raton, 2007.
12. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Изд. Дом «Интеллект», 2010.
13. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.
14. *Conte R., Musette M.* The Painleve Handbook. 2nd ed. Cham: Springer, 2020.
15. *Аксенов А.В., Полянин А.Д.* Обзор методов построения точных решений уравнений математической физики, основанных на использовании более простых решений // Теоретическая и математическая физика, 2022. Т. 211. № 2. С. 567–594.
16. *Sorokin V.G., Vyazmin A.V.* Nonlinear reaction-diffusion equations with delay: Partial survey, exact solutions, test problems, and numerical integration // Mathematics, 2022. V. 10. № 11. 1886.
17. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact solutions of linear and non-linear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time // International Journal of Non-Linear Mechanics, 2013. V. 54. Pp. 115–126

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 2, pp. 66–75

CONSTRUTING SOLUTIONS TO NONLINEAR EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS USING EXACT SOLUTIONS TO SIMPLER EQUATIONS

A.D. Polyanin
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,Moscow, 119526 Russia
**e-mail: polyanin@ipmnet.ru*
Received January 24, 2024; revised January 24, 2024; accepted February 06, 2024

A method has been developed for constructing exact solutions of complex nonautonomous nonlinear equations of mathematical physics, the coefficients of which explicitly depend on time, by using solutions with generalized or functional separation of variables of simpler autonomous equations of mathematical physics, the coefficients of which do not depend on time. Specific examples of constructing exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics, the coefficients of which depend arbitrarily on time, are considered. It is shown that solutions with generalized and functional separation of variables of nonlinear equations of mathematical physics with constant delay can be used to construct exact solutions of more complex nonlinear equations of mathematical physics with variable delay of a general form. A number of nonlinear reaction-diffusion equations with variable delay are described, which allow exact solutions with generalized separation of variables.

Keywords: nonlinear equations of mathematical physics, partial differential equations with delay, solution methods, exact solutions, generalized separable solutions, functional separable solutions.

REFERENCES

1. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. Boca Raton–London, CRC Press, 2022.

2. *Polyanin A.D.* Preobrazovaniya, redukcii i tochnye resheniya odnogo sil'no nelinejnogo uravneniya elektronnoj magnitnoj gidrodinamiki [Transformations, reductions and exact solutions of a highly nonlinear equation of electron magnetohydrodynamics]. Vestnik NIYaU MIFI*,* 2023. Vol. 12. No. 4. Pp. 201–210 (in Russian).

3. *Polyanin A.D., Sorokin A.D., Zhurov A.I.* Delay Ordinary and Partial Differential Equations. Boca Raton-London, CRC Press, 2023.

4. *Calogero F., Degasperis A.* Spectral Transform and Solitons: Tolls to Solve and Investigate Nonlinear Evolution Equations. North Holland, Amsterdam, 1982.

5. *Ovsiannikov L.V.* Group Analysis of Differential Equations. NewYork, Academic Press, 1982.

6. *Bluman G.W., Kumei S.* Symmetries and Differential Equations. Springer, New York, 1989.

7. *Ibragimov N.H. (ed.).* CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 1. Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. Boca Raton: CRC Press, 1994.

8. Olv*er P.J.* Application of Lie Groups to Differential Equations, 2nd ed. NewYork, Springer-Verlag, 2000.

9. *Kudryashov N.A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. Chaos, Solitons and Fractals. 2005. Vol. 24. No. 5. Pp. 1217–1231.

10. *Polyanin A.D., Zaitsev A.I., Zhurov A.I.* Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki [Solution Methods for Nonlinear Equations of Mathematical Physics and Mechanics], Moscow, Fizmatlit Publ., 2005 (in Russian).

11. *Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Chapman & Hall /CRC Press, Boca Raton, 2007.

12. *Kudryashov N.A.* Metody nelinejnoj matematicheskoj phiziki [Methods of Nonlinear Mathematical Physics. Dolgoprudnyi, Izd. Dom Intellekt Publ., 2010 (in Russian).

13. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.

14. *Conte R., Musette M.* The Painleve Handbook, 2nd ed. Springer, Cham, 2020.

15. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Obzor metodov postroeniya tochnyh reshenij uravnenij matematicheskoj fiziki, osnovannyh na ispol'zovanii bolee prostyh reshenij [Review of methods for constructing exact solutions of equations of mathematical physics based on simpler solutions]. Theoretical and Mathematical Physics, 2022. Vol. 211. No. 2. Pp. 149–180 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.4213/tmf10247

16. *Sorokin V.G., Vyazmin A.V.* Nonlinear reaction-diffusion equations with delay: Partial survey, exact solutions, test problems, and numerical integration, Mathematics, 2022. Vol. 10. No. 11. 1886.

17. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact solutions of linear and non-linear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2013. Vol. 54. Pp. 115–126.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2024, т. 13, № 2, с. 76–82

УДК 004.62

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ ВЫЯВЛЕНИЯ АНОМАЛЬНЫХ ВЫБРОСОВ В ЗНАЧЕНИЯХ ТЕКУЩИХ ПОКАЗАНИЙ ПАЦИЕНТА ПРИ ИСКУССТВЕННОЙ ВЕНТИЛЯЦИИ ЛЕГКИХ

С.Г. Климанов[1], А.В. Крянев[1,2*], В.А. Трикозова[1], Д.Д. Царева[1]
[1]Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409,Россия
[2]Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, 141980, Россия,
**e-mail: AVKryanev@mephi.ru*

Поступила в редакцию: 10.02.2024
После доработки: 18.02.2024
Принята к публикации: 20.02.2024

Искусственная вентиляция легких (ИВЛ) считается одним из важнейших методов интенсивной терапии, входящим в комплекс мер по поддержанию жизненно важных функций организма в критических состояниях. В связи с созданием интеллектуальных режимов вентиляции легких, повышающих эффективность управления аппаратами ИВЛ, необходимо разработать и применить различные вычислительные схемы обработки данных значений текущих показателей пациента при ИВЛ. В статье рассматривается проблема выявления аномальных выбросов и нивелирования их отрицательного влияния на выделяемые значимые характеристики рассчитываемых показателей, необходимых для принятия оптимальных значений параметров вентиляционного потока, обеспечивающих наиболее эффективное лечение пациента. Для решения поставленной задачи в статье рассматриваются и применяются несколько так называемых робастных методов и основанных на них вычислительных схем выделения аномальных выбросов в значениях показателей состояния пациента и определения их будущих значений.

Ключевые слова: аномальные выбросы, выявление аномальных выбросов, метрический анализ, робастные методы, искусственная вентиляция легких, показания пациента.
DOI: 10.26583/vestnik.2024.319
EDN ORGLAD

ВВЕДЕНИЕ

Важной задачей длительной ИВЛ является постоянное поддержание оптимальных режимов вентиляции [1, 2].

Еще одной проблемой, связанной с длительной ИВЛ, является необходимость постоянного подбора и изменения режимов аппаратной вентиляции в сторону повышения дыхательной активности пациента в случае постепенного восстановления у него самостоятельного дыхания [3].

Конечной целью исследований в этой области является разработка модуля программного обеспечения аппарата ИВЛ, решающего в динамическом режиме задачу выбора оптимальных значений параметров вентиляционного потока в зависимости от текущего состояния пациента, находящегося в режиме ИВЛ.

Целью настоящей работы является решение части вышеуказанной конечной цели, связанной с предварительной обработкой исходных данных, в частности выявление аномальных выбросов в значениях текущих показаний пациента при искусственной вентиляции легких.

РОБАСТНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЯВЛЕНИЯ АНОМАЛЬНЫХ ВЫБРОСОВ

Одной из основных задач вычислительного комплекса программного обеспечения (ПО) ИВЛ является определение оптимальных значений параметров вентилирующего потока аппарата ИВЛ в зависимости от значений параметров, характеризующих текущее состояние пациента.

Одними из математических методов, решающих эту задачу, выбраны методы интерполяции, экстраполяции и прогнозирования, основанные на метрическом анализе [4].

Методы метрического анализа позволяют восстанавливать многомерную функциональную зависимость с максимально возможной точностью на основе даже небольшого набора статистических данных, в том числе с учетом дополнительных данных, полученных в процессе лечения конкретного пациента, что позволяет реализовать работу алгоритма выбора оптимальных значений параметров вентиляционного потока для конкретного пациента в адаптационном режиме.

Ниже приведены части алгоритмов, реализующих решение вышеуказанной основной вычислительной задачи.

В исходных данных о текущем состоянии пациента могут быть так называемые аномальные выбросы, причинами которых может быть как неправильная фиксация значений показателей (и тогда это сигнализирует о подкритическом или критическом состоянии пациента), либо сбой в показаниях датчиков (причиной которых, как правило, является смещение крепления датчиков или другое обстоятельство аналогичного характера). Ясно, что такого рода фиксации аномальных показаний датчиков должны выявляться онлайн и сообщатся в автоматическом режиме дежурному врачу (медицинской сестре), а также и учитываться при принятии решения по подбору оптимальных значений параметров вентиляционного потока.

Ниже приведены математическая схема и алгоритм выявления и фильтрации такого рода аномалий [4–8]. Математически эта задача сводится к выделению из совокупности зашумленных значений исследуемой функциональной зависимости аномальных выбросов. Представлен универсальный метод, который позволяет выделять из рассматриваемой совокупности значений аномальные выбросы, в том числе в динамическом режиме.

Пусть рассматриваемый показатель состояния пациента Y принимает значения Y_i для $i = 1, \dots, n$. Обозначим нормальные значения этого показателя для пациента $\hat{Y}_i$.

Определим вектор $\vec{Y}^{(1)}$ по формулам:

$$Y_i^{(1)} = \begin{cases} Y_i, & \text{если } i \in I_0^{(1)}, \\ Y_i - K\sigma_i, & \text{если } i \in I_+^{(1)}, \\ Y_i + K\sigma_i, & \text{если } i \in I_-^{(1)}, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$I_0^{(1)} = \{i : |Y_i - \hat{Y}_i| \le K\sigma_i\},$$
$$I_+^{(1)} = \{i : Y_i - \hat{Y}_i > K\sigma_i\}, \tag{2}$$
$$I_-^{(1)} = \{i : Y_i - \hat{Y}_i < -K\sigma_i\},$$

K – так называемый параметр Хьюбера, значение которого зависит от доли больших выбросов, и в данной работе $K = 1.8$.

Реализуем итерационный процесс:

$$Y_i^{(l+1)} = \begin{cases} Y_i^{(l)}, & \text{если } i \in I_0^{(l+1)}, \\ Y_i^{(l)} - K\sigma_i, & \text{если } i \in I_+^{(l+1)}, \\ Y_i^{(l)} + K\sigma_i, & \text{если } i \in I_-^{(l+1)}, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$I_0^{(l+1)} = \left\{i : \left|Y_i^{(l)} - \hat{Y}_i^{(l)}\right| \le K\sigma_i\right\},$$
$$I_+^{(l+1)} = \left\{i : Y_i^{(l)} - \hat{Y}_i^{(l)} > K\sigma_i\right\}, \tag{4}$$
$$I_-^{(l+1)} = \left\{i : Y_i^{(l)} - \hat{Y}_i^{(l)} < -K\sigma_i\right\}.$$

На основании «подправленных» начальных данных $Y_i^{(l+1)}$ находим $\hat{Y}_i^{(l+1)}$.
Введем норму в пространстве E^n:

$$\|\vec{Y}\| = \max_{i=1,\dots n} |Y_i|. \tag{5}$$

Тогда, задав приемлемый уровень допустимой погрешности $\varepsilon > 0$, продолжаем описанный итерационный процесс, пока не будет выполнено условие

$$\left\|\vec{Y}^{(l+1)} - \vec{Y}^{(l)}\right\| < \varepsilon. \tag{6}$$

Аналогичные итерационные робастные схемы используются для выделения с помощью робастных методов временных трендов при наличии аномальных выбросов в значениях показателей [4–7].

ПРИМЕНЕНИЕ РОБАСТНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ВЫЯВЛЕНИЯ АНОМАЛЬНЫХ ВЫБРОСОВ В ЗНАЧЕНИЯХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ТЕКУЩЕЕ СОСТОЯНИЕ ПАЦИЕНТА

Под ИВЛ понимают перемещение воздуха между внешней средой и альвеолами под влиянием внешней силы. ИВЛ применяется только при наличии клинически значимой дыхательной недостаточности.

Аппарат ИВЛ получает информацию о значениях всех основных показателей текущего состояния пациента и показателей вентиляционного потока.

Такими показателями являются:

1. Максимальное давление в дыхательных путях во время вдоха;
2. Минутная вентиляция легких (л/мин);
3. Объем выдоха (мл);
4. Парциальное давление углекислого газа в дыхательных путях в конце выдоха (мм. рт. ст.);

5. Общее количество дыхательных циклов;
6. Объем вдоха (мл);
7. Количество самостоятельных вдохов;
8. Сопротивление дыхательных путей вдоху (см^3 H_2O/л/с);
9. Сопротивление дыхательных путей выдоху (см^3 H_2O/л/с);
10. Податливость легких и грудной стенки на высоте вдоха (мл/см^3 H_2O);
11. Индекс быстрого поверхностного дыхания (количество вдохов/объем выдоха в литрах);
12. Работа дыхания (Дж/мин);
13. Экспираторная временная константа (с);
14. Давление в дыхательных путях в период инспираторной паузы;
15. Среднее давление в дыхательных путях;
16. Давление в дыхательных путях в конце выдоха;
17. Объем самостоятельного выдоха (мл);
18. Отношение объема выдоха к индексу массы тела;
19. Минутная спонтанная вентиляция (л/мин);
20. Минутная величина утечки (л/мин);
21. Количество принудительных вдохов;
22. Податливость легких, измеренная в период инспираторной паузы (мл/см^3 H_2O);
23. Концентрация кислорода.

Ниже представлены результаты фильтрации аномальных выбросов для некоторых значимых вышеуказанных показателей. На всех рисунках (рис. 1–8) по оси абсцисс отложена продолжительность времени наблюдения состояния пациента в минутах.

На рис. 1 представлены исходные фиксируемые значения во времени показателя «Максимальное давление в дыхательных путях во время вдоха» ($P_{пик}$).

На рис. 2 – отфильтрованные значения во времени показателя «Максимальное давление в дыхательных путях во время вдоха» ($P_{пик}$), представленные на рис. 1.

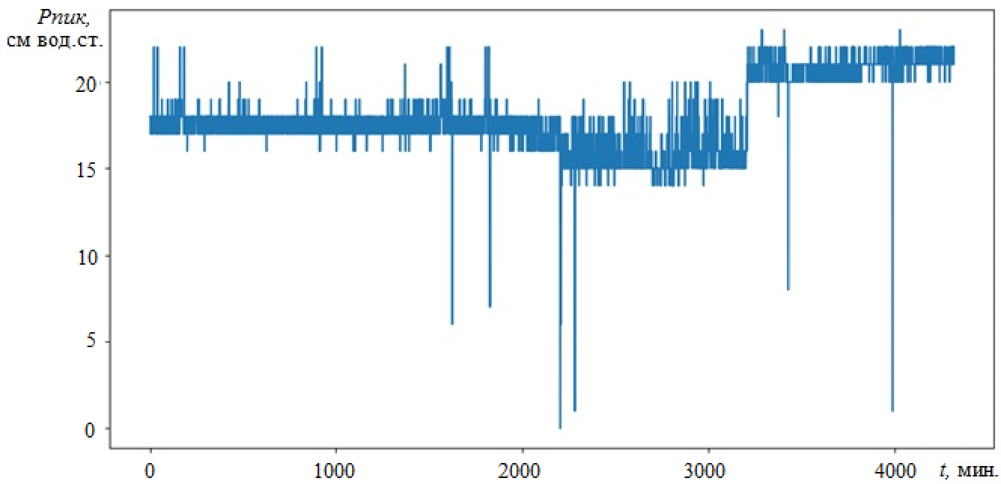


Рис. 1. Показатель «Максимальное давление в дыхательных путях во время вдоха» ($P_{пик}$)

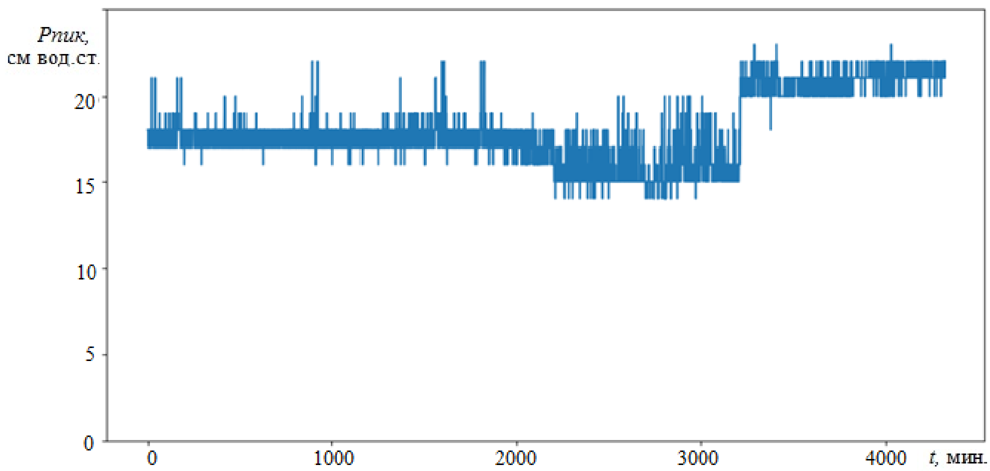


Рис. 2. Показатель «$P_{пик}$» после фильтрации аномальных выбросов

На рис. 3 представлены исходные фиксируемые значения во времени показателя «Объем выдоха» (*TVe*).

На рис. 4 – отфильтрованные значения во времени показателя «Объем выдоха» *TVe*, (мл), представленные на рис. 3.

На рис. 5 представлены исходные фиксируемые значения во времени показателя «Объем вдоха» *TVi*, мл.

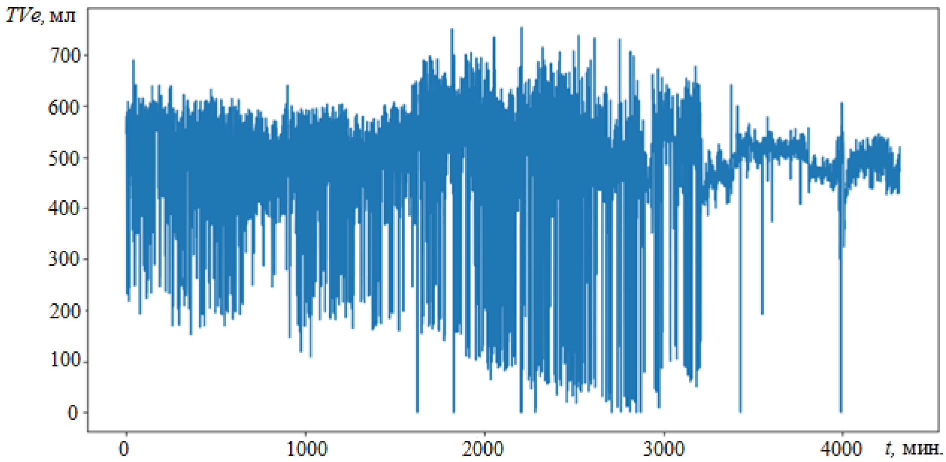


Рис. 3. Показатель «Объем выдоха» (*TVe*)

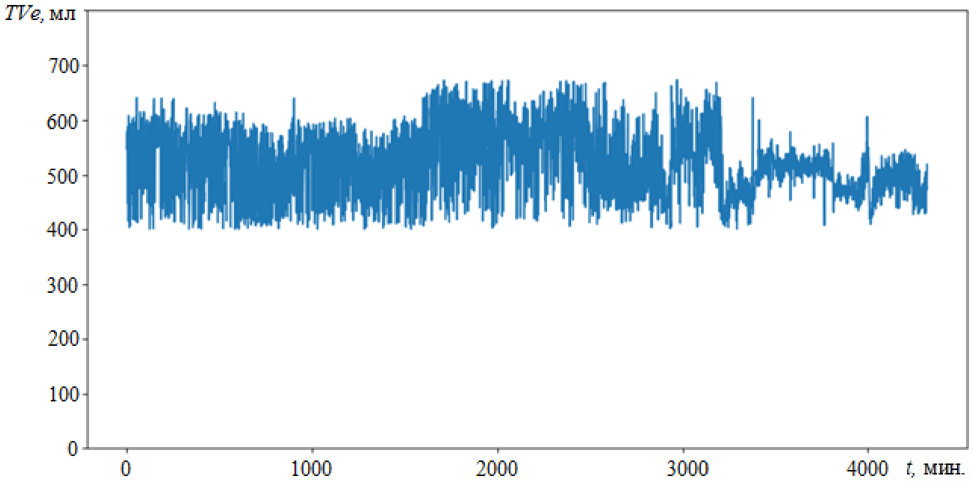


Рис. 4. Показатель *TVe* после фильтрации аномальных выбросов

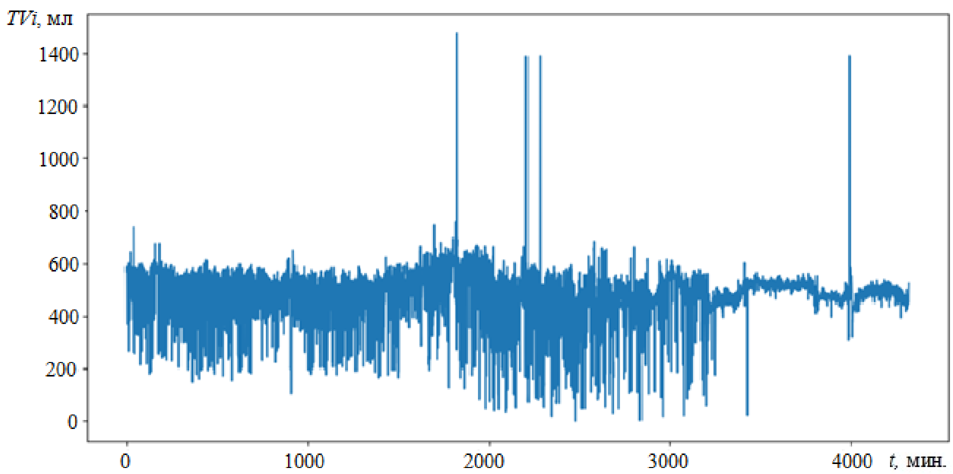


Рис. 5. Показатель «Объем вдоха» (*TVi*)

На рис. 6 – отфильтрованные значения во времени показателя «Объем вдоха» *TVi*, представленные на рис. 5.

На рис. 7 представлены исходные фиксируемые значения во времени показателя «Общее количество дыхательных циклов» ($f_{общ}$) в минуту.

На рис. 8 – отфильтрованные значения во времени показателя «Общее количество дыхательных циклов» ($f_{общ}$), представленные на рис. 7.

Представленные на рис. 2, 4, 6, 8 отфильтрованные значения динамики показателей пациента демонстрируют эффективность используемой вычислительной схемы фильтрации аномальных выбросов для этих показателей.

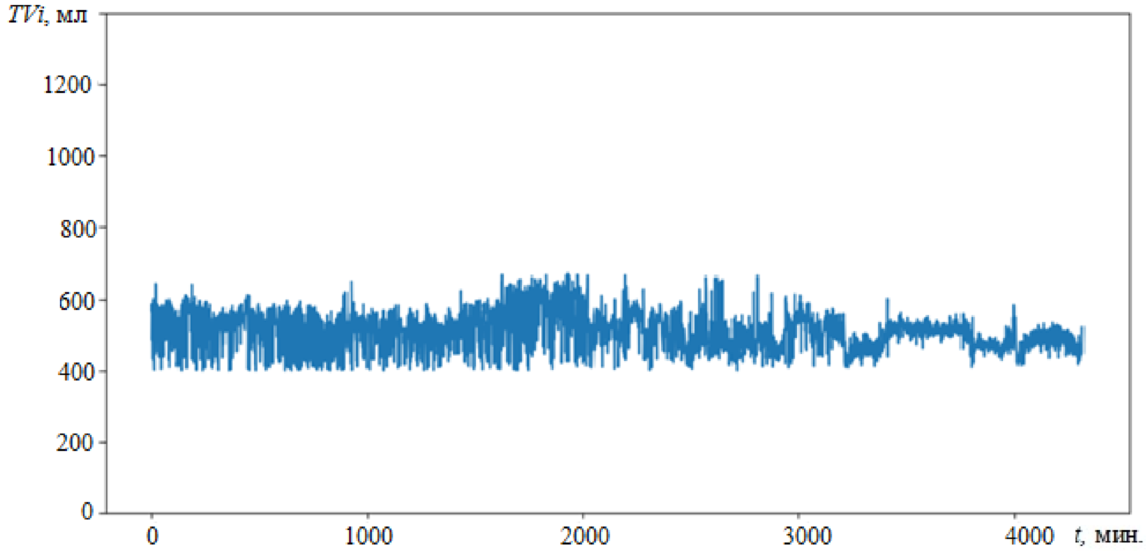


Рис. 6. Показатель *TVi* после фильтрации аномальных выбросов

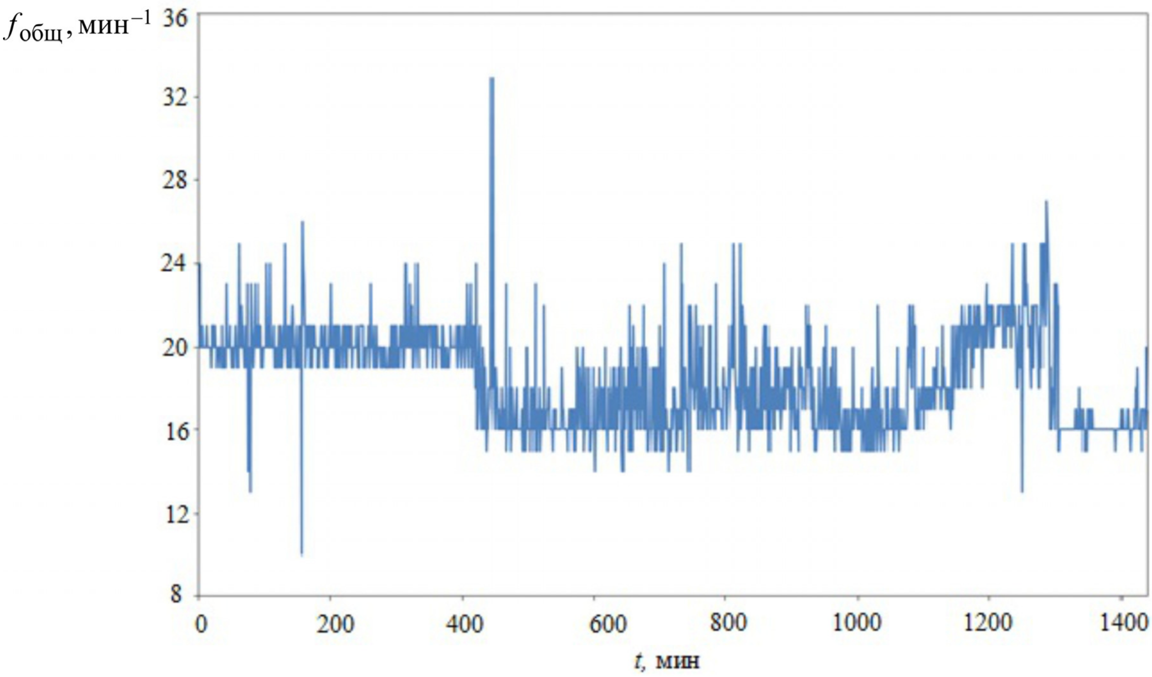


Рис. 7. Показатель «Общее количество дыхательных циклов» ($f_{общ}$)

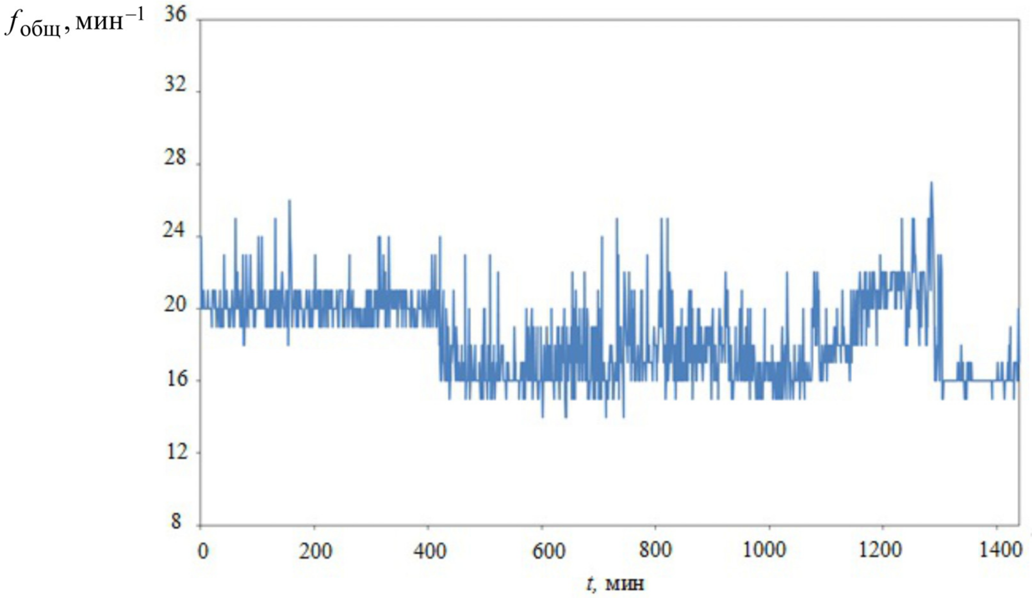


Рис. 8. Показатель $f_{общ}$ после фильтрации аномальных выбросов

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

Методы и алгоритмы метрического анализа и робастные методы выявления аномальных выбросов и устойчивых трендов, разработанные в НИЯУ МИФИ, позволяют, на основе сформированной в создаваемом комплексе базы данных клинического опыта лечения пациентов на аппаратах ИВЛ, устанавливать зависимость между совокупностью значений показателей текущего состояния пациента и оптимальными значениями регулируемых параметров вентиляционного потока аппарата ИВЛ и прогнозировать будущее состояние пациента.

Авторы выражают благодарность доктору медицинских наук, профессору, декану медицинского факультета Обнинского филиала МИФИ Котлярову Андрею Александровичу и доктору медицинских наук, профессору Тимербаеву Владимиру Хамидовичу за предоставленные данные значений показателей пациентов, находящихся на лечении с применением аппаратов ИВЛ, и за консультации, касающиеся медицинских сторон процессов их лечения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект государственного задания № FSWU-2023-0031).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ананьев Е.П., Полупан А.А., Мацковский И.В. и др*. Использование режима IntelliVent-ASV для поддержания целевого диапазона EtCO2 у пациентов с тяжелой ЧМТ // Журнал «Вопросы нейрохирургии» имени Н.Н. Бурденко. 2017. Т. 81 (5). С. 63–68.

2. Artificial intelligence and machine learning show promise in cancer diagnosis and treatment // Medical Xpress. [Электронный ресурс]. URL: https://medicalxpress.com/news/2022-03-artificial-intelligence-machine-cancer-diagnosis.html (дата обращения 20.12.2023).

3. *Ивахно Н.В., Минаков Е.И., Федоров С.С., Анцибор С.В*. Математическое моделирование процессов в биотехническом комплексе «Аппаратура корректирующего воздействия – дыхательная система человека» // Вестник новых медицинских технологий (электронное издание), 2015. № 4.

4. *Крянев А.В., Лукин Г.В., Удумян Д.К.* Метрический анализ и обработка данных. М.: Физматлит, 2012. 308 с.

5. *Kryanev A.V., Udumyan D.K*. Metric analysis, properties and applications as a tool for interpolation // International Journal of Mathematical Analysis, 2014. V. 8. № 45. Pp. 2221–2228.

6. *Kryanev A.V., Udumyan D. K.* Metric Analysis, Properties and Applications as a Tool for Forecasting // International Journal of Mathematical Analysis, 2014. V. 8. № 60. Pp. 2971–2978.

7. *Ivanov V.V., Kryanev A.V., Udumyan D.K., Lukin G.V.* Metric Analysis Approach for Interpolation and Forecasting of Time Processes. Applied Mathematical Sciences, 2014. V. 8. № 22. Pp. 1053–1060.

8. *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980. 456 с.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 2, pp. 76–82

COMPUTING SCHEMES FOR DETECTING ANOMALIC EMISSIONS IN THE VALUES OF CURRENT PATIENT INDICATIONS DURING ARTIFICIAL VENTILATION

S.G. Klimanov[1], A.V. Kryanev[1,2*], V.A. Trikozova[1], D.D. Tsareva[1]
[1]*National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, 115409, Russia,*
[2] *Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, 141980, Russia,*
**e-mail*: *AVKryanev@mephi.ru*

Received February 10, 2024; revised February 18, 2024; accepted February 20, 2024

Artificial pulmonary ventilation (ALV) is considered one of the most important methods of intensive care, part of a set of measures to maintain the vital functions of the body in critical conditions. In connection with the creation of intelligent ventilation modes that increase the efficiency of control of ventilators, it is necessary to develop and apply various computational schemes for processing data on the values of the patient's current indicators during mechanical ventilation. The paper discusses the problem of identifying abnormal emissions and leveling their negative impact on the identified significant characteristics of the calculated indicators necessary for adopting optimal values of ventilation flow parameters that ensure the most effective treatment of the patient. To solve this problem, the article discusses and applies several so-called robust methods and computational schemes based on them for identifying anomalous outliers in the values of indicators of the patient's condition and determining their future values.

Keywords: abnormal emissions, detection of abnormal emissions, robust methods, artificial ventilation, patient indications.

REFERENCES

1. *Ananyev E.P., Polupan A.A., Matskovsky I.V., et al.* Using the IntelliVent-ASV mode to maintain the target EtCO2 range in patients with severe TBI. Journal of Neurosurgery named after N.N. Burdenko, 2017. Vol. 81(5). Pp. 63–68 (in Russian).

2. Artificial intelligence and machine learning show promise in cancer diagnosis and treatment // Medical Xpress. Available at: https:// medicalxpress.com/news/2022-03-artificial-intelligence-machine-cancer-diagnosis.html (accessed 20.12.2023).

3. *Ivakhno N.V., Minakov E.I., Fedorov S.S., Antsibor S.V.* Matematicheskoe modelirovanie processov v biotekhnicheskom komplekse «Apparatura korrektiruyushchego vozdejstviya – dyhatel'naya sistema cheloveka» [Mathematical modeling of processes in the biotechnical complex «Corrective influence equipment – human respiratory system»]. Vestnik novyh medicinskih tekhnologij (elektronnoe izdanie), 2015. No. 4 (in Russian).

4. *Kryanev A.V., Lukin G.V., Udumyan D.K.* Metric analysis and data processing. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012. 308 p.

5. *Kryanev A.V., Udumyan D.K.* Metric analysis, properties and applications as a tool for interpolation. International Journal of Mathematical Analysis, 2014. Vol. 8. No. 45. Pp. 2221–2228.

6. *Kryanev A.V., Udumyan D. K.* Metric Analysis, Properties and Applications as a Tool for Forecasting. International Journal of Mathematical Analysis, 2014. Vol. 8. No. 60. Pp. 2971–2978.

7. *Ivanov V.V., Kryanev A.V., Udumyan D.K., Lukin G.V.* Metric Analysis Approach for Interpolation and Forecasting of Time Processes. Applied Mathematical Sciences, 2014. Vol. 8. No. 22. Pp. 1053–1060.

8. *Seber J.* Linejnyj regressionnyj analiz [Linear regression analysis]. Moscow, Mir Publ., 1980. 456 p.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2024, т. 13, № 2, с. 83–96

УДК 517.9

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ТРЕМЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В.А. Медведев**, *Н.А. Кудряшов**

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

**e-mail:* viktormedvedev12115551@gmail.com

***e-mail:* nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию: 11.02.2024
После доработки: 01.04.2024
Принята к публикации: 02.04.2024

Рассматривается задача распространения оптических импульсов, описываемая обобщенным уравнением Шрёдингера с нелинейными членами третьего, пятого и седьмого порядков. Методами неявных функций и простейших уравнений получено аналитическое решение в виде уединенной волны, и определены условия его существования. Представлена модификация метода Фурье для численного решения задачи распространения оптических импульсов при периодических граничных условиях. Численно исследован процесс распространения построенного оптического солитона. Дано сравнение аналитического решения с результатами численных расчетов. Изучен процесс распространения оптического солитона исследуемого уравнения при возмущении начальных данных. Выполнены расчеты распространения импульса в среде со случайным шумом. Показано, что полученное аналитическое решение устойчиво. Проанализировано влияние нелинейных членов пятой и седьмой степеней на распространение уединенных волн нелинейного уравнения Шрёдингера. Изучены процессы столкновения солитонов нелинейного уравнения Шрёдингера при влиянии нелинейных членов пятой и седьмой степеней. Показано, что столкновения носят неупругий характер.

Ключевые слова: обобщенное нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ), псевдоспектральный метод Фурье, оптический солитон, численное моделирование, нелинейная оптика, нелинейные уравнения в частных производных.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.310
EDN PVZUYF

ВВЕДЕНИЕ

В нелинейной оптике известен целый ряд моделей для описания процессов распространения импульсов в оптических средах, некоторые из которых основаны на обобщениях классического интегрируемого нелинейного уравнения Шрёдингера [1, 2]:

$$iu_t + au_{xx} + b_1|u|^2u = 0, \tag{1}$$

где $u(x, t)$ – комплексная функция; $i^2 = -1$ и a – параметры модели.

Но, несмотря на разнообразие предложенных математических моделей [3–7], вопрос о наиболее подходящей остается открытым. В работе исследовано одно из обобщенных уравнений – нелинейное уравнение Шрёдингера с нелинейностями третьего, пятого и седьмого порядков, впервые представленное в работе [8]:

$$iu_t + au_{xx} + b_1|u|^2u + b_2|u|^4u + b_3|u|^6u = 0, \tag{2}$$

где $u(x, t)$ – комплекснозначная функция, a, b_1, b_2 и b_3 – параметры модели.

Для случая $b_3 = 0$ исследование уравнения (2) представлено в книге [9].

Целями настоящей работы являются:

1) аналитическое нахождение точного решения представленного уравнения;

2) исследование факта устойчивости аналитического решения с помощью численного моделирования процессов распространения оптических импульсов;

3) изучение влияния нелинейных членов высших степеней в исследуемой математической модели.

1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1.1. Аналитическое решение для уравнения Шрёдингера с тремя нелинейностями

С целью упростить уравнение (2) используем переход к безразмерным величинам в следующем виде:

$$\begin{cases} u(x,t) = c_u u'(x,t), \\ t = c_t t', \\ x = c_x x'. \end{cases} \qquad (3)$$

При этом уравнение (2) запишется следующим образом:

$$i\frac{c_u}{c_t}u'_{t'} + \frac{ac_u}{c_x^2}u'_{x'x'} + b_1 c_u^3 \left|u'\right|^2 u' \times \\ \times\left(1 + c_u^2\frac{b_2}{b_1}\left|u'\right|^2 + c_u^4\frac{b_3}{b_1}\left|u'\right|^4\right) = 0, \qquad (4)$$

Принимая

$$\begin{cases} c_u = b_1^{-1/3}, \\ c_t = b_1^{-1/3}, \\ c_x = \sqrt{a}b_1^{-1/6}, \end{cases} \qquad (5)$$

для уравнения (4) получим:

$$iu'_{t'} + u'_{x'x'} + \left|u'\right|^2 u' \cdot \left(1 + \varepsilon_2\left|u'\right|^2 + \varepsilon_3\left|u'\right|^4\right) = 0, \quad (6)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = b_1^{-4/3}b_2, \\ \varepsilon_2 = b_1^{-7/3}b_3. \end{cases} \qquad (7)$$

Будем искать решения уравнения (6) в виде:

$$u'(x', t') = y(z)e^{i(kx' - \omega t' - \theta_0)}, \\ z = x' - c_0 t', \ k, \omega, c_0, \theta_0 \in R, \qquad (8)$$

где $y(z)$ – действительнозначная функция. Подставляя (8) в уравнение (6), получим переопределенную систему уравнений для $y(z)$ в виде

$$y_{zz} + \varepsilon_3 y^7 + \varepsilon_2 y^5 + y^3 + (\omega - k^2)y = 0, \qquad (9)$$

$$(2k - c_0)\cdot y_z = 0. \qquad (10)$$

Уравнение (10) выполняется тождественно при $c_0 = 2k$. Уравнение (9) имеет первый интеграл:

$$y_z^2 + \frac{\varepsilon_3 y^8}{4} + \frac{\varepsilon_2 y^6}{3} + \frac{y^4}{2} + \left(\omega - k^2\right)y^2 = c_1. \quad (11)$$

Переходя к новой переменной $y(z) = \sqrt{V(z)}$, перепишем уравнение (11):

$$\frac{1}{4}V_z^2 + \frac{\varepsilon_3}{4}V^5 + \frac{\varepsilon_2}{3}V^4 + \frac{1}{2}V^3 + \\ + \left(\omega - k^2\right)\cdot V^2 - c_1 V = 0. \qquad (12)$$

Используя метод неявных функций, будем искать решения уравнения (12) в виде $V(z) = F(\xi)$, $\xi = \psi(z)$, полагая $c_1 = 0$ и

$$\xi_z = \pm F(\xi), \qquad (13)$$

что приводит к следующему уравнению:

$$F_\xi^2 + \varepsilon_3 F^3 + \frac{4}{3}\varepsilon_2 F^2 + 2F + 4\left(\omega - k^2\right) = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) может быть записано в виде:

$$\left[\frac{d}{d\xi}\left(F + \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3}\right)\right]^2 + \varepsilon_3\left(F + \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3}\right)^3 + \\ + \frac{2(27\varepsilon_3 - 8\varepsilon_2^2)}{27\varepsilon_3}\left(F + \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3}\right) + \\ + \frac{128\varepsilon_2^3}{729\varepsilon_3^2} - \frac{8\varepsilon_2}{9\varepsilon_3} - 4k^2 + 4\omega = 0. \qquad (15)$$

Вводя следующие обозначения для постоянных величин:

$$g_2 = \frac{64\varepsilon_2^2}{27\varepsilon_3^2} - \frac{8}{\varepsilon_3}, \\ g_3 = \frac{512\varepsilon_2^3}{729\varepsilon_3^3} - \frac{32\varepsilon_2}{9\varepsilon_3^2} - \frac{16k^2}{\varepsilon_3} + \frac{16\omega}{\varepsilon_3}, \\ \psi = -F - \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3}, \qquad (16)$$

перепишем уравнение (15) в виде:

$$\left(\left(2\varepsilon_3^{-1/2}\right)\varphi_\xi\right)^2 = 4\psi^3 - g_2\psi - \psi_3. \qquad (17)$$

Общее решение уравнения (17) может быть выражено через эллиптическую функцию Вейерштрасса, что позволяет записать:

$$F(\xi) = -\wp\left(\left[\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_3}(\xi - \xi_0)\right]; g_2; g_3\right) - \\ - \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3}. \qquad (18)$$

Учитывая условие (13), возможно выразить $\xi(z)$ в квадратурах:

$$z - z_0 = \pm\int\frac{d\xi}{F(\xi)} = \\ = \mp\int\frac{d\xi}{\wp\left(\left[\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_3(\xi - \xi_0)}\right]; g_2; g_3\right) + \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3}}, \qquad (19)$$

однако в общем случае такой интеграл не может быть посчитан аналитически.

Стоит заметить, что для специального вида функции $F(\xi)$ интеграл (19) может быть посчитан. Используя метод простейших уравнений [10], найдем решения (14) в виде

$$F(\xi) = M_0 + M_1 Q(\xi) + M_2 Q^2(\xi)\,, \tag{20}$$

где $Q(\xi)$ – решение уравнения Риккати:

$$Q_\xi = \mu(Q^2 - Q), \tag{21}$$

имеющее следующий вид

$$Q(\xi) = \frac{1}{1+\exp(\mu(\xi-\xi_0))}. \tag{22}$$

Используя (21), и подставляя выражение (20) в уравнение (14), получим полином относительно $Q(\xi)$, равный нулю:

$$\begin{aligned}&\left(\varepsilon_3 M_2^3 + 4\mu^2 M_2^2\right) Q(\xi)^6 + (4\mu^2 M_1 M_2 - 8\mu^2 M_2^2 +\\ &+3\varepsilon_3 M_1 M_2^2) Q(\xi)^5 + \left(\frac{4}{3}\varepsilon_2 M_2^2 - 8\mu^2 M_1 M_2 +\right.\\ &\left.+\mu^2 M_1 + 4\mu^2 M_2^2 + 3\varepsilon_3 M_0 M_2^2 + 3\varepsilon_3 M_1^2 M_2^2\right)\times\\ &\times Q(\xi)^4 + \left(4\mu^2 M_1 M_2 + \varepsilon_3 M_1^3 - 2\mu^2 M_1^2 +\right.\\ &\left.+\frac{8}{3}\varepsilon_2 M_1 M_2 + 6\varepsilon_3 M_0 M_1 M_2\right) Q(\xi)^3 +\\ &+\left(2M_2 + \frac{4}{3}\varepsilon_2 M_1^2 + \mu^2 M_1^2 + 3\varepsilon_3 M_0^2 M_2 +\right.\\ &\left.+3\varepsilon_3 M_0 M_1^2 + \frac{8}{3}\varepsilon_2 M_0 M_2\right) Q(\xi)^2 +\\ &+\left(2M_1 + 3\varepsilon_3 M_0^2 M_1 + \frac{8}{3}\varepsilon_2 M_0 M_1\right) Q(\xi) +\\ &+\left(\frac{4}{3}\varepsilon_2 M_0^2 + 2M_0 + \varepsilon_3 M_0^3 - 4k^2 + 4\omega\right) = 0.\end{aligned} \tag{23}$$

Так как $Q(\xi) = 0$, коэффициенты полинома должны быть тождественно равны нулю. Это приводит к следующим ограничениям на параметры модели:

$$\begin{cases}\omega - k^2 = -\dfrac{1}{12}\dfrac{M_0 M_1}{M_1 + 6M_0} - \dfrac{1}{6}M_0\,,\\ \mu = \pm\sqrt{\dfrac{M_1}{M_0(M_1+6M_0)}}\,,\\ M_2 = -M_1\,,\\ \varepsilon_2 = \dfrac{3}{4M_0}\left(\dfrac{M_1}{M_1+6M_0} - 2\right),\\ \varepsilon_3 = \dfrac{4}{M_0(M_1+6M_0)}\,,\end{cases} \tag{24}$$

где M_0 и M_1 – произвольные константы. Уравнение (20) теперь записывается в виде

$$\begin{aligned}F(\xi) = M_0 + &\frac{M_1}{1+\exp(\mu(\xi-\xi_0))} -\\ &-\frac{M_1}{(1+\exp(\mu(\xi-\xi_0))^2}.\end{aligned} \tag{25}$$

Для представленного вида $F(\xi)$ следующее выражение может быть проинтегрировано:

$$\frac{d\xi}{F(\xi)} = dz, \tag{26}$$

тогда зависимость ξ и z описывается следующим образом:

$$\begin{aligned}z = z_0 + \frac{\xi}{M_0} + &\frac{2M_1}{\mu M_0\sqrt{4M_0M_1 + M_1^2}}\times\\ &\times\operatorname{arctanh}\left(\frac{2e^{\mu(\xi-\xi_0)}M_0 + 2M_0 + M_1}{\sqrt{4M_0M_1+M_1^2}}\right).\end{aligned} \tag{27}$$

Теперь решение уравнения (11) при $c_1 = 0$ запишется в виде

$$\begin{aligned}y(\xi) = \Bigg[M_0 + &\frac{M_1}{1+\exp(\mu(\xi-\xi_0))} -\\ &-\frac{M_1}{(1+\exp(\mu(\xi-\xi_0)))^2}\Bigg]^{\frac{1}{2}},\end{aligned} \tag{28}$$

где $\xi(z)$ определяется неявно из (27), и выполнены ограничения на параметры модели (24).

Таким образом, решение уравнения (6) имеет вид:

$$\begin{gathered}u'(x',\,t') = y(z)e^{i(kx'-\omega t'-\theta_0)}\,,\\ z = x' - 2kt',\end{gathered} \tag{29}$$

где k и θ_0 – произвольные постоянные.

Принимая во внимание, что z, $\xi(z)$, $y(\xi) \in R$ из выражений (27) и (28) следуют дополнительные ограничения на параметры M_0 и M_1 для существования найденного решения:

$$\left|\frac{2e^{\mu(\xi-\xi_0)}M_0 + 2M_0 + M_1}{\sqrt{4M_0M_1+M_1^2}}\right| < 1, \tag{30}$$

$$M_0 + \frac{M_1}{1+e^{\mu(\xi-\xi_0)}} - \frac{M_1}{(1+e^{\mu(\xi-\xi_0)})^2} \geq 0. \tag{31}$$

Данные ограничения удовлетворяются на ограниченном промежутке по переменной ξ из-за присутствия экспоненты в (30), что накладывает дополнительные ограничения при построении решения.

Условия (30) и (31) с ограничениями (20) удовлетворяются в следующей области параметров M_1 и M_0 (рис. 1):

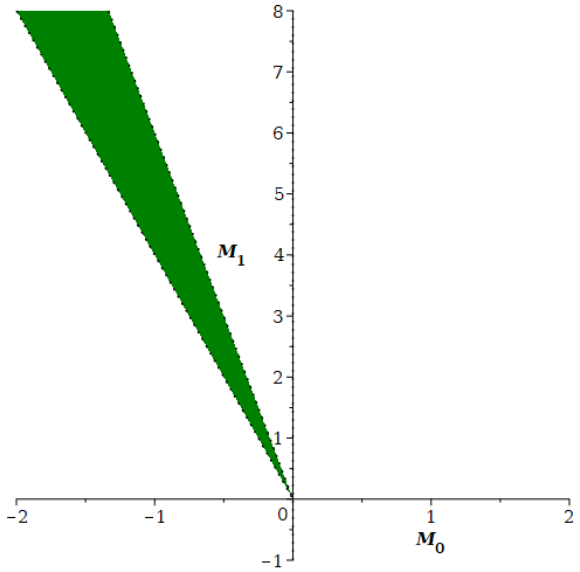


Рис. 1. Допустимые значения M_1 и M_0

$$\begin{cases} M_0 < 0, \\ -4M_0 < M_1 < -6M_0. \end{cases} \tag{32}$$

Волновой профиль $y(z)$ при $k = 1.6$, $M_0 = -1.48$, $M_1 = 6.16$ изображен на рис. 2.

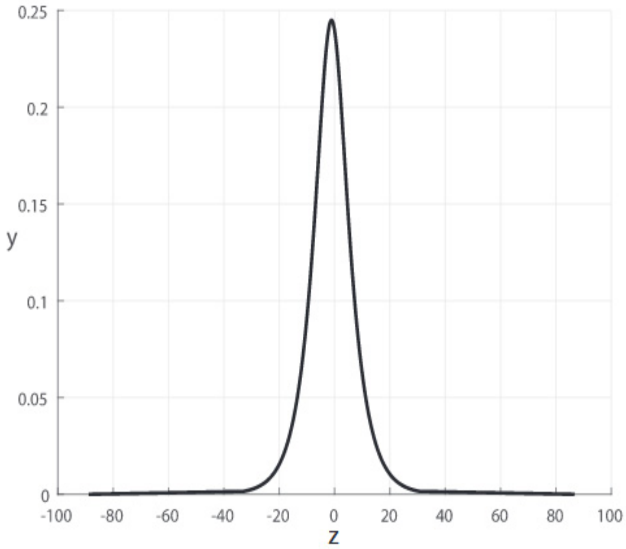


Рис. 2. Профиль уединённой волны при $k = 1.6$, $M_0 = -1.48$, $M_1 = 6.16$

1.2. Модификация метода Фурье для моделирования процессов, описываемых уравнением Шрёдингера с тремя нелинейностями

Семейство обобщенных уравнений Шрёдингера может быть записано в виде

$$u_t = iL[u] + iN[u]u. \tag{33}$$

К примеру, при $L[u] \equiv au_{xx}$, $N[u] \equiv b_1|u|^2$ уравнение (33) представляет из себя нелинейное уравнение Шрёдингера (1).

Для применения метода Фурье объявим периодические граничные условия следующим образом:

$$\begin{cases} u\left(-\dfrac{L}{2}, t\right) = u\left(\dfrac{L}{2}, t\right), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\left(-\dfrac{L}{2}, t\right) = \dfrac{\partial u}{\partial x}\left(\dfrac{L}{2}, t\right). \end{cases} \tag{34}$$

Предполагая $x \in \left[-\frac{1}{2}L,\ \frac{1}{2}L\right]$, $t \in [0, T]$, разделим интервал по переменной x на N одинаковых частей с шагом

$$h = \frac{L}{N}. \tag{35}$$

Узлы координатной сетки определяются, как

$$x_j = jh, \quad j = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}. \tag{36}$$

Пусть U^m – сеточная аппроксимация решения на m-м временном слое; V^m – промежуточное решение. В таком случае начальные условия задаются в U^0. В общем виде схема расщепления может быть записана следующим образом [11]:

$$U^{m+1} = \exp(i\tau L) \cdot V^m, \tag{37}$$

где

$$V^m = \exp(i\tau N[U^m]) \cdot U^m. \tag{38}$$

Применяя метод Фурье, используем дискретное преобразование Фурье для сеточной функции V^m для определения решения на следующем временном слое:

$$\hat{V}^m = \frac{h}{L}\exp(-i\mu x^T)\cdot V^m, \qquad (39)$$

где $\hat{V}^m$ – вектор коэффициентов Фурье; $\mu = \left(\mu_{-\frac{N}{2}}, \dots, \mu_{\frac{N}{2}-1}\right)^T$ – вектор частот преобразования $\mu_n = \frac{2\pi n}{L}$; $x = \left(x_{-\frac{N}{2}}, \dots, x_{\frac{N}{2}-1}\right)^T$ – координаты точек сетки.

Далее воспользуемся соотношением между $\hat{U}^{m+1}$ и $\hat{V}^m$:

$$\hat{U}^{m+1} = \exp(-i(\mu\circ\mu)\tau)\circ\hat{V}^m, \qquad (40)$$

которое вытекает из уравнения (37) после подстановки в него вместо U^{m+1} и V^m соответствующих рядов Фурье. Под $x \circ y$ понимается произведение по Адамару.

Решение на следующем временном слое восстанавливается с помощью обратного преобразования Фурье, используя (40):

$$U^{m+1} = \exp(-i\mu x^T)\cdot\hat{U}^{m+1}. \qquad (41)$$

Модифицируя метод применительно к уравнению (6), запишем операторы $L[u]$ и $N[u]$ в виде:

$$\begin{cases} L\left[u\right] \equiv u_{xx}, \\ N\left[u\right] = |u|^2 + \varepsilon_2\,|u|^4 + \varepsilon_3\,|u|^6. \end{cases} \qquad (42)$$

Упрощенная блок-схема программного кода для численного решения проблемы распространения оптических импульсов при периодических граничных условиях представлена на рис. 3.

2. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

2.1. Применение метода Фурье для моделирования процесса распространения уединенной волны, описываемой уравнением Шрёдингера с тремя нелинейностями

Рассмотрим процесс распространения уединенной волны (29) уравнения (6). Произведем расчет при помощи схемы, описанной в разд. 1.2 для определенных параметров M_0 и M_1, удовлетворяющих условиям (32). Параметры ε_1, ε_2, ω и μ определяются формулами (24). Результат моделирования представлен на рис. 4. Аналитический и численно полученный профили в момент $t = 16$ изображены на рис. 4,*b*.

Относительная погрешность расчета при заданных параметрах не превышает 0.08.%. Зависимость относительной погрешности от времени проиллюстрирована на рис. 5,*a*.

Сеточная сходимость достигнута (рис. 5,*b*), аналитическое решение совпало с численным. Следовательно, численная схема реализована корректно и аналитическое решение, построенное в разд. 1.1, обладает солитонными свойствами.

2.2. Взаимодействие солитона с возмущением в начальных условиях

Проведем моделирование распространения импульса при возмущении в начальных условиях. Внесем в начальное условие, соответствующее решению (29) уравнения (6) возмущение следующим образом:

$$\begin{aligned} u(x,0) = y(\xi(x))\cdot e^{i(kx-\theta_0)} + \\ + Ae^{-\nu(x-x_0)^2}. \end{aligned} \qquad (43)$$

Соответствующие численные результаты изображены на рис. 6.

Проведенное моделирование позволяет сделать вывод, что солитон, заданный рассмотренными параметрам $M_0 = -3$, $M_1 = 12.34$, взаимодействует с заданным возмущением, не распадаясь и не теряя способности к распространению. Профиль импульса восстанавливается после взаимодействия.

Также установлено, что солитон (6) устойчив при распространении в среде со случайным шумом следующего вида:

$$\begin{aligned} u(x,0) = y(\xi(x))\cdot e^{i(kx-\theta_0)} + \\ + A\cdot \mathrm{rand}(x). \end{aligned} \qquad (44)$$

Результаты моделирования проиллюстрированы на рис. 7.

Моделирования, представленные в данном разделе, подтверждают стабильность солитонов, полученных в разд. 1.1.

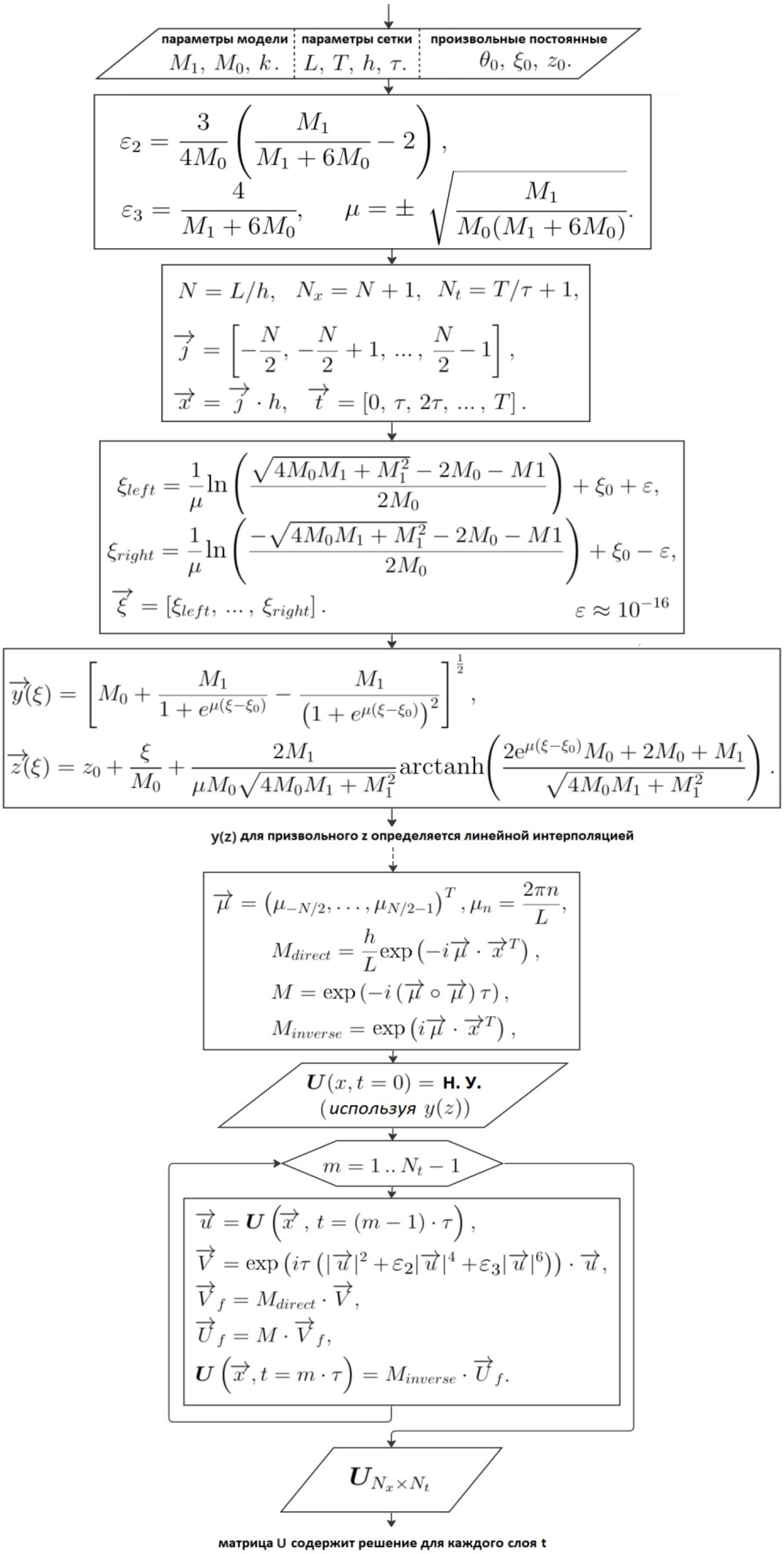
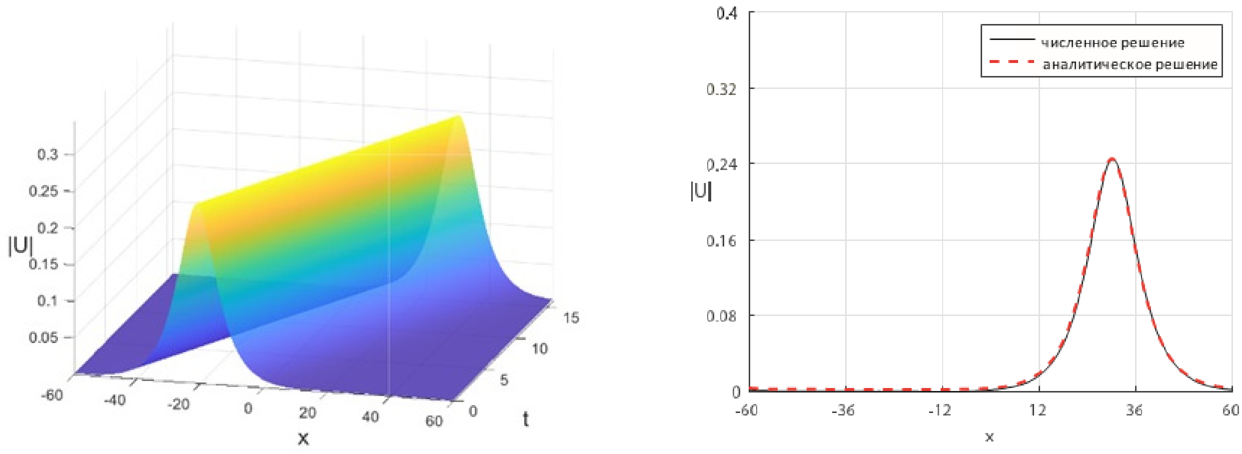
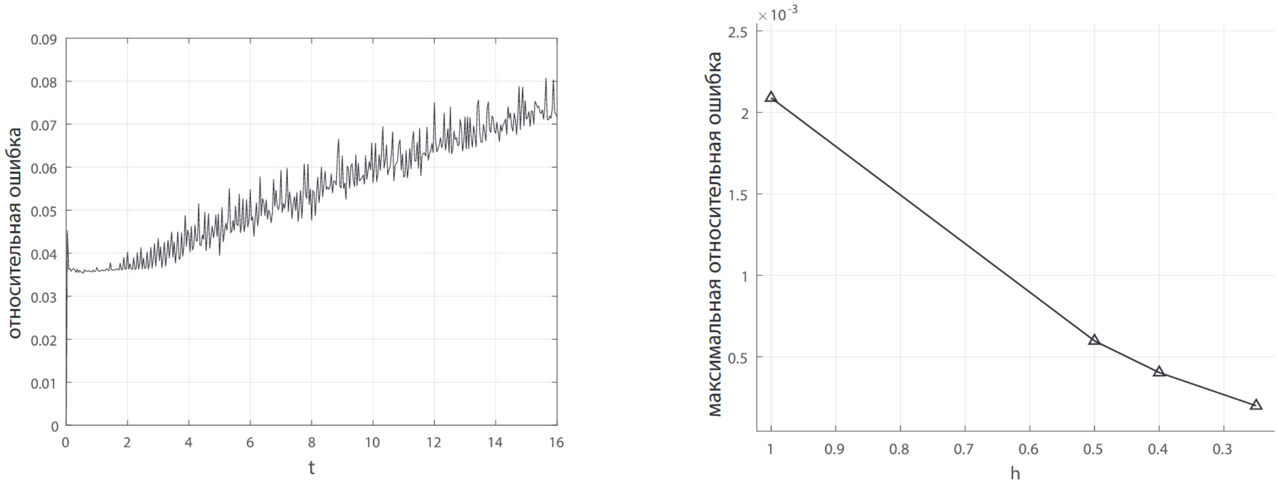


Рис. 3. Блок-схема программы, моделирующей процессы распространения импульсов с помощью метода Фурье



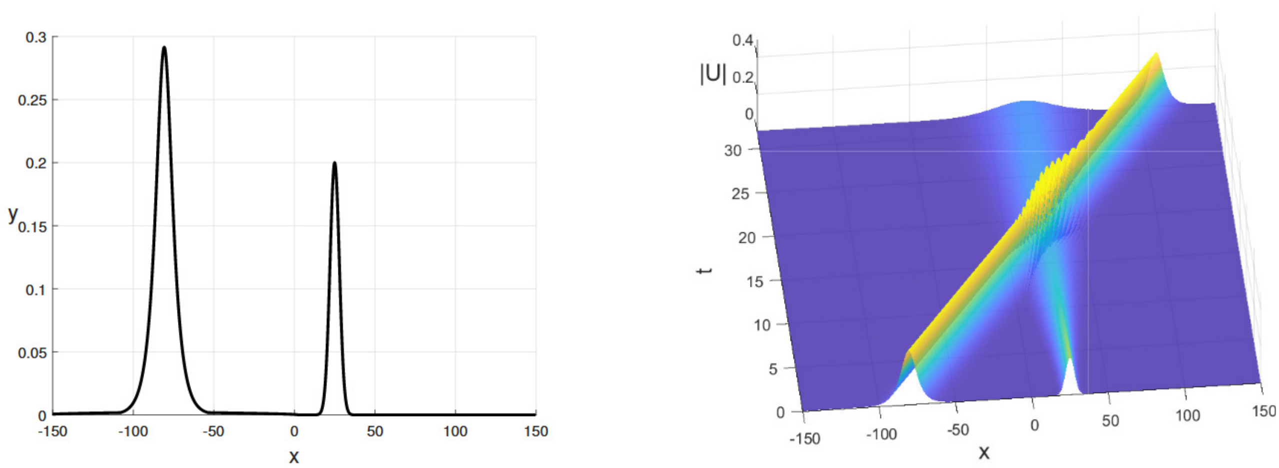
a *b*

Рис. 4. Распространение уединённой волны (29) при параметрах $L = 120$, $T = 16$, $h = 0.2$, $\tau = 0.04$, $z_0 = -20$, $k = 1.6$, $M_0 = -1.48$, $M_1 = 6.16$: *a* – модуль численного решения; *b* – модули решений при $t = 16$



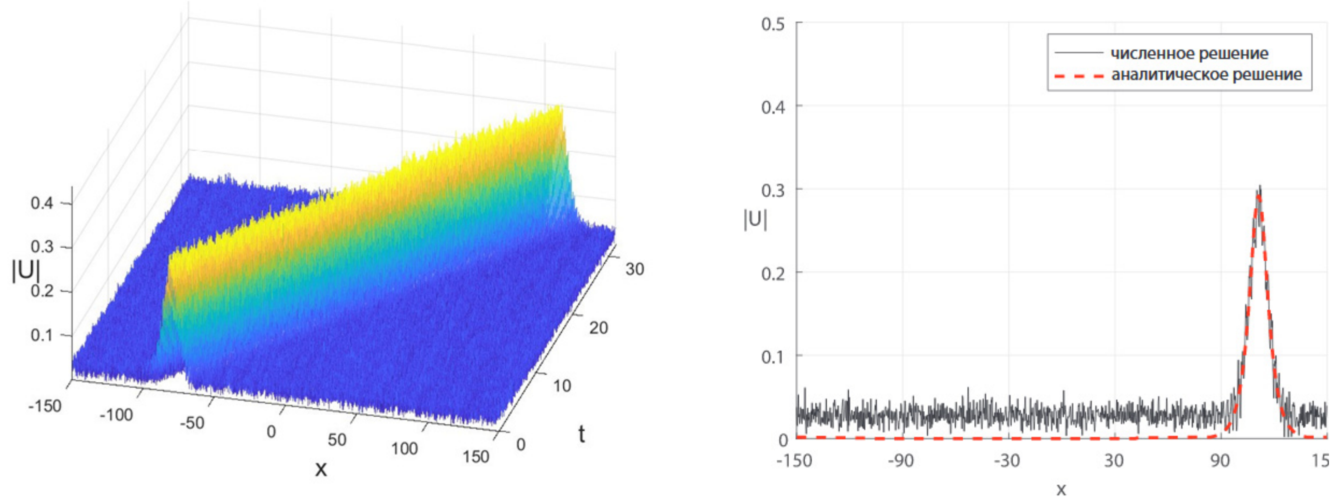
a *b*

Рис. 5. Численные результаты при параметрах $L = 120$, $T = 16$, $h = 0.2$, $\tau = 0.04$, $z_0 = -20$, $k = 1.6$, $M_0 = -1.48$, $M_1 = 6.16$: *a* – относительная ошибка в зависимости от времени при $h = 0.2$, $\tau = 0.04$; *b* – максимальная относительная ошибка в зависимости от шага сетки *h*



a *b*

Рис. 6. Численные результаты при параметрах $M_0 = -3$, $M_1 = 12.34$, $k = 3$, $\xi_0 = 0$, $z_0 = -80$, $\theta_0 = 0$, $L = 300$, $T = 32$, $h = 0.25$, $\tau = 0.625$, $A = 0.2$, $v = 0.06$, $x_0 = 25$: *a* – модуль начального условия (43); *b* – модуль численного решения



a *b*

Рис. 7. Численные результаты при параметрах $M_0 = -3$, $M_1 = 12.34$, $k = 3$, $\xi_0 = 0$, $z_0 = -80$, $\theta_0 = 0$, $L = 300$, $T = 32$, $h = 0.25$, $\tau = 0.0625$, $A = 0.05$: *a* – модуль численного решения; *b* – профили решений при $t = 32$

2.3. Анализ влияния высших степеней нелинейности на распространение уединенной волны

При решении физических задач классическое НУШ обобщается путем добавления в уравнение некоторых выражений, учитывающих определенные физические факторы. Поскольку реальные физические процессы могут протекать по более сложным законам, не всегда возможно заранее предугадать и учесть все необходимые уточняющие члены. В этом разделе мы исследуем влияние дополнительных нелинейных членов на решения НУШ. При $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 = 0$, уравнение (6) является НУШ:

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0. \tag{45}$$

Задача Коши для уравнения (45) решается методом обратной задачи рассеяния. Его решение в виде уединенной волны представлено в работе [8] и имеет вид

$$u(x,t) = \frac{4(\omega - k^2)}{2(\omega - k^2)e^{-(x - c_0 t_0 - z_0)\sqrt{(\omega - k^2)}} + e^{(x - c_0 t_0 - z_0)\sqrt{(\omega - k^2)}}} e^{i(kx - \omega t - \theta_0)}, \tag{46}$$

где $c_0 = 2k$ и k, ω, z_0, θ_0 – произвольные константы. Начальное условие, относящееся к решению (46) имеет вид

$$u(x,0) = \frac{4(\omega - k^2)}{2(\omega - k^2)e^{-(x - z_0)\sqrt{(\omega - k^2)}} + e^{(x - z_0)\sqrt{(\omega - k^2)}}} \times e^{i(kx - \theta_0)}. \tag{47}$$

При $\varepsilon_3 = 0$ решение уравнения (6) было также найдено в следующем виде

$$u(x,t) = \left(\frac{4\mu e^{\sqrt{\mu}(x - 2kt - z_0)}}{1 + 4e^{\sqrt{\mu}(x - 2kt - z_0)} + (4 + 4\mu\nu)e^{2\sqrt{\mu}(x - 2kt - z_0)}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i(kx - \omega t - \theta_0)}, \tag{48}$$

где $\mu = 4(\omega - k^2)$, $\nu = 4\varepsilon_2/3$ и k, ω, z_0, θ_0 – произвольные константы. Заметим, что при $\varepsilon_2 = 0$ решение (48) совпадает с решением (46).

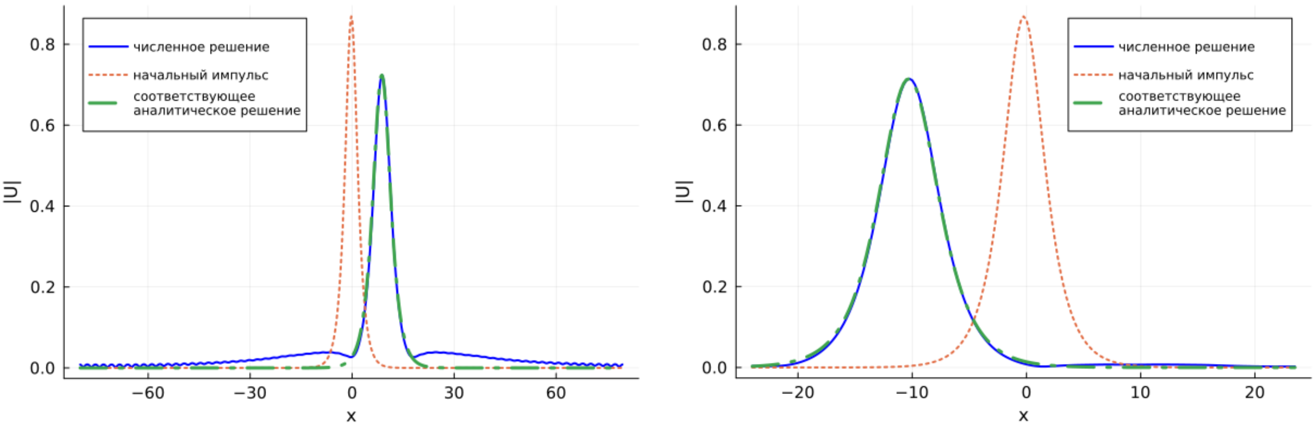
Исследуем влияние нелинейных выражений на распространение уединенной волны (47) в рамках модели, описываемой уравнением (6).

При $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 = 0$ уединенная волна (46) является точным решением уравнения (6). Численное решение для начального условия (47) совпадает с аналитическим.

В случае введения нелинейного члена при $\varepsilon_2 \neq 0$ импульс претерпевает изменения в процессе распространения. Поскольку начальное условие (47) не удовлетворяет уравнению модели (6), солитонные свойства импульса перестают выполняться, и его форма постепенно изменяется. Излучение энергии при граничных периодических условиях нарушает изначальное предположение об уединенности импульса. Для восстановления справедливости данного предположения в процесс расчета введена процедура фильтрации излучения в численном решении.

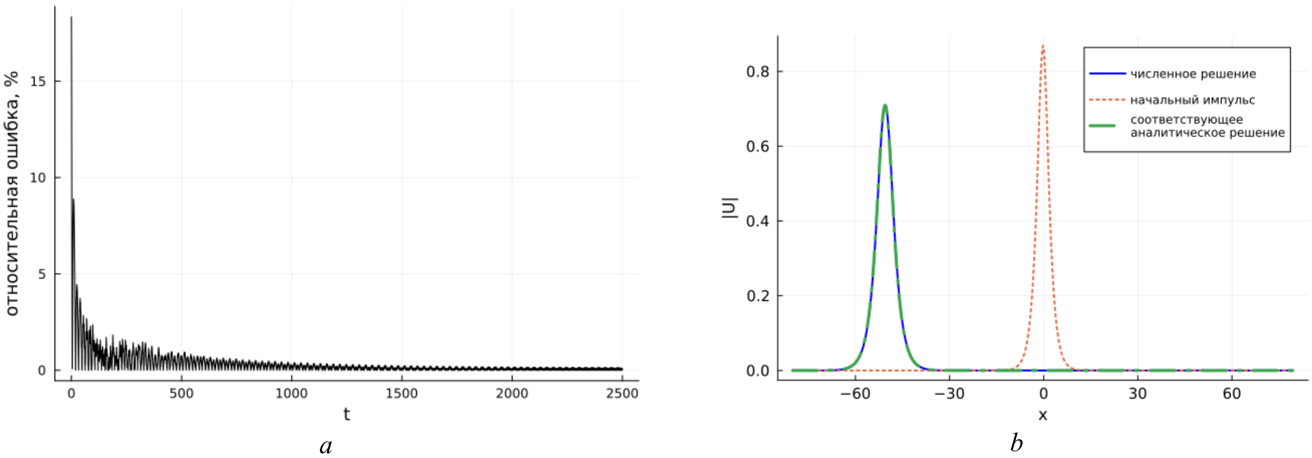
Обнаружено, что форма импульса (47) постепенно становится устойчивой. Установлено, что для установившегося импульса существует солитон вида (48), совпадающий по форме. Данное наблюдение позволяет заключить, что исходный импульс под влиянием нелинейных выражений в модели преобразуется в импульс, совпадающий с аналитическим решением (48) уравнения (6) при $\varepsilon_3 = 0$. Результаты моделирования проиллюстрированы на рис. 8 и 9.

Относительная ошибка между аналитическим решением (48) и полученным численным решением от времени представлена на рис. 9,*a*.



a *b*

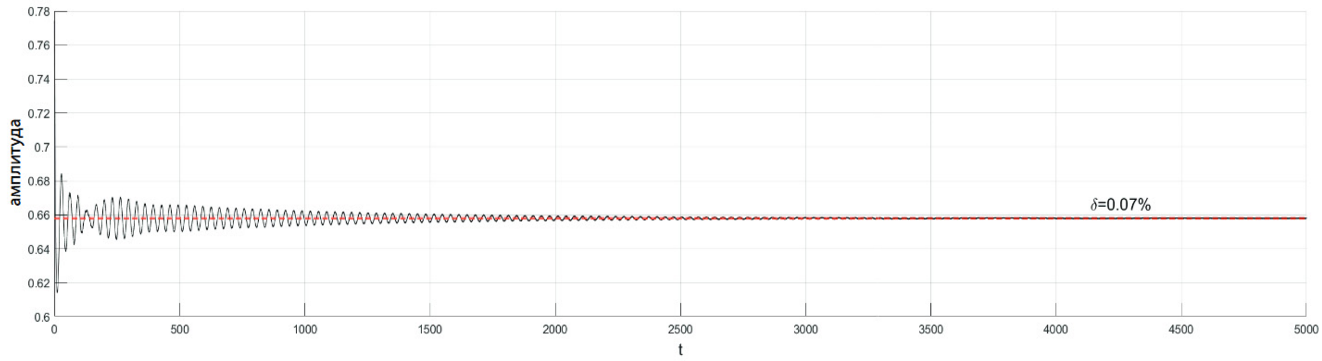
Рис. 8. Численные результаты распространения импульса (47) при $L = 160$, $T = 500$, $h = 0.25$, $\tau = 0.0625$, $\varepsilon_2 = -0.5$, $\varepsilon_3 = 0$, $\omega = 0.4$, $k = 0.15$. Профиль решения*:* *a* – при $t = 30$; *b* – при $t = 500$



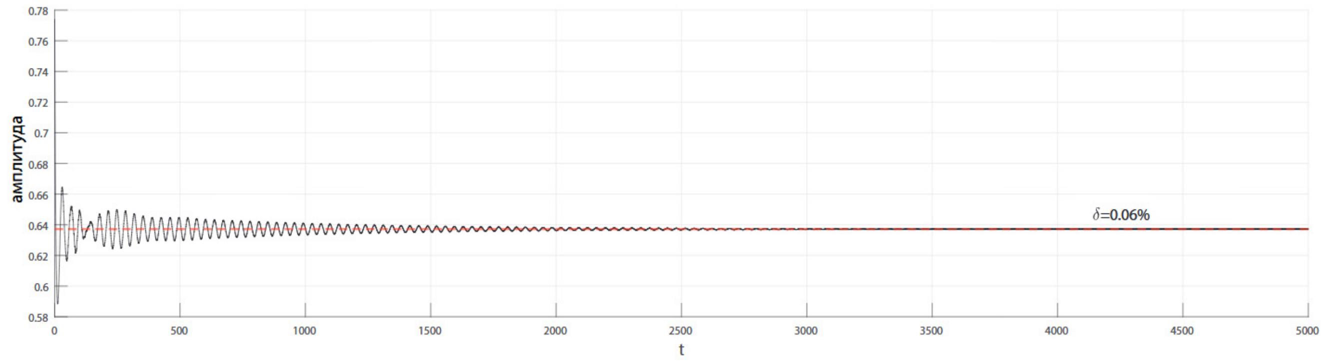
a *b*

Рис. 9. Численные результаты распространения импульса (47) при $L = 160$, $T = 500$, $h = 0.25$, $\tau = 0.0625$, $\varepsilon_2 = -0.5$, $\varepsilon_3 = 0$, $\omega = 0.4$, $k = 0.15$*:* *a* – относительная ошибка в зависимости от времени; *b* – профиль решения при $t = 2500$

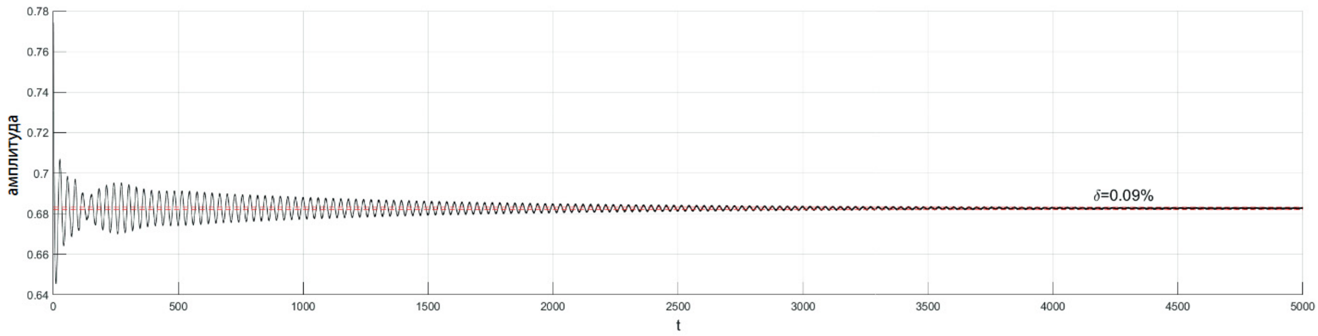
Рассмотрим добавление в модель нелинейного члена седьмой степени при $\varepsilon_3 \neq 0$. При этом форма импульса также изменяется. Установлено влияние знака ε_3 на затухание колебаний. При $\varepsilon_3 < 0$ амплитуда результирующего импульса уменьшается относительно исходного. При $\varepsilon_3 > 0$ амплитуда полученного импульса возрастает. Колебания устанавливаются тем раньше по времени моделирования, чем меньше значение ε_3. Зависимости амплитуды импульса от времени в зависимости от параметров возмущений проиллюстрированы на рис. 10, где δ – относительная амплитуда колебаний в конце временного промежутка моделирования.



a



b



c

Рис. 10. Зависимость амплитуды импульса (47) при распространении, где $L = 200$, $T = 5000$, $h = 0.25$, $\tau = 0.0625$, $\omega = 0.2$, $k = 0.707$: *a*) $\varepsilon_2 = -0.5$, $\varepsilon_3 = 0$; *b*) $\varepsilon_2 = -0.5$, $\varepsilon_3 = -0.25$; *c*) $\varepsilon_2 = -0.5$, $\varepsilon_3 = 0.25$

Результаты, представленные в данном разделе, позволяют сделать вывод, что уединенные волны НУШ при распространении в среде с высшими нелинейными членами при определенных параметрах преобразуются в устойчивые солитоны обобщенной неинтегрируемой модели. Этот переход сопровождается излучением энергии. Обнаружено, что добавление нелинейного члена седьмой степени влияет на скорость преобразования исходного импульса в устойчивый, и на форму итогового импульса. Данное влияние определяется величиной и знаком параметра ε_3.

2.4. Столкновения солитонов в присутствии высших степеней нелинейности

Известно, что решения интегрируемого нелинейного уравнения Шрёдингера взаимодействуют упруго, т.е. без обмена импульсом и энергией. При нарушении интегрируемости системы внешними возмущениями солитонные столкновения становятся неупругими. В этом разделе мы исследуем столкновения солитонов НУШ в среде, описываемой возмущенным уравнением (6).

Рассмотрим столкновения двух солитонов вида (47) с заданными параметрами k_1, k_2, ω_1,

ω_2, $z_{0,1}$, $z_{0,2}$, $\theta_{0,1}$, $\theta_{0,2}$. Значения параметров ε_2 и ε_3 в данном случае влияют на интенсивность обмена импульсом и энергией. Обнаружено, что итоговый характер взаимодействия солитонов зависит также от разности фаз в момент столкновения $\Delta\theta = \theta_{0,1} - \theta_{0,2}$. Результаты моделирования для $k_1 = -k_2$, $\omega_1 = \omega_2$, $z_{0,1} = -z_{0,2}$, $\theta_{0,1} = \theta_{0,2} + \Delta\theta$ представлены на рис. 11 и 12.

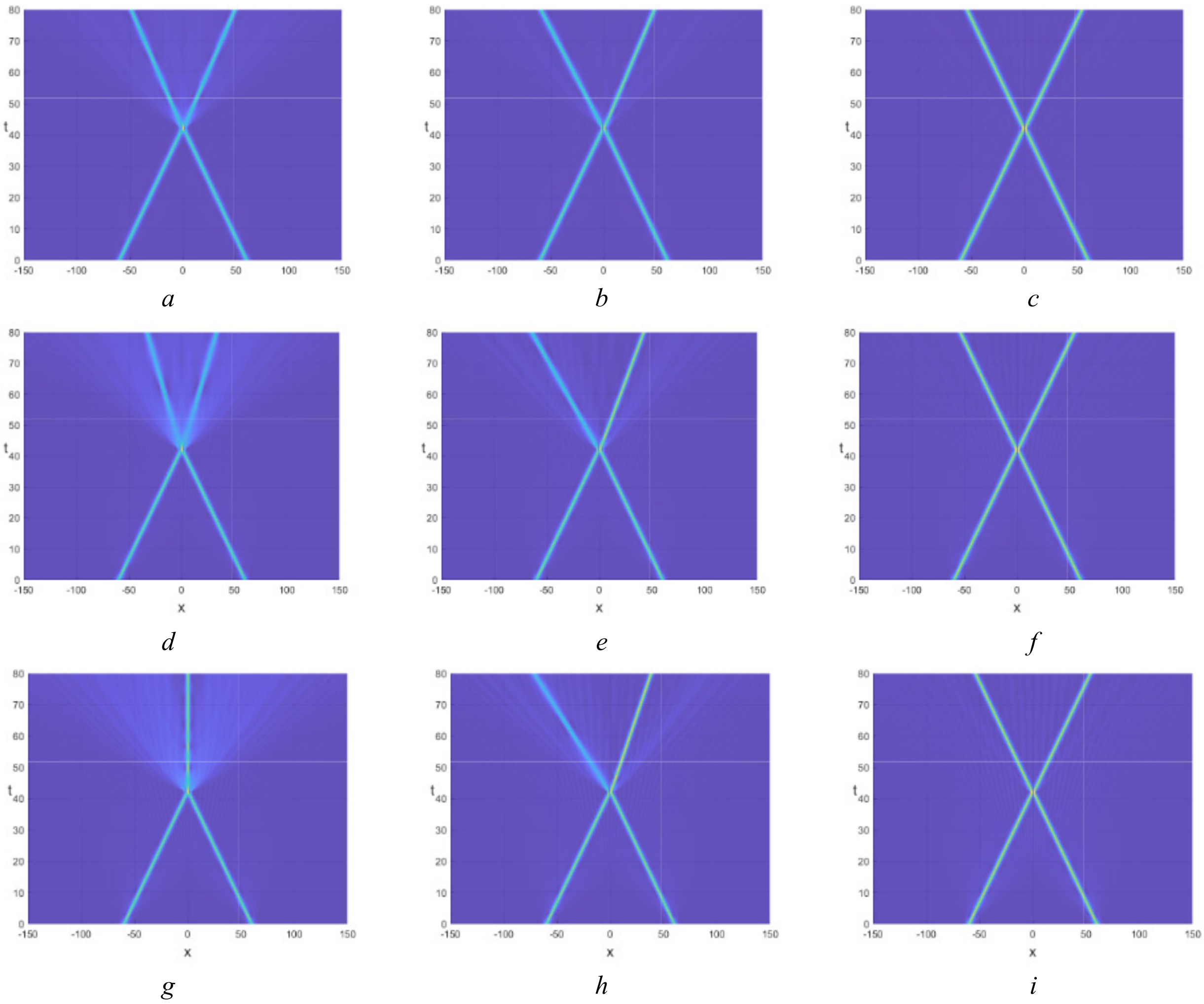


Рис. 11. Модуль численного решения при моделировании солитонных столкновений для $k_1 = -k_2 = 0.7$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$: *a*) $\Delta\theta = 0$, $\varepsilon_2 = 0.2$, $\varepsilon_3 = -0.1$; *b*) $\Delta\theta = \pi/2$, $\varepsilon_2 = 0.2$, $\varepsilon_3 = -0.1$; *c*) $\Delta\theta = \pi$, $\varepsilon_2 = 0.2$, $\varepsilon_3 = -0.1$; *d*) $\Delta\theta = 0$, $\varepsilon_2 = 0.4$, $\varepsilon_3 = -0.2$; *e*) $\Delta\theta = \pi/2$, $\varepsilon_2 = 0.4$, $\varepsilon_3 = -0.2$; *f*) $\Delta\theta = \pi$, $\varepsilon_2 = 0.4$, $\varepsilon_3 = -0.2$; *g*) $\Delta\theta = 0$, $\varepsilon_2 = 0.6$, $\varepsilon_3 = -0.3$; *h*) $\Delta\theta = \pi/2$, $\varepsilon_2 = 0.6$, $\varepsilon_3 = -0.3$; *i*) $\Delta\theta = \pi$, $\varepsilon_2 = 0.6$, $\varepsilon_3 = -0.3$

Результаты моделирования позволяют заключить, что столкновения солитонов НУШ в рамках математической модели, включающей нелинейные члены высшего порядка в зависимости от разности фаз в момент столкновения, могут быть существенно неупругими. Вблизи $\Delta\theta = \pi$ солитоны взаимодействуют наименее интенсивно. Когда разность фаз находится в окрестности нуля, происходит значительное энерговыделение. В этом случае существуют критические параметры возмущения, при которых два солитона сливаются в один стационарный. При параметре $\Delta\theta \in (0, \pi)$ взаимодействие солитонов происходит с обменом энергией и импульсом. Помимо разности фаз, на определенный тип взаимодействия влияют значения параметров возмущения ε_2 и ε_3. Чем больше модуль коэффициента при соответствующей степени нелинейности, тем более выражен неупругий характер взаимодействия.

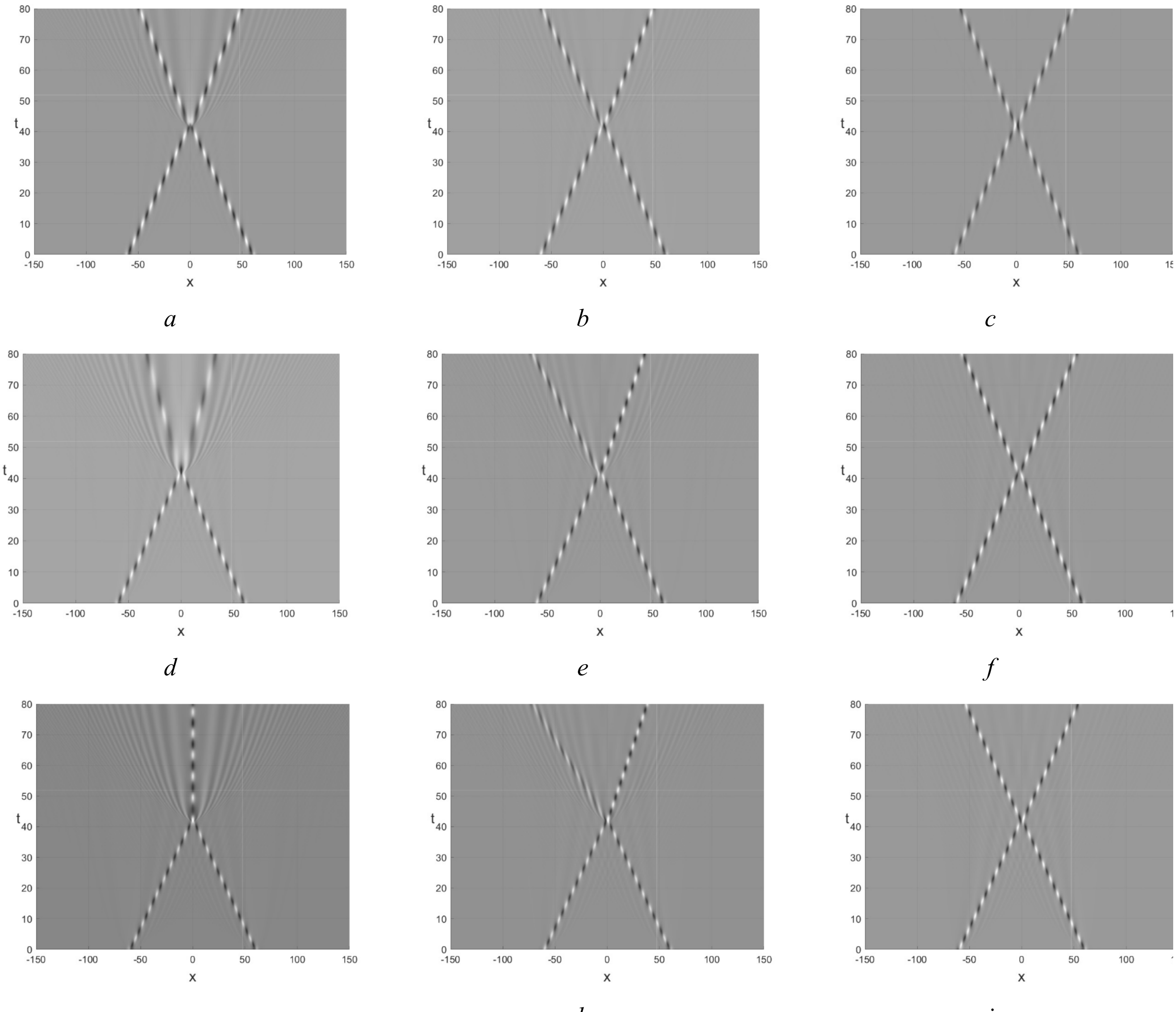


Рис. 12. Действительная часть численного решения при моделировании солитонных столкновений для для $k_1 = -k_2 = 0.7$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$: *a*) $\Delta\theta = 0$, $\varepsilon_2 = 0.2$, $\varepsilon_3 = -0.1$; *b*) $\Delta\theta = \pi/2$, $\varepsilon_2 = 0.2$, $\varepsilon_3 = -0.1$; *c*) $\Delta\theta = \pi$, $\varepsilon_2 = 0.2$, $\varepsilon_3 = -0.1$; *d*) $\Delta\theta = 0$, $\varepsilon_2 = 0.4$, $\varepsilon_3 = -0.2$; *e*) $\Delta\theta = \pi/2$, $\varepsilon_2 = 0.4$, $\varepsilon_3 = -0.2$; *f*) $\Delta\theta = \pi$, $\varepsilon_2 = 0.4$, $\varepsilon_3 = -0.2$; *g*) $\Delta\theta = 0$, $\varepsilon_2 = 0.6$, $\varepsilon_3 = -0.3$; *h*) $\Delta\theta = \pi/2$, $\varepsilon_2 = 0.6$, $\varepsilon_3 = -0.3$; *i*) $\Delta\theta = \pi$, $\varepsilon_2 = 0.6$, $\varepsilon_3 = -0.3$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе проведено численное моделирование процессов распространения импульсов в нелинейной оптической среде с периодическими граничными условиями, описываемой обобщенным уравнением Шрёдингера (2) с нелинейными членами третьего, пятого и седьмого порядков. Получено аналитическое решение в виде уединенной волны (29) и условия ее существования. Представлена модификация метода Фурье для численного решения поставленной задачи. С численной точки зрения исследован процесс распространения аналитически полученного солитонного решения обобщенной модели. Проведено моделирование взаимодействия оптического солитона уравнения (2) с возмущением в начальных данных. Смоделировано распространение оптического импульса в среде со случайным шумом. Проанализировано влияние высших степеней нелинейности в математической модели на распространение уединенных волн нелинейного уравнения Шрёдингера. Проведено моделирование процессов столкновения солитонов в условиях наличия высших нелинейных членов.

Следующие результаты получены в результате исследования.

1. Уединенные волны уравнения Шрёдингера с нелинейными членами третьей, пятой и седьмой степеней распространяются устойчиво.

2. Оптические солитоны уравнения Шрёдингера с нелинейными членами третьей, пятой и седьмой степеней не распадаются при возмущении начальных условий или при распространении в условиях случайного шума.

3. При распространении в оптической среде, описываемой математической моделью с нелинейными членами более высокого порядка, солитоны НУШ преобразуются в солитоны, удовлетворяющие обобщенному уравнению.

4. В условиях наличия нелинейных членов высшего порядка столкновения солитонов НУШ происходят значительно не упруго. При определенных параметрах возможно образование стоячих волн.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-41-00070, https://rscf.ru/project/23-41-00070/

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lake B.M, Yuen H.C., Rungaldier H., Ferguson W.E.* Nonlinear deep-water waves: theory and experiment. Part 2. Evolution of a continuous wave train // Journal of Fluid Mechanics, Cambridge University Press, 1977. V. 83. № 1. Pp. 49–74.

2. *Yuen H.C., Ferguson W.E.* Relationship between Benjamin-Feir instability and recurrence in the nonlinear Schrödinger equation. // Physics of Fluids, 1978. V. 21. № 8. Pp. 1275.

3. *Kudryashov N.A.* On traveling wave solutions of the Kundu-Eckhaus equation // Optik, 2020, V. 224. 165500.

4. *Kohl R.W., Biswas A., Ekici M., Zhou Q., Khan S., Alshomrani A.S., Belic M. R.* Highly dispersive optical soliton perturbation with cubic-quintic-septic refractive index by semi-inverse variational principle // Optik, 2019, V. 199. 163322.

5. *Kudryashov N.A.* Construction of nonlinear differential equations for description of propagation pulses in optical ber // Optik, 2019, V. 192. 162964.

6. *Kudryashov N.A.* Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical ber // Optik, 2019, V. 194. 163060.

7. *Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., Belic M.R.* Highly dispersive optical solitons with non-local nonlinearity by exp- function // Optik, 2019, V. 186. Pp. 288–292.

8. *Kudryashov N.A.* Method for finding optical solitons of generalized nonlinear Schrödinger equations // Optik, 2022, V. 261. 169163.

9. *Kivshar Y., Agrawal G.* Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals. Academic Press, 2003. Pp. 108.

10. *Kudryashov N.A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // Chaos, Solitons & Fractals, 2005, V. 24. №. 5. Pp. 1217–1231.

11. *Weideman A. C., Herbst B.M.* Split-Step Methods for the Solution of the Nonlinear Schrödinger Equation // SIAM Journal on Numerical Analysis, 1986, V. 23. №. 3. Pp. 485–507.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 2, pp. 83–96

NUMERICAL STUDY OF SOLITON SOLUTIONS OF THE CUBIC-QUINTIC-SEPTIC NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

V.A. Medvedev, N.A. Kudryashov

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

**e-mail: viktormedvedev12115551@gmail.com*
***e-mail: nakudr@gmail.com*

Received February 11, 2024; revised April 01, 2024; accepted April 02, 2024

The problem of pulse propagation described by the nonlinear Schrödinger equation with non-Kerr nonlinearity of the third, fifth and seventh powers is considered. Optical solitons of the considered equation are found using simplest equations method and implicit functions method. The area of acceptable model parameters is illustrated. A modification of the split-step Fourier method is presented. Optical soliton propagation process is studied numerically. The validity of analytical calculations has been proven. The process of the interaction of a soliton pulse with a disturbance in the initial condition is analyzed. The process of the soliton pulse propogation in a medium with a random noise simulated. The stability of optical solitons of the cubic-quintic-septic nonlinear Schrodinger equation is proved. The influence of higher nonlinearity terms on the nonlinear Schrodinger equation solitary waves is studied.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ТРЕМЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

The soliton collisions in the presence of higher nonlinear terms are simulated. It is shown that in the presence of higher nonlinear terms, the solitons interact inelastically upon collision.

Keywords: Cubic-quintic-septic nonlinear Schrödinger equation, Split-step Fourier scheme, Optical soliton, Numerical modeling, Nonlinear optics, Nonlinear differential equations.

REFERENCES

1. *Lake B.M, Yuen H.C., Rungaldier H., Ferguson W.E.* Nonlinear deep-water waves: theory and experiment. Part 2. Evolution of a continuous wave train. Journal of Fluid Mechanics, Cambridge University Press, 1977. Vol. 83. No. 1 Pp. 49–74.

2. *Yuen H.C., Ferguson W. E.* Relationship between Benjamin-Feir instability and recurrence in the nonlinear Schrödinger equation. Physics of Fluids, 1978. Mol. 21. No. 8. P. 1275.

3. *Kudryashov N.A.* On traveling wave solutions of the Kundu-Eckhaus equation. Optik, 2020, Vol. 224. 165500.

4. *Kohl R.W., Biswas A., Ekici M., Zhou Q., Khan S., Alshomrani A.S., Belic M. R*. Highly dispersive optical soliton perturbation with cubic-quintic-septic refractive index by semi-inverse variational principle. Optik, 2019. Vol. 199. 163322.

5. *Kudryashov N.A.* Construction of nonlinear differential equations for description of propagation pulses in optical ber. Optik, 2019. Vol. 192. 162964.

6. *Kudryashov N.A.* Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical ber. Optik, 2019, Vol. 194. 163060.

7. *Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., Belic M.R.* Highly dispersive optical solitons with non-local nonlinearity by exp-function. Optik, 2019. Vol. 186. Pp. 288–292.

8. *Kudryashov N.A.* Method for finding optical solitons of generalized nonlinear Schrödinger equations. Optik, 2022. Vol. 261. 169163.

9. *Kivshar Y., Agrawal G*. Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals. Academic Press, 2003. Pp. 108.

10. *Kudryashov N.A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. Chaos, Solitons & Fractals, 2005. Vol. 24. No. 5. Pp. 1217–1231.

11. *Weideman A. C., Herbst B.M.* Split-Step Methods for the Solution of the Nonlinear Schrödinger Equation. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1986. Vol. 23. No. 3. Pp. 485–507.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2024, т. 13, № 2, с. 97–109

УДК 681.5

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЧЕТКИХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ МОЩНОСТЬЮ ЯДЕРНОГО РЕАКТОРА ВВЭР-1200

С.С. Правосуд[1,2], Д.С. Маслаков[2], Я.О. Якубов[2]
[1]АНО ДПО Техническая академия Росатома, Обнинск, 249031, Россия
[2]Северский технологический институт – филиал Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», Северск, 636036, Россия
**e-mail: ssepravosud@rosatom.ru*
**e-mail: sspravosud@mephi.ru*
Поступила в редакцию: 11.12.2023
После доработки: 18.02.2024
Принята к публикации: 05.03.2024

В данной работе смоделированы нечеткий и нечеткий ПИ-регуляторы системы автоматического регулирования мощности линеаризованной математической модели реакторной установки ВВЭР-1200. Непосредственно контур системы автоматического регулирования включает в себя математическую модель шагового электромагнитного привода, модель датчиков потока нейтронов, а также уточненную математическую модель 12 группы органов регулирования системы управления и защиты, полученную путем аппроксимации экспериментальных данных алгоритмом Левенберга–Марквардта для нелинейного метода наименьших квадратов. На основе модели в пространстве состояний ядерного реактора было также определено 10 передаточных матриц, соответствующих диапазону мощности 10–100 % от номинальной и спроектировано 10 классических ПИ-регуляторов для обеспечения запасов устойчивости не менее 60° по фазе, и не менее 10 децибел по амплитуде для каждого уровня мощности реакторной установки. Результаты моделирования показывают значительное преимущество разработанных нечетких регуляторов как в режиме астатического поддержания мощности с учетом шумов в канале датчиков потока нейтронов, так и в режимах следования за нагрузкой.

Ключевые слова: автоматическое регулирование мощности, нечеткая логика, нечеткий регулятор, нечеткий ПИ-регулятор, ВВЭР-1200, передаточная функция, пространство состояний, робастность.
DOI: 10.26583/vestnik.2024.320
EDN QBFVFE

ВВЕДЕНИЕ

Ядерный реактор на тепловых нейтронах представляет собой сложный нелинейный объект управления (ОУ), контроль которого осложняется постоянным изменением во времени и в пространстве параметров, сопряженных с процессами выгорания ядерного топлива и воспроизводством вторично делящихся нуклидов, накоплением продуктов деления, приводящих к шлакованию и отравлению, теплогидравлическим процессам, а также эффектам реактивности различной природы. Большое влияние на устойчивость реактора как объекта управления оказывает и режим его работы: например, постоянные циклы нагрузки в широком диапазоне изменения мощностей сильно отражаются на производительности АЭС. Дополнительную неопределенность в процесс управления вносят также шумы датчиков аппаратуры контроля нейтронного потока (АКНП) реактора и, как следствие, неопределенность сигнала для исполнительного механизма (ШЭМ), осуществляющего возвратно-поступательное движение органов регулирования системы управления и защиты реактора (ОР СУЗ). Ко всем вышеперечисленным сложностям следует добавить то, что существует проблема неопределенности самой разработанной математической модели объекта управления: задание объекта в виде передаточной функции или в виде пространства состояний, т.е. в виде, пригодном для синтеза регулятора мощности (АРМ), позволяет описывать только изменчивые во времени свойства системы, исключая из рассмотрения их пространственное распределение. Для разрешения последней задачи были предложены, среди прочих, методы локальной кинетики [1], предполагающие разбиение реактора на несколько зон управления, каждая из которых описывалась моделью точечной кинетики и взаимодействовала с соседней по заданному закону. В работе

[2] Г.А. Пикина и др. разработали модель динамики реактора ВВЭР, пригодную для синтеза САР, с учетом распределения по высоте активной зоны параметров теплоносителя и теплового потока от реакции деления, а также с учетом влияния на переходные процессы неактивного металла, объема воды под и над активной зоной, и получили передаточные функции по основным каналам. Тем не менее, в подавляющем большинстве случаев при синтезе регулятора мощности ограничиваются только моделью точечной кинетики, дополненной обратными связями по реактивности.

Как следствие из обозначенных выше нетривиальных задач синтеза САР, традиционные ПИ-регулятор [2, 3] или ПИД-регулятор [4] не могут обеспечить желаемую точность и надежность системы управления в силу неадаптивности параметров K_P, K_I, K_D, так как известно, что передаточная функция, полученная на основе модели точечной кинетики, содержит множитель P_0 – текущий уровень мощности реакторной установки [5]. Для того чтобы избежать нормирования коэффициентов регулятора на текущий уровень мощности, такую передаточную функцию часто принимают в относительном виде, однако при использовании более сложных моделей, учитывающих процессы нагрева топливных элементов, а также процессы теплопередачи от топлива к теплоносителю, необходимость в нормировке остается, что будет показано далее. Для улучшения производительности классического ПИД-регулятора в работе [6] М. Зареи использует в качестве настройки метод Циглера–Никольса, однако известно, что данный метод не учитывает требование к запасу устойчивости. Таким образом, крайне важной задачей остается усовершенствование стратегий управления реакторной установкой, что позволит повысить ее безопасность.

К современным стратегиям управления реакторной установкой можно отнести, например оптимальное управления на основе линейно-квадратичного регулятора [7] (LQR) или линейно-квадратичного гауссова регулятора (LQG) [8], которые позволяют достичь желаемых результатов. Стратегии на основе $\mathcal{H}_\infty$-управления были также разработаны для системы управления мощностью РУ и обеспечения повышенной устойчивости по сравнению с LQG [9]. Управление с прогнозирующей моделью было представлено в [10]: основная идея заключалась в реализации такого закона управления, который не учитывал бы какую-либо явную модель процесса, а использовал лишь данные «вход–выход». Отдельно следует отметить управление на основе нечеткой логики (Fuzzy Logic Control), к безусловным достоинствам которой можно отнести ее широкое использование для управления системами, в которых трудно или невозможно определить точные значения параметров; поэтому спроектированный регулятор можно использовать даже при существенных изменениях коэффициентов модели из-за различных физических процессов. Более того, в отличие от вышеперечисленных стратегий, FLC опирается на простые математические принципы и требует только знания лингвистических переменных для процессов фаззификации, нечеткого вывода и дефаззификации. При этом FLC может обеспечить лучшие показатели качества управления по сравнению, например, с MPC: в работе [11] разработанный контроллер на основе нечеткой логики продемонстрировал меньшие среднеквадратичное отклонение (RMSE) и среднюю абсолютную ошибку (MAE) для управления электрическим двигателем с двойным питанием.

Нечеткий ПИД-регулятор (F-PID) был спроектирован для различных режимов нагрузки реакторов PWR [12, 13] и для управления реактором космического аппарата [14]. В работе [15] для управления жидкосолевым реактором В. Зэнг и др. была предложена схема управления на комбинировании классического ПИД (в динамическом режиме) и нечеткого (для небольшого отклонения от стационарного значения) регуляторов. В [16] Д. Ачариа и др. использовали тот же подход для жидкосолевого реактора, но комбинируя нечеткий и ПИ-регулятор.

В данной работе смоделированы в среде MATLAB нечеткий и нечеткий ПИ-регуляторы контура системы автоматического регулирования мощности линеаризованной модели динамики реактора ВВЭР-1200, обеспечивающие как режим астатического поддержания мощности с учетом шумов, так и управление реактором в переходных режимах.

СИСТЕМА АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ МОЩНОСТИ РЕАКТОРА

Типовая система автоматического регулирования мощности реакторной установки может быть представлена как на рис. 1 [9, 15, 17].

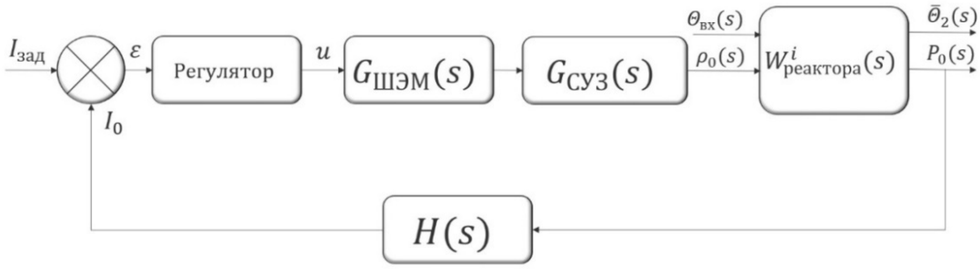


Рис. 1. Типовая система автоматического регулирования мощности ядерного реактора: $G_{ШЭМ}(s)$ – передаточная функция шагового электромагнитного привода; $G_{СУЗ}(s)$ – передаточная функция 12 группы ОР СУЗ; $H_{дат}(s)$ – обобщенная передаточная функция датчиков потока нейтронов; $W^i_{реактора}(s)$ – передаточная матрица реактора на i-м уровне мощности

Шаговый электромагнитный привод является сложной электромеханической системой, в которой каждый шаг сопровождается переходными процессами в обмотках электродвигателя, а перемещение якоря вызывает изменение магнитной проводимости, которое влияет на переходные процессы в обмотках управления. В то же время, якорь двигателя может совершать колебания со значительной амплитудой. Перемещение массивных частей магнитной системы в герметичных чехлах ШЭМ приводит к появлению вихревых токов, сильно влияющих на характер переходных процессов. В работе [18] К.Ю. Щукиным получена передаточная функция такого электромагнита с учетом короткозамкнутых витков, которая может быть представлена выражением (1):

$$G_{ШЭМ}(s) = 0.4\frac{0.011s + 1}{(0.19s + 1)(0.00113s + 1)}, \quad (1)$$

Обобщенную передаточную функцию датчиков потока нейтронов определим как апериодическое звено (2) [9, 15]:

$$H_{дат}(s) = \frac{1}{s+1}. \quad (2)$$

В качестве математической модели ядерного реактора используется верифицированная в двух тестах модель динамики реактора со сосредоточенными параметрами [19], использующая подход Р. Манна: однофазный теплоноситель находится в двух последовательно соединенным узлах («two well-stirred tanks in series»), что предполагает равенство между выходной температурой теплоносителя из данных узлов и их средней температурой как представлено в системе (3):

$$\begin{cases}
\dfrac{dP(t)}{dt} = \dfrac{\rho(T,\Theta) - \beta}{\Lambda}P(t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{6}\lambda_i C_i^*(t), \\
\dfrac{dC_i^*(t)}{dt} = \dfrac{\beta_i}{\Lambda}P(t) - \lambda_i C_i^*(t), \\
m_{Т}\gamma_{Т}\dfrac{d\bar{T}(t)}{dt} = \varepsilon P(t) - K_{тепл}S_{пов}\left(\bar{T}(t) - \bar{\Theta}_1(t)\right), \\
m_{ТН1}\gamma_{ТН}\dfrac{d\bar{\Theta}_1(t)}{dt} = \dfrac{1-\varepsilon}{2}P(t) + \dfrac{K_{тепл}S_{пов}}{2}\left(\bar{T}(t) - \bar{\Theta}_1(t)\right) - G_{ТН}\gamma_{ТН}\left(\bar{\Theta}_1(t) - \Theta_{вх}\right), \\
m_{ТН2}\gamma_{ТН}\dfrac{d\bar{\Theta}_2(t)}{dt} = \dfrac{1-\varepsilon}{2}P(t) + \dfrac{K_{тепл}S_{пов}}{2}\left(\bar{T}(t) - \bar{\Theta}_1(t)\right) - G_{ТН}\gamma_{ТН}\left(\bar{\Theta}_2(t) - \bar{\Theta}_1(t)\right), \\
\rho(T,\Theta) = \rho + \alpha_{Т}^{Т}(\bar{T}(t) - \overline{T_0}) + \dfrac{\alpha_{ТН}^{Т}}{2}\left(\bar{\Theta}_1(t) - \bar{\Theta}_{1_0}\right) + \dfrac{\alpha_{ТН}^{Т}}{2}\left(\bar{\Theta}_2(t) - \bar{\Theta}_{2_0}\right),
\end{cases} \quad (3)$$

где P – тепловая мощность ядерного реактора (МВт); C_i^* – нормированная на мощность концентрация ядер – предшественников запаздывающих нейтронов (МВт); $\bar{T}$ – среднее значение температуры топливных элементов (°C); $\bar{\Theta}_1$ и $\bar{\Theta}_2$ – среднее значение температур первого и второго узлов теплоносителя (°C); Λ – время жизни нейтронов (с); ρ – реактивность, вносимая ОР СУЗ; β – суммарная доля запаздывающих нейтронов $\beta = \sum_i^6 \beta_i$; λ_i – постоянная распада i-й группы ядер – предшественников запаздывающих нейтронов (c^{-1}); ε – доля энергии, выделяющаяся непосредственно в топливе (~ 97 %); $S_{\text{пов}}$ – площадь поверхность теплообмена (м^2); $K_{\text{тепл}}$ – коэффициент теплопередачи от топлива к теплоносителю $\left(\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 {}^\circ\text{C}}\right)$; $m_{\text{Т}}$ – масса топливных элементов (кг); $\gamma_{\text{Т}}$ – удельная теплоемкость топливных элементов $\left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\,{}^\circ\text{C}}\right)$; $G_{\text{ТН}}$ – массовый расход теплоносителя через реактор $\left(\frac{\text{кг}}{\text{с}}\right)$; $m_{\text{ТН1}}, m_{\text{ТН2}}$ – масса теплоносителя в первом и втором узлах (кг); $\gamma_{\text{ТН}}$ – удельная теплоемкость теплоносителя $\left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\,{}^\circ\text{C}}\right)$; $\alpha_{\text{Т}}^{\text{Т}}$ – коэффициент реактивности по температуре топлива $\left(\frac{1}{{}^\circ\text{C}}\right)$; $\alpha_{\text{ТН}}^{\text{Т}}$ – коэффициент реактивности по температуре теплоносителя $\left(\frac{1}{{}^\circ\text{C}}\right)$.

В работе [19] также показано преимущество данного подхода перед традиционной моделью динамики, где температура теплоносителя в активной зоне принимается равной полусумме входной и выходной температур на примере теста с резким увеличением температуры теплоносителя на входе в активную зону. Параметры, используемые при моделировании, представлены в табл. 1.

Таблица 1. Параметры реактора, использованные при моделировании

Параметр	Численное значение
Массовый расход теплоносителя ($G_{\text{ТН}}$)	19000
Масса топлива ($m_{\text{Т}}$)	86000
Масса теплоносителя в АЗ ($m_{\text{ТН}} = m_{\text{ТН1}} + m_{\text{ТН2}}$)	6000
Коэффициент теплопередачи × площадь поверхности теплообмена ($K_{\text{тепл}}S_{\text{пов}}$)	945325
Температура теплоносителя на входе в АЗ	297
Удельная теплоемкость топливных элементов ($\gamma_{\text{Т}}$)	277
Удельная теплоемкость теплоносителя ($\gamma_{\text{ТН}}$)	4850

Исходная система (3) является нелинейной и «жесткой». Для ее представления в форме, пригодной для синтеза регулятора системы автоматического регулирования мощности, необходимо произвести линеаризацию в окрестности рабочей точки, принимая исходное состояние как критическое, т.е. $\rho_0 = 0$, и от шести групп запаздывающих нейтронов перейдем к одной усредненной. Путем исключения переменных, описывающих установившийся режим, а также величин второго порядка малости получим линеаризованную систему (4):

$$\begin{cases} \dfrac{d\left(\frac{\delta P(t)}{P_0}\right)}{dt} = -\dfrac{\beta}{\Lambda}\left(\dfrac{\delta P(t)}{P_0}\right) + \lambda\delta\bar{C}(t) + \dfrac{\alpha_{\text{Т}}^{\text{Т}}}{\Lambda}\delta\bar{T}(t) + \dfrac{\alpha_{\text{ТН}}^{\text{Т}}}{2\Lambda}\delta\bar{\Theta}_1(t) + \dfrac{\alpha_{\text{ТН}}^{\text{Т}}}{2\Lambda}\delta\bar{\Theta}_2(t) + \dfrac{1}{\Lambda}\delta\rho_0(t), \\ \dfrac{d\delta\bar{C}(t)}{dt} = \dfrac{\beta}{\Lambda}\left(\dfrac{\delta P(t)}{P_0}\right) - \lambda\delta\bar{C}(t), \\ \dfrac{d\delta\bar{T}(t)}{dt} = \dfrac{\varepsilon P_0}{m_{\text{Т}}\gamma_{\text{Т}}}\left(\dfrac{\delta P(t)}{P_0}\right) + \dfrac{K_{\text{тепл}}S_{\text{пов}}}{m_{\text{Т}}\gamma_{\text{Т}}}\delta\bar{T}(t) - \dfrac{K_{\text{тепл}}S_{\text{пов}}}{m_{\text{Т}}\gamma_{\text{Т}}}\delta\bar{\Theta}_1(t), \\ \dfrac{d\delta\bar{\Theta}_1(t)}{dt} = \dfrac{(1-\varepsilon)P_0}{2m_{\text{ТН1}}\gamma_{\text{ТН}}}\left(\dfrac{\delta P(t)}{P_0}\right) + \dfrac{K_{\text{тепл}}S_{\text{пов}}}{2m_{\text{ТН1}}\gamma_{\text{ТН}}}\delta\bar{T}(t) - \dfrac{K_{\text{тепл}}S_{\text{пов}} + 2G_{\text{ТН}}\gamma_{\text{ТН}}}{2m_{\text{ТН1}}\gamma_{\text{ТН}}}\delta\bar{\Theta}_1(t) + \dfrac{G_{\text{ТН}}}{m_{\text{ТН1}}}\delta\Theta_{\text{вх}}(t), \\ \dfrac{d\delta\bar{\Theta}_2(t)}{dt} = \dfrac{(1-\varepsilon)P_0}{2m_{\text{ТН2}}\gamma_{\text{ТН}}}\left(\dfrac{\delta P(t)}{P_0}\right) + \dfrac{K_{\text{тепл}}S_{\text{пов}}}{2m_{\text{ТН2}}\gamma_{\text{ТН}}}\delta\bar{T}(t) - \dfrac{K_{\text{тепл}}S_{\text{пов}} + 2G_{\text{ТН}}\gamma_{\text{ТН}}}{2m_{\text{ТН2}}\gamma_{\text{ТН}}}\delta\bar{\Theta}_1(t) + \dfrac{G_{\text{ТН}}}{m_{\text{ТН2}}}\delta\bar{\Theta}_2(t). \end{cases} \quad (4)$$

Система (4) представляет собой Multiple Input Multiple Output (MIMO) – систему, где входными возмущениями являются отклонение реактивности $\delta\rho_0(t)$ и отклонение температуры теплоносителя на входе в АЗ $\delta\Theta_{\text{вх}}(t)$, а выходными параметрами – относительное отклонение мощности реактора $\frac{\delta P(t)}{P_0}$ и отклонение температуры теплоносителя на выходе из АЗ $\delta\overline{\Theta}_2(t)$.

Следовательно, уравнение в пространстве состояний принимает вид (5):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \boldsymbol{A}x(t) + \boldsymbol{B}u(t), \\ y(t) = \boldsymbol{C}x(t), \end{cases} \tag{5}$$

где $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{\Lambda} & \lambda & \frac{\alpha_{\text{Т}}^{\text{Т}}}{\Lambda} & \frac{\alpha_{\text{ТН}}^{\text{Т}}}{2\Lambda} & \frac{\alpha_{\text{ТН}}^{\text{Т}}}{2\Lambda} \\ \frac{\beta}{l} & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\varepsilon P_0}{m_{\text{Т}}\gamma_{\text{Т}}} & 0 & \frac{K_{\text{теплооб}}S_{\text{пов}}}{m_{\text{Т}}\gamma_{\text{Т}}} & -\frac{K_{\text{теплооб}}S_{\text{пов}}}{m_{\text{Т}}\gamma_{\text{Т}}} & 0 \\ \frac{(1-\varepsilon)P_0}{2m_{\text{ТН}1}\gamma_{\text{ТН}}} & 0 & \frac{K_{\text{теплооб}}S_{\text{пов}}}{2m_{\text{ТН}1}\gamma_{\text{ТН}}} & -\frac{K_{\text{теплооб}}S_{\text{пов}}+2G_{\text{ТН}}\gamma_{\text{ТН}}}{2m_{\text{ТН}1}\gamma_{\text{ТН}}} & 0 \\ \frac{(1-\varepsilon)P_0}{2m_{\text{ТН}2}\gamma_{\text{ТН}}} & 0 & \frac{K_{\text{теплооб}}S_{\text{пов}}}{2m_{\text{ТН}2}\gamma_{\text{ТН}}} & \frac{K_{\text{теплооб}}S_{\text{пов}}+2G_{\text{ТН}}\gamma_{\text{ТН}}}{2m_{\text{ТН}2}\gamma_{\text{ТН}}} & -\frac{G_{\text{ТН}}}{m_{\text{ТН}2}} \end{bmatrix}$ – матрица системы;

$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G_{\text{ТН}}}{m_{\text{ТН}}} & 0 \end{bmatrix}^T$ – матрица управления; $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ – матрица выхода;

$x(t) = \left[\frac{\delta P(t)}{P_0}\ \delta\bar{C}(t)\ \delta\bar{T}(t)\ \delta\overline{\Theta}_1(t)\ \delta\overline{\Theta}_2(t)\right]^T$ – вектор состояния;

$u(t) = [\delta\rho_0\ \ \delta\Theta_{\text{вх}}]^T$ – вектор управления, $y(t) = \left[\frac{\delta P(t)}{P_0}\ \delta\overline{\Theta}_2(t)\right]^T$ – вектор выхода.

Также из (5) может быть получена передаточная матрица системы (6):

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta P(s)}{P_0} \\ \delta\overline{\Theta}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\rho_0(s) \\ \delta\Theta_{\text{вх}}(s) \end{bmatrix} = W^i_{\text{реактора}}(s) \begin{bmatrix} \delta\rho_0(s) \\ \delta\Theta_{\text{вх}}(s) \end{bmatrix}, \tag{6}$$

где $G_{11}(s)$ – передаточная функция по каналу «отклонение реактивности – относительное отклонение мощности» (7.1–7.3); $G_{12}(s)$ – передаточная функция по каналу «отклонение температуры ТН на входе в АЗ – отклонение мощности реактора»; $G_{21}(s)$ – передаточная функция по каналу «отклонение реактивности – отклонение температуры ТН на выходе из АЗ»; $G_{22}(s)$ – передаточная функция по каналу «отклонение температуры ТН на входе в АЗ – отклонение температуры ТН на выходе из АЗ».

Из (7) можно определить численные значения передаточной функции по каналу «отклонение реактивности – относительное отклонение мощности»; выражения (7.1–7.3) соответствуют уровням мощности 10, 50 и 100 % от номинальной, соответственно:

$$G_{10}(s) = \frac{55.87s^4 + 712.4s^3 + 2301s^2 + 187.5s + 0.2571}{s^5 + 370.3s^4 + 4583s^3 + 14500s^2 + 389s + 29.37}, \tag{7.1}$$

$$G_{50}(s) = \frac{55.87s^4 + 712.4s^3 + 2301s^2 + 187.5s + 0.2571}{s^5 + 370.3s^4 + 4631s^3 + 15070s^2 + 1865s + 146.9}, \tag{7.2}$$

$$G_{100}(s) = \frac{55.87s^4 + 712.4s^3 + 2301s^2 + 187.5s + 0.2571}{s^5 + 370.3s^4 + 4691s^3 + 15780s^2 + 3710s + 293.7}. \tag{7.3}$$

Анализируя выражения (7.1–7.3), можно сделать вывод о необходимости перенастройки ПИ-регулятора каждый раз при переходе на новый уровень мощности для обеспечения требуемых показателей качества управления и запасов устойчивости.

Математическая модель ОР СУЗ в первом приближении может быть представлена линейным звеном с коэффициентом передачи $K_{\text{ОР}}$ [7, 9, 12], хотя известно, что интегральная характеристика стержней нелинейная, если их положение по высоте активной зоны отклоняется от среднего. Для уточнения математической модели были использованы данные, полученные с многофункционального тренажера ВВЭР – 1200 (АНО ДПО Техническая академия Росатома) для интегральной эффективности $\rho(H_{12})$ 12 группы ОР СУЗ при изменении ее положений (H_{12}) в пределах от 50 до 250 см. Экспериментальные измерения и их аппроксимации с использованием пакета *curveFitter* MATLAB приведены на рис. 2.

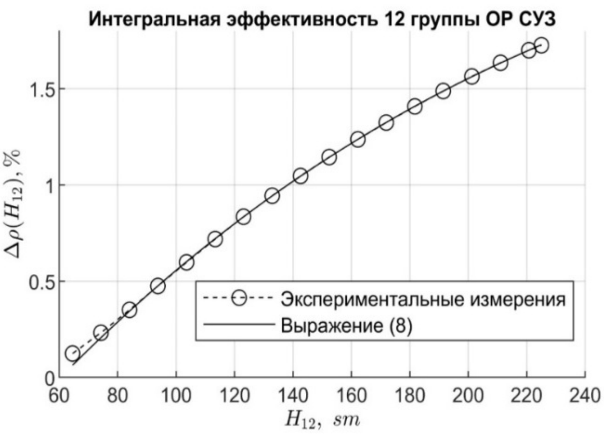


Рис. 2. Аппроксимация значений интегральной эффективности 12 группы ОР СУЗ

Для аппроксимации комбинацией экспоненциальных и линейной функций использовался алгоритм Левенберга — Марквардта для нелинейного метода наименьших квадратов, приводящий к результату вида (8):

$$\begin{gathered} y(z) = C_1 \exp(\lambda_1 z) + \\ + C_2 \exp(\lambda_2 z) + kz + d = \\ = -411 e^{-0.002365z} + 409.9 e^{-0.002365z} + \\ + 3.37 \times 10^{-5} z + 0.0264. \end{gathered} \tag{8}$$

При использовании аппроксимирующей модели (8) коэффициент детерминации (R^2) составил 0.9994, среднеквадратичное отклонение составило 0.01509. Также (8) является общим решением неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, из которого при нулевых начальных условиях может быть получена передаточная функция по каналу «положение ОР СУЗ – интегральная эффективность ОР СУЗ» вида (9):

$$\begin{aligned} G_{\text{СУЗ}}(s) &= \frac{\rho(s)}{y(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \\ &= \frac{\dfrac{b_0}{a_0}}{\dfrac{a_2}{a_0} s^2 + \dfrac{a_1}{a_0} s + 1} = \\ &= \frac{3.37 \times 10^{-5}}{2 \times 10^4 s^2 + 853.5 s + 1}. \end{aligned} \tag{9}$$

Для передаточной функции ШЭМ, передаточных функций ядерного реактора на разных уровнях мощности, передаточной функции 12 группы ОР СУЗ с обратной связью, заданной передаточной функцией датчиков потока нейтронов с использованием *pidtuneOptions* MATLAB, было синтезировано 10 ПИ-регуляторов для каждого уровня мощности РУ, обеспечивающих запас устойчивости по фазе для разомкнутой системы 60°. Значения полученных запасов устойчивости по фазе и амплитуде разомкнутых САР приведены в табл. 2.

Таблица 2. Запасы устойчивости по фазе и амплитуде смоделированных САР

Текущий уровень мощности РУ в % от номинальной	Запас устойчивости по фазе ψ, °	Запас устойчивости по амплитуде ΔL, Дб
10	60	14.8
20	60	23
30	60	28.9
40	60	33.1
50	60	35.9
60	60	37.7
70	60	39
80	60	40
90	60	40.8
100	60	41.4

Параметры K_P и K_I ПИ – регулятора оказалось возможным аппроксимировать линейной зависимостью методом наименьших квадратов, используя процедуру *polyfit*. Полученные функциональные зависимости представлены выражениями (10.1) и (10.2):

$$K_P(P_0) = 6.4437 \times P_0(\%) - 1.2933, \quad (10.1)$$

$$K_I(P_0) = 0.0681 \times P_0(\%) - 0.0257, \quad (10.2)$$

что позволяет использовать простой алгоритм перенастройки параметров каждый раз при переходе на новый уровень мощности.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЧЕТКОГО РЕГУЛЯТОРА И НЕЧЕТКОГО ПИ-РЕГУЛЯТОРА

Под нечетким управлением понимается такая стратегия управления, которая основана на опыте наблюдателя о функционировании объекта, и в которой отношения между входом и выходом процесса регулирования представляются в лингвистической форме в виде некоторой совокупности нечетких правил. При этом, в отличие от проектирования САР с использованием традиционных ПИ- и ПИД-регуляторов, при проектировании системы управления на основе нечеткой логики для улучшения качества управления на вход регулятора подается как сигнал ошибки $\varepsilon(t)$, так и скорость изменения сигнала ошибки $\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$ [12, 15, 20]. Соответственно, выходным параметром классического нечеткого регулятора будет управляющий сигнал $u(t)$, в то время как для нечеткого ПИ-регулятора выходными параметрами будут K_P и K_I составляющие регулятора, которые затем подаются на сумматор и формируют управляющий сигнал $u(t)$. Структурные схемы нечеткого и нечеткого ПИ-регуляторов представлены на рис. 3 и 4, соответственно.

Рис. 3. Структурная схема нечеткого регулятора

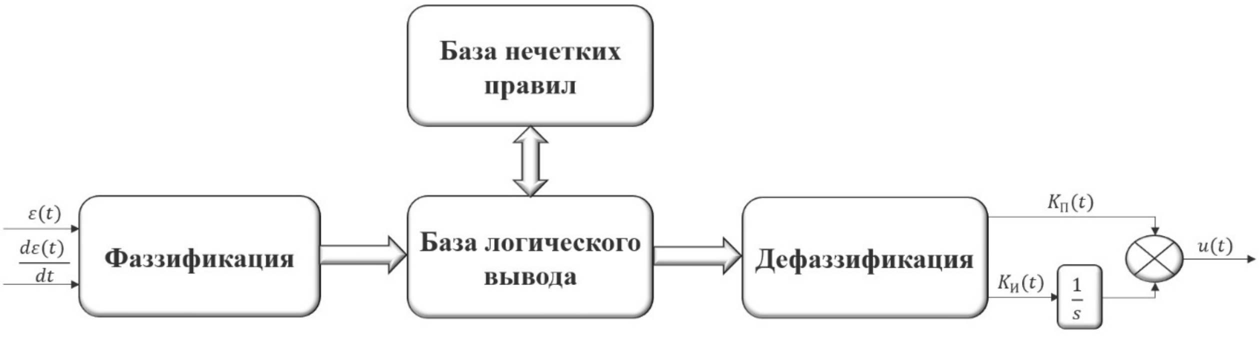


Рис. 4. Структурная схема нечеткого ПИ-регулятора

Для лингвистической переменной $\varepsilon(t)$ в нечетких регуляторах было определено следующее терм-множество: $T(\varepsilon(t)) =$ {NB – “Negative Big”, NM – “Negative Medium”, NS – “Negative Small”, Z – “Zero”, PS – “Positive Small”, PM – “Positive Medium”, PB – “Positive Big”}. Диапазон изменения сигнала ошибки варьируется в пределах [–1.1; 1.1].

Для лингвистической переменной $\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$ было определено следующее терм-множество: $T\left(\frac{d\varepsilon(t)}{dt}\right) =$ {NB – “Negative Big”, NS – “Negative Small”, Z – “Zero”, PS – “Positive Small”, PB – “Positive Big”}, диапазон изменений составил также [–1.1; 1.1].

Для управляющего сигнала $u(t)$ было определено следующее терм-множество: $T(u(t)) =$ $=$ {NB – “Negative Big”, NM – “Negative Medium”, NS – “Negative Small”, Z – “Zero”, PS – “Positive Small”, PM – “Positive Medium”, PB – “Positive Big”}, диапазон изменений составил [–6000; 6000].

Для лингвистических переменных K_P и K_I было определены следующие терм-множества: $T(K_P) =$ {VL – “Very Low”, ML – “Medium Low”, S = “Small”, Z – “Zero”, H – “High”, MH = = “Medium High” , VH – “Very High”} и $T(K_I) =$ $=$ {VL – “Very Low”, L = “Low”, Z – “Zero”, H – “High”, VH – “Very High”} с диапазонами изменений [–643; 643] и [–6.78; 6.78] соответственно. Все функции принадлежности имеют треугольную форму, и приведены на рис. 5–9, соответственно.

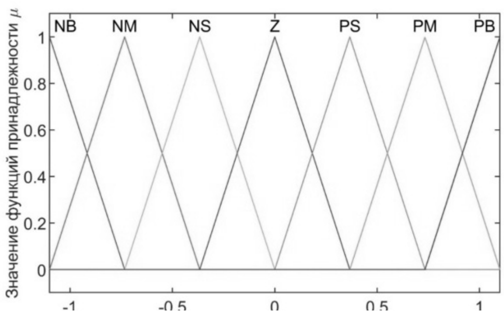


Рис. 5. Функции принадлежности сигнала ошибки ε

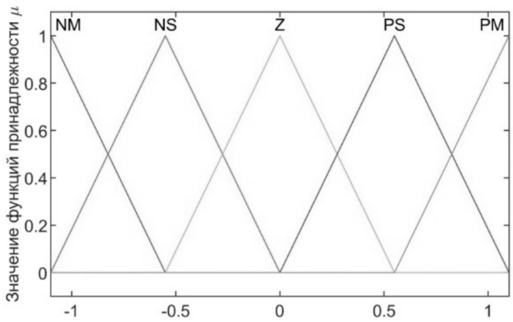


Рис. 6. Функции принадлежности скорости изменения сигнала ошибки $\frac{d\varepsilon}{dt}$

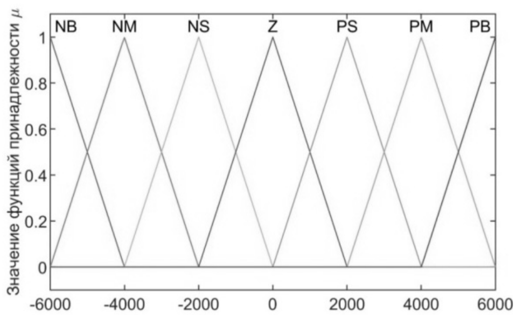


Рис. 7. Функции принадлежности управляющего сигнала u нечеткого регулятора

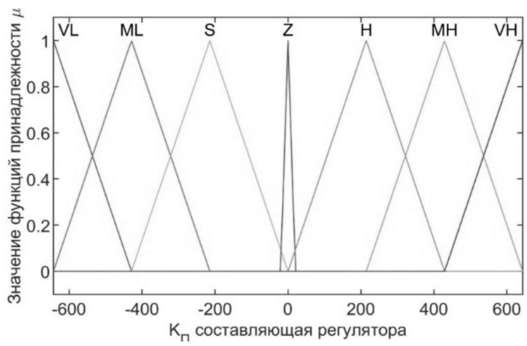


Рис. 8. Функции принадлежности $K_{\text{П}}$ составляющей нечеткого ПИ-регулятора

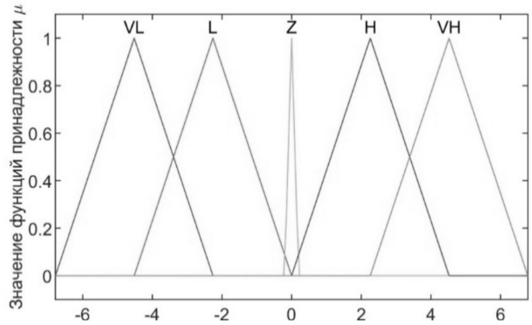


Рис. 9. Функции принадлежности $K_{\text{И}}$ составляющей нечеткого ПИ-регулятора

База активных правил для нечетких регуляторов составила 7 × 5 = 35 правил. Правила нечеткого вывода представлены в табл. 3 и 4, соответственно.

В качестве алгоритма нечеткого вывода был выбран алгоритм Мамдани (макс.-мин.). Деффазификация проводится методом центра тяжести, который возвращает центр тяжести нечеткого множества для выходного сигнала, как представлено в формуле (11):

$$X_{\text{ц.т.}} = \frac{\sum_i \mu_i(x_i) x_i}{\sum_i \mu_i(x_i)}. \qquad (11)$$

Переходный процесс при скачкообразном изменении уставки со стороны оператора на уровень мощности, составляющий 10 % от первоначального при использовании ПИ-нечеткого, и нечеткого ПИ-регуляторов на номинальной мощности, показан на рис. 10.

По рис. 10 можно определить показатели качества процесса управления, а именно, величину перерегулирования и время регулирования, которые составили $\sigma_{Fuzzy} \approx 0.91$ %, $t_{\text{рег}_{Fuzzy}} \approx 100$ с для нечеткого, $\sigma_{F-PI} \approx 0.8$ %, $t_{\text{рег}_{F-PI}} \approx 100$ с для нечеткого ПИ-регулятора, и $\sigma_{PI} \approx 1.36$ %, $t_{\text{рег}} \approx 1100$ с. Большое время регулирования может накладывать ограничения на работу ПИ-регулятора в режиме следования за нагрузкой.

Таблица 3. Правила нечеткого вывода для нечеткого регулятора

Управляющий сигнал u		Скорость изменения сигнала ошибки $\frac{d\varepsilon}{dt}$				
		NM	**NS**	**Z**	**PS**	**PM**
Сигнал ошибки ε	**NB**	*NB*	*NB*	*NM*	*NM*	*NS*
	NM	*NB*	*NM*	*NM*	*NS*	*Z*
	NS	*NM*	*NS*	*NS*	*Z*	*Z*
	Z	*NS*	*NS*	*Z*	*PS*	*PS*
	PS	*Z*	*Z*	*PS*	*PS*	*PM*
	PM	*Z*	*PS*	*PM*	*PM*	*PB*
	PB	*PS*	*PM*	*PM*	*PB*	*PB*

Таблица 4. Правила нечеткого вывода для нечеткого ПИ-регулятора

Составляющие регулятора $K_П, K_И$		Скорость изменения сигнала ошибки $\frac{d\varepsilon}{dt}$				
		NM	**NS**	**Z**	**PS**	**PM**
Сигнал ошибки ε	**NB**	*VL&VL*	*VL&L*	*ML&L*	*ML&L*	*S&Z*
	NM	*VL&L*	*ML&L*	*ML&Z*	*S&Z*	*Z&Z*
	NS	*ML&Z*	*S&Z*	*S&Z*	*Z&Z*	*Z&Z*
	Z	*S&Z*	*S&Z*	*Z&Z*	*H&Z*	*H&Z*
	PS	*Z&Z*	*Z&Z*	*H&Z*	*H&Z*	*MH&H*
	PM	*Z&Z*	*H&Z*	*MH&H*	*MH&H*	*VH&H*
	PB	*H&Z*	*MH&Z*	*MH&H*	*VH&H*	*VH&VH*

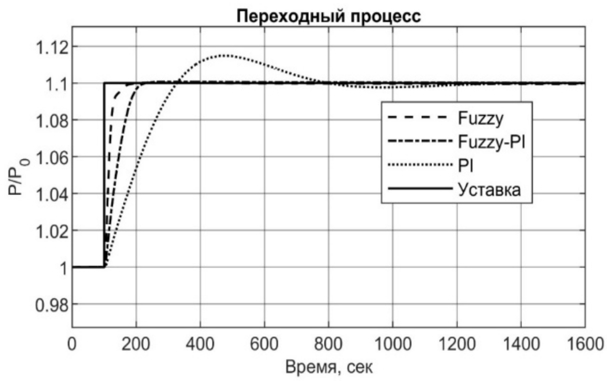


Рис. 10. Переходный процесс при скачкообразном изменении уставки $+10$ %

Для более полной оценки разработанных регуляторов необходимо рассмотреть изменение мощности, приближенное к наблюдаемому на реальных ядерных установках, а именно режим следования за нагрузкой [21]. Пусть со стороны оператора происходит плавное изменение уставки в течение 100 с путем перемещения 12 группы ОР СУЗ, и реактор переходит на мощность $1.1P_0$, а затем с уровня мощности P_0 в течение 100 с происходит переход на значение мощности $0.9P_0$. Такие пределы были установлены эмпирическим путем из-за линеаризации модели динамики реактора, так как в режиме глубокого маневрирования, например $100\ \%P_0$ – $50\ \%P_0$, необходимо переключаться между выражениями 7.3 и 7.2.

Соответствующие переходные процессы представлены на рис. 11 и 12, соответственно.

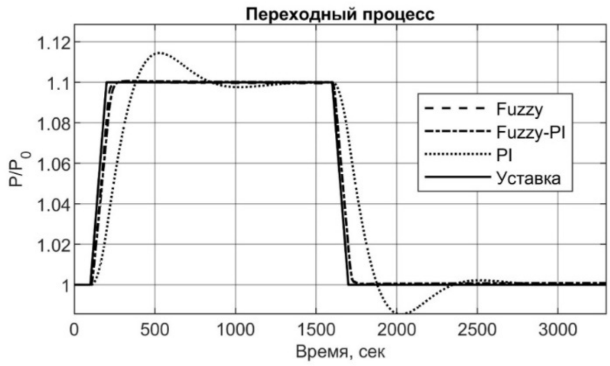


Рис. 11. Переходный процесс $P_0 \to 1.1P_0 \to P_0$

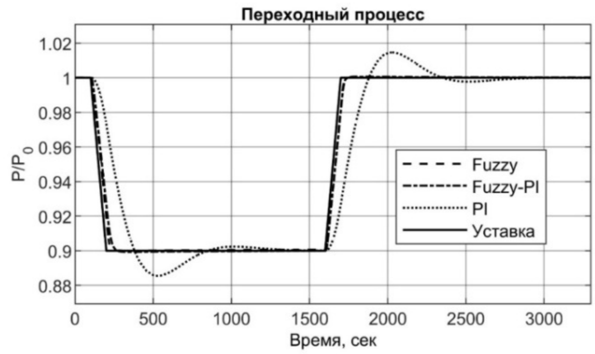


Рис. 12. Переходный процесс $P_0 \to 0.9P_0 \to P_0$

Режим набора мощности, состоящий из нескольких ступеней (при этом переход на новый уровень может происходить только после достижения установившегося значения) вида $P_0 \to 1.025P_0 \to 1.05P_0 \to 1.75P_0 \to 1.1P_0$, представлен на рис. 13.

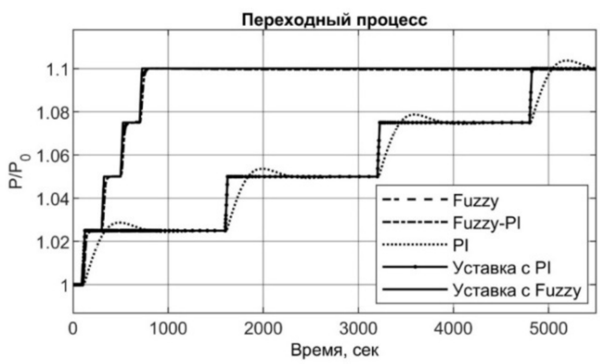


Рис. 13. Переходный процесс $P_0 \to 1.025P_0 \to 1.05P_0 \to 1.75P_0 \to 1.1P_0$

Такой маневр при использовании регуляторов на нечеткой логике совершается за время $t_1 \approx 1000$ с, в то время как при использовании классического ПИ-регулятора понадобилось время $t_2 \approx 5500$ с.

В режиме «Н» автоматический регулятор мощности ВВЭР-1200 должен осуществлять астатическое поддержание нейтронной мощности в диапазоне от $3\,\%P_{\text{ном}}$ до $100\,\%P_{\text{ном}}$ с зоной нечувствительности к шумам не более $\pm 1\,\%P_{\text{ном}}$. Для имитации возникающих шумов от датчиков потока нейтронов в контур спроектированных САР был внесен генератор случайных сигналов, заданный блоком *Band-Limited White Noise*, который является квантователем непрерывного сигнала, представляющего белый шум и генерирующего нормально распределенные случайные числа, причем дисперсия сигнала шума при проведении моделирования равна $D(x) \approx 15000$, а математическое ожидание $M(x) \approx 0$. Полученные результаты представлены на рис. 14

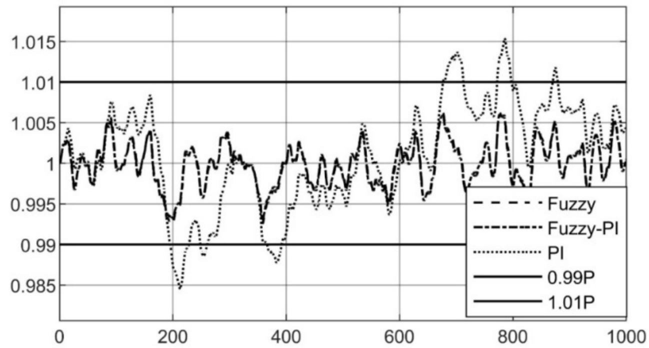


Рис. 14. Реакция САР мощности на возникающие шумы

Поведение среднеквадратичного отклонения ($\sqrt{D(x)}$) сигнала белого шума, а также среднего значения сигнала, полученного с использованием библиотеки *Statistics*, представлено на рис. 15.

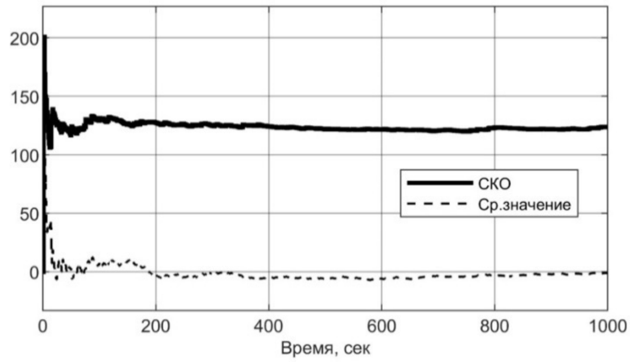


Рис. 15. Поведение среднеквадратичного отклонения (СКО) и среднего значения сигнала белого шума

Опираясь на данные рис. 14 можно сделать вывод, что смоделированные средствами MATLAB нечеткий и нечеткий ПИ-регуляторы успешно подавляют возникающий шум и не выходят за максимально установленные пределы, составляющие $\pm 1\,\%P_{\text{ном}}$ из-за использованных правил нечеткого вывода, в то время как для классического ПИ-регулятора может потребоваться перемещение ОР СУЗ для подавления возникающих шумов, что потенциально приводит к ускоренному износу исполнительного механизма.

ВЫВОДЫ

В данной работе были смоделированы нечеткий и нечеткий ПИ-регуляторы для контура системы автоматического регулирования мощности ядерной энергетической установки ВВЭР-1200. Во всех приведенных тестах: при скачкообразном изменении уставки оператора, при следовании за нагрузкой, а также при включении в контур САР шумов спроектированные регуляторы на нечеткой логике продемонстрировали лучшую производительность в сравнении с традиционным ПИ-регулятором. Также к их безусловному достоинству следует отнести возможность работать без необходимости перенастройки в диапазоне изменения мощности $10\,\%P_{\text{ном}} - 100\,\%P_{\text{ном}}$ без заметного ухудшения прямых показателей качества процесса управления.

Внедрение регуляторов на нечеткой логике в системах управления мощности реакторных установок может привести к улучшению их маневренных характеристик, снижению эксплуатационных рисков и повышению общей производительности АЭС. Способность таких регуляторов с нечеткой логикой управлять сложными и нелинейными системами, такими как ядерные реакторы, делает их многообещающей альтернативой традиционным методам управления и, в частности, «пропорционально-интегральному» закону управления, применяемому в настоящее время для маневренных режимов реакторов ВВЭР.

Однако, при всех неоспоримых преимуществах, важно отметить, что внедрение регуляторов на нечеткой логике на атомных электростанциях требует тщательного рассмотрения таких факторов, как системная интеграция, стандарты безопасности и соответствие нормативным требованиям. Поэтому необходимы дальнейшие исследования и испытания для проверки эффективности регуляторов на нечеткой логике в реальных условиях, например, на полномасштабных тренажерах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Belleni-Morante A*. The kinetic behaviour of a reactor composed of G loosely coupled cores: Integral formulation // Journal of Nuclear Energy. Parts A/B. Reactor Science and Technology, 1964. V. 18, Iss. 10. Pp. 547–559. https://doi.org/10.1016/0368-3230(64) 90139-9
2. *Пикина Г.А., Ле Ван Динь, Пащенко Ф.Ф.* Модели динамики реактора ВВЭР с мощностным коэффициентом реактивности // Вестник МЭИ, 2016. № 2. С. 75–83.
3. *Никулина Е.Н.* Математическое моделирование систем автоматического регулирования тепловой мощности реактора // Вестник Нац. техн. ун-та «ХПИ»: Сб. науч. тр. Темат. вып.: Системный анализ, управление и информационные технологии. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2009. № 4. С. 131–136.
4. *Anith Khairunnisa Ghazali, et al*. PID Controller for nuclear reactor power control system // International Journal of Pure and Applied Mathematics, 2018. V. 118. № 24.
5. *Jiang Y., Geslot B., Lamirand V., Leconte P.* Review of kinetic modulation experiments in low power nuclear reactors EPJ N //Nuclear Sciences & Technologies, 2020. V. 6. P. 55. https://doi.org/10.1051/epjn/ 2020017.
6. *Zarei M.* A physically based PID controller for the power maneuvering of nuclear reactors // Progress in Nuclear Energy, 2020. V. 127. 103431. https://doi.org/ 10.1016/j.pnucene.2020.103431.
7. *Абдулрахим К.К., Толоконский А.О., Лаидани З., Беррекси Р.* Оптимальное управление на основе линейно-квадратичного регулятора для управления ядерным реактором // Вестник НИЯУ МИФИ, 2021. Т. 10. № 5. С. 436–447. https://doi.org/ 10.1134/S2304487X21050023.
8. *Arab-Alibeik H., Setayeshi S.* Improved Temperature Control of a PWR Nuclear Reactor Using an LQG/LTR Based Controller // IEEE Transactions on Nuclear Science, 2003. V. 50. Pp. 211–218. https://doi.org/10.1109/TNS.2002.807860.
9. *Yan X., et al.* Robust power control design for a small, pressurized water reactor using an H infinity mixed sensitivity method // Nuclear Engineering and Technology, 2020. V. 52. Iss. 7. Pp. 1443–1451. https://doi.org/10.1016/j.net.2019.12.031.
10. *Vajpayee V., Mukhopadhyay S., Tiwari A.P.* Data-Driven Subspace Predictive Control of a Nuclear Reactor // IEEE Transactions on Nuclear Science, 2018. V. 65, № 2. Pp. 666–679. DOI: 10.1109/TNS.2017. 2785362.
11. *Calvillo C.F. et al.* Comparison of Model Based Predictive Control and Fuzzy Logic Control of a DFIG with an Indirect Matrix Converter // IECON 2012 – 38th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society. Montreal, QC, Canada, 2012. P. 6063–6068. DOI: 10.1109/IECON.2012.6389090.
12. *Zeng W., et al.* A functional variable universe fuzzy PID controller for load following operation of PWR with the multiple model // Annals of Nuclear Energy, 2020. V. 140. https://doi.org/10.1016/j.anucene. 2019.107174.
13. *Liu X, Wang M.* Nonlinear Fuzzy Model Predictive Control for a PWR Nuclear Power Plant // Mathematical Problems in Engineering, 2014. V. 2014. Article ID 908526, 10 p. https://doi.org/10.1155/2014/908526.
14. *Zeng W. et al.* Core power control of a space nuclear reactor based on a nonlinear model and fuzzy-PID controller // Progress in Nuclear Energy, 2021. V. 132. https://doi.org/10.1016/j.pnucene.2020.103564.
15. *Zeng W. et al*. A fuzzy-PID composite controller for core power control of liquid molten salt reactor // Annals of Nuclear Energy, 2020. V. 139. https://doi.org/ 10.1016/j.anucene.2019.107234.
16. *Acharya D., Rai A., Kumar Das D.* Optimal rule based fuzzy-PI controller for core power control of nuclear reactor // Annals of Nuclear Energy, 2023. V. 194. https://doi.org/10.1016/j.anucene.2023.110118.
17. *Zhang L., Xie H., Duan Q., Lu C., Li J., et al.* Power Level Control of Nuclear Power Plant Based on Asymptotical State Observer under Neutron Sensor Fault // Science and Technology of Nuclear Installations, 2021. V. 2021, Article ID 8833729, 8 p. https://doi.org/ 10.1155/2021/8833729.
18. *Щукин К.Ю.* Математическое моделирование процессов, протекающих при перемещении шагового привода // Вопросы электромеханики. Труды НПП ВНИИЭМ-2007. Т. 104. С. 70–76.
19. *Правосуд С.С., Маслаков Д.С., Якубов Я.О., Овчеренко А.А.* Верификация модели динамики ядерного реактора ВВЭР-1200, состоящей из одного топливного узла, примыкающего к двум узлам теплоносителя // Глобальная Ядерная Безопасность, 2023. Т. 48(3). С. 82–95. https://doi.org/10.26583/gns-2023-03-08.
20. *Беррекси Р., Толоконский А.О., Лаидани З., Абдулрахим К.К., Кудратов В.Н.* Применение нечеткой логики в системах реального времени на базе программно-технического комплекса УМИКОН // Вестник НИЯУ МИФИ, 2022. Т. 11. № 1. С. 68–79. https://doi.org/10.56304/S2304487X22010 059.
21. *Джарум Б., Соловьёв Д.А., Семенов А.А., Щукин Н.В., Выговский С.Б., Аль-Шамайлех А.И., Танаш Х.А.* Влияние температурного регулирования при работе ВВЭР-1000 и ВВЭР-1200 в режиме следования за нагрузкой // Вестник НИЯУ МИФИ, 2020. Т. 9. № 3. С. 201–209. https://doi.org/10.56304/S23044 87X 20030037.

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЧЕТКИХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ МОЩНОСТЬЮ ЯДЕРНОГО РЕАКТОРА ВВЭР-1200

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 2, pp. 97–109

AN APPLICATION OF FUZZY LOGIC CONTROLLERS FOR POWER CONTROL OF THE VVER-1200 NUCLEAR REACTOR

***S. Pravosud*[1,2*]*, D. Maslakov*[2]*, Ya. Yakubov*[2]**
[1]*Rosatom Technical Academy, Obninsk, 249031, Russia*
[2]*Seversk Tecnological Institute – a branch of the National Research Nuclear University MEPhI*
Seversk, 636036, Russia
**e-mail: ssepravosud@rosatom.ru*
**e-mail: sspravosud@mephi.ru*

Received December 11, 2023; revised February 18, 2024; accepted March 5, 2024

This article deals with fuzzy and fuzzy-PI controllers for the automatic power control system of a non-linear mathematical model of the VVER-1200 nuclear reactor. The power control systems loop includes a mathematical model of the electromagnetic stepper motor, a model of in-core and ex-core neutron flux sensors, and a refined mathematical model of the group 12 of control and protection system control rods, obtained by approximating experimental data using the Levenberg–Marquardt algorithm for nonlinear least-square problem. Based on the state-space model, 10 transfer function matrices of the nuclear reactor corresponding to the power range of 10 to 100 % of the nominal power were also determined, and 10 classical PI controllers were modelled to ensure stability margins of at least 60 degrees in phase and at least 10 decibels in amplitude for each power level of the plant. Simulation results show significant advantages of the developed fuzzy controllers both in the steady-state power maintenance mode considering noise in the neutron flux sensor channel, and in load-following mode at different power levels.

Keywords: automatic power regulation, fuzzy logic, fuzzy logic controller, fuzzy-PI controller, VVER-1200, transfer function, state space, robustness.

REFERENCES

1. *Belleni-Morante A*. The kinetic behaviour of a reactor composed of G loosely coupled cores: Integral formulation. Journal of Nuclear Energy. Parts A/B. Reactor Science and Technology, 1964. Vol. 18. Iss. 10. Pp. 547–559. https://doi.org/10.1016/0368-3230(64) 90139-9.

2. *Pikina G.A. Le Van Din, Pashchenko F.F.* Modeli dinamiki reaktora VVER s moshchnostnym koeffitsiyentom reaktivnosti [Mathematical models of VVER reactor with power reactivity coefficients]. Vestnik MEI, 2016. No. 2. Pp. 75– 83 (in Russian).

3. *Nikulina E.N.* Matematicheskoye modelirovaniye sistem avtomaticheskogo regulirovaniya teplovoy moshchnosti reaktora [Mathematical modelling of control systems of the heat power of a nuclear reactor]. Vestnik Nats. tekhn. un-ta «KhPI»: Sb. nauch. tr. Temat. vyp.: Sistemnyy analiz. upravleniye i informatsionnyye tekhnologii. Kharkov: NTU «KhPI», 2009. No. 4. Pp. 131–136 (in Russian).

4. *Anith Khairunnisa Ghazali et al.* PID Controller for nuclear reactor power control system, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 2018. Vol. 118. No. 24.

5. *Jiang Y., Geslot B., Lamirand V., Leconte P.* Review of kinetic modulation experiments in low power nuclear reactors EPJ N. Nuclear Sciences & Technologies, 2020. Vol. 6. P. 55. https://doi.org/10.1051/ epjn/2020017.

6. *Zarei M.* A physically based PID controller for the power maneuvering of nuclear reactors. Progress in Nuclear Energy, 2020. Vol. 127. 103431. https://doi.org/10.1016/j.pnucene.2020.103431.

7. *Abdulrahim K.K., Tolokonskiy A.O., Laidani Z., Berreksi R.* Optimal'noe upravlenie na osnove linejno-kvadratichnogo regulyatora dlya upravleniya yadernym reaktorom [Optimal Control Based on a Linear-Quadratic Regulator for Controlling a Nuclear Reactor]. Vestnik NIYaU MIFI, 2021. Vol. 10. No. 5. Pp. 436–447 (in Russian). https://doi.org/10.1134/S2304487X 21050023.

8. *Arab-Alibeik H., Setayeshi S.* Improved Temperature Control of a PWR Nuclear Reactor Using an LQG/LTR Based Controller. IEEE Transactions on Nuclear Science, 2003. Vol. 50. Pp. 211–218. https://doi.org/10.1109/TNS.2002.807860.

9. *Yan X., et al.* Robust power control design for a small, pressurized water reactor using an H infinity mixed sensitivity method. Nuclear Engineering and Technology, 2020. Vol. 52. Iss. 7. Pp. 1443–1451. https://doi.org/10.1016/j.net.2019.12.031.

10. *Vajpayee V., Mukhopadhyay S., Tiwari A.P.* Data-Driven Subspace Predictive Control of a Nuclear Re-

actor. IEEE Transactions on Nuclear Science, 2018. Vol. 65. No. 2. Pp. 666–679. DOI: 10.1109/TNS.2017. 2785362.

11. *Calvillo C.F. et al.* Comparison of Model Based Predictive Control and Fuzzy Logic Control of a DFIG with an Indirect Matrix Converter . IECON 2012 – 38th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society. Montreal, QC, Canada, 2012. Pp. 6063-6068. DOI: 10.1109/IECON.2012.6389090.

12. *Zeng W. et al.* A functional variable universe fuzzy PID controller for load following operation of PWR with the multiple model . Annals of Nuclear Energy, 2020. Vol. 140.
https://doi.org/10.1016/j.anucene. 2019.107174.

13. *Liu X, Wang M.* Nonlinear Fuzzy Model Predictive Control for a PWR Nuclear Power Plant. Mathematical Problems in Engineering, 2014. Vol. 2014. Article ID 908526. 10 p.
https://doi.org/10.1155/2014/ 908526.

14. *Zeng W., et al.* Core power control of a space nuclear reactor based on a nonlinear model and fuzzy-PID controller. Progress in Nuclear Energy, 2021. Vol. 132.
https://doi.org/10.1016/j.pnucene.2020. 103564.

15. *Zeng W., et al.* A fuzzy-PID composite controller for core power control of liquid molten salt reactor. Annals of Nuclear Energy, 2020. Vol. 139.
https://doi.org/10.1016/j.anucene.2019.107234.

16. *Acharya D., Rai A., Kumar Das D.* Optimal rule based fuzzy-PI controller for core power control of nuclear reactor. Annals of Nuclear Energy, 2023. Vol. 194. https://doi.org/10.1016/j.anucene.2023.110118.

17. *Zhang L., Xie H., Duan Q., Lu C., Li J., et al.* Power Level Control of Nuclear Power Plant Based on Asymptotical State Observer under Neutron Sensor Fault // Science and Technology of Nuclear Installations, 2021. Vol. 2021, Article ID 8833729, 8 p.
https://doi.org/ 10.1155/2021/8833729.

18. *Shchukin K.Yu.* Matematicheskoye modelirovaniye protsessov. protekayushchikh pri peremeshchenii shagovogo privoda [Mathematical modelling of the processes occurring when electromagnetic stepper motor is moved]. Voprosy elektromekhaniki. Trudy NPP VNIIEM-2007. No. 104. Pp. 70–77 (in Russian).

19. *Pravosud S.S., Maslakov D.S., Yakubov Y.O., Ovcherenko A.A.* Verifikaciya modeli dinamiki yadernogo reaktora VVER-1200, sostoyashchej iz odnogo toplivnogo uzla, primykayushchego k dvum uzlam teplonositelya [Verification of the WWER-1200 reactor dynamic model consisting of one-fuel unit adjacent to two coolant units]. Global Nuclear Safety, 2023. Vol. 48(3). Pp. 82–95 (in Russian).
https://doi.org/ 10.26583/gns-2023-03-08.

20. *Berreksi R., Tolokonskiy A.O., Laidani Z., Abdulrahim K.K., Kudratov V.N.* Primenenie nechetkoj logiki v sistemah real'nogo vremeni na baze programmno-tekhnicheskogo kompleksa UMIKON [Application of Fuzzy Logic in Real-Time Systems Based on the Umicon Software and Hardware Complex]. Vestnik NIYaU MIFI, 2022. Vol. 11. No.1. Pp. 68–79 (in Russian).
https://doi.org/10.56304/S2304487X22010059.

21. *Djaroum B., Solovyev D.A., Semenov A.A., Schukin N.V., Vygovsky S.B., Al-Shamayleh A.I., Tanash H.A.* Vliyanie temperaturnogo regulirovaniya pri rabote VVER-1000 i VVER-1200 v rezhime sledovaniya za nagruzkoj [Temperature Regulation Contribution during the Power Control of the VVER-1000 and VVER-1200 Reactors in a Load-Following Mode]. Vestnik NIYaU MIFI, 2020. Vol. 9. No. 3. Pp. 201–209 (in Russian). https://doi.org/10.56304/S2304487X20030037.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2024, т. 13, № 2, с. 110–114

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 517.925.7

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СЕМЕЙСТВА ТРЕХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ДИССИПАТИВНЫХ ПЯТИЭЛЕМЕНТНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

В.В. Цегельник
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, 220013, Беларусь
[*]*e-mail:* tsegvv@bsuir.by

Поступила в редакцию: 26.02.2024
После доработки: 26.02.2024
Принята к публикации: 05.03.2024

Объектом исследования является семейство трехмерных динамических пятиэлементных диссипативных систем с одной квадратичной нелинейностью, произвольным параметром A и параметром ε, $\varepsilon^2 = 1$. В системах указанного семейства параметр A входит как множитель при линейном элементе (системы первого класса), или как отдельный элемент-константа (системы второго класса). Характерной особенностью (с качественной точки зрения) данного семейства является наличие в нем систем, обладающих хаотическим поведением, в частности обладающих странными аттракторами. Целью исследования является определение характера подвижных особых точек решений указанного семейства. Для анализа решений систем рассматриваемого семейства использован тест Пенлеве, а также сведение систем к эквивалентным им уравнениям второго или третьего порядков и сравнение последних с известными нелинейными уравнениями P-типа. Решения систем первого класса не обладают свойством Пенлеве (несмотря на то, что компоненты решений некоторых из них вообще не имеют подвижных особых точек), или не удовлетворяют тесту Пенлеве. Аналогично, решения систем второго класса либо не удовлетворяют тесту Пенлеве, либо не обладают свойством Пенлеве, несмотря на то, что компоненты решений некоторых систем вообще не имеют подвижных особых точек. Наличие систем с хаотическим поведением среди рассматриваемых систем позволяет указать автономные дифференциальные уравнения третьего порядка с хаотическим поведением.

Ключевые слова: диссипативная система, хаотическое поведение, странный аттрактор, тест Пенлеве, P-свойство.
DOI: 10.26583/vestnik.2024.321
EDN QMNFMH

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] проведено качественное исследование семейства диссипативных трехмерных пятиэлементных динамических систем с одной квадратичной нелинейностью. В результате проведенного анализа были выделены системы без хаотического поведения, а также системы с хаотическим поведением, в частности системы, обладающие странными аттракторами.

Представляет интерес исследование аналитических свойств (в частности, характера подвижных особых точек решений) в предположении, что неизвестные функции и независимая переменная являются комплекснозначными.

Заметим, что система дифференциальных уравнений (или уравнение) является системой (уравнением) Пенлеве-типа, если подвижными (зависящими от начальных условий) особыми точками ее (его) общего решения могут быть только полюсы [2]. В данном случае говорят, что система (уравнение) является системой (уравнением) P-типа или обладает P-свойством решений.

ПЯТИЭЛЕМЕНТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И ОДНОЙ КОНСТАНТОЙ

Исследуем аналитические свойства решений (характер подвижных особых точек) систем

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon x + A,\ \ \dot{y} = z,\ \ \dot{z} = x; \tag{1}$$

$$\dot{x} = y^2 + z + A,\ \ \dot{y} = x,\ \ \dot{z} = \varepsilon x; \tag{2}$$

$$\dot{x} = yz + \varepsilon x + A,\ \ \dot{y} = x,\ \ \dot{z} = y; \tag{3}$$

$$\dot{x}=x^2+\varepsilon x+y,\ \ \dot{y}=A,\ \ \dot{z}=x; \tag{4}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+y+A,\ \ \dot{y}=xz,\ \ \dot{z}=y; \tag{5}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+z+A,\ \ \dot{y}=xz,\ \ \dot{z}=y; \tag{6}$$

$$\dot{x}=y^2+A,\ \ \dot{y}=x+z,\ \ \dot{z}=\varepsilon z; \tag{7}$$

$$\dot{x}=y^2+A,\ \ \dot{y}=z+\varepsilon y,\ \ \dot{z}=x; \tag{8}$$

$$\dot{x}=z^2+A,\ \ \dot{y}=x+\varepsilon y,\ \ \dot{z}=y; \tag{9}$$

$$\dot{x}=yz+A,\ \ \dot{y}=x+\varepsilon y,\ \ \dot{z}=x; \tag{10}$$

$$\dot{x}=yz+A,\ \ \dot{y}=x+\varepsilon y,\ \ \dot{z}=y; \tag{11}$$

$$\dot{x}=yz+A,\ \ \dot{y}=\varepsilon y+z,\ \ \dot{z}=x; \tag{12}$$

$$\dot{x}=z^2+\varepsilon x,\ \ \dot{y}=x+A,\ \ \dot{z}=y; \tag{13}$$

$$\dot{x}=z^2+y,\ \ \dot{y}=\varepsilon x+A,\ \ \dot{z}=x; \tag{14}$$

$$\dot{x}=yz+\varepsilon x,\ \ \dot{y}=x+A,\ \ \dot{z}=x; \tag{15}$$

$$\dot{x}=yz+\varepsilon x,\ \ \dot{y}=x+A,\ \ \dot{z}=y; \tag{16}$$

$$\dot{x}=yz+\varepsilon x,\ \ \dot{y}=x+A,\ \ \dot{z}=x; \tag{17}$$

$$\dot{x}=y^2+\varepsilon x,\ \ \dot{y}=x+z,\ \ \dot{z}=A; \tag{18}$$

$$\dot{x}=y^2+z,\ \ \dot{y}=x+\varepsilon y,\ \ \dot{z}=A; \tag{19}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+z,\ \ \dot{y}=x+A,\ \ \dot{z}=xy; \tag{20}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+z,\ \ \dot{y}=z+A,\ \ \dot{z}=xy \tag{21}$$

с неизвестными функциями x, y, z в предложении, что независимая переменная t является комплексной; $\varepsilon^2=1$, A – произвольный постоянный параметр. При $\varepsilon=-1$ каждая из систем (1)–(21) является диссипативной.

Теорема 1 [1]. Системы (5), (17), (20), (21) обладают в случае $\varepsilon=-1$ хаотическим поведением.

Теорема 2. При $\varepsilon=-1$ системы (17), (20) эквивалентны уравнению

$$\dddot{y}+\ddot{y}-y\dot{y}+Ay=0, \tag{22}$$

а системы (5), (21), соответственно, уравнениям

$$z\dddot{z}-\dot{z}\ddot{z}=-z\ddot{z}+z^2\dot{z}+Az^2, \tag{23}$$

$$y\dddot{y}-\dot{y}\ddot{y}=-y\ddot{y}+y^2\dot{y}-Ay^2. \tag{24}$$

Теорема 3. Ни одно из уравнений (22), (23), (24) не является уравнением Пенлеве-типа. Ни одна из систем (5), (17), (20), (21) не является системой Пенлеве-типа в случае $\varepsilon=-1$.

Теорема 4. Системы (3), (11) эквивалентны уравнению

$$\dddot{z}-\frac{1}{2}z^2-\varepsilon\dot{z}=At+c, \tag{25}$$

а системы (2), (7) – уравнению

$$\ddot{y}-y^2=Ce^{\varepsilon t}+A, \tag{26}$$

где C – произвольная постоянная.

Теорема 5. Системы (4), (15), (18), (19) эквивалентны, соответственно, уравнениям

$$\ddot{z}-\dot{z}^2-\varepsilon\dot{z}=At+C, \tag{27}$$

$$\ddot{z}-z^2-(At+C)z-\varepsilon\dot{z}=0, \tag{28}$$

$$\ddot{y}-y^2-\varepsilon\dot{y}=\varepsilon(At+C)+A, \tag{29}$$

$$\dot{y}-y^2-\varepsilon\dot{y}=At+C, \tag{30}$$

где C – произвольная постоянная.

Справедливость теорем 2–5 установлена в [1].

Теорема 6. Ни одно из уравнений (25)–(30) не является уравнением Пенлеве-типа.

Справедливость теоремы 6 следует из сравнения каждого из указанных уравнений с уравнениями Пенлеве-типа из [2].

Теорема 7. Общие решения ни одной из систем (2), (3), (4), (7), (11), (15), (18), (19) не обладают свойством Пенлеве.

Теорема 8 [1]. Системы (1), (2), (3) эквивалентны системам (13), (14), (16), соответственно.

Теорема 9 [1]. Системы (1), (8) эквивалентны уравнению

$$\dddot{y}=y^2+\varepsilon\ddot{y}+A, \tag{31}$$

система (9) – уравнению

$$\dddot{z}=z^2+\varepsilon\ddot{z}+A, \tag{32}$$

а система (12) – уравнению

$$\dddot{y}=\varepsilon\ddot{y}+y\dot{y}-\varepsilon y^2+A. \tag{33}$$

Теорема 10. Уравнения (31)–(33) не являются уравнениями Пенлеве-типа.

Доказательство следует из сравнения указанных уравнений с уравнениями Пенлеве-типа третьего порядка с полиноминальной правой частью из [3].

Замечание 1. Уравнение (32) получается из (31) заменой $y\to z$.

Следствием из теоремы 10 является следующая теорема.

Теорема 11. Общие решения ни одной из систем (1), (8), (9), (12), (14), (16) не обладают свойством Пенлеве.

Замечание 2. С помощью теста Пенлеве [4] выполнен анализ решения систем (5), (17), (20), (21).

ПЯТИЭЛЕМЕНТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И ЧЕТЫРЬМЯ ЛИНЕЙНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Системы указанного класса имеют вид

$$\dot{x}=y^2+\varepsilon x+Az,\quad \dot{y}=x,\quad \dot{z}=y; \tag{34}$$

$$\dot{x}=y^2+Ax+z,\quad \dot{y}=x,\quad \dot{z}=\varepsilon z; \tag{35}$$

$$\dot{x}=y^2+Ay+z,\quad \dot{y}=x,\quad \dot{z}=\varepsilon z; \tag{36}$$

$$\dot{x}=y^2+\varepsilon x+Ay,\quad \dot{y}=z,\quad \dot{z}=x; \tag{37}$$

$$\dot{x}=y^2+\varepsilon x+Az,\quad \dot{y}=z,\quad \dot{z}=x; \tag{38}$$

$$\dot{x}=yz+\varepsilon x+Ay,\quad \dot{y}=z,\quad \dot{z}=x; \tag{39}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+y+Az,\quad \dot{y}=x^2,\quad \dot{z}=x; \tag{40}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+y+Az,\quad \dot{y}=x^2,\quad \dot{z}=y; \tag{41}$$

$$\dot{x}=Ax+y+z,\quad \dot{y}=x^2,\quad \dot{z}=\varepsilon z; \tag{42}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+y+Az,\quad \dot{y}=z^2,\quad \dot{z}=x; \tag{43}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+y+Az,\quad \dot{y}=xz,\quad \dot{z}=y; \tag{44}$$

$$\dot{x}=y^2+\varepsilon x,\quad \dot{y}=x+Az,\quad \dot{z}=x; \tag{45}$$

$$\dot{x}=y^2+\varepsilon x,\quad \dot{y}=x+Az,\quad \dot{z}=y; \tag{46}$$

$$\dot{x}=y^2+Ax,\quad \dot{y}=x+z,\quad \dot{z}=\varepsilon z; \tag{47}$$

$$\dot{x}=y^2+\varepsilon x,\quad \dot{y}=Ay+z,\quad \dot{z}=x; \tag{48}$$

$$\dot{x}=y^2+Ay,\quad \dot{y}=x+z,\quad \dot{z}=\varepsilon z; \tag{49}$$

$$\dot{x}=y^2+Ay,\quad \dot{y}=\varepsilon y+z,\quad \dot{z}=x; \tag{50}$$

$$\dot{x}=y^2+Az,\quad \dot{y}=x+\varepsilon y,\quad \dot{z}=x; \tag{51}$$

$$\dot{x}=y^2+Az,\quad \dot{y}=x+\varepsilon y,\quad \dot{z}=y; \tag{52}$$

$$\dot{x}=y^2+z,\quad \dot{y}=x+Ay,\quad \dot{z}=\varepsilon z; \tag{53}$$

$$\dot{x}=y^2+Az,\quad \dot{y}=x+z,\quad \dot{z}=\varepsilon z; \tag{54}$$

$$\dot{x}=y^2+Az,\quad \dot{y}=\varepsilon y+z,\quad \dot{z}=x; \tag{55}$$

$$\dot{x}=z^2+Ax,\quad \dot{y}=x+\varepsilon y,\quad \dot{z}=y; \tag{56}$$

$$\dot{x}=z^2+x,\quad \dot{y}=x+Az,\quad \dot{z}=y; \tag{57}$$

$$\dot{x}=z^2+Ay,\quad \dot{y}=x+\varepsilon y,\quad \dot{z}=x; \tag{58}$$

$$\dot{x}=z^2+Ay,\quad \dot{y}=x+\varepsilon y,\quad \dot{z}=y; \tag{59}$$

$$\dot{x}=z^2+Ay,\quad \dot{y}=\varepsilon y+z,\quad \dot{z}=x; \tag{60}$$

$$\dot{x}=z^2+Az,\quad \dot{y}=x+\varepsilon y,\quad \dot{z}=y; \tag{61}$$

$$\dot{x}=yz+Ax,\quad \dot{y}=x+\varepsilon y,\quad \dot{z}=x; \tag{62}$$

$$\dot{x}=yz+\varepsilon x,\quad \dot{y}=x+Az,\quad \dot{z}=x; \tag{63}$$

$$\dot{x}=yz+\varepsilon x,\quad \dot{y}=x+Az,\quad \dot{z}=y; \tag{64}$$

$$\dot{x}=yz+Ax,\quad \dot{y}=\varepsilon y+z,\quad \dot{z}=x; \tag{65}$$

$$\dot{x}=yz+Ay,\quad \dot{y}=x+\varepsilon y,\quad \dot{z}=x; \tag{66}$$

$$\dot{x}=yz+Ay,\quad \dot{y}=\varepsilon y+z,\quad \dot{z}=x; \tag{67}$$

$$\dot{x}=yz+Az,\quad \dot{y}=x+\varepsilon y,\quad \dot{z}=x; \tag{68}$$

$$\dot{x}=yz+Az,\quad \dot{y}=x+\varepsilon y,\quad \dot{z}=y; \tag{69}$$

$$\dot{x}=yz+Az,\quad \dot{y}=\varepsilon y+z,\quad \dot{z}=x; \tag{70}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+Ay,\quad \dot{y}=x+z,\quad \dot{z}=x^2; \tag{71}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+y,\quad \dot{y}=Ay+z,\quad \dot{z}=x^2; \tag{72}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+Ay,\quad \dot{y}=x+z,\quad \dot{z}=y^2; \tag{73}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+Az,\quad \dot{y}=x+z,\quad \dot{z}=y^2; \tag{74}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+Ay,\quad \dot{y}=x+z,\quad \dot{z}=xy; \tag{75}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+y,\quad \dot{y}=Ay+z,\quad \dot{z}=xy; \tag{76}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+z,\quad \dot{y}=Ay+z,\quad \dot{z}=xy. \tag{77}$$

Системы (35), (42), (47), (48), (53), (56), (62), (65), (72), (76), (77) являются диссипативными, если $A+\varepsilon<0$. Остальные системы из данного списка являются таковыми, если $\varepsilon=-1$.

Теорема 12. Системы (35), (36), (42), (47), (49), (53), (54) не являются системами Пенлеве-типа. Вместе с тем, одна из компонент каждой из указанных систем вообще не имеет подвижных особых точек.

Доказательство. Третья компонента перечисленных выше систем имеет вид $z=Ce^{\varepsilon t}$, где C – произвольная постоянная. В силу этого указанные системы эквивалентны неавтономным уравнениям второго порядка [1]

$$\ddot{y}-y^2-A\dot{y}=Ce^{\varepsilon t}, \tag{78}$$

$$\ddot{y}-y^2-Ay=Ce^{\varepsilon t}, \tag{79}$$

$$\ddot{x}-x^2-Ax=\varepsilon Ce^{\varepsilon t}, \tag{80}$$

$$\ddot{y}-y^2-A\dot{y}=(\varepsilon A-A^2)Ce^{\varepsilon t}, \tag{81}$$

$$\ddot{y}-y^2-Ay=\varepsilon Ce^{\varepsilon t}, \tag{82}$$

$$\ddot{y}-y^2=(A+1)Ce^{\varepsilon t}, \tag{83}$$

$$\ddot{y}-y^2=(A+\varepsilon)Ce^{\varepsilon t}, \tag{84}$$

соответственно. Сравнение уравнений (78)–(84) с уравнениями из списка [2] показывает, что они не являются уравнениями Пенлеве-типа.

Используя тест Пенлеве [4], можно доказать следующую теорему.

Теорема 13. Системы (37), (38), (41), (43), (45), (48), (50), (56), (58)–(63), (65), (71)–(76) не являются системами Пенлеве-типа.

Проведен Пенлеве-анализ решений уравнения третьего порядка, отличного от уравнения $\dddot{u}=P(u,\dot{u},\ddot{u})$, где P – полином относительно $u,\dot{u},\ddot{u}$ с постоянными коэффициентами, которому эквивалентна система (66).

Система (40) эквивалентна системе

$$\ddot{x}=\varepsilon\dot{x}+x^2+Ax,\quad \dot{z}=x. \tag{85}$$

Теорема 14. Общее решение системы (40) не обладает свойством Пенлеве.

Доказательство следует из того, что общее решение первого уравнения системы (85), согласно [2], содержит подвижные критические особые точки.

С помощью теста Пенлеве [4] проведен анализ решений систем (34), (39), (52), (69), (70), демонстрирующих, согласно [1], хаотическое поведение.

Замечание 3. В [1] указаны системы из списка (34)–(77), которые эквивалентны системам, упомянутым в теоремах 12–14.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы аналитические свойства решений (характер подвижных особых точек) семейства трехмерных автономных пятиэлементных диссипативных систем с одной квадратичной нелинейностью. Характерной особенностью (с качественной точки зрения) данного семейства является наличие в нем систем, обладающих хаотическим поведением, в частности обладающих странными аттракторами. Установлено, что решения систем указанного семейства не обладают свойством Пенлеве (несмотря на то, что компоненты решений некоторых систем вообще не имеют подвижных особых точек), или не удовлетворяют тесту Пенлеве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zhang Fu, Heidel J.* Chaotic and nonchaotic behavior in thee-dimensional quadratic system: 5–1 dissipative cases // International Journal of Bifurcation and Chaos, 2012. V. 22. № 1. 1250010.

2. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ОНТИ, 1939.

3. *Cosgrove C.M.* Chazy classes IX–XI of third-order differential equations // Studies in Applied Mathematics, 2000. V. 104. № 3. Pp. 171–228.

4. *Грицук Е.В., Громак В.И.* К теории нелинейных систем дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве // Весцi НАН Беларусi. Серыя фiз.-мат. Навук, 2010. № 3. С. 25–30.

5. *Sprott J.C.* Some simple chaotic flows // Physical Review E, 1994. V. 50. P. R647–R650.

6. *Sprott J.C.* Simplest dissipative chaotic flow // Physics Letters A, 1997. V. 228. Pp. 271–274.

7. *Heidel J, Zhang Fu.* Nonchaotic behavior in three-dimensional quadratic systems // Nonlinearity, 1999. V. 10. Pp. 1289–1303.

8. *Heidel J, Zhang Fu.* Nonchaotic behavior in three-dimensional quadratic systems II: The conservative case // Nonlinearity, 1999. V. 12. Pp. 617–633.

9. *Цегельник В.В.* Пенлеве-анализ решений одного класса трехмерных нелинейных диссипативных систем // Вестник НИЯУ МИФИ, 2018. Т. 7. № 2. С. 133–137.

10. *Цегельник В.В.* Аналитические свойства решений трехмерных консервативных систем с двумя или четырьмя квадратичными нелинейностями // Вестник НИЯУ МИФИ, 2021. Т. 10. № 4. С. 295–301.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 2, pp. 110–114

ANALYTICAL PROPERTIES OF SOLUTIONS OF A FAMILY OF THREE-DIMENSIONAL DYNAMIC DISSIPATIVE FIVE-LEMENT SYSTEMS WITH ONE QUADRATIC NONLINEARITY

V.V. Tsegel'nik
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, 220013, Belarus

**e-mail:* tsegvv@bsuir.by

Received February 26, 2024; revised February 26, 2024; accepted March 05, 2024

The object of the study is a family of three-dimensional dynamic five-element dissipative systems with one quadratic nonlinearity, an arbitrary parameter A and a parameter ε, $\varepsilon^2 = 1$. In systems of the specified family, the parameter A is included as a multiplier with a linear element (systems of the first class), or as a separate constant element (systems of the second class). A characteristic feature (from a qualitative point of view) of this family is the presence in it of systems with chaotic behavior, in particular, with strange attractors. The purpose of the study is to determine the nature of the moving singular points of solutions of the specified family. To analyze solutions to systems of the family under consideration, the Painlevé test was used, as well as reducing the systems to equivalent second- or third-order equations and comparing the latter with known nonlinear P-type equations. Solutions of systems of the first class do not have the Painlevé property (despite the fact that the components of the solutions of some of them do not have moving singular points at all), or do not satisfy the Painlevé test. Similarly, solutions of systems of the second class either do not satisfy the Painlevé test or do not possess the Painlevé property, despite the fact that the components of the solutions of some systems do not have moving singular points at all. The presence of systems with chaotic behavior among the systems under consideration allows us to indicate autonomous third-order differential equations with chaotic behavior.

Key words: dissipative system, chaotic behavior, strange attractor, Painlevé test, P-property.

REFERENCE

1. *Zhang Fu, Heidel J.* Chaotic and nonchaotic behavior in thee-dimensional quadratic system: 5–1 dissipative cases. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2012. Vol .22. No.1. 1250010.

2. *Ince E.L.* Obiknovennye differetsial'nye uravneniya [Ordinary differential equations]. Kharkov, ONTI Publ. 1939. 720 p.

3. *Cosgrove C.M.* Chazy classes IX–XI of third-order differential equations. Studies in Applied Mathematics, 2000. Vol. 104. No. 3. Pp. 171–228.

4. *Gritsuk E.V., Gromak V.I.* K theorii nelineynykh differentsial'nykh uravnenii so svoistvom Penleve [On the theory of nonlinear differentsial equations with Painleve' property]. Izvestia NAN Belarusi. Seria fiz.-mat. nauk, 2010. No. 3. Pp. 25–30 (in Russian).

5. *Sprott J.C.* Some simple chaotic flows. Physical Review E, 1994. Vol. 50. Pp. R647–R650.

6. *Sprott J.C.* Simplest dissipative chaotic flow. Physics Letters A, 1997. Vol. 228. Pp. 271–274.

7. *Heidel J, Zhang Fu.* Nonchaotic behavior in three-dimensional quadratic systems. Nonlinearity, 1999. Vol. 10. Pp. 1289–1303.

8. *Heidel J., Zhang Fu.* Nonchaotic behavior in three-dimensional quadratic systems II: The conservative case. Nonlinearity, 1999. Vol. 12. Pp. 617–633.

9. *Tsegel'nik V.V.* Penleve analyz reshenii odnogo klassa trekhmernykh nelineinykh dissipativnykh system [Painleve' analysis of solutions for one class of three-dimensional nonlinear dissipative systems]. Vestnik NIYaU MIFI, 2018. Vol. 7. No. 2. Pp. 133–137 (in Russian).

10. *Tsegel'nik V.V.* Analiticheskie svoistva reshenii trekhmernykh konservativnykh system s dvumya ili chetyir'mya kvadratichnimi nelineinostyami [Analytical properties of solutions of three-dimensional conservative systems with two and four quadratic nonlinearities]. Vestnik NIYaU MIFI, 2021. Vol. 10. No. 4. Pp. 295–301 (in Russian).

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2024, т. 13, № 2, с. 115–120

АВТОМАТИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

УДК 681.89: 621.315.05:621.396

СИСТЕМА ШИРОКОПОЛОСНОЙ СВЯЗИ ДЛЯ СКРЫТНОЙ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

***Г.Я. Карапетьян*[1,2], *В.Ф. Катаев*[3,*], *Н.В. Ермолаева*[3,**]**

[1]*Лаборатория наноматериалов, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, 344090, Россия*

[2]*ООО «Сайгиват», Москва, 115191, Россия*

[3]*Волгодонский инженерно-технический институт – филиал Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», Волгодонск, Ростовская область, 347360, Россия*

**e-mail: kataev.v.f.@gmail.com*

***e-mail: ermolnv@mail.ru*

Поступила в редакцию: 26.02.2024
После доработки: 18.03.2024
Принята к публикации: 19.03.2024

В данной работе описывается система скрытной широкополосной связи с использованием линий задержки на поверхностных акустических волнах (ЛЗ на ПАВ). Рассчитан согласованный фильтр, состоящий из десяти линий задержки на ПАВ. Линии задержки состоят из однонаправленных приемопередающего и отражательного встречно-штыревых преобразователей (ВШП), имеющих полосу рабочих частот 2 МГц, расстояние между центральными частотами в 4 МГц, и работающих в диапазоне частот 905–941 МГц. На основе этих фильтров разработана система скрытной широкополосной связи, позволяющая получать на выходе сигнал в пять раз превышающий уровень шума. Максимальная задержка сигнала составляет 13 мкс, что в два раза больше задержки между ВШП. Расстояние между ВШП можно варьировать в зависимости от частоты ЛЗ. Задавая задержки в ЛЗ таким образом, чтобы суммарная задержка в ЛЗ с одинаковыми частотами всегда была одной и той же, можно создавать различные согласованные фильтры в одном и том же диапазоне частот.

Ключевые слова: встречно-штыревой преобразователь (ВШП), поверхностные акустические волны (ПАВ), линия задержки (ЛЗ), параметр S11.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.322

EDN QUYRJS

ВВЕДЕНИЕ

В технике цифровых систем связи термин «широкополосная система» используется в случае, когда ширина спектра передаваемого сигнала существенно превышает ширину спектра полезного сообщения. В этом случае произведение длительности сигнала T на его полосу частот B должно быть много больше единицы ($BT >> 1$). И чем больше это произведение, тем лучше, поскольку оно определяет, насколько больше корреляционный пик на выходе фильтра по сравнению с входным сигналом. Эта особенность обеспечивает ряд преимуществ широкополосной системы по сравнению с простой системой связи, таких как высокая скрытность и малая чувствительность к интерференционным помехам. Устройства на ПАВ нашли широкое применение в этой области, в частности для корреляционной обработки сигналов с большими значениями произведения длительности на ширину полосы, т.е. для согласованной фильтрации. Согласованный фильтр содержит либо фазокодомодулированный (ФКМ) встречно-штыревой преобразователь (ВШП), либо ВШП с линейно частотной модуляцией (ЛЧМ) [1–4]. Такие ВШП имеют полосу пропускания намного большую, а коэффициент отражения ПАВ от них значительно меньше, чем для немодулированного ВШП такой же длины. Это обусловлено тем, что в случае ФКМ ПАВ отраженные от ВШП волны складываются не в фазе, взаимно погашая друг друга, а в случае ЛЧМ ПАВ отражаются только от той части ВШП, где его период соответствует длине ПАВ, падающей на него, и число таких ВШП мало. От остальной большей части электродов ВШП ПАВ не отражаются, и их емкость шунтирует ВШП, что также уменьшает коэффициент отражения от такого

ВШП. Поэтому такие фильтры могут работать только на проход, т. е. должны иметь входной и выходной ВШП [5]. Обычно один из ВШП не имеет модуляции и содержит небольшое число электродов для получения полосы частот не менее полосы частот второго ВШП, который имеет ФКМ или ЛЧМ.

В предлагаемой работе приводится описание согласованного фильтра, основанного на использовании отражательных ВШП. Это позволяет увеличить задержку сигнала в фильтре в два раза при том же размере, что увеличивает параметр *BT* в два раза и позволяет увеличить во столько же раз отношение сигнал-шум. Такие системы могут быть применены для передачи управляющих команд для беспилотных летательных аппаратов (БПЛА), что затруднит их перехват и обнаружение.

ОПИСАНИЕ КОНСТРУКЦИИ

Основным элементом данной системы является согласованный фильтр на основе набора линий задержки (ЛЗ) на поверхностных акустических волнах (ПАВ) (рис. 1).

Каждая из десяти ЛЗ на ПАВ имеет свою центральную частоту и задержку и содержит однонаправленные с внутренними отражателями [6] приемопередающий встречно-штыревой преобразователь (ВШП) и отражательные ВШП. Все полосы пропускания каждой ЛЗ одинаковы и равны 2 МГц. Центральные частоты, соответственно, равны: 905, 909, 913, 917, 921, 925, 929, 933, 937, 941 МГц. Полоса пропускания каждой ЛЗ равна 2 МГц (рис. 2). Задержки также зависят от номера ЛЗ и выбираются от самой большой для самой низкочастотной линии до самой малой для самой высокочастотной ЛЗ для фильтра на рис. 1,*а*, а также от самой малой для самой низкочастотной до самой большой для самой высокочастотной на рис. 1,*б*. Расстояния между ВШП для каждой ЛЗ $n = 10$, $l_{\min} = 2{,}68$ мм, $\Delta l = 1.74$ мм применяются как:

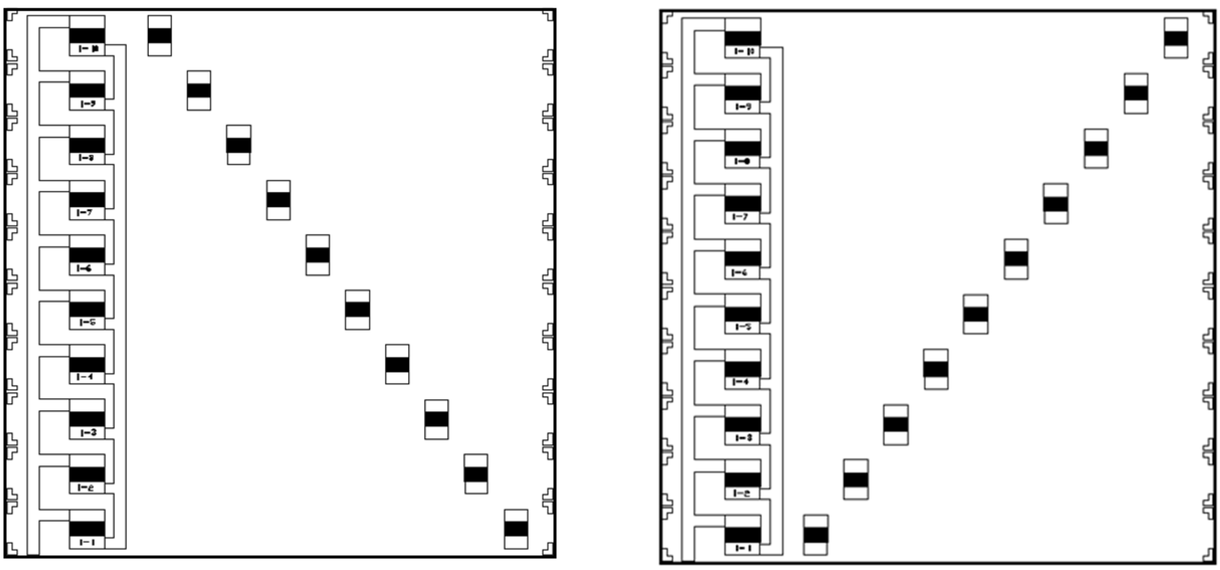
$$l_{n+1} = 2l_{\min} + 2n\Delta l \quad n = 1, 2, 3\ldots n-1$$

$$l_{n-1} = 2l_{\min} + 2\cdot 9\Delta l - 2n\Delta l,$$

$$l_{n+1} + l_{n-1} = 4\cdot l_{\min} + 2\cdot 9\Delta l, \qquad (1)$$

$$l_{n+1} + l_n = 4\cdot 2.68 + 18\cdot 1.74 = 42.04 \text{ мм}. \qquad (2)$$

В каждой ЛЗ приемопередающий ВШП пронумерован от 1–1 до 1–10. Множитель 2 отражает тот факт, что ПАВ проходит расстояние между ВШП дважды: сначала доходит до отражательного ВШП, а затем отражается обратно на приемо-передающий ВШП. Число одноволновых секций во всех приемопередающих ВШП равно 90, которые располагаются через четыре длины ПАВ на центральной частоте ЛЗ друг от друга так, что общая длина ВШП равна 360 длин ПАВ на центральной частоте. Отражательные ВШП содержат по 120 одноволновых секций, имеют общую длину в 240 длин ПАВ на центральной частоте каждой ЛЗ, которые выполнены на подложках 112° *YX* среза танталата лития.



а *б*

Рис. 1. Топология согласованных фильтров: *а* – фильтр на выходе передатчика; *б* – фильтр на входе приемника

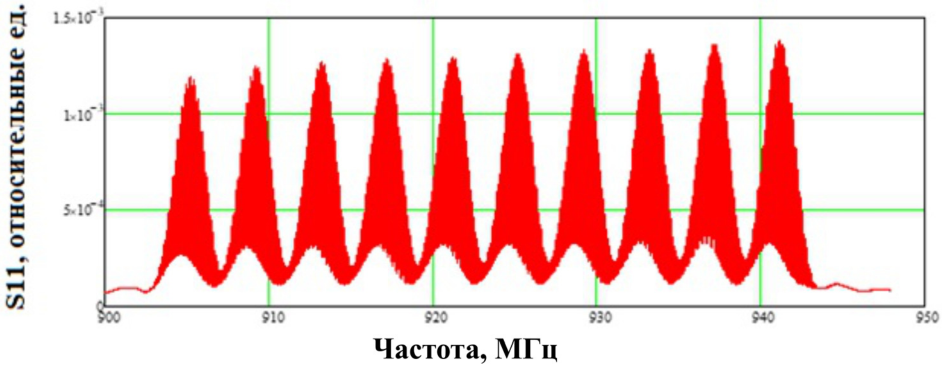


Рис. 2. Частотная зависимость параметра S11 ЛЗ по рис. 1,*а*

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Как видно из рис. 1, все входные встречно-штыревые преобразователи соединены параллельно. Если подать на них непрерывный сигнал с меняющейся частотой, то приемопередающие ВШП каждой ЛЗ возбудят ПАВ, которые, дойдя до отражательного ВШ, отразятся назад к приемопередающему ВШП, что приведет к изрезанности частотной зависимости параметра S11 ЛЗ в области их рабочих частот (см. рис. 2). Фурье-преобразование этой частотной зависимости дает последовательности импульсов во временной области (рис. 3).

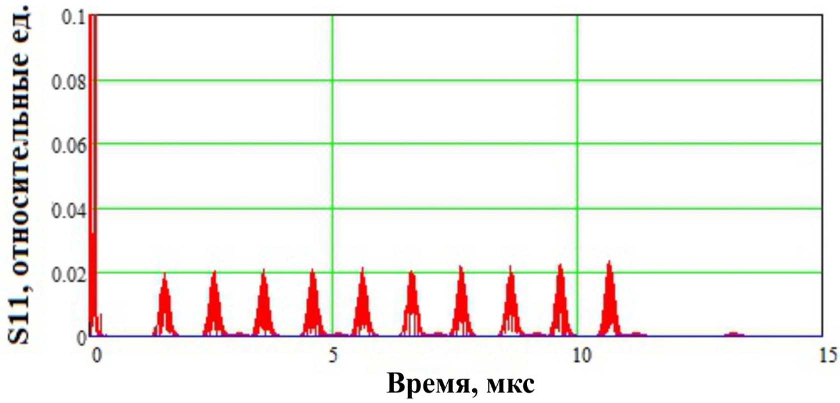


Рис. 3. Временная зависимость параметра S11 ЛЗ по рис. 1*а*

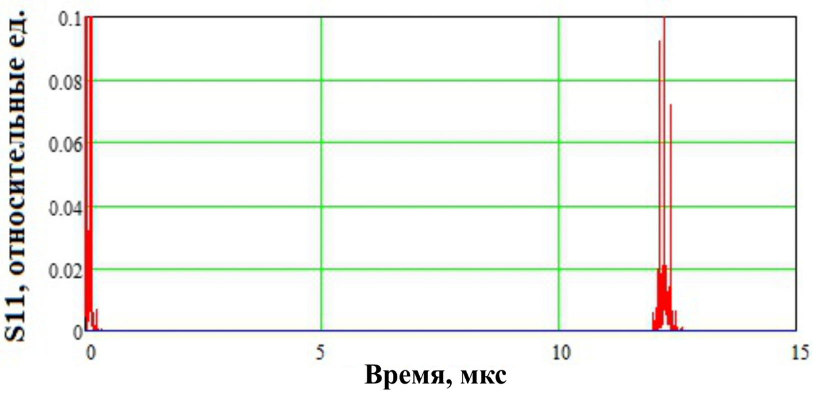


Рис. 4. Сигнал свертки после прохождения фильтров (*а*) и (*б*) по рис. 1 без учета шумов

Если этот сигнал (см. рис. 2) подать на ЛЗ, показанную на рис. 1,*б*, то все расстояния, который пройдут ПАВ в каждой ЛЗ окажутся одинаковыми и будут определятся по формуле (2), так как сумма расстояний, пройденных ПАВ в ЛЗ по рис. 1,*а* и ЛЗ по рис. 1,*б* окажутся одинаковыми. Это означат, что все сигналы в итоге придут на приемо-передающие ВШП ЛЗ по рис. 1,*б* одновременно, что приведет к появлению корреляционного пика (как показано на рис. 4) с амплитудой в 5 раз больше, чем амплитуда последовательности импульсов, представленных на рис. 3. Если в канале связи будет шум, который по амплитуде равен амплитуде импульсов на выходе согласованного фильтра (см. рис. 1,*а*), то эти импульсы не будет видно (рис. 5, 7). Но если этот сигнал попадет на согласованный фильтр по рис. 1,*б*, то его параметр *S11* во временной области будет выглядеть, как показано на рис. 6, т.е. будет выделен полезный сигнал, не смотря на то, что исходные сигналы не превышали уровень шума.

Таким образом, блок-схема системы скрытной связи будет выглядеть, как показано на рис. 8.

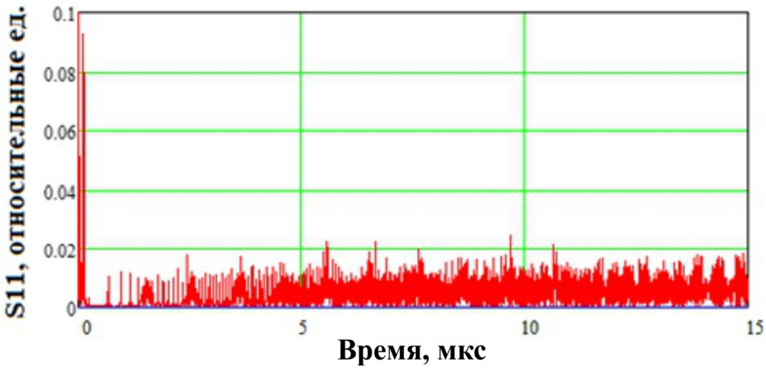


Рис. 5. Сигнал на входе приемника с учетом шумов

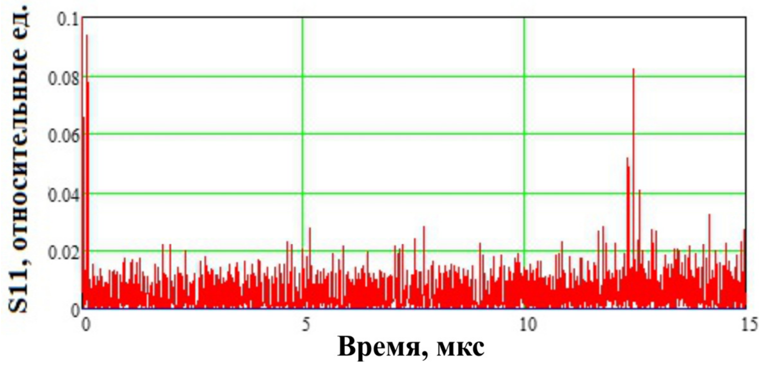


Рис. 6. Сигнал на выходе приемника с учетом шумов

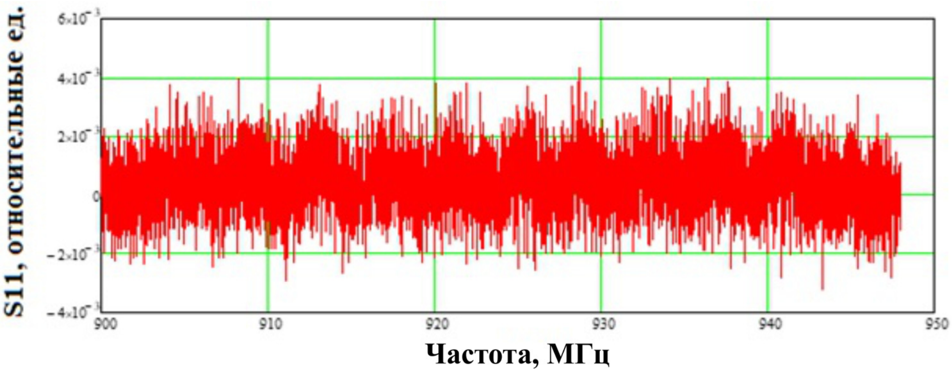


Рис. 7. Сигнал на входе приемника в частотной области

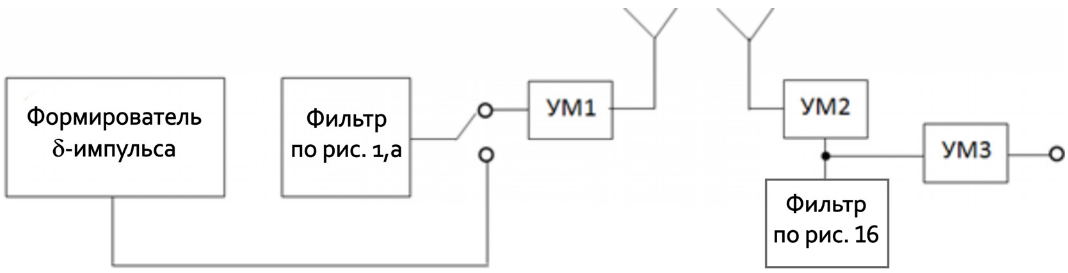


Рис. 8. Блок схема системы скрытной связи

ОПИСАНИЕ РАБОТЫ СИСТЕМЫ

Система работает следующим образом (см. рис. 8). Под действием δ-импульса ВШП приемопередающие ВШП фильтра (см. рис. 1,*а*) возбуждают импульсы ПАВ, которые, отражаясь от отражательных ВШП, снова попадают на приемопередающие ВШП. За время, когда ни один из отраженных импульсов не достиг приемопередающего ВШП, переключатель подсоединяет эти ВШП к антенне через усилитель мощности (УМ) УМ-1, и в эфир идет последовательность импульсов (см. рис. 1,*а*). Если подобрать амплитуды импульсов таким образом, чтобы они были ниже уровня шума, то этих импульсов не будет видно, и их невозможно будет обнаружить (см. рис. 5). Когда сигнал от передатчика попадет на фильтр (см. рис. 1,*б*) через усилитель мощности УМ-2, то, как было описано ранее, все импульсы придут на приемопередающие ВШП одновременно, что вызовет появление корреляционного пика, который по амплитуде будет больше уровня шума и не попадет в антенну благодаря УМ-2. На выходе УМ-3 передаваемый сигнал можно будет легко обнаружить. Скорость ПАВ в танталате лития составляет 3300 м/с, поэтому длительность последовательности импульсов будет соответствовать 13 мкс. Таким образом, можно передавать последовательность импульсов через каждые 26 мкс. Если будет появляться корреляционный пик, это будет соответствовать единице (1). Если сделать аналогичный фильтр по рис. 1, но в другом диапазоне, который не перекрывается с данным частотным диапазоном, импульсы, соответствующие нулю (0), можно передавать в промежутке между импульсами, соответствующими единице (1). Таким образом, будет получен двоичный код различных команд, который будет скрыт под шумами и не сможет быть обнаружен, в результате перехват управления БПЛА не будет возможен.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, разработана система скрытной широкополосной связи с полосой пропускания 36 МГц, в которой получено превышение полезного сигнала (корреляционного пика) над шумами в пять раз. Максимальная задержка сигнала составила 13 мкс, что в два раза больше задержки между ВШП. Важно также отметить, что расстояния между ВШП могут меняться в зависимости от частоты ЛЗ, не обязательно последовательно увеличиваясь или уменьшаясь с повышением рабочих частот ЛЗ. Можно задавать задержки в ЛЗ таким образом, чтобы суммарная задержка в ЛЗ с одинаковыми частотами всегда была одна и та же. Это позволит создавать различные согласованные фильтры в одном и том же диапазоне частот.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морган Д.* Устройства обработки сигналов на поверхностных акустических волнах. М.: Радио и связь, 1991. 415 с.

2. *Morgan D.* Surface Acoustic Wave Filters: With Applications to Electronic Communications and Signal Processing. Academic Press is an imprint of Elsevier, 2007. 429 p.

3. *Карапетьян Г.Я., Катаев В.Ф., Днепровский В.Г., Ермолаева Н.В.* Устройство считывания изображений на поверхностных акустических волнах с помощью веерных встречно-штыревых преобразователей на подложке из сульфида кадмия // Вестник НИЯУ МИФИ, 2016. Т. 5. № 2. С. 110–115.

4. *Кислицын В.О., Середин Б.М., Карапетьян Г.Я., Катаев В.Ф., Ермолаева Н.В.* Исследование радиочастотных идентификационных меток на поверхностных акустических волнах // Вестник НИЯУ МИФИ, 2023. Т. 12, № 2. С. 120–130.

5. *Кислицын В.О., Карапетьян Г.Я., Катаев В.Ф., Середин Б.М., Ермолаева Н.В.* Датчик температуры на поверхностных акустических волнах на основе линии задержки и резонатора // Вестник НИЯУ МИФИ, 2022. Т. 11. № 6. С. 450–456.

6. *Багдасарян Н.А., Багдасарян С.А., Карапетьян Г.Я.* Однонаправленный преобразователь поверхностных акустических волн. Патент РФ № 2195069, опубл. 20.12.2002.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 2, pp. 115–120

BROADBAND COMMUNICATION SYSTEM FOR COVERT TRANSMISSION OF INFORMATION

G.Ya. Karapetyan[1,2]***, V.F. Kataev***[3,*] ***, N.V. Ermolaeva***[3,**]

[1]Southern Federal University, Rostov-on-Don,344090, Russia
[2]LLC «SAIGIVAT», Moscow, 115191, Russia
[3]Volgodonsk Engineering Technical Institute the branch of National Research Nuclear University «MEPhI», Volgodonsk, Rostov region, 347360, Russia

**e-mail: kataev.v.f.@gmail.com*
***e-mail: ermolnv@mail.ru*

Received February 26, 2024; revised March 18, 2024; accepted March 19, 2024

This paper describes a covert broadband communication system using surface acoustic wave delay lines (SAW delay lines). A matched filter consisting of ten SAW delay lines is designed. The delay lines consist of unidirectional transmit-receive and reflective interdigital converters (IDCs), having an operating frequency band of 2 MHz, a distance between central frequencies of 4 MHz, and operating in the frequency range 905 – 941 MHz. Based on these filters, a covert broadband communication system has been developed, which makes it possible to obtain an output signal 5 times higher than the noise level. The maximum signal delay is 13 μs, which is twice the delay between IDTs. The distance between the IDTs can be varied depending on the LS frequency. By setting delays in the LP in such a way that the total delay in the LP with the same frequencies is always the same, it is possible to create different matched filters in the same frequency range.

Keywords: Inter-digital transducer, surface acoustic waves, delay line, parameter S11.

REFERENCES

1. *Morgan D.* Ustrojstva obrabotki signalov na poverhnostnyh akusticheskih volnah [Signal processing devices based on surface acoustic waves]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1991. 415 p.

2. *Morgan D.* Surface Acoustic Wave Filters With Applications to Electronic Communications and Signal Processing Academic Press is an imprint of Elsevier, 2007. 429 p.

3. *Karapet'yan G.YA., Kataev V.F., Dneprovskij V.G., Ermolaeva N.V.* Ustrojstvo schityvaniya izobrazhenij na poverhnostnyh akusticheskih volnah s pomoshch'yu veernyh vstrechno-shtyrevyh preobrazovatelej na podlozhke iz sul'fida kadmiya [Surface acoustic wave image reader using fan-shaped interdigital transducers on a cadmium sulfide substrate]. Vestnik NIYaU MIFI, 2016. Vol. 5. No. 2. Pp. 110–115 (in Russian).

4. *Kislicyn V.O.,Seredin B.M., Karapet'yan G.YA., Kataev V.F., Ermolaeva N.V.* Issledovanie radiochastotnyh identifikacionnyh metok na poverhnostnyh akusticheskih volnah [Study of radio frequency identification tags on surface acoustic waves] // Vestnik NIYaU MIFI, 2023. Vol. 12. No. 2. Pp. 120–130 (in Russian).

5. *Kislicyn V.O., Karapet'yan G.YA., Kataev V.F., Seredin B.M., Ermolaeva N.V.* Datchik temperatury na poverhnostnyh akusticheskih volnah na osnove linii zaderzhki i rezonatora [Surface acoustic wave temperature sensor based on a delay line and a resonator]. Vestnik NIYaU MIFI, 2022. Vol. 11. No. 6. Pp. 450–456 (in Russian).

6. *Bagdasaryan N.A., Bagdasaryan S.A., Karapetyan G.Ya.* Odnonapravlennyj preobrazovatel' poverhnostnyh akusticheskih voln. [Unidirectional transducer of surface acoustic waves]. Patent RF. No. 2195069, 2002.