

<https://vestnikmephi.elpub.ru>

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ»



Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ»

Том 13 № 4 2024 ИЮЛЬ - АВГУСТ

Основан в июле 2012 г.

Выходит 6 раз в год

ISSN: 2304-487X

ПИ № ФС 77 - 41948

Главный редактор

М.Н. Стриханов

Редакционная коллегия:

А.В. Аксёнов, Pavel Bedrikovetsky,
С.Г. Гаранин, Vladimir S. Gerjikov, Н.Н. Евтихийев,
Yalchin Efendiev, Alexei I. Zhurov, Н.П. Калашников, Н.И. Каргин, С.А. Кащенко,
Н.А. Кудряшов (*заместитель главного редактора*),
Raytcho Lazarov, О.В. Нагорнов, А.Д. Полянин,
В.В. Цегельник, Б.Н. Четверушкин,
М.А. Чмыхов (*ответственный секретарь*), William E. Schiesser

Выпускающий редактор: Н.В. Ермолаева

Адрес редакции: 115409, Москва, Каширское ш., 31,
Вестник НИЯУ МИФИ

Интернет: <https://vestnikmephi.elpub.ru>

Электронная почта: vestnik@mephi.ru

**Москва
НИЯУ МИФИ**

СОДЕРЖАНИЕ

Том 13, № 4, 2024

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

- Разработка метода детектирования изотопологов молекулярного йода в газах в реальном масштабе времени на основе лазерной флуоресценции, возбуждаемой лазерами на парах меди
С. В. Киреев, С. В. Суганев 199
- Исследование энергетических уровней крамеровско-вырожденной системы $^{14}\text{NV-}^{13}\text{C}$ в магнитном и электрическом поле
А.Т. Салказанов, С.С. Вергелес, А.С. Гусев, М.М. Калошин, Н.С. Кукин, Р.Е. Маргушин, Н.И. Каргин, А.П. Низовцев 204

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

- Неклассические и скрытые симметрии нелинейных алгебраических уравнений и систем
А.Д. Полянин, И.К. Шингарева 211
- Об одной нелинейной конечно-разностной схеме с лимитером для численного моделирования процессов переноса излучения
В.В. Завьялов 221
- Представление течений вязкого теплопроводного газа тригонометрическими рядами
С.П. Баутин, А.Г. Обухов 232
- Разработка математических моделей классификации кредитных организаций с использованием деревьев решений и их ансамблей
Е.П. Акишина, В.В. Иванов, А.В. Крянев, А.С. Приказчикова 242
- Точные решения нелинейных уравнений переноса с пропорциональным запаздыванием
В.Г. Сорокин 251

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

- Генеративные алгоритмы в информационных войнах
А.Д. Вуйкович 263

ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА

- Взаимодействие хромового покрытия с оболочкой твэла из стали ЭП823-III в диапазоне температур 420–650 °C
Р.Ш. Исаев, П.С. Джумаев 273

Contents

Volume 13 Number 4, 2024

THEORETICAL AND EXPERIMENTAL PHYSICS

- Development of the method for online molecular iodine isotopologue detection in gaseous media on the basis of laser fluorescence excited by copper vapor lasers**
S.V. Kireev, S.V. Suganeev 199
- Investigation of the energy levels of the kramers degenerate $^{14}\text{NV}-^{13}\text{C}$ system in a magnetic and electric field**
A.T. Salkazanov, S.S. Vergeles, A.S. Gusev, M.M. Kaloshin, N.S. Kukin, R.E. Margushin, N.I. Kargin, A.P. Nizovtsev 204
-

MATHEMATICAL MODELS AND NUMERICAL METHODS

- Non-classical and hidden symmetries of nonlinear algebraic equations and systems**
A.D. Polyanin, I.K. Shingareva 211
- A nonlinear finite-difference scheme with a limiter for radiation transport simulation**
V.V. Zavyalov 221
- Representation of viscous heat-conducting gas flows trigonometric series**
S.P. Bautin, A.G. Obukhov 232
- Mathematical models development for credit institutions classification using decision trees and their ensembles**
E.P. Akishina, V.V. Ivanov, A.V. Kryanev, A.S. Prikazchikova 242
- Exact solutions of nonlinear transport equations with proportional delay**
V.G. Sorokin 251
-

APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

- Generative algorithms in information warfare**
A.D. Vuykovich 263
-

CONDENSED MATTER PHYSICS

- Interaction of chrome coating with cladding made of EP823-SH steel in the temperature range 420–650 °C**
R.Sh. Isayev, P.S. Dzhumayev 273

УДК 538.958

**РАЗРАБОТКА МЕТОДА ДЕТЕКТИРОВАНИЯ ИЗОТОПОЛОГОВ
МОЛЕКУЛЯРНОГО ЙОДА В ГАЗАХ
В РЕАЛЬНОМ МАСШТАБЕ ВРЕМЕНИ
НА ОСНОВЕ ЛАЗЕРНОЙ ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ,
ВОЗБУЖДАЕМОЙ ЛАЗЕРАМИ НА ПАРАХ МЕДИ**

С.В. Киреев^{1,*}, С.В. Суганев^{2,}**

¹Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

²Акционерное общество «Концерн воздушно-космической обороны «Алмаз-Антей»,
Москва, 121357, Россия

*e-mail: svkireyev@mephi.ru,

**e-mail: kvestor90@mail.ru

Поступила в редакцию: 02.06.2024

После доработки: 02.06.2024

Принята к публикации: 11.06.2024

Сообщается о разработке метода одновременного селективного детектирования изотопологов молекулярного йода $^{127}\text{I}_2$, $^{127}\text{I}^{129}\text{I}$ и $^{129}\text{I}_2$ в газовых средах, характерных для предприятий ядерного топливного цикла и атмосферы. Предлагаемый метод относится к методам лазерно-флуоресцентной спектроскопии и заключается в анализе спектров флуоресценции смеси изотопологов молекулярного йода. Метод предусматривает регистрацию интенсивностей флуоресценции на предварительно рассчитанных длинах волн. В качестве источника возбуждения флуоресценции предлагаются лазеры на парах меди, излучающие на длинах волн 510.6 и 578.2 нм. Метод позволяет осуществлять высокочувствительный мониторинг изотопологов молекулярного йода (в том числе радиоактивного $^{129}\text{I}_2$) в реальном масштабе времени в технологических средах, образующихся в процессах переработки отработавшего ядерного топлива, в газовых выбросах радиохимических предприятий и в атмосферном воздухе.

Ключевые слова: лазеры на парах меди, изотопологи молекулярного йода, молекулярная спектроскопия, лазерно-индуцированная флуоресценция, экологический мониторинг, методы селективного детектирования.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.345

EDN AMQDCQ

В связи с активно развивающейся деятельностью предприятий ядерного топливного цикла (ЯТЦ) актуальность набирают задачи, позволяющие повысить контроль за процессами, происходящими на данных предприятиях, а также контроль выбросов радиоактивных продуктов переработки отработавшего ядерного топлива (ОЯТ) в атмосферу. В число наиболее химически активных веществ, образующихся в результате таких процессов, входят изотопологи молекулярного йода $^{127}\text{I}_2$, $^{127}\text{I}^{129}\text{I}$ и $^{129}\text{I}_2$.

Известно достаточно большое количество разнообразных способов детектирования молекулярного йода в газовых средах (например, [1–12]). Одними из наиболее перспективных из них являются способы, основанные на лазерно-возбуждаемой флуоресценции, основными пре-

имуществами которых являются высокая чувствительность, селективность, а также возможность проведения измерений в реальном масштабе времени [9–12].

Наличие большого количества линий поглощения у каждого из вышеперечисленных изотопологов (что показано в работах [12, 13]) позволило нам предположить и подтвердить перспективность применения лазеров на парах меди, излучающих в видимой области спектра на длинах волн 510.6 и 578.2 нм для высокочувствительного детектирования изотопологов молекулярного йода.

В отличие от ранее рассмотренных лазеров [11, 12, 14], лазер на парах меди отличается стабильностью длины волны излучения. Для применения данного лазера при селективном детек-

РАЗРАБОТКА МЕТОДА ДЕТЕКТИРОВАНИЯ ИЗОТОПОЛОВОГ МОЛЕКУЛЯРНОГО ЙОДА В ГАЗАХ
В РЕАЛЬНОМ МАСШТАБЕ ВРЕМЕНИ НА ОСНОВЕ ЛАЗЕРНОЙ ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ,
ВОЗБУЖДАЕМОЙ ЛАЗЕРАМИ НА ПАРАХ МЕДИ

тировании изотопологов молекулярного йода, находящихся в газовой смеси, необходимо создание методов проведения измерений, опирающихся на данные, полученные при детектировании излучения флуоресценции на одной, фиксированной длине волны. При этом селективность детектирования различных изотопологов может быть обеспечена за счет регистрации интенсивностей отдельных спектрально-разрешенных линий флуоресценции.

Предлагаемый метод детектирования заключается в следующем.

Пусть n_7 , n_{79} и n_9 – концентрации $^{127}\text{I}_2$, $^{127}\text{I}^{129}\text{I}$ и $^{129}\text{I}_2$ в анализируемой газовой смеси, соответственно.

Вводятся коэффициенты α_i^{77} , α_i^{79} и α_i^{99} ($i = 1, 2, 3$) – относительные интенсивности флуоресценции изотопологов $^{127}\text{I}_2$, $^{127}\text{I}^{129}\text{I}$ и $^{129}\text{I}_2$ на трех длинах волн λ_1 , λ_2 и λ_3 при их одинаковых концентрациях. Значения α заранее известны из расчетных результатов идентификации экспериментально зарегистрированных линий спектров флуоресценции смеси изотопологов при пересчете интенсивностей этих линий на одинаковые концентрации $^{127}\text{I}_2$, $^{127}\text{I}^{129}\text{I}$ и $^{129}\text{I}_2$.

Проводится калибровка регистрируемой интенсивности флуоресценции с помощью реперной ячейки, содержащей один из изотопологов йода с известной концентрацией. Если, например, реперная ячейка содержит $^{127}\text{I}_2$ с концентрацией n_7^0 и регистрируется интенсивность флуоресценции F_0 , то при измерении определяется калибровочный коэффициент $k = n_7^0/F_0$.

Решается система уравнений (1–3):

$$\alpha_1^{77} n_7 + \alpha_1^{79} n_{79} + \alpha_1^{99} n_9 = k F_1 \pm k \Delta F_1, \quad (1)$$

$$\alpha_2^{77} n_7 + \alpha_2^{79} n_{79} + \alpha_2^{99} n_9 = k F_2 \pm k \Delta F_2, \quad (2)$$

$$\alpha_3^{77} n_7 + \alpha_3^{79} n_{79} + \alpha_3^{99} n_9 = k F_3 \pm k \Delta F_3, \quad (3)$$

где $F_i = k F_i'$, F_i' – регистрируемые интенсивности флуоресценции на длинах волн λ_1 и λ_2 , а ΔF_i – их экспериментальные погрешности.

Следует отметить, что для атмосферного воздуха характерна не трехкомпонентная, а двухкомпонентная среда – содержание изотополога $^{129}\text{I}_2$ в таких средах пренебрежительно мало. В таком случае необходимые измерения можно проводить на двух длинах волн, и решать

систему из двух уравнений, аналогичных выше представленным формулам.

Погрешности ΔF_i проведения измерения в данном методе определяются погрешностями измерительной установки, разбросом интенсивности лазерного излучения (в экспериментальных схемах, где используется модуляционная методика измерений и обеспечивается наилучшая чувствительность, основным шумовым источником являются флуктуации лазерного излучения), а также взаимным влиянием флуоресценции изотопологов друг на друга.

С целью уменьшения погрешностей проводимых измерений необходимо выбирать длины волн флуоресценции, на которых проводятся измерения такими, чтоб линии флуоресценции различных изотопологов в наибольшей степени не перекрывались между собой.

Моделирование и экспериментальная проверка (методика проведения расчетов и экспериментальных исследований подробно описана, например, в [15]) спектров флуоресценции изотопологов молекулярного йода позволили предложить оптимальные с точки зрения чувствительности и минимизации погрешностей длины волн для регистрации флуоресцентного излучения. При этом флуоресценция изотополога $^{129}\text{I}_2$ при возбуждении на длине волны 510.6 нм оказалась значительно слабее, что может быть использовано как дополнительный селективный признак при детектировании в трехкомпонентных газовых средах. Предлагаемые длины волн и соответствующие им коэффициенты α приведены в табл. 1 и 2.

Сравнение полученных в настоящей работе результатов с результатами работ [11, 12–14], в которых использовались лазеры, излучающие в красном спектральном диапазоне, и перестраиваемые полупроводниковые лазеры показывает, что при использовании одинаковых экспериментальных схем возбуждения и детектирования флуоресценции отношение «сигнал/шум» в случае применения лазера на парах меди приблизительно на полтора-два порядка больше. Это приводит к такому же улучшению чувствительности детектирования изотопологов молекулярного йода при возбуждении их флуоресценции излучением лазера на парах меди, которая составляет порядка 10^8 – 10^9 см⁻³. Чувствительность детектирования молекулярного йода при возбуждении флуоресценции на разных длинах волн лазера на парах меди оказалась примерно одинаковой.

Таблица 1. Значения длин волн λ_1 , λ_2 и λ_3 и соответствующие им значения α при возбуждении флуоресценции на длине волны 578.2 нм

Длина волны, нм	α^{79}	α^{77}	α^{99}
$\lambda_1 = 632.037$ $\lambda_3 = 631.014$	— —	0.11 $1.0 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$ 0.9
$\lambda_1 = 666.11$ $\lambda_3 = 662.87$ $\lambda_3 = 664.53$	— — —	$9.5 \cdot 10^{-2}$ 0.0 $4.3 \cdot 10^{-3}$	$1.35 \cdot 10^{-3}$ $4.0 \cdot 10^{-2}$ 0.145
$\lambda_1 = 693.51$ $\lambda_2 = 692.68$ $\lambda_2 = 693.01$ $\lambda_3 = 689.39$	— 0.358 0.35 —	0.106 $3.2 \cdot 10^{-3}$ $4.1 \cdot 10^{-3}$ —	— — — $8.1 \cdot 10^{-2}$
$\lambda_1 = 703.03$ $\lambda_2 = 702.14$ $\lambda_2 = 702.48$ $\lambda_3 = 700.79$	— 1.254 1.25 —	0.382 $3.35 \cdot 10^{-2}$ $1.42 \cdot 10^{-3}$ $1.2 \cdot 10^{-3}$	— — — 0.472
$\lambda_1 = 722.64$ $\lambda_2 = 721.65$ $\lambda_2 = 721.99$ $\lambda_3 = 717.51$	— 0.401 0.392 —	0.125 $9.65 \cdot 10^{-4}$ $1.36 \cdot 10^{-3}$ 0.0	— — — 0.107
$\lambda_1 = 732.76$ $\lambda_2 = 731.72$ $\lambda_2 = 732.07$ $\lambda_3 = 729.96$	0.0 1.23 1.24 —	0.377 $1.24 \cdot 10^{-3}$ $9.87 \cdot 10^{-4}$ $1.58 \cdot 10^{-2}$	— — — 0.603

Таблица 2. Значения длин волн λ_1 , λ_2 и соответствующие им значения α при возбуждении флуоресценции на длине волны 510.6 нм

Длина волны, нм	α^{79}	α^{77}	Длина волны, нм	α^{79}	α^{77}
$\lambda_1 = 516.526$ $\lambda_2 = 516.165$	$8.65 \cdot 10^{-3}$ 4.157	0.488 0.889	$\lambda_1 = 564.782$ $\lambda_2 = 564.389$	$1.36 \cdot 10^{-3}$ 3.655	0.516 0.272
$\lambda_1 = 522.216$ $\lambda_2 = 521.857$	$6.32 \cdot 10^{-3}$ 2.183	0.146 0.333	$\lambda_1 = 577.859$ $\lambda_2 = 577.462$	$9.65 \cdot 10^{-4}$ 3.339	0.547 0.236
$\lambda_1 = 528.003$ $\lambda_2 = 527.624$	$6.41 \cdot 10^{-3}$ 4.67	0.545 0.876	$\lambda_1 = 591.409$ $\lambda_2 = 590.977$	$9.82 \cdot 10^{-4}$ 3.084	0.563 0.206
$\lambda_1 = 539.887$ $\lambda_2 = 539.501$	$4.75 \cdot 10^{-3}$ 4.457	0.469 0.604	$\lambda_1 = 605.415$ $\lambda_2 = 604.943$	$9.16 \cdot 10^{-4}$ 2.905	0.561 0.195
$\lambda_1 = 552.142$ $\lambda_2 = 551.749$	$3.36 \cdot 10^{-3}$ 4.0	0.477 0.341	$\lambda_1 = 619.885$ $\lambda_2 = 619.386$	$8.76 \cdot 10^{-4}$ 2.766	0.519 0.197

Проведенные исследования позволяют предложить новый метод детектирования изотопологов молекулярного йода в реальном масштабе времени с использованием в качестве источника возбуждающего излучения лазеров на парах меди.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hou X., Hansen V., Aldahan, A., Possnet G., Lind O. Ch., Lujaniene G. A review on speciation of iodine-129 in the environmental and biological samples // *Analytica Chimica Acta*, 2009. V. 632. P. 181–196.

2. Suzuki T., Kitamura T., Kabuto S., Togawa O. High Sensitivity Measurement of Iodine-129/Iodine-127 Ratio by Accelerator Mass Spectrometry // *Journal of Nuclear Science and Technology*, 2012. V. 43. № 11. P. 1431–1435.

3. Gilfedder B.S., Petri M., Biester H. Iodine speciation in rain and snow: Implications for the atmospheric iodine sink // *Journal of Geophysical Research*, 2007. V. 112. Iss. D7. CiteID D07301.

4. Bienvenu Ph., Brochard E., Excoffier E., Piccione M. Determination of Iodine 129 by ICP-QMS in Environmental Samples // *Canadian Journal of Analytical Sciences and Spectroscopy*, 2004. V. 49. № 6. P. 423–428.

РАЗРАБОТКА МЕТОДА ДЕТЕКТИРОВАНИЯ ИЗОТОПОЛОГОВ МОЛЕКУЛЯРНОГО ЙОДА В ГАЗАХ
В РЕАЛЬНОМ МАСШТАБЕ ВРЕМЕНИ НА ОСНОВЕ ЛАЗЕРНОЙ ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ,
ВОЗБУЖДАЕМОЙ ЛАЗЕРАМИ НА ПАРАХ МЕДИ

5. Garland C.W., Nibler J.W., Shoemaker D.P. Experiments in Physical Chemistry, 8th ed.; McGraw-Hill: Boston, MA, 2009. Pp. 436–446.

6. Izmer A.V., Boulyga S.F., Zoriy M.V., Becker J.S. Improvement of the detection limit for determination of ^{129}I in sediments by quadrupole inductively coupled plasma mass spectrometer with collision cell // Journal of Analytical Atomic Spectrometry, 2004. V. 19. P. 1278–1280.

7. Baker A.R. Marine aerosol iodine chemistry: The importance of soluble organic iodine // Environmental Chemistry, 2005. V. 2. P. 295–298.

8. Chance R.J., Shaw M., Telgmann L., Baxter M. A comparison of spectrophotometric and denuder based approaches for the determination of gaseous molecular iodine // Atmospheric Measurement Techniques Discussions, 2009. V. 2. P. 2191–2215.

9. Kireev S.V., Kondrashov A.A., Shnyrev S.L., Suganev S.V. Effect of gas mixture pressure on detection sensitivity of molecular iodine in the atmosphere by laser-fluorescent method using a copper vapor laser (578.2 nm) // Laser Physics Letters, 2023. V. 20 № 9. P. 095701–095707.

10. Chen Y.M., Cheng T.L., Tseng W.L. Fluorescence turn-on detection of iodide, iodate and total iodine using fluorescein-5-isothiocyanate-modified gold nanoparticles // The Analyst, 2009. V. 134. P. 2106.

11. Tellinghuisen J. Laser-Induced Fluorescence in Gaseous I_2 Excited with a Green Laser Pointer // Journal of Chemical Education, 2007. V. 84. P. 336.

12. Williamson J.C. Molecular Iodine Fluorescence Using a Green Helium-Neon Laser // Journal of Chemical Education, 2011. V.88. P. 816.

13. Williamson J. C. Teaching the Rovibronic Spectroscopy of Molecular Iodine // Journal of Chemical Education, 2007. V. 84. P. 1355–1359.

14. Kireev S.V., Shnyrev S.L., Sobolevsky I.V., Kondrashov A.A. Laser fluorescence complex for online iodine-129 and iodine-127 detection in gaseous media using a tunable diode laser // Laser Physics Letters, 2015. V. 12(1). P. 15–24.

15. Куреев С.В., Шнырев С.Л., Суганев С.В. Флуоресценция изотопологов молекулярного йода $^{127}\text{I}_2$, $^{127}\text{I}^{129}\text{I}$ и $^{129}\text{I}_2$, возбуждаемая излучением лазера на парах меди на длине волны 578,2 нм. // Сборник науч. тр. конф. «Лазеры в науке, технике, медицине», 2021. Т. 31. С. 207–211.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 4, pp. 199–203

DEVELOPMENT OF THE METHOD FOR ONLINE MOLECULAR IODINE ISOTOPOLOGUE DETECTION IN GASEOUS MEDIA ON THE BASIS
OF LASER FLUORESCENCE EXCITED BY COPPER VAPOR LASERS

S.V. Kireev¹, S.V. Suganev²

¹National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, 115409, Russia

²«Almaz-Antey» Air and Space Defence Corporation", Joint Stock Company, Moscow, 121357, Russia

*e-mail: svkireyev@mephi.ru,

**e-mail: kvestor90@mail.ru

Received June 02, 2024; revised June 02, 2024; accepted June 11, 2024

The paper reports on developing a method for selective detection of molecular iodine isotopologues of $^{127}\text{I}_2$, $^{127}\text{I}^{129}\text{I}$ and $^{129}\text{I}_2$ in gaseous media typical for nuclear fuel cycle enterprises and atmosphere. The method proposed relates to the methods of laser-fluorescence spectroscopy and consists in the analysis of fluorescence spectra of molecular iodine isotopologues mixture. The method provides for the registration of fluorescence intensities at pre-calculated wavelengths. Copper vapor lasers emitting at wavelengths of 510.6 and 578.2 nm are proposed as a source of fluorescence excitation. The method allows for highly sensitive online monitoring of molecular iodine isotopologues (including radioactive $^{129}\text{I}_2$) in technological environments that are formed as the result of processing of spent nuclear fuel, in radiochemical enterprises gas emissions, and in atmospheric air.

Keywords: copper vapor lasers, molecular iodine isotopologues, molecular spectroscopy, laser-induced fluorescence, environmental monitoring, selective detection methods.

REFERENCES

1. Hou X., Hansen V., Aldahan, A., Possnet G., Lind O.Ch., Lujaniene G. A review on speciation of iodine-129 in the environmental and biological samples. *Analytica Chimica Acta*, 2009. Vol. 632. Pp. 181–196.
2. Suzuki T., Kitamura T., Kabuto S., Togawa O. High Sensitivity Measurement of Iodine-129/Iodine-127 Ratio by Accelerator Mass Spectrometry. *Journal of Nuclear Science and Technology*, 2012. Vol. 43. No. 11. Pp. 1431–1435.
3. Gilfedder B.S., Petri M., Biester H. Iodine speciation in rain and snow: Implications for the atmospheric iodine sink. *Journal of Geophysical Research*, 2007. Vol. 112. Iss. D7. CiteID D07301.
4. Bienvenu Ph., Brochard E., Excoffier E., Piccione M. Determination of Iodine 129 by ICP–QMS in Environmental Samples. *Canadian Journal of Analytical Sciences and Spectroscopy*, 2004. Vol. 49. No. 6. Pp. 423–428.
5. Garland C.W., Nibler J.W., Shoemaker D.P. *Experiments in Physical Chemistry*, 8th ed.; McGraw–Hill: Boston, MA, 2009. Pp. 436–446.
6. Izmer A.V., Boulyga S.F., Zoriy M.V., Becker J.S. Improvement of the detection limit for determination of 129I in sediments by quadrupole inductively coupled plasma mass spectrometer with collision cell. *Journal of Analytical Atomic Spectrometry*, 2004. Vol. 19. Pp. 1278–1280.
7. Baker A.R. Marine aerosol iodine chemistry: The importance of soluble organic iodine. *Environmental Chemistry*, 2005. Vol. 2. Pp. 295–298.
8. Chance R.J., Shaw M., Telgmann L., Baxter M. A comparison of spectrophotometric and denuder based approaches for the determination of gaseous molecular iodine. *Atmospheric Measurement Techniques Discussions*, 2009. Vol. 2. Pp. 2191–2215.
9. Kireev S.V., Kondrashov A.A., Shnyrev S.L., Suganev S.V. Effect of gas mixture pressure on detection sensitivity of molecular iodine in the atmosphere by laser–fluorescent method using a copper vapor laser (578.2 nm). *Laser Physics Letters*, 2023. Vol. 20. No. 9. Pp. 095701–095707.
10. Chen Y.M., Cheng T.L., Tseng W.L. Fluorescence turn–on detection of iodide, iodate and total iodine using fluorescein–5–isothiocyanate–modified gold nanoparticles. *The Analyst*, 2009. Vol. 134. Pp. 2106.
11. Tellinghuisen J. Laser–Induced Fluorescence in Gaseous I₂ Excited with a Green Laser Pointer. *Journal of Chemical Education*, 2007. Vol. 84. Pp. 336.
12. Williamson J.C. Molecular Iodine Fluorescence Using a Green Helium–Neon Laser. *Journal of Chemical Education*, 2011. Vol. 88. Pp. 816.
13. Williamson J. C. Teaching the Rovibronic Spectroscopy of Molecular Iodine. *Journal of Chemical Education*, 2007. Vol. 84. Pp. 1355–1359.
14. Kireev S.V., Shnyrev S.L., Sobolevsky I.V., Kondrashov A.A. Laser fluorescence complex for online iodine–129 and iodine–127 detection in gaseous media using a tunable diode laser. *Laser Physics Letters*, 2015. Vol. 12(1). Pp. 15–24.
15. Kireev S.V., Shnyrev S.L., Suganev S.V. Fluorescenciya izotopologov molekulyarnogo joda 129I₂, 127I129I i 127I₂, vzbuzhdaemaya izlucheniem lazera na parah medi na dline volny 578,2 nm. [Fluorescence of molecular iodine isotopologues 129I₂, 127I129I and 127I₂, excited by copper vapor laser radiation at a wavelength of 578.2 nm]. *Sbornik nauch. tr. konf. «Lazery v nauke, tekhnike, medicine»* [Collection of scientific tr. conf. «Lasers in science, technology, medicine»], 2021. Vol. 31. Pp. 207–211 (in Russian).

УДК 538.915

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УРОВНЕЙ КРАМЕРСОВО-ВЫРОЖДЕННОЙ СИСТЕМЫ $^{14}\text{NV}-^{13}\text{C}$ В МАГНИТНОМ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

А.Т. Салказанов^{1*}, С.С. Вергелес¹, А.С. Гусев¹, М.М. Калошин¹, Н.С. Кукин¹,
Р.Е. Маргушин¹, Н.И. Каргин¹, А.П. Низовцев^{1,2}

¹Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

²Институт физики НАН Беларуси, Минск, 220072, Беларусь

*email: atsalkazanov@mephi.ru

Поступила в редакцию: 16.07. 2024

После доработки: 27.07. 2024

Принята к публикации: 30.07. 2024

В данной работе проводится исследование трехспиновой системы $^{14}\text{NV}-^{13}\text{C}$, которая включает электронный спин NV-центра и ядерные спины атомов ^{13}C и ^{14}N . В этой системе наблюдается двукратное вырождение энергетических уровней в нулевом магнитном поле (вырождение Крамерса) из-за инвариантности спин-гамильтониана к обращению времени. Для исследования влияния магнитного и электрического поля на энергетические уровни системы было проведено моделирование спектров оптически детектируемого магнитного резонанса (ОДМР) этой гибридной квантовой системы в рамках метода спин-гамильтониана при одновременном воздействии на систему магнитного и электрического или внутрикристаллического поля. Построенная модель хорошо согласуется с экспериментальным спектром ОДМР одиночного комплекса $^{14}\text{NV}-^{13}\text{C}$, локализованном в образце сверхчистого алмаза с помощью конфокального микроскопа. По расщеплению спектра ОДМР в нулевом магнитном поле и по данным квантово-химического моделирования было определено, что атом ^{13}C расположен в третьей координационной сфере NV-центра, и соответствующий этому положению тензор сверхтонкого взаимодействия электронного спина NV-центра и ядерного спина изотопа углерода ^{13}C использовался в модели. В результате численные расчеты показали, что вырождение снимается только магнитным полем, независимо от наличия какого-либо электрического (кристаллического) поля, что делает данную квантовую систему перспективной для магнитометрии.

Ключевые слова: NV-центр, изотоп ^{13}C , алмаз, вырождение Крамерса, магнитометрия.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.346

EDN FJRWRD

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы наблюдается большой прогресс в области применения одиночных NV-центров (центр азот-вакансия) в алмазе и их комплексов с ядерными спинами в качестве квантовых сенсоров с нанометровым пространственным разрешением [1]. Измерения проводятся путем анализа спектров оптически детектируемого магнитного резонанса (ОДМР), поскольку резонансные частоты чувствительны к магнитным и электрическим полям, а также к температуре и давлению. На данный момент наибольшее развитие получила магнитометрия с помощью NV-центров [2, 3].

Одной из проблем магнитометрии на основе NV-центров в алмазе является необходимость учитывать влияние на NV-сенсоры электрического внутрикристаллического поля, которое в

реальных кристаллах алмаза может быть довольно сильным вследствие наличия дефектов кристаллической структуры, приводящих к появлению напряжений в кристалле [4]. В этой связи актуальной является проблема различения вкладов магнитного и электрического полей при анализе спектров ОДМР NV-центра, используемого в качестве сенсора. Для этой цели в качестве сенсоров в работах [5, 6] было предложено использовать крамеровско-вырожденные спиновые системы [7], т.е. системы с полужелтым спином, состояния которых являются дважды вырожденными в присутствии электрического/кристаллического поля, и это вырождение снимается только магнитным полем. Одной из таких систем является гибридная квантовая система $^{14}\text{NV}-^{13}\text{C}$, которая представляет собой NV-центр со спином $S = 1$, сверхтонко связанный с изотопом ^{13}C (с ядерным спином

$I^{13}\text{C} = 1/2$), также в системе присутствует ядерный спин азота самого NV-центра $I^{14}\text{N} = 1$.

В работах [5, 6] для системы $\text{NV}-^{13}\text{C}$ без учета ядерного спина и квадрупольного момента азота было аналитически показано, что ее энергетические уровни дважды вырождены. В данной работе комплекс $\text{NV}-^{13}\text{C}$ исследуется с учетом ядерного спина атома азота $I^{14}\text{N} = 1$ и квадрупольного момента. Теоретический анализ проводится с помощью модели, основанной на спиновом гамильтониане, адекватность которой подтверждается с помощью экспериментально измеренного спектра ОДМР. С помощью модели исследуется влияние магнитных и электрических полей на энергетические уровни системы. В первой части статьи приводится подробное описание модели, вторая часть посвящена результатам моделирования и обсуждению.

МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для моделирования ОДМР комплекса $^{14}\text{NV}-^{13}\text{C}$ используется метод спинового гамильтониана. Общий гамильтониан основного электронного состояния системы включает в себя компоненты, отвечающие за расщепление нулевого поля, сверхтонкое взаимодействие электронного спина NV-центра с ядерными спинами ^{14}N и ^{13}C , квадрупольное взаимодействие с ядерным спином ^{14}N , взаимодействие с магнитным полем (эффект Зеемана), взаимодействие с электрическим полем (эффект Штарка), а также взаимодействие с СВЧ-магнитным полем, каждое из этих взаимодействий можно описать с помощью следующих выражений:

$$\begin{aligned} H_{\text{РНП_ЭП}}^{\text{NV}} &= (D + d_{\parallel} E_z) \left(\hat{S}_z^2 - \frac{2}{3} \right) - \\ &- d_{\perp} E_x \left(\hat{S}_x^2 - \hat{S}_y^2 \right) + d_{\perp} \left(\hat{S}_x \hat{S}_y + \hat{S}_y \hat{S}_x \right), \\ H_{\text{СТВ_КП}} &= A_{\parallel}^{14\text{N}} \hat{S}_z \hat{I}_z^{14\text{N}} + \\ &+ A_{\perp}^{14\text{N}} \left(\hat{S}_x \hat{I}_x^{14\text{N}} + \hat{S}_y \hat{I}_y^{14\text{N}} \right) + \\ &+ Q \cdot \left(\left(\hat{I}_z^{14\text{N}} \right)^2 - \frac{2}{3} \right) + \sum_{\text{KL}} A_{\text{KL}}^{13\text{C}} \cdot \mathbf{S}_{\text{K}} \otimes \mathbf{I}_{\text{L}}^{13\text{C}}, \quad (1) \\ H_{\text{МП}} &= \gamma_{\text{NV}} \vec{B} \cdot \hat{\vec{S}} - \gamma_{14\text{N}} \vec{B} \cdot \hat{\vec{I}}^{14\text{N}} - \gamma_{13\text{C}} \vec{B} \cdot \hat{\vec{I}}^{13\text{C}}, \\ H_{\text{СВЧ}} &= \gamma_{\text{NV}} \vec{B}_{\text{СВЧ}} \cdot \hat{\vec{S}} - \gamma_{14\text{N}} \vec{B}_{\text{СВЧ}} \cdot \hat{\vec{I}}^{14\text{N}} - \\ &- \gamma_{13\text{C}} \vec{B}_{\text{СВЧ}} \cdot \hat{\vec{I}}^{13\text{C}}, \end{aligned}$$

где $\hat{\vec{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$ – оператор электронного спина NV-центра; $\hat{\vec{I}}^{14\text{N}} = \left(\hat{I}_x^{14\text{N}}, \hat{I}_y^{14\text{N}}, \hat{I}_z^{14\text{N}} \right)$ – оператор ядерного спина ^{14}N ; $\hat{\vec{I}}^{13\text{C}} = \left(\hat{I}_x^{13\text{C}}, \hat{I}_y^{13\text{C}}, \hat{I}_z^{13\text{C}} \right)$ – оператор ядерного спина ^{13}C ; $D = 2870$ МГц – параметр расщепления нулевого поля; $d_{\parallel} = 0.35$ Гц · см/В и $d_{\perp} = 17$ Гц · см/В параллельная и поперечная составляющая параметра взаимодействия с электрическим полем; $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ – вектор напряженности электрического поля; $A_{\parallel}^{14\text{N}} = -2.14$ и $A_{\perp}^{14\text{N}} = -2.7$ МГц продольная и поперечная компонента сверхтонкого взаимодействия (СТВ) с ядерным спином ^{14}N ; $Q = -5.01$ МГц – параметр квадрупольного взаимодействия; $A_{\text{KL}}^{13\text{C}}$ – тензор сверхтонкого взаимодействия с ядерным спином ^{13}C , $\text{KL} = (X, Y, Z)$, $\gamma_{\text{NV}} = 2.8$ МГц/Гс, $\gamma_{14\text{N}} = 0.31$ кГц/Гс, $\gamma_{13\text{C}} = 1.07085$ кГц/Гс – гиромагнитные отношения электронного спина NV-центра, ядерных спинов ^{14}N и ^{13}C , $\vec{B}_{\text{СВЧ}} = (B_x^{\text{СВЧ}}, B_y^{\text{СВЧ}}, B_z^{\text{СВЧ}})$ – вектор СВЧ-поля.

Таким образом, полный гамильтониан основного состояния квантовой системы $^{14}\text{NV}-^{13}\text{C}$ можно записать в виде суммы:

$$H^{14\text{NV}-^{13}\text{C}} = H_{\text{РНП_ЭП}}^{\text{NV}} + H_{\text{СТВ_КП}} + H_{\text{МП}} + H_{\text{СВЧ}}. \quad (2)$$

Диагонализация полного гамильтониана (2) дает 18 собственных энергий и собственных состояний:

$$|\Psi_{\alpha}\rangle = \sum_{i=1}^{18} c_{\alpha}^i \left| m_{\text{S}} m_{\text{I}}^{14\text{N}} m_{\text{I}}^{13\text{C}} \right\rangle, \quad (3)$$

где c_{α}^i – комплексные коэффициенты при базисных спиновых функциях: $|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$, здесь

первый элемент – это электронный спин NV-центра – m_S ; второй элемент – ядерный спин ^{14}N – $m_I^{14}\text{N}$; третий элемент – это спин ^{13}C – $m_I^{13}\text{C}$.

Далее рассчитываются вероятности переходов, между различными состояниями $|\Psi_\alpha\rangle$ индуцируемые СВЧ магнитным полем. Вероятность магнитного дипольного перехода между этими состояниями определяется следующим выражением:

$$P_{if} \sim \left| \langle \Psi_i | H_{\text{СВЧ}} | \Psi_f \rangle \right|^2. \quad (4)$$

Данные переходы можно описать кривой Лоренца, приняв амплитуду равной P_{if} и ширину линий равной σ , которая определяется условиями эксперимента (качество алмаза, мощность лазера и СВЧ-излучения и т.д.) [8]. Таким образом, зависящая от частоты амплитуда перехода между состоянием $|\Psi_i\rangle$ и состоянием $|\Psi_f\rangle$, индуцируемая СВЧ-полем с частотой ν , равна:

$$P_{i,f}(\nu) = \frac{P_{i,f} \sigma^2}{4 \left[\left(\nu - |\nu_f - \nu_i| \right)^2 + \frac{\sigma^2}{4} \right]}. \quad (5)$$

Результирующая вероятность перехода на определенной частоте СВЧ-поля получается суммированием вероятностей всех возможных переходов, рассчитанных на этой частоте $T(\nu) = \sum_{i,f} T_{i,f}(\nu)$. Поскольку состояния $m_S = \pm 1$ и $m_S = 0$ демонстрируют различные интенсивности флуоресценции, вероятность P_{if} пропорциональна контрасту ОДМР.

Для теоретического анализа использована система, которая была нами экспериментально исследована в работе [9], где измерения проводились в условиях магнитного поля Земли 0.5 Гс на широте Москвы и Московской области [10]. К сожалению, обсуждаемые здесь эффекты тогда не могли быть исследованы вследствие невысокого спектрального разрешения в ОДМР, обусловленного качеством использованного образца алмаза.

Экспериментально измеренный спектр ОДМР демонстрирует сверхтонкое расщепление ~ 12 МГц состояний с проекцией $m_S = \pm 1$, которое согласно базе данных из работы [11] соответствует расположению ^{13}C в третьей координатной сфере вакансии, имеющей оди-

наковые характеристики сверхтонкого взаимодействия.

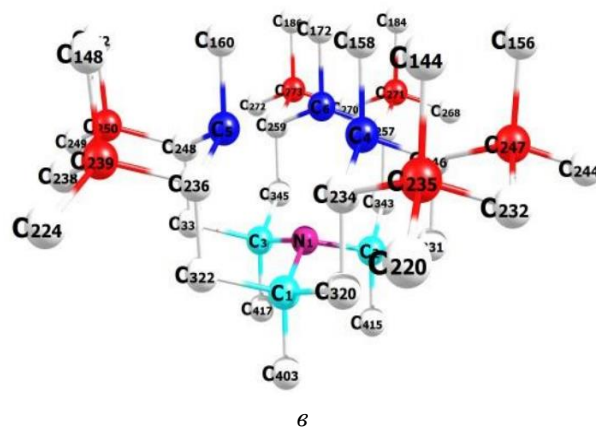
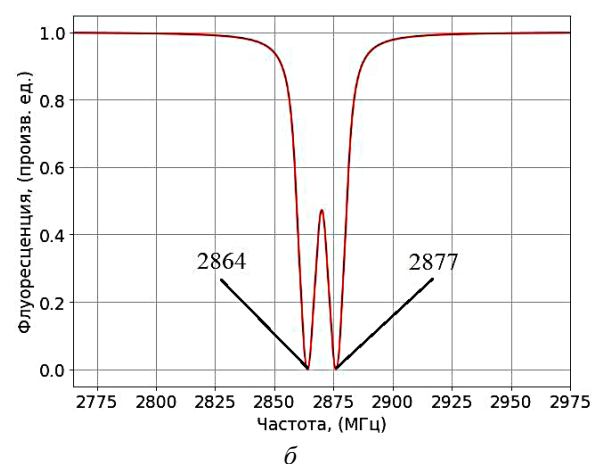
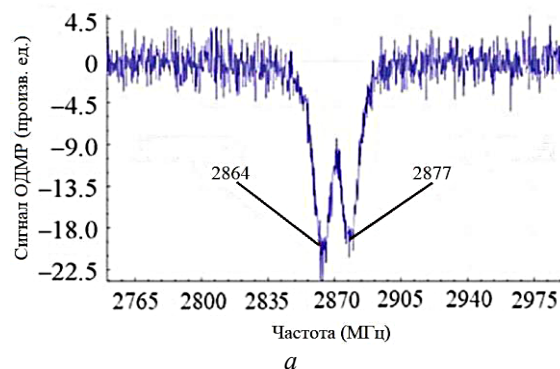


Рис. 1. Экспериментальный спектр ОДМР в поле Земли 0.5 Гс (а); моделирование эксперимента (б); фрагмент изученного в [11] кластера $\text{C}_{510}[\text{NV}]\text{H}_{252}$ (в), в котором третьи соседи вакансии C_{235} , C_{239} , C_{247} , C_{250} , C_{271} и C_{273} выделены красным цветом, атом азота N_1 NV-центра обозначен фиолетовым цветом, ближайшие к нему атомы C_1 , C_2 , C_3 – голубым, а ближайшие к вакансии NV-центра атомы углерода C_4 , C_5 , C_6 – синим

Для определенности можно рассмотреть положение C_{239} в алмазном кластере $\text{C}_{510}[\text{NV}]\text{H}_{252}$ (рис. 1, в). В работе [11] тензора СТВ рассчитывались в одной системе координат, где ось Z

совпадает с осью квантования NV-центра, а X и Y брались произвольно. Поэтому для исследования комплекса NV- ^{13}C в магнитном и электрическом поле, необходимо соответствующий тензор СТВ для положения C_{239} преобразовать в систему координат, где ось Z совпадает с направлением оси квантования NV-центра, а оси X и Y выбраны так, чтобы плоскость XZ проходила через ось NV-центра и через атом ^{13}C . Преобразованная матрица имеет вид

$$A_{KL}^{(239)} = \begin{bmatrix} 15.755 & -0.97454 & -1.1264 \\ -0.97454 & 12.373 & 0.4052 \\ -1.1264 & 0.4052 & 12.374 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Данный тензор использовался в качестве $A_{KL}^{13\text{C}}$ в (1). В результате, как можно видеть из рис. 1,б, модель хорошо описывает эксперимент. И далее для теоретического анализа будет использоваться этот же тензор СТВ.

КОМПЛЕКС $^{14}\text{NV-}^{13}\text{C}$ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Для анализа можно рассмотреть влияние магнитного и электрического поля на энергетические уровни комплекса $^{14}\text{NV-}^{13}\text{C}$.

На рис. 2 приведена зависимость энергетических уровней при $m_s = \pm 1$ в зависимости от осевого магнитного поля и при наличии не осевого электрического поля 300 кВ/см. Энергетические уровни дважды вырождены, и это вырождение снимается только магнитным полем, вне зависимости от приложенного поперечного электрического поля, что согласуется с теоремой Крамерса.

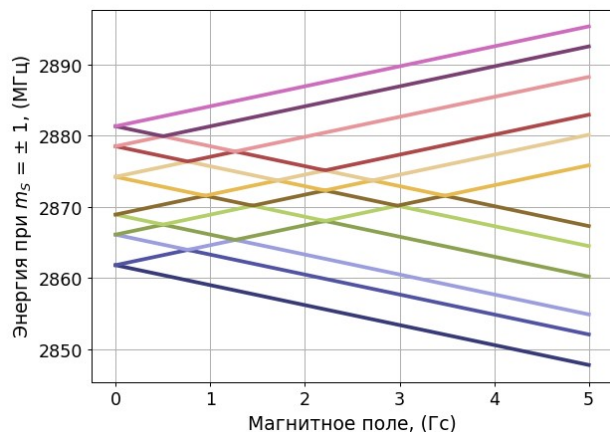
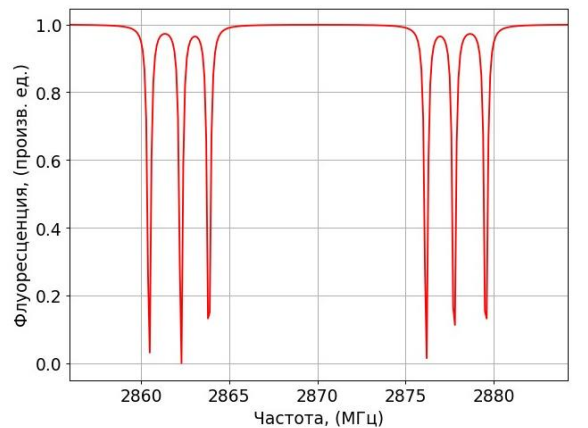
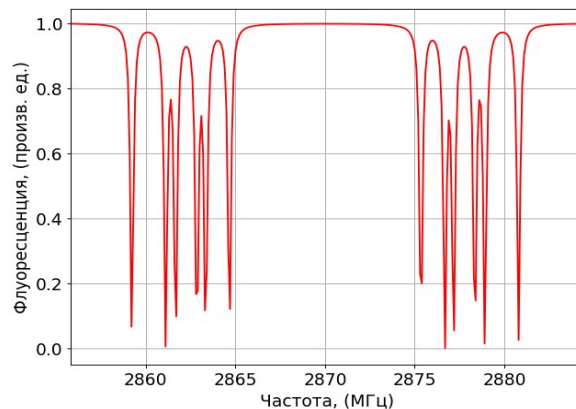


Рис. 2. Зависимость энергетических уровней комплекса $^{14}\text{NV-}^{13}\text{C}$ в зависимости от магнитного поля $B_{||}$ и электрического поля $E_{\perp} = 300$ кВ/см

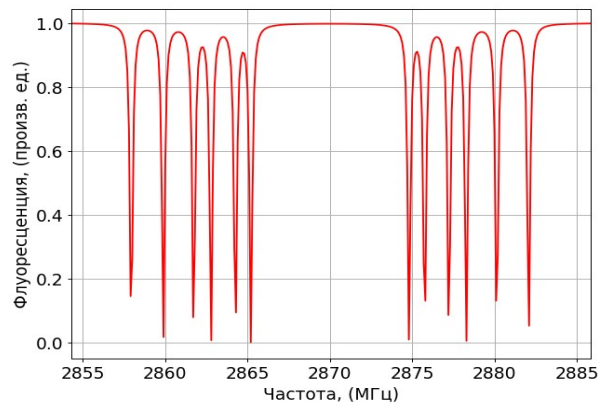
На рис. 3 приведены теоретически рассчитанные спектры ОДМР при трех различных осевых магнитных полях и при наличии поперечного электрического поля. На спектрах видно, что уже слабое магнитное поле Земли (типично ~ 0.5 Гс) приводит к расщеплению резонансных линий ОДМР, что можно использовать для его измерения, предварительно отградуировав датчик на влияние внутрикристаллических полей.



а



б



в

Рис. 3. Спектры ОДМР при трех различных магнитных полях и поперечном электрическом поле $E_{\perp} = 300$ кВ/см: а) $B_{||} = 0$; б) $B_{||} = 0.5$ Гс; в) $B_{||} = 1$ Гс

Непосредственно для измерения магнитного поля можно использовать теоретически рассчитанные резонансные частоты ОДМР и экспериментально измеренный спектр. Для этого можно применять итерационный алгоритм и функционал [12]:

$$Q(B) = \sum_i |v_{i_T} - v_{i_Э}|,$$

где измеряемое магнитное поле является параметром аппроксимации B ; v_{i_T} – теоретически рассчитанная резонансная частота; $v_{i_Э}$ – экспериментально измеренная резонансная частота. Перебирая в модели различные значения B , можно подогнать расчетные спектры под эксперимент, и найти искомую величину магнитного поля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, численные расчеты показали, что комплекс $^{14}\text{NV}-^{13}\text{C}$ позволяет разделять эффекты от магнитного и электрического поля. Измерив для некоторого определенного центра спектры ОДМР, при наличии известного магнитного поля и проинтерпретировав их теоретически, можно найти компоненты действующих на этот центр внутрикристаллических полей которые далее можно использовать для измерения неизвестного магнитного поля с использованием модели и итерационного алгоритма.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение о предоставлении из федерального бюджета гранта на проведение крупных научных проектов по приоритетным направлениям научно-технологического развития № 075-15-2024-556 от «25» апреля 2024 г.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Du J. Shi F., Kong X., Jelezko F., Wrachtrup J. Single-molecule scale magnetic resonance spectroscopy using quantum diamond sensors // *Reviews of Modern Physics*, 2024. V. 96. № 2. Article ID 025001.
2. Barry J.F., Schloss J.M., Bauch E., Turner M.J., Hart C.A., Pham L.M., Walsworth R.L. Sensitivity Optimization for NV-Diamond Magnetometry // *Reviews*

of Modern Physics, 2020. V. 92. № 1. Article ID 015004.

3. Stürner F.M., Brenneis A., Buck T., Kassel J., Rölver R., Fuchs T., Savitsky A., Suter D., Grimm J., Hengesbach S., Förtsch M., Nakamura K., Sumiya H., Onoda S., Isoya J., Jelezko F. Integrated and Portable Magnetometer Based on Nitrogen-Vacancy Ensembles in Diamond // *Advanced Quantum Technologies*, 2021. V. 4. Article ID 2000111.
4. Udvarhelyi P., Shkolnikov V.O., Gali A., Burkard G., Pályi A. Spin-strain interaction in nitrogen-vacancy centers in diamond // *Physical Review B*, 2018. V. 98. Article ID 075201.
5. Nizovtsev A.P., Kilin S.Ya., Pushkarchuk A.L., Pushkarchuk V.L., Kutsen S. Kramers Degenerated Spin Systems «NV Center+Few Proximal ^{13}C Nuclei» in Diamond for Single-Spin Magnetometry // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2011. V. 14. P. 319.
6. Nizovtsev A.P., Kilin S.Ya., Pushkarchuk A.L., Kuten S.A. Kramers-degenerated NV+ ^{13}C spin systems in diamond: analytical description // *Proc. SPIE 8699, Saratov Fall Meeting 2012: Optical Technologies in Biophysics and Medicine XIV; and Laser Physics and Photonics XIV*, 86990T (26 February 2013).
7. Kramers H.A. General theory of paramagnetic rotation in crystals // *Proc. Acad. Sci. Amsterdam*, 1930. V. 33. P. 959.
8. Dréau A., Lesik M., Rondin L., Spinicelli P., Arcizet O., Roch J.-F., Jacques V. Avoiding power broadening in optically detected magnetic resonance of single NV defects for enhanced DC-magnetic field sensitivity // *Physical Review B*, 2011. V. 84 № 19. Article ID 195204.
9. Низовцев А.П., Кукин Н.С., Мурадова А.Р., Семенов П.А., Салказанов А.Т., Смирнова М.О., Пушкачук А.Л., Васильев А.Н., Каргин Н.И., Кулин С.Я. Векторная магнитометрия с помощью одиночного комплекса NV- ^{13}C в алмазе // *Журнал прикладной спектроскопии*, 2022. Т. 89. № 6. С. 807.
10. Кукин Н.С., Мурадова А.Р., Никитин А.К., Бухтияров А.А., Низовцев А.П., Семенов П.А., Васильев А.Н., Каргин Н.И., Смирнова М.О. Использование сверхтонкой структуры спектра оптически детектируемого магнитного резонанса одиночного NV-дефекта в алмазе в квантовой сенсорике слабых магнитных полей // *Журнал прикладной спектроскопии*. 2023. Т. 90. № 6. С. 850–855.
11. Nizovtsev A.P., Kilin S.Ya., Pushkarchuk A.L., Pushkarchuk V.A., Kuten S.A., Zhikol O.A., Schmitt S., Uden T., Jelezko F. Non-flipping ^{13}C spins near an NV center in diamond: hyperfine and spatial characteristics by density functional theory simulation of the C510[NV]H252 // *New Journal of Physics*, 2018. V. 20. № 2 Article ID 023022.
12. Jiang F.-J., Ye J.-F., Jiao Z., Huang Z.-Y., Lv H.-J. Estimation of vector static magnetic field by a nitrogen-vacancy center with a single first-shell ^{13}C nuclear (NV- ^{13}C) spin in diamond // *Chinese Physics B*, 2018. V. 27. № 5. Article ID 057601.

INVESTIGATION OF THE ENERGY LEVELS OF THE KRAMERS DEGENERATE $^{14}\text{NV}-^{13}\text{C}$ SYSTEM IN A MAGNETIC AND ELECTRIC FIELD

A.T. Salkazanov^{1*}, S.S. Vergeles¹, A.S. Gusev¹, M.M. Kaloshin¹, N.S. Kukin¹,
R.E. Margushin¹, N.I. Kargin¹, A.P. Nizovtsev^{1,2}

¹National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, 115409, Russia

²Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, 220072, Belarus

*email: atsalkazanov@mephi.ru

Received July 16, 2024; revised July 27, 2024; accepted July 30, 2024

This work investigates the three-spin system $^{14}\text{NV}-^{13}\text{C}$, which includes the electronic spin of the NV center and the nuclear spins of the ^{13}C and ^{14}N atoms. In this system, a twofold degeneracy of the energy levels is observed in zero magnetic field (Kramers' degeneracy) due to the time-reversal symmetry of the spin Hamiltonian. To study the influence of magnetic and electric fields on the energy levels of the system, optically detected magnetic resonance (ODMR) spectra of this hybrid quantum system were simulated within the framework of the spin Hamiltonian method under the simultaneous influence of magnetic and electric or intracrystalline fields. The constructed model agrees well with the experimental ODMR spectrum of a single $^{14}\text{NV}-^{13}\text{C}$ complex localized in an ultrapure diamond sample using a confocal microscope. Based on the ODMR spectrum splitting in zero magnetic field and quantum chemical modeling data, it was determined that the ^{13}C atom is located in the third coordination sphere of the NV center. The corresponding hyperfine interaction tensor between the electronic spin of the NV center and the nuclear spin of the ^{13}C isotope was used in the model. As a result, numerical calculations showed that the degeneracy is lifted only by the magnetic field, regardless of the presence of any electric (crystalline) field, making this quantum system promising for magnetometry.

Keywords: NV-center, ^{13}C isotope, diamond, Kramers degeneracy, magnetometry.

REFERENCES

1. Du J. Shi F., Kong X., Jelezko F., Wrachtrup J. Single-molecule scale magnetic resonance spectroscopy using quantum diamond sensors. *Reviews of Modern Physics*, 2024. Vol. 96. No. 2. Article ID 025001.
2. Barry J.F., Schloss J.M., Bauch E., Turner M.J., Hart C.A., Pham L.M., Walsworth R.L. Sensitivity Optimization for NV-Diamond Magnetometry. *Reviews of Modern Physics*, 2020. Vol. 92. No. 1. Article ID 015004.
3. Stürner F.M., Brenneis A., Buck T., Kassel J., Röhrer R., Fuchs T., Savitsky A., Suter D., Grimm J., Hengesbach S., Förtsch M., Nakamura K., Sumiya H., Onoda S., Isoya J., Jelezko F. Integrated and Portable Magnetometer Based on Nitrogen-Vacancy Ensembles in Diamond. *Advanced Quantum Technologies*, 2021. Vol. 4. Article ID 2000111.
4. Udvarhelyi P., Shkolnikov V.O., Gali A., Burkard G., Pályi A. Spin-strain interaction in nitrogen-vacancy centers in diamond. *Physical Review B*, 2018. Vol. 98. Article ID 075201.
5. Nizovtsev A.P., Kilin S.Ya., Pushkarchuk A.L., Pushkarchuk V.L., Kutsen S. Kramers Degenerated Spin Systems «NV Center+Few Proximal ^{13}C Nuclei» in Di-

amond for Single-Spin Magnetometry. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2011. Vol. 14. P. 319.

6. Nizovtsev A.P., Kilin S.Ya., Pushkarchuk A.L., Kuten S.A. Kramers-degenerated NV+ ^{13}C spin systems in diamond: analytical description. *Proc. SPIE 8699, Saratov Fall Meeting 2012: Optical Technologies in Biophysics and Medicine XIV; and Laser Physics and Photonics XIV*, 86990T (26 February 2013).

7. Kramers H.A. General theory of paramagnetic rotation in crystals. *Proc. Acad. Sci. Amsterdam*, 1930. Vol. 33. P. 959.

8. Dréau A., Lesik M., Rondin L., Spinicelli P., Arcizet O., Roch J.-F., Jacques V. Avoiding power broadening in optically detected magnetic resonance of single NV defects for enhanced DC-magnetic field sensitivity. *Physical Review B*, 2011. Vol. 84. No.19. Article ID 195204.

9. Nizovtsev A.P., Kukin N.S., Muradova A.R., Semenov P.A., Salkazanov A.T., Smirnova M.O., Pushkarchuk A.L., Vasiliev A.N., Kargin N.I., Kilin S.Ya. Vector Magnetometry Using a Single NV- ^{13}C Complex in Diamond. *Journal of Applied Spectroscopy*, 2022. Vol. 89. No. 6. P. 807.

10. *Kukin N.S., Muradova A.R., Nikitin A.K., Bukhtiyarov A.A., Nizovtsev A.P., Semenov P.A., Vasiliev A.N., Kargin N.I., Smirnova M.O.* Utilization of the Hyperfine Structure of the Optically Detected Magnetic Resonance Spectrum of a Single NV Defect in Diamond for Quantum Sensing of Weak Magnetic Fields. *Journal of Applied Spectroscopy*, 2023. Vol. 90. No. 6. Pp. 850–855.

11. *Nizovtsev A.P., Kilin S.Ya., Pushkarchuk A.L., Pushkarchuk V.A., Kuten S.A., Zhikol O.A., Schmitt S.,*

Unden T., Jelezko F. Non-flipping ^{13}C spins near an NV center in diamond: hyperfine and spatial characteristics by density functional theory simulation of the C510[NV]H252. *New Journal of Physics*, 2018. Vol. 20. No. 2. Article ID 023022.

12. *Jiang F.-J., Ye J.-F., Jiao Z., Huang Z.-Y., Lv H.-J.* Estimation of vector static magnetic field by a nitrogen-vacancy center with a single first-shell ^{13}C nuclear (NV- ^{13}C) spin in diamond. *Chinese Physics B*, 2018. Vol. 27. No. 5. Article ID 057601.

УДК 512.6

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ И СКРЫТЫЕ СИММЕТРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

А.Д. Полянин^{1,*}, И.К. Шингарева^{2,**}

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва,
119526, Россия

²Department of Mathematics, University of Sonora, Sonora, 83000, Mexico

*e-mail: polyanin@ipmnet.ru

**e-mail: inna.shingareva@unison.mx

Поступила в редакцию: 21.03.2024

После доработки: 21.03.2024

Принята к публикации: 19.04.2024

Рассматриваются классические и неклассические симметрии алгебраических уравнений и систем алгебраических уравнений. Описаны преобразования, сохраняющие вид некоторых алгебраических уравнений, а также преобразования, понижающие степень этих уравнений. Показано, что отдельные алгебраические уравнения, имеющие скрытые симметрии, путем введения новой дополнительной переменной могут сводиться к классическим симметрическим системам алгебраических уравнений. Установлено, что симметрические системы алгебраических уравнений смешанного типа, состоящие из симметрических и антисимметрических многочленов, можно преобразовать к более простым системам. Излагается метод решения неклассических симметрических систем двух алгебраических уравнений, которые меняются местами при перестановке неизвестных. Исследуются алгебраические уравнения, содержащие вторую итерацию заданного многочлена, которые сводятся к неклассическим симметрическим системам уравнений. Приведены примеры решения конкретных алгебраических уравнений и систем таких уравнений, допускающих явные и скрытые симметрии. В частности, рассматриваются нетривиальные алгебраические уравнения шестой и девятой степени, содержащие свободные параметры, которые допускают решения в радикалах. Описаны иррациональные уравнения, которые путем введения двух новых переменных сводятся к симметрическим системам алгебраических уравнений.

Ключевые слова: алгебраические уравнения, симметрические алгебраические системы, неклассические симметрии, скрытые симметрии, корни алгебраических уравнений, решения в радикалах.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.347

EDN HSKMBV

ВВЕДЕНИЕ

Алгебраическим уравнением n -й степени называется уравнение с одним неизвестным x вида

$$P_n(x) = 0, \quad (1)$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n .

Решением (корнем) уравнения (1) называется число x , удовлетворяющее условию $P_n(x) = 0$. Решить уравнение (1) означает найти все его решения.

На протяжении столетий основной задачей алгебры считалась разработка методов решения алгебраических уравнений. С древних времен известны формулы для решения алгебраических уравнений первой и второй степени.

В XVI в. итальянские математики С. дель Ферро, Н. Тарталья, Дж. Кардано, Л. Феррари

получили формулы для решения алгебраических уравнений третьей и четвертой степени. Исторические сведения об этом можно найти в [1, 2] (см. также [3–7], где приведены различные представления решений указанных уравнений).

Замечание 1. Значительно раньше, в XI в., О. Хайям, известный во всем мире как выдающийся поэт, написал «Трактат о доказательствах задач алгебры и алукабалы», где изложил геометрический метод решения алгебраических уравнений третьей степени, имеющих положительные корни, с помощью конических сечений (см. [2, 8]). Позже, в XVII в., теория решения кубических уравнений, основанная на конических сечениях, была развита Р. Декартом и другими учеными, которые не были знакомы с трудами О. Хайяма.

Замечание 2. Интересно отметить, что некоторые фундаментальные физические константы

являются решениями конкретных квадратных и кубических уравнений [9].

В период с XVI по начало XIX в. для алгебраических уравнений степени выше четвертой неоднократно предпринимались попытки представления решения в радикалах, т.е. в виде выражения, содержащего только коэффициенты алгебраического уравнения и операции сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корня целой степени. Однако эти попытки оказались безуспешными в общем случае.

В XIX веке П. Руффини, Н. Абель, Э. Галуа установили, что в общем случае решение алгебраических уравнений степени выше четвертой не может быть выражено в радикалах [10] (см. также [4, 6, 11, 12]).

Важно отметить, что решение отдельных алгебраических уравнений пятой степени и выше можно выразить в радикалах. Некоторые такие уравнения можно найти в справочнике [11], где помимо решений в радикалах приводятся также решения, которые выражаются в терминах специальных функций (для алгебраических уравнений пятой степени см. также [12]).

Далее будут рассматриваться алгебраические уравнения и системы алгебраических уравнений, которые обладают теми или иными свойствами симметрии, что позволяет их значительно упрощать. Для лучшего понимания материала, следуя принципу «от простого к сложному», сначала кратко излагаются известные факты, а затем описываются оригинальные результаты.

1. ПРОСТЕЙШИЕ СИММЕТРИИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ПОНИЖАЮЩИЕ ПОРЯДОК АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1°. Под симметриями алгебраических уравнений будут пониматься преобразования, сохраняющие вид уравнений. Ниже приведены примеры алгебраических уравнений, которые сохраняют вид при некоторых простых преобразованиях.

Пример 1. Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + a_{2n-4}x^{2n-4} + \dots + a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = 0, \quad (2)$$

содержащее только четные степени. Биквадратное уравнение является частным случаем уравнения (2) при $n = 2$. Замена

$$x = -\bar{x} \quad (3)$$

приводит точно к такому же уравнению для $\bar{x}$. Говорят, что уравнение (2) инвариантно относительно преобразования (3). Отсюда следует, что если уравнение (2) имеет решение $x = x_1$, то оно имеет также другое решение

$$x = -x_1.$$

Возводя в квадрат обе части (3), получим простейшую алгебраическую функцию, которая сохраняет вид при преобразовании (3):

$$x^2 = \bar{x}^2. \quad (4)$$

Эта функция и является инвариантом преобразования (3). Если выбирать инвариант (4) за новую переменную, $z = x^2$, то уравнение (2) порядка $2n$ преобразуется к уравнению порядка n :

$$a_{2n}z^n + a_{2n-2}z^{n-1} + a_{2n-4}z^{n-2} + \dots + a_4z^2 + a_2z + a_0 = 0. \quad (5)$$

Таким образом, в данном случае переход от исходной переменной x к инварианту преобразования (4) $z = x^2$ позволяет упростить рассматриваемое уравнение (понизить его порядок в два раза).

2°. Рассмотрим теперь более общее, чем (5), алгебраическое уравнение четной степени $2n$:

$$P_{2n}(x) = 0, \quad (6)$$

которое может содержать младшие члены с нечетными степенями.

Утверждение 1. Пусть левая часть уравнения (6) для некоторого λ и любого x тождественно удовлетворяет соотношению $P_{2n}(x) = P_{2n}(\lambda - x)$. Тогда исходное уравнение с

помощью подстановки $z = \left(x - \frac{1}{2}\lambda\right)^2$ сводится

к более простому алгебраическому уравнению степени n .

Утверждение 1 нетрудно доказать, используя соотношения

$$\begin{aligned} P_{2n}(x) &= \frac{1}{2} [P_{2n}(x) + P_{2n}(\lambda - x)] = \\ &= \frac{1}{2} \left[P_{2n}\left(\frac{1}{2}\lambda + y\right) + P_{2n}\left(\frac{1}{2}\lambda - y\right) \right], \quad (7) \\ y &= x - \frac{1}{2}\lambda. \end{aligned}$$

Из (7) следует, что уравнение (6), записанное в терминах новой переменной y , не меняется при замене y на $-y$. Поэтому его левую часть можно представить в виде линейной комбинации

ции только четных степеней y . Далее делается замена $z = y^2$ (z – инвариант преобразования $\bar{y} = -y$), понижающая вдвое порядок уравнения.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$(x+a)^{2n} + (x+b)^{2n} - c = 0, \quad (8)$$

которое является частным случаем уравнения (6).

Нетрудно проверить, что левая часть (8) не изменится, если x заменить на $\lambda - x$, где $\lambda = -a - b$. Поэтому исходное уравнение после возведения в степень $2n$ выражений в его левой части и подстановки $z = \left[x + \frac{1}{2}(a+b) \right]^2$ сводится к уравнению степени n .

3°. Рассмотрим теперь алгебраическое уравнение нечетной степени $2n + 1$:

$$P_{2n+1}(x) = 0. \quad (9)$$

Утверждение 2. Пусть левая часть уравнения (9) для некоторого λ тождественно удовлетворяет соотношению

$$P_{2n+1}(x) = -P_{2n+1}(\lambda - x).$$

Тогда исходное уравнение имеет корень $x = \frac{1}{2}\lambda$, и его левая часть может быть представлена в виде

$$P_{2n+1}(x) = \left(x - \frac{1}{2}\lambda \right) Q_{2n}(x), \quad (10)$$

где многочлен четной степени $Q_{2n}(x)$ тождественно удовлетворяет соотношению $Q_{2n}(x) = Q_{2n}(\lambda - x)$. В силу утверждения 1 уравнение $Q_{2n}(x) = 0$ с помощью подстановки

$z = \left(x - \frac{1}{2}\lambda \right)^2$ сводится к более простому алгебраическому уравнению степени n .

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$(x+a)^{2n+1} + (x+b)^{2n+1} + c(2x+a+b) = 0, \quad (11)$$

которое является частным случаем уравнения (9).

Нетрудно проверить, что знак левой части (11) изменится на противоположный, если x заменить на $\lambda - x$, где $\lambda = -a - b$. Поэтому исходное уравнение имеет корень $x = \frac{1}{2}\lambda = -\frac{1}{2}(a+b)$, и его левая часть может быть представлена в виде (10).

4°. Рассмотрим возвратное алгебраическое уравнение четной степени

$$a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + a_2 x^{2n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_0 \neq 0). \quad (12)$$

Левая часть данного уравнения называется *возвратным многочленом* [13] (коэффициенты этого многочлена, одинаково удаленные от его начала и конца, равны).

В уравнении (12) сделаем замену

$$x = \frac{1}{\bar{x}}. \quad (13)$$

После умножения на $\bar{x}^{2n}$ получим точно такое же уравнение. Отсюда следует, что если уравнение (12) имеет решение $x = b$, то оно имеет также другое решение $x = 1/b$.

Нетрудно проверить, что простейший инвариант преобразования (13) имеет вид

$$z = x + \frac{1}{x} = \bar{x} + \frac{1}{\bar{x}}. \quad (14)$$

Утверждение 3 (см. [14, 15]). Возвратное уравнение четного порядка допускает понижение порядка с помощью подстановки (14). В результате для новой переменной z получается алгебраическое уравнение порядка n .

Утверждение 4 (см. [14, 15]). В общем случае возвратное алгебраическое уравнение нечетного порядка $P_{2n+1}(x) = 0$, где $P_{2n+1}(x) \equiv a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + a_2 x^{2n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, имеет корень $x = -1$, а его левая часть допускает представление

$$P_{2n+1}(x) = (x+1)Q_{2n}(x),$$

где $Q_{2n}(x)$ – возвратный многочлен степени $2n$.

Из утверждения 4 следует, что возвратное уравнение порядка $2n + 1$ после деления на $(x + 1)$ и введения новой переменной (14) сводится к уравнению порядка n .

5°. Обобщенные возвратные уравнения

$$a_0 \beta^n x^{2n} + a_1 \beta^{n-1} x^{2n-1} + \dots + a_{n-1} \beta x^{n+1} + a_n x^n + \gamma a_{n-1} x^{n-1} + \gamma^2 a_{n-2} x^{n-2} + \dots + \gamma^{n-1} a_1 x + \gamma^n a_0 = 0 \quad (a_0, \beta, \gamma \neq 0)$$

не меняются при преобразовании

$$x = \frac{\gamma}{\beta \bar{x}}.$$

Простейший инвариант этого преобразования имеет вид

$$z = \beta x + \frac{\gamma}{x} = \beta \bar{x} + \frac{\gamma}{\bar{x}}.$$

Переход в исходном уравнении $2n$ -го порядка от x к новой переменной z приводит к более простому уравнению n -го порядка.

2. СИММЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1°. Сначала дадим некоторые определения и кратко опишем изложенные в [14, 16] наиболее важные факты, касающиеся симметрических систем алгебраических уравнений, которые нам понадобятся далее для изложения оригинальной части статьи.

Многочлен $P_s(x, y)$ от двух переменных называется *симметрическим*, если он не меняется при перестановке аргументов: $P_s(x, y) = P_s(y, x)$. В терминах преобразований симметрический многочлен определяется как многочлен, сохраняющий вид при преобразовании $x = \bar{y}, y = \bar{x}$.

Простейшие симметрические многочлены

$$\sigma_1 = x + y, \quad \sigma_2 = xy \quad (15)$$

называются *элементарными*. Эти многочлены являются простейшими алгебраическими инвариантами, которые не меняются при перестановке аргументов.

Обозначим

$$s_n = x^n + y^n, \quad (16)$$

где n – целое положительное число.

Справедлива рекуррентная формула

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2},$$

которая дает возможность последовательно выражать суммы степеней вида (16) через элементарные многочлены. Более удобной является формула Варинга [14]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} s_k &= \frac{1}{k} \sigma_1^k - \frac{(k-2)!}{1!(k-2)!} \sigma_1^{k-2} \sigma_2 + \\ &+ \frac{(k-3)!}{2!(k-4)!} \sigma_1^{k-4} \sigma_2^2 - \frac{(k-4)!}{3!(k-6)!} \sigma_1^{k-6} \sigma_2^3 + \dots, \end{aligned}$$

которая позволяет в явном виде сразу получать искомое представление для суммы степеней.

Утверждение 5. Любой симметрический многочлен от двух переменных может быть единственным образом выражен через элементарные многочлены (15).

Доказательство этого утверждения можно найти, например, в [14, 16].

Для решения систем двух алгебраических уравнений

$$P_s(x, y) = 0, \quad Q_s(x, y) = 0, \quad (17)$$

где P_s и Q_s – симметрические многочлены, полезно в качестве новых переменных использовать элементарные симметрические многочлены (15), что приводит к упрощению исходной системы. Система (17) не меняется при перестановке аргументов $x \leftrightarrow y$. Поэтому подобные системы обладают следующим свойством: если система имеет решение $x = x_0, y = y_0$, то она имеет также решение $x = y_0, y = x_0$.

Если σ_1 и σ_2 – решение преобразованной системы, то искомые величины x и y определяются из простой системы (15), решение которой сводится к квадратному уравнению

$$x^2 - \sigma_1 x + \sigma_2 = 0. \quad (18)$$

Пример 4. Рассмотрим нелинейную систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} x^2 + axy + y^2 &= b, \\ x^4 + cx^2 y^2 + y^4 &= d, \end{aligned} \quad (19)$$

которая содержит четыре свободных параметра a, b, c, d и не меняется при перестановке аргументов.

Переходя в (19) от x, y к переменным (15) и учитывая формулы

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \\ x^4 + y^4 &= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 y^2 = \\ &= (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 - 2\sigma_2^2 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2 \sigma_2 + 2\sigma_2^2, \end{aligned} \quad (20)$$

получим

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 + (a-2)\sigma_2 &= b, \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2 \sigma_2 + (c+2)\sigma_2^2 &= d. \end{aligned} \quad (21)$$

Исключая из уравнений σ_1 , приходим к квадратному уравнению

$$(a^2 + c - 2)\sigma_2^2 - 2ab\sigma_2 + b^2 - d = 0.$$

Дальнейшая процедура определения решений элементарна и здесь не приводится.

Системы уравнений вида (17) и родственные алгебраические системы с тремя и более неизвестными, уравнения которых не меняются при любой перестановке аргументов, будем назы-

вать классическими симметрическими системами алгебраических уравнений (или кратко симметрическими системами алгебраических уравнений).

2°. Отдельные алгебраические уравнения имеют скрытые (неявные, неочевидные) симметрии и путем введения новой дополнительной переменной могут сводиться к симметрическим системам алгебраических уравнений. Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

Пример 5. Рассмотрим алгебраическое уравнение шестого порядка

$$(a - x^2)^3 = (b - x^3)^2, \quad (22)$$

которое содержит два свободных параметра a и b и в развернутом виде может быть записано в виде

$$2x^6 - 3ax^4 - 2bx^3 + 3a^2x^2 + b^2 - a^3 = 0. \quad (23)$$

Уравнение (22) и эквивалентное ему уравнение (23) очевидными симметриями не обладают. Покажем, что решения уравнения (22) можно выразить через решения алгебраической симметрической системы

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a, \\ x^3 + y^3 &= b. \end{aligned} \quad (24)$$

Действительно, прямое исключение из системы (24) дополнительной переменной y приводит к уравнению (22).

Система (24) решается путем перехода к новым переменным (15). Учитывая первое равенство (20) и соотношение

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2,$$

в результате получим более простую систему

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 - 2\sigma_2 &= a, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 &= b. \end{aligned}$$

Исключив σ_2 , приходим к кубическому уравнению

$$\sigma_1^3 - 3a\sigma_1 + 2b = 0. \quad (25)$$

Поскольку корни любого кубического уравнения можно выразить в радикалах [3], таким образом конструктивно доказано, что все корни

двухпараметрического уравнения шестой степени (22) можно выразить в радикалах.

Замечание 3. Симметрические системы алгебраических уравнений с тремя и более неизвестными, сохраняющие вид при перестановках переменных, и методы их решения рассматриваются в книге [14]. В этой книге также показано, как симметрические многочлены могут использоваться для доказательств неравенств и для решения некоторых иррациональных уравнений.

3. СИММЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

1°. Многочлен $Q_a(x, y)$ от двух переменных называется *антисимметрическим*, если он меняет знак при перестановке аргументов, т.е. $Q_a(x, y) = -Q_a(y, x)$.

Два основных свойства антисимметрических многочленов [14]:

$$\begin{aligned} 1) \quad Q_a(x, x) &= 0; \\ 2) \quad Q_a(x, y) &= (x - y)R_s(x, y), \end{aligned} \quad (26)$$

где $R_s(x, y)$ – симметрический многочлен.

2°. Рассмотрим симметрическую систему алгебраических уравнений смешанного типа

$$\begin{aligned} P_s(x, y) &= 0, \\ Q_a(x, y) &= 0, \end{aligned} \quad (27)$$

в которой первый многочлен $P_s(x, y)$ является симметрическим, а второй многочлен $Q_a(x, y)$ – антисимметрическим. При перестановке аргументов $x \leftrightarrow y$ первое уравнение системы (27) не меняется, а левая часть второго уравнения меняет знак на противоположный (после умножения на -1 это уравнение переходит в исходное уравнение). Поэтому подобные системы обладают следующим свойством: если система (27) имеет решение $x = x_0, y = y_0$, то она имеет также решение $x = y_0, y = x_0$.

В силу второго свойства (26) систему (27) можно представить в виде

$$\begin{aligned} P_s(x, y) &= 0, \\ (x - y)R_s(x, y) &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Второму уравнению (28) можно удовлетворить, приравняв нулю любой из двух сомножителей в его левой части. Поэтому система (27) распадается на две более простые подсистемы

$$\begin{aligned} P_s(x, x) &= 0, \quad y = x; \\ P_s(x, y) &= 0, \quad R_s(x, y) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Вторая подсистема (29) является симметрической и может быть решена методом, описанным в разд. 2.

Пример 6. Рассмотрим двухпараметрическую смешанную алгебраическую систему вида (27):

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a, \\ x^3 + by &= y^3 + bx. \end{aligned} \quad (30)$$

Перенеся в (30) все члены в левую часть уравнений, получим частный случай системы (27) при

$$\begin{aligned} P_s(x, y) &= x^2 + y^2 - a, \\ Q_a(x, y) &= x^3 - y^3 + b(y - x). \end{aligned}$$

Второе уравнение (30) можно представить в виде произведения

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - b) = 0.$$

Поэтому исходная система (30) распадается на две простые подсистемы

$$\begin{aligned} 2x^2 - a &= 0, \quad y = x; \\ x^2 + y^2 - a &= 0, \quad x^2 + xy + y^2 - b = 0, \end{aligned}$$

решение которых элементарно.

Замечание 4. В некоторых случаях система двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными, состоящая из несимметрических уравнений, может быть сведена к симметрической системе вида (17) путем введения новых неизвестных с помощью преобразования масштабирования вида $x = \mu \bar{x}$, $y = \lambda \bar{y}$, где μ и λ – искомые параметры.

4. НЕКЛАССИЧЕСКИЕ СИММЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1°. Рассмотрим теперь систему алгебраических уравнений специального вида

$$\begin{aligned} P(x, y) + Q_s(x, y) &= 0, \\ P(y, x) + Q_s(x, y) &= 0, \end{aligned} \quad (31)$$

где $P(x, y)$ – некоторый заданный многочлен от двух переменных, а $Q_s(x, y)$ – симметрический многочлен.

При перестановке аргументов уравнения (31) меняются местами. Такие системы будем называть *неклассическими симметрическими системами алгебраических уравнений*.

Решение системы уравнений (31) можно свести к решению более простой симметрической системы и решению одного независимого уравнения. Для этого сначала, почленно сложив оба уравнения, получим уравнение

$$P(x, y) + P(y, x) + 2Q_s(x, y) = 0, \quad (32)$$

которое не меняется при перестановке аргументов. Затем, вычитая из первого уравнения (31) второе уравнение, имеем

$$P(x, y) - P(y, x) = 0. \quad (33)$$

Легко проверить, что в левой части уравнения (33) стоит антисимметрический многочлен. В силу второго свойства (26) справедливо представление

$$P(x, y) - P(y, x) = (x - y)R_s(x, y), \quad (34)$$

где $R_s(x, y)$ – симметрический многочлен от двух переменных. Поэтому уравнение (33) можно записать в виде

$$(x - y)R_s(x, y) = 0. \quad (35)$$

Таким образом, исходная система (31) эквивалентна системе, состоящей из двух уравнений (32) и (35). Уравнению (35) можно удовлетворить, приравняв нулю любой из двух сомножителей в его левой части. В результате система (32) и (35) распадается на две более простые подсистемы

$$\begin{aligned} P(x, y) + P(y, x) + 2Q_s(x, y) &= 0, \quad y = x; \\ P(x, y) + P(y, x) + 2Q_s(x, y) &= 0, \quad R_s(x, y) = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Первая подсистема (36) упрощается после подстановки $y = x$ из второго уравнения и может быть записана в виде

$$P(x, x) + Q_s(x, x) = 0, \quad y = x.$$

Вторая подсистема (36) является симметрической и может быть решена методом, описанным в разд. 2.

Пример 7. Рассмотрим трехпараметрическую алгебраическую систему вида (31):

$$\begin{aligned} x &= ax^2 + by^2 + c, \\ y &= ay^2 + bx^2 + c, \end{aligned} \quad (37)$$

где $a \neq \pm b$. Перенеся в (37) все члены в правую часть уравнений, получим частный случай системы (31) при

$$P(x, y) = ax^2 - x + by^2 + c, \quad Q_s(x, y) \equiv 0.$$

Складывая и вычитая почленно уравнения системы (37), приходим к эквивалентной системе уравнений

$$\begin{aligned}(a+b)(x^2+y^2)-(x+y)+2c &= 0, \\ (x-y)[(a-b)(x+y)-1] &= 0,\end{aligned}$$

которая распадается на две простые подсистемы

$$\begin{aligned}(a+b)x^2-x+c &= 0, \quad y=x; \\ (a+b)(x^2+y^2)-(x+y) &= 0, \\ (a-b)(x+y)-1 &= 0.\end{aligned}$$

Решение этих подсистем ввиду элементарности опускается.

2°. К системам типа (31) при $Q_5(x, y) \equiv 0$ сводятся алгебраические уравнения вида

$$f(f(x)) = x, \quad (38)$$

в левой части которых стоит вторая итерация заданного многочлена $f(x)$. Корни более простого уравнения $f(x) = x$ являются также корнями исходного уравнения (38) (это свойство имеет место и для более сложных трансцендентных уравнений, когда $f(x)$ – любая заданная непрерывная функция).

Введение новой переменной $y = f(x)$ позволяет из уравнения (38) получить эквивалентную алгебраическую систему

$$y = f(x), \quad x = f(y), \quad (39)$$

которая является частным случаем системы (31) (после переноса всех членов уравнений (39) в левую часть) и решается методом, описанным в п. 1°.

Пример 8. Рассмотрим алгебраическое уравнение четвертой степени

$$(x^2+a)^2+a=x, \quad (40)$$

которое содержит свободный параметр a и может быть представлено в виде уравнения (38) при $f(x) = x^2 + a$.

Уравнение (40) путем введения новой переменной $y = x^2 + a$ сводится к неклассической симметрической системе вида (31):

$$y = x^2 + a, \quad x = y^2 + a. \quad (41)$$

Складывая и вычитая уравнения (41), как описано в п. 1°, после элементарных преобразований и разложения редуцированного уравнения на множители имеем

$$\begin{aligned}x^2+y^2-x-y+2a &= 0, \\ (y-x)(x+y+1) &= 0.\end{aligned} \quad (42)$$

Приравняв далее нулю сомножители в левой части второго уравнения (42), в итоге получим два независимых квадратных уравнения

$$\begin{aligned}x^2-x+a &= 0, \quad y=x; \\ x^2+x+a+1 &= 0, \quad y=-x-1,\end{aligned}$$

которые определяют четыре корня x исходного уравнения (40).

Пример 9. Рассмотрим более сложное алгебраическое уравнение девятой степени вида (38) при $f(x) = x^3 + a$:

$$(x^3+a)^3+a=x. \quad (43)$$

Это уравнение содержит свободный параметр a и сводится к неклассической симметрической системе

$$y = x^3 + a, \quad x = y^3 + a. \quad (44)$$

Складывая и вычитая уравнения (44), как описано в п. 1°, после элементарных преобразований приходим к эквивалентной системе уравнений

$$\begin{aligned}x^3+y^3-x-y+2a &= 0, \\ (y-x)(x^2+xy+y^2+1) &= 0,\end{aligned}$$

которая распадается на две более простые подсистемы

$$\begin{aligned}x^3-x+a &= 0, \quad y=x; \\ x^3+y^3-x-y+2a &= 0, \quad x^2+xy+y^2+1=0.\end{aligned} \quad (45)$$

Решения первой подсистемы (45) определяются корнями кубического уравнения, которое позволяет найти три корня исходного уравнения (43). Для решения второй системы (45), которая является симметрической и определяет оставшиеся шесть корней уравнения (43), введем новые переменные по формулам (15). В результате получим более простую систему

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1 + 2a = 0, \quad \sigma_1^2 - \sigma_2 + 1 = 0. \quad (46)$$

Исключив отсюда σ_2 , приходим к кубическому уравнению для σ_1 :

$$\sigma_1^3 + 2\sigma_1 - a = 0. \quad (47)$$

Корни этого уравнения и равенство $\sigma_2 = \sigma_1^2 + 1$, которое следует из второго уравнения (46), дают три пары действительных или комплексных чисел σ_{1k}, σ_{2k} ($k = 1, 2, 3$). Подставив эти числа в квадратное уравнение (18), можно найти шесть корней исходного уравнения (43).

Поскольку корни любого кубического уравнения можно выразить в радикалах, таким образом конструктивно доказано, что все корни однопараметрического уравнения девятой степени (43) можно выразить в радикалах.

Замечание 5. Если нас интересуют только действительные корни алгебраического уравнения (43), то вторую систему (45) надо отбросить, поскольку в этом случае имеет место неравенство

$$x^2 + xy + y^2 + 1 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 1 > 0.$$

3°. Покажем, что алгебраические уравнения вида

$$f(af(x) + x + ab) + f(x) + 2b = 0, \quad (48)$$

где $f(x)$ – заданный многочлен, a и b – свободные параметры, обладают скрытой симметрией и сводятся к системам типа (31) при $Q_s(x, y) \equiv 0$. Отметим, что корни более простого уравнения $f(x) = -b$ являются также корнями исходного уравнения (48) (это свойство имеет место и для более сложных трансцендентных уравнений, когда $f(x)$ – любая заданная непрерывная функция).

Положим

$$y = af(x) + x + ab. \quad (49)$$

В результате уравнение (48) принимает вид

$$f(y) + f(x) + 2b = 0. \quad (50)$$

Исключив из (49) и (50) функцию $f(x)$, получим соотношение

$$x = af(y) + y + ab. \quad (51)$$

Уравнения (49) и (51) образуют систему вида (31):

$$y = af(x) + x + ab, \quad x = af(y) + y + ab. \quad (52)$$

Пример 10. Рассмотрим однопараметрическое алгебраическое уравнение четвертой степени

$$(x^2 + x + b)^2 + x^2 + 2b = 0, \quad (53)$$

которое является частным случаем уравнения (48) (при $f(x) = x^2$, $a = 1$) и сводится к неклассической симметрической системе

$$y = x^2 + x + b, \quad x = y^2 + y + b. \quad (54)$$

Складывая и вычитая уравнения (54), получим эквивалентную систему уравнений, которую можно представить в виде

$$x^2 + y^2 + 2b = 0, \quad (y - x)(x + y + 2) = 0. \quad (55)$$

Приравняв нулю сомножители в левой части второго уравнения, после элементарных преобразований в итоге для переменной x приходим к двум независимым квадратным уравнениям

$$\begin{aligned} x^2 + b &= 0, & y &= x; \\ x^2 + 2x + b + 2 &= 0, & y &= -x - 2. \end{aligned}$$

Эти уравнения имеют корни

$$\begin{aligned} x_1 &= -\sqrt{-b}, & x_2 &= \sqrt{-b}, \\ x_3 &= -1 - \sqrt{-b-1}, & x_4 &= -1 + \sqrt{-b-1}, \end{aligned}$$

которые и определяют искомые решения исходного уравнения (55).

Пример 11. Можно показать, что однопараметрическое алгебраическое уравнение девятой степени

$$(x^3 + x + b)^3 + x^3 + 2b = 0,$$

которое является частным случаем уравнения (48) (при $f(x) = x^3$, $a = 1$), разрешимо в радикалах.

Замечание 6. Более сложную алгебраическую систему, которая получается из (31) формальной заменой симметрического многочлена $Q_s(x, y)$ на произвольный многочлен $Q(x, y)$, можно упростить, вычитая одно уравнение системы из другого. В результате приходим к уравнению вида (35), которое далее следует рассмотреть вместе с одним из уравнений исходной системы.

4°. Иррациональные уравнения вида

$$P_s(\sqrt[n]{a-x}, \sqrt[n]{b+x}) = 0, \quad (56)$$

где $P_s(y, z)$ – симметрический многочлен, n – натуральное число, а a и b – свободные параметры, путем введения новых переменных

$$y = \sqrt[n]{a-x}, \quad z = \sqrt[n]{b+x} \quad (57)$$

сводятся к симметрической системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} P_s(y, z) &= 0, \\ y^n + z^n &= a + b. \end{aligned}$$

Замечание 7. Если n – четное число, то перед любым корнем в (56)–(57) может стоять также знак «минус». Для иллюстрации сказанного рассмотрим конкретный пример.

Пример 12. Трехпараметрические иррациональные уравнения вида

$$\sqrt[4]{a-x} \pm \sqrt[4]{b+x} = c$$

путем введения новых переменных

$$y = \sqrt[4]{a-x}, \quad z = \pm \sqrt[4]{b+x}$$

сводятся к симметрической системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} y + z &= c, \\ y^4 + z^4 &= a + b, \end{aligned}$$

которая решается стандартным способом, описанным в разд. 2.

КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

В данной статье рассматриваются классические и неклассические симметрии алгебраических уравнений и систем алгебраических уравнений. Описаны преобразования, понижающие порядок некоторых алгебраических уравнений. Показано, что путем введения новой дополнительной переменной некоторые алгебраические уравнения, имеющие скрытые симметрии, можно преобразовать к классическим симметрическим системам алгебраических уравнений. Приведены примеры нетривиальных алгебраических уравнений шестой и девятой степени, содержащие один или несколько свободных параметров, которые можно разрешить в радикалах. Доказано, что алгебраические системы смешанного типа, состоящие из симметрических и антисимметрических многочленов, можно преобразовать к более простым системам. Показано, что неклассические симметрические системы двух алгебраических уравнений, которые меняются местами при перестановке неизвестных, можно преобразовать к более простым симметрическим системам и одному независимому уравнению. Установлено, что уравнения специального вида, содержащие вторую итерацию заданного многочлена, можно преобразовать к неклассическим симметрическим системам алгебраических уравнений. Рассматриваются иррациональные уравнения, которые можно преобразовать к симметрическим системам алгебраических уравнений путем введения двух новых переменных.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят А.В. Аксенова за полезные обсуждения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 124012500440-9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Turnbull H.W. Theory of Equations. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1947.
2. Van der Waerden B.L. A History of Algebra: From Al-Khwarizmi to Emmy Noether. Berlin: Springer, 1985.
3. Korn G.A., Korn T.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. New York: Dover Publ., 2000.
4. Polyanin A.D., Manzhirov A.V. Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. Boca Raton – London: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.
5. Zucker I.J. The cubic equation – a new look at the irreducible case // The Mathematical Gazette, 2008. V. 92. № 525. P. 264–268.
6. Bronshtein I.N., Semendyayev K.A. Handbook of Mathematics, 6th ed. Berlin: Springer, 2015.
7. Chaves-Pichardo M., Martinez-Crus M.A., Trejo-Martinez A., Vega-Crus A.B. On the practicality of the analytical solutions for all third and fourth-degree algebraic equations with real coefficients // Mathematics, 2023. V. 11. № 6. 1447.
8. Siadat V.M., Tholen A. Omar Khayyam. Geometric Algebra and Cubic Equations // Math Horizons, 2021. V. 28. № 1. P. 12–15.
9. El Naschie M.S. The fundamental algebraic equations of the constants of nature // Chaos, Solitons & Fractals, 2008. V. 35. No. 2. P. 320–322.
10. Struik D.J. (ed.) A Source Book in Mathematics: 1200–1800. Princeton, Princeton University Press, 1986.
11. Polyanin A.D. Handbook of Exact Solutions to Mathematical Equations. Boca Raton, CRC Press, 2024.
12. King R.B. Beyond the Quartic Equation. Boston, Birkhäuser, 1996.
13. Математическая энциклопедия. Т. 1. М.: Советская энциклопедия, 1977. С. 740–741.
14. Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я. Симметрия в алгебре, 2-е изд. М.: Наука, 2002.
15. Кудряшов Н.А. Симметрия алгебраических и дифференциальных уравнений // Соросовский образовательный журнал, 1998. № 9. С. 104–110.
16. Blum-Smith B., Coskey S. The fundamental theorem on symmetric polynomials: History's first whiff of Galois theory // The College Mathematics Journal, 2017. V. 48. № 1. P. 18–29.

NON-CLASSICAL AND HIDDEN SYMMETRIES OF NONLINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS AND SYSTEMS

A.D. Polyinin^{1,*}, I.K. Shingareva^{2,**}

¹ *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526, Russia*

² *Department of Mathematics, University of Sonora, Sonora, 83000, Mexico*

*e-mail: polyinin@ipmnet.ru

**e-mail: inna.shingareva@unison.mx

Received March 21, 2024; revised March 21, 2024; accepted April 19, 2024

Classical and non-classical symmetries of algebraic equations and systems of algebraic equations are considered. Transformations that preserve the form of some algebraic equations, as well as transformations that reduce the order of these equations, are described. It is shown that individual algebraic equations with hidden symmetries can be reduced to classical symmetric systems of algebraic equations by introducing a new additional variable. It has been established that symmetric systems of algebraic equations of mixed type, consisting of symmetric and antisymmetric polynomials, can be converted to simpler systems. A method is presented for solving non-classical symmetric systems of two algebraic equations that change places when the unknowns are rearranged. Algebraic equations containing the second iteration of a given polynomial are studied, which are reduced to non-classical symmetric systems of equations. Examples are given of solving specific algebraic equations and systems of such equations that admit explicit and hidden symmetries. In particular, nontrivial algebraic equations of the sixth and ninth degrees are considered, containing free parameters that admit solutions in radicals. Irrational equations are described, which, by introducing two new variables, are reduced to symmetric systems of algebraic equations.

Keywords: algebraic equations, symmetric algebraic systems, non-classical symmetries, hidden symmetries, roots of algebraic equations, solutions in radicals.

REFERENCES

1. *Turnbull H.W.* Theory of Equations. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1947.
2. *Van der Waerden B.L.* A History of Algebra: From Al-Khwarizmi to Emmy Noether. Berlin: Springer, 1985.
3. *Korn G.A., Korn T.M.* Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. New York: Dover Publ., 2000.
4. *Polyinin A.D., Manzhinov A.V.* Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. Boca Raton – London: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.
5. *Zucker I.J.* The cubic equation – a new look at the irreducible case. The Mathematical Gazette, 2008. Vol. 92. No. 525. Pp. 264–268.
6. *Bronshtein I.N., Semendyayev K.A.* Handbook of Mathematics, 6th ed. Berlin: Springer, 2015.
7. *Chaves-Pichardo M., Martinez-Crus M.A., Trejo-Martinez A., Vega-Crus A.B.* On the practicality of the analytical solutions for all third and fourth-degree algebraic equations with real coefficients. Mathematics, 2023. Vol. 11. No. 6. 1447.
8. *Siadat V.M., Tholen A. Omar Khayyam.* Geometric Algebra and Cubic Equations. Math Horizons, 2021. Vol. 28. No. 1. Pp. 12–15.
9. *El Naschie M.S.* The fundamental algebraic equations of the constants of nature. Chaos, Solitons & Fractals, 2008. Vol. 35. No. 2. Pp. 320–322.
10. *Struik D.J. (ed.)* A Source Book in Mathematics: 1200–1800. Princeton, Princeton University Press, 1986.
11. *Polyinin A.D.* Handbook of Exact Solutions to Mathematical Equations. Boca Raton, CRC Press, 2024.
12. *King R.B.* Beyond the Quartic Equation. Boston, Birkhäuser, 1996.
13. *Matematicheskaya ènciklopediya. T.1. [Encyclopedia of Mathematics Vol.1].* Moscow, Sovetskaya Entsiklopediya Publ., 1977. Pp. 740–741 (in Russian).
14. *Boltyansky V.G., Vilenkin N.Ya.* Simmetriya v algebre, 2-ye izd. [Symmetry in Algebra, 2nd ed. Moscow, Nauka Publ., 2002].
15. *Kudryashov N.A.* Simmetriya algebraicheskikh i differentsial'nykh uravnenij [Symmetry of algebraic and differential equations]. Soros Educational Journal, 1998. No. 9, Pp. 104–110 (in Russian).
16. *Blum-Smith B., Coskey S.* The fundamental theorem on symmetric polynomials: History's first whiff of Galois theory. The College Mathematics Journal, 2017. Vol. 48. No. 1. Pp. 18–29.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.6

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ С ЛИМИТЕРОМ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

В.В. Завьялов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е.И. Забабахина», Снежинск, Челябинская область, 456770, Россия
e-mail: v.v.zavyalov@vniitf.ru

Поступила в редакцию 25.03.2024 г.

После доработки: 05.08. 2024

Принята к публикации: 06.08.2024

Численное моделирование нестационарного процесса переноса излучения в кинетической модели является весьма трудоемкой задачей. Сложность обусловлена большой размерностью задачи и, дополнительно, для задач переноса лучистой энергии – сильной нелинейностью. Для детерминированных подходов, основанных на дискретизации направления полета частиц, приходится решать систему гиперболических уравнений большой размерности. Соответственно, желательно чтобы схемы, применяемые для численного моделирования, были экономичными, как по использованию памяти, так и по времени расчета и показывали приемлемые результаты для широкого диапазона чисел Куранта. В случае лучистого переноса ситуация усугубляется сильной нелинейностью решаемой задачи, что приводит к существенному изменению свойств среды на временных шагах. Это налагает повышенные требования к монотонности схем при изменении оптической толщины. Согласно теореме Годунова среди двухслойных по времени линейных схем нет монотонных схем повышенного порядка аппроксимации. Одним из направлений решения этой проблемы является разработка NFC (Nonlinear Flux Correction) схем сквозного счета, в которых повышенный порядок точности на гладких решениях и монотонность достигаются за счет нелинейной коррекции потоков. Численное решение монотонизируется с помощью специального алгоритма в окрестностях больших градиентов точного решения. В работе приводится краткий обзор и характеристика конечно-разностной схемы, разработанной и много лет успешно применяемой в РФЯЦ-ВНИИТФ для решения проблем переноса излучения. Для монотонизации схемы используется методология TVD (Total Variation Diminishing).

Ключевые слова: кинетическое уравнение переноса, TVD, разностная схема, численный метод.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.348

EDN HZCNVX

ВВЕДЕНИЕ

Численное моделирование нестационарного переноса излучения в кинетической постановке, особенно с учетом энергетического спектра, является весьма трудоемкой вычислительной задачей. В трехмерном случае размерность фазового пространства решения достигает семи. Для детерминированных подходов распространенной практикой является дискретизация пространства направлений полета частиц и интегрирование уравнения переноса вдоль каждой траектории. Возникающие при аппроксимации системы дискретных уравнений могут иметь внушительную размерность и требовать значительных объемов памяти и больших времен для обращения [1], [2]. Соответственно, желательно, чтобы применяемые схемы были экономичными, как по использованию памяти, так и по времени расчета и показывать приемлемые ре-

зультаты для широкого диапазона чисел Куранта. В случае численного моделирования лучистого переноса ситуация усугубляется сильной нелинейностью решаемой задачи [2]. Свойства среды могут сильно меняться на временных шагах и даже на итерациях. Это налагает повышенные требования к монотонности схем. Согласно теореме Годунова [3] среди двухслойных по времени линейных схем нет монотонных схем повышенного порядка аппроксимации. Одним из направлений решения этой проблемы является разработка NFC (Nonlinear Flux Correction) схем сквозного счета, в которых повышенный порядок точности на гладких решениях и монотонность достигаются за счет нелинейной коррекции потоков. Численное решение монотонизируется с помощью специального алгоритма в окрестностях больших градиентов точного решения. В работе [4] было рассмотрено два варианта нелинейной конечно-

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ С ЛИМИТЕРОМ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

разностной схемы с лимитером для решения нестационарного уравнения переноса в плоском случае. Вариант, предложенный автором, оказался более удачным и в дальнейшем много лет развивался и использовался для моделирования задач переноса нейтральных частиц в РФЯЦ-ВНИИТФ [5–14]. В работе [5] схема была обобщена на двумерный случай и для сильно неортогональных сеток А.Д. Гаджиевым предложено применять метод наименьших квадратов к оператору дивергенции, что может улучшать решение. Для сетки из произвольных выпуклых многоугольников в двумерной геометрии модификация схемы предложена в [15]. Различные варианты схемы рассматривались А.А. Шестаковым в [7], но все они по мнению автора уступают исходной схеме. Отметим, что несмотря на развитие вычислительной техники для широкого класса задач переноса излучения развиваются и используются HOLO алгоритмы [9–12] и их дальнейшие упрощения, например, P1 приближение [13–14]. Для этих гиперболических уравнений также можно применять подход из [4]. Вообще говоря, неявные схемы TVD хорошо известны и применяются на практике [16–18]. Однако их применение, как правило, приводит к трехточечному шаблону и итерационному методу их решения, что может оказываться обременительным на практике.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для упрощения рассмотрим кинетическое уравнение переноса излучения в моноэнергетическом случае, которое для изотропного рассеяния выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{\Omega} I) + \alpha I = \frac{\alpha_s}{4\pi} \int_{\Omega} I d\Omega. \quad (1)$$

Здесь $I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)$ – функция распределения частиц, $\alpha_c(\mathbf{r})$ – коэффициент ослабления, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, $\mathbf{\Omega}$ – единичный вектор в направлении полета частицы, t – время, c – скорость.

Для уравнения (1) в области Γ пространства $\mathbb{R}^{\bar{n}}$ с замкнутой границей $\bar{\Gamma}$ решается смешанная задача со следующими начальными и граничными условиями:

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t=0) = I^0(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}),$$

$$I(\mathbf{r} \in \bar{\Gamma}, \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} < 0, t) = I^-(\mathbf{r} \in \bar{\Gamma}, \mathbf{\Omega}, t),$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к $\bar{\Gamma}$.

В случае чисто поглощающей среды в плоской геометрии мы получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \mu \frac{\partial I}{\partial z} = -\alpha_c I. \quad (2)$$

Обозначим μ – косинус угла полета частиц, n – временной индекс, I_* – значение в центре ячейки, I^+ , I^- – значения на неосвещенных и на освещенных гранях соответственно. Пусть $\alpha_c = \text{const}$, тогда для равномерных сеточных шагов по пространству и времени запишем схему из [4]:

$$\begin{aligned} I_*^{n+1} &= \left(\frac{1}{c\Delta t} I_*^n + \frac{|\mu|}{\Delta z} (I^-)^{n+1} \right) \times \\ &\times \left(\frac{1}{c\Delta t} + \frac{|\mu|}{\Delta z} \hat{I}_*^n + \alpha_c \right)^{-1}, \\ I_*^n &= L \left((I^+ - I^-)_*^n, (I^+ - I^-)_{*-\text{sign}\mu}^n \right), \\ \hat{I}_*^n &= 1 + \text{sign}\mu \frac{I_*^n}{2I_*^n}, \quad (I^+)^{n+1} = \hat{I}_*^n I_*^{n+1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $L(I)$ некоторая функция-ограничитель (лимитер). Если положить ее равной 0, то мы получим хорошо известную неявную противопоточную схему первого порядка, которая в теории переноса называется шаговой (St-схема). В качестве ограничителя обычно используют односторонние производные и их добавление эквивалентно введению антидиффузии в St схему таким образом, чтобы новая схема имела бы второй порядок аппроксимации и сохраняла при этом монотонность. Поскольку $\hat{I}_*$ является дробно-линейным функционалом, то в предположении слабого изменения на итерациях можно брать его с n -го шага, что позволяет использовать экономичный алгоритм бегущего счета поскольку сводит схему к двухточечному шаблону. Это привносит в схему погрешность порядка $O(\Delta t)$, что не принципиально при аппроксимации по времени неявной схемой Эйлера. Ограничители аналогичные (3) в случае криволинейных геометрий применяются к угловым переменным.

Вообще говоря, схемы относящиеся к классу TVD (Total Variation Diminishing) уменьшают или сохраняют полную вариацию функции. Такое условие невозрастания вариации численно-

го решения, или TVD принцип, является более слабым, чем требование монотонности. Теория схем, принадлежащих к классу, удовлетворяющих критерию невозрастания полной вариации достаточно хорошо развита и продолжает совершенствоваться, например, [16–18]. Полная вариация $TV[I]$ для ограниченной функции $I(z)$ определяется как

$$TV[I] = \sup_i \sum_i \left| I(z_i) - I(z_{i-1}) \right|, \quad z_0 < z_i < \dots < z_i,$$

или для дифференцируемой функции в виде

$$TV[I] = \int_{z_0}^{z_i} \left| \frac{dI}{dz} \right| dz.$$

В статьях [4–5] показано, что рассматриваемая схема не принадлежит к классу TVD схем (не удовлетворяет критерию Хартена [16]), однако разница составляет третий порядок малости. В работах [11–12] в одномерном случае была предпринята попытка использовать величины в лимитере с текущего временного слоя. Для этого авторам пришлось дополнительно разработать итерационный процесс и решать его методом Ньютона. Ценой усложнения алгоритма и дополнительными временными расходами удалось несколько повысить точность расчетов.

Так как автор использует ограничители, удовлетворяющие критерию TVD [16], то для удобства будем называть рассматриваемую схему в дальнейшем TVD⁺.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СХЕМЫ

В стационарном режиме (2) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\mu \frac{\partial I}{\partial z} = -\alpha_c I,$$

имеющее точное решение:

$$I^+ = e^{-\alpha_c/\mu} I^-. \quad (3)$$

Соотношение (3) описывает хорошо известный закон Бугера–Ламберта в теории переноса излучения [1], [2]. Точное решение удобно использовать для численного исследования порядка сходимости схемы.

Рассмотрим следующий тест. Положим $\alpha_c = 5$, $\mu = 1$, $I^- = 10000$, $z \in [0, 1]$ и началь-

ный шаг сетки $h_0 = 0.1$. Тогда точное решение определяется формулой $I^+ = 10000e^{-5z}$. Расчеты проводились по схеме TVD⁺ на последовательно сгущающихся сетках из 10, 20, 40, 80, 160 ячеек. Использовались следующие ограничители – Ван Альбада (VA), Чакравати-Ошера (CO), SuperBee (SB) [16]

$$L_{VA}(a, b) = \frac{(a^2 + \varepsilon^2)b + (b^2 + \varepsilon^2)a}{a^2 + b^2 + 2\varepsilon^2}, \quad \varepsilon^2 = O(h^3);$$

$$L_{SB}(a, b) = \frac{1}{2} (\operatorname{sgn}(a) + \operatorname{sgn}(b)) \max \left(\min(2|a|, |b|), \min(|a|, 2|b|) \right);$$

$$L_{CO}(a, b) = \frac{1-\delta}{2} L_{MM}(a, \beta b) + \frac{1+\delta}{2} L_{MM}(\beta a, b);$$

$$L_{MM}(a, b) = \frac{1}{2} (\operatorname{sgn}(a) + \operatorname{sgn}(b)) \min(|a|, |b|).$$

Здесь $L_{MM}(a, b)$ – хорошо известный ограничитель MINMOD, δ – параметр, определяющий тип схемы и порядок аппроксимации, $0 \leq \beta \leq \frac{3-\delta}{1-\delta}$ – параметр сжатия. В расчетах использовались значения $\beta = 3$, $\delta = 1/3$.

Для сравнения использовались хорошо известные в теории переноса линейные St, DD, LC схемы [3]. Формально они имеют первый, второй и четвертый порядок точности соответственно. В LC схему в плоском стационарном случае вырождается схема DDAD, предложенная сотрудниками РФЯЦ-ВНИИТФ в [19]. К сожалению, DDAD схема немонотонна и неположительна, что потребовало дальнейших работ в этом направлении.

По данным расчетов можно вычислить порядок численной сходимости в некоторой абсолютной сеточной норме L_* по формуле

$$\alpha_{L_*} = \log_2 \frac{\|\delta I_h\|_{L_*}}{\|\delta I_{h/2}\|_{L_*}}, \quad \|\delta I_h\|_{L_*} = \|I_{\text{exact}} - I_h\|_{L_*},$$

где I_h – численное решение с шагом сетки h . Далее в табл. 1–6 приводятся результаты исследования численной сходимости в формате «абсолютная погрешность (относительная погрешность %))» в широко используемых нормах L_1, L_2, L_∞ . Также приводятся порядки численной сходимости и погрешность разности $\Delta I^+ = (I_{\text{exact}}^+ - I_h^+) / I_{\text{exact}}^+ \cdot 100\%$.

**ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ С ЛИМИТЕРОМ
ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ**

Таблица 1. Результаты для St-схемы

$1/h$	$\ \delta I_h\ _{L_1}$	$\ \delta I_h\ _{L_2}$	$\ \delta I_h\ _{L_\infty}$	α_{L_1}	α_{L_2}	α_{L_∞}	ΔI^+
10	279.45 (14.21 %)	401.48 (12.96 %)	1121.34 (57.03 %)	—	—	—	–157.37 %
20	155.89 (7.86 %)	237.82 (7.56 %)	824.97 (41.63 %)	0.84	0.76	0.44	–71.11 %
40	82.60 (4.16 %)	128.98 (4.08 %)	505.24 (25.45 %)	0.92	0.88	0.71	–33.47 %
80	42.55 (2.14 %)	67.11 (2.12 %)	280.57 (14.12 %)	0.96	0.94	0.85	–16.19 %
160	21.60 (1.08 %)	34.23 (1.08 %)	147.99 (7.45 %)	0.98	0.97	0.92	–7.95 %

Таблица 2. Результаты для DD-схемы

$1/h$	$\ \delta I_h\ _{L_1}$	$\ \delta I_h\ _{L_2}$	$\ \delta I_h\ _{L_\infty}$	α_{L_1}	α_{L_2}	α_{L_∞}	ΔI^+
10	38.73 (1.97 %)	72.19 (2.33 %)	211.99 (10.78 %)	—	—	—	10.26 %
20	9.58 (0.48 %)	18.32 (0.58 %)	63.92 (3.23 %)	2.02	1.98	1.73	2.59 %
40	2.39 (0.12 %)	4.60 (0.15 %)	17.63 (0.89 %)	2.0	1.99	1.86	0.65 %
80	0.60 (0.03 %)	1.15 (0.04 %)	4.64 (0.23 %)	2.0	2.0	1.93	0.16 %
160	0.15 (0.01 %)	0.29 (0.01 %)	1.19 (0.06 %)	2.0	2.0	1.96	0.04 %

Таблица 3. Результаты для LC-схемы

$1/h$	$\ \delta I_h\ _{L_1}$	$\ \delta I_h\ _{L_2}$	$\ \delta I_h\ _{L_\infty}$	α_{L_1}	α_{L_2}	α_{L_∞}	ΔI^+
10	20.54 (1.04%)	32.37 (1.04%)	81.38 (4.14%)	—	—	—	0.0 %
20	5.16 (0.26%)	8.20 (0.26%)	23.00 (1.16%)	1.99	1.98	1.82	0.0 %
40	1.29 (0.07%)	2.06 (0.07%)	6.12 (0.31%)	2.0	2.0	1.91	0.0 %
80	0.32 (0.02%)	0.51 (0.02%)	1.58 (0.08%)	2.0	2.0	1.96	0.0 %
160	0.08 (0.001%)	0.13 (0.002%)	0.40 (0.02%)	2.0	2.0	1.98	0.0 %

Таблица 4. Результаты для TVD⁺(CO)-схемы

$1/h$	$\ \delta I_h\ _{L_1}$	$\ \delta I_h\ _{L_2}$	$\ \delta I_h\ _{L_\infty}$	α_{L_1}	α_{L_2}	α_{L_∞}	ΔI^+
10	87.76 (4.46 %)	129.03 (4.17 %)	258.39 (13.14 %)	—	—	—	26.4 %
20	13.43 (0.68 %)	17.57 (0.56 %)	56.04 (2.83 %)	1.96	1.76	1.19	5.6 %
40	3.42 (0.17 %)	4.54 (0.14 %)	16.71 (0.84 %)	2.13	2.01	1.6	1.3 %
80	0.86 (0.04 %)	1.15 (0.04 %)	4.53 (0.23 %)	2.13	2.1	1.8	0.3 %
160	0.28 (0.01 %)	0.52 (0.02 %)	2.87 (0.14 %)	2.09	2.1	1.9	0.08 %

Таблица 5. Результаты для TVD⁺(VA)-схемы

$1/h$	$\ \delta I_h\ _{L_1}$	$\ \delta I_h\ _{L_2}$	$\ \delta I_h\ _{L_\infty}$	α_{L_1}	α_{L_2}	α_{L_∞}	ΔI^+
10	64.11 (3.26 %)	93.32 (3.01 %)	218.01 (11.09 %)	—	—	—	0.27 %
20	15.15 (0.76 %)	28.04 (0.89 %)	97.57 (4.92 %)	2.08	1.73	1.16	1.12 %
40	3.23 (0.16 %)	6.87 (0.22 %)	32.63 (1.64 %)	2.23	2.03	1.58	0.46 %
80	0.71 (0.04 %)	1.56 (0.05 %)	9.44 (0.48 %)	2.19	2.14	1.79	0.14 %
160	0.16 (0.01 %)	0.35 (0.01 %)	2.54 (0.13 %)	2.12	2.15	1.89	0.04 %

Таблица 6. Результаты для TVD⁺(SB)-схемы

$1/h$	$\ \delta I_h\ _{L_1}$	$\ \delta I_h\ _{L_2}$	$\ \delta I_h\ _{L_\infty}$	α_{L_1}	α_{L_2}	α_{L_∞}	ΔI^+
10	115.48 (5.87 %)	158.88 (5.13 %)	288.01 (14.65 %)	—	—	—	49.27 %
20	32.72 (1.65 %)	50.53 (1.61 %)	129.32 (6.53 %)	1.82	1.65	1.16	10.89 %
40	3.23 (0.16 %)	6.87 (0.22 %)	32.63 (1.64 %)	1.99	1.9	1.58	2.64 %
80	8.22 (0.41 %)	13.55 (0.43 %)	43.48 (2.19 %)	2.03	1.99	1.79	0.65 %
160	2.01 (0.1 %)	0.84 (0.03 %)	3.40 (0.17 %)	2.03	2.01	1.89	0.16 %

Далее на рисунках 1–6 логарифмическом масштабе приводятся численные порядки сходимости этих схем в абсолютных нормах L_1, L_2, L_∞ . На рисунках обозначено: пунктир-

ная линия – норма L_1 , штрихпунктирная линия – норма L_2 , сплошная линия – норма L_∞ .

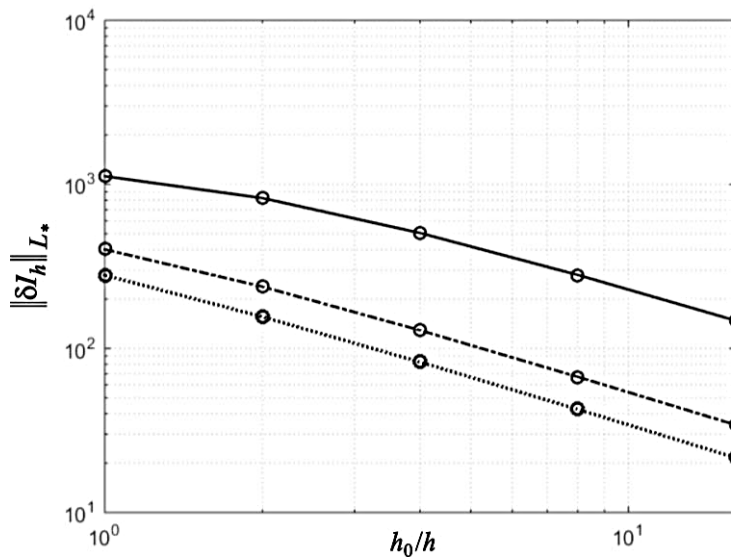


Рис. 1. Порядок численной сходимости для St-схемы

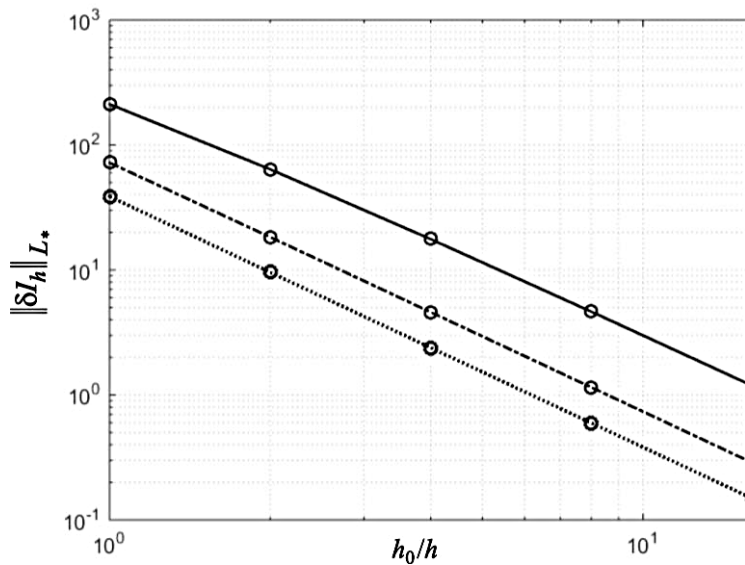


Рис. 2. Порядок численной сходимости для LC-схемы

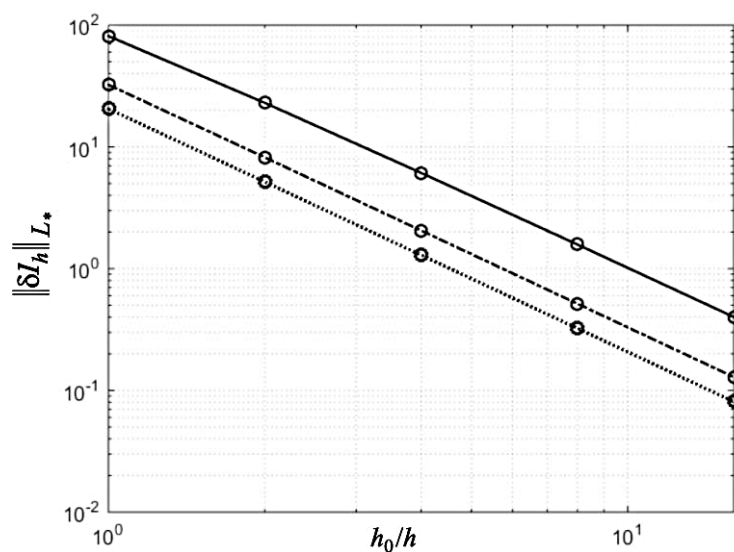


Рис. 3. Порядок численной сходимости для TVD⁺(CO)-схемы

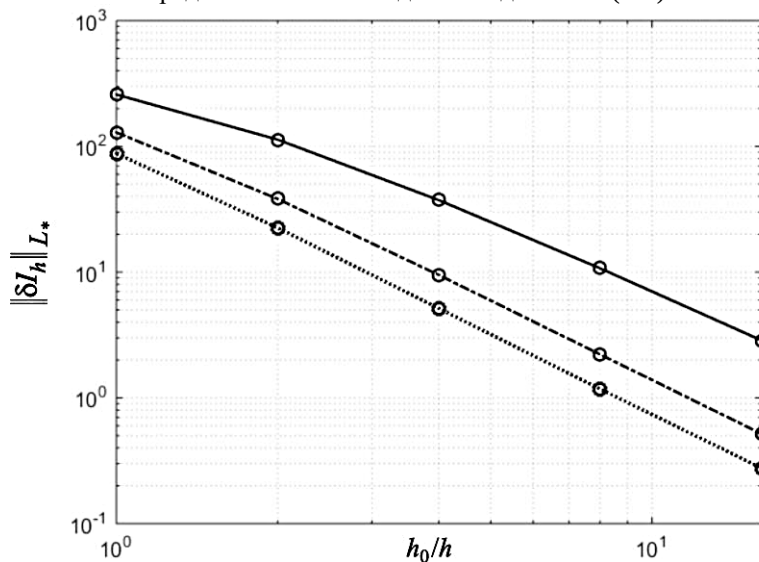


Рис. 4. Порядок численной сходимости для TVD⁺(VA)-схемы

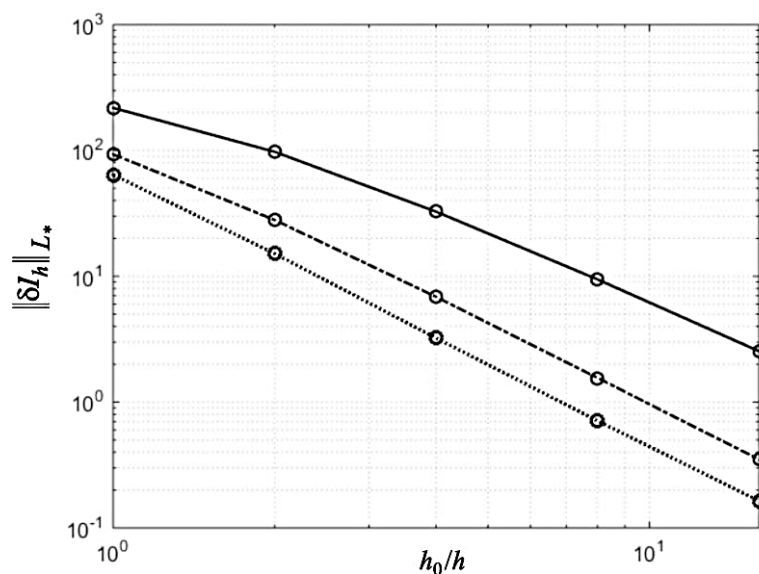
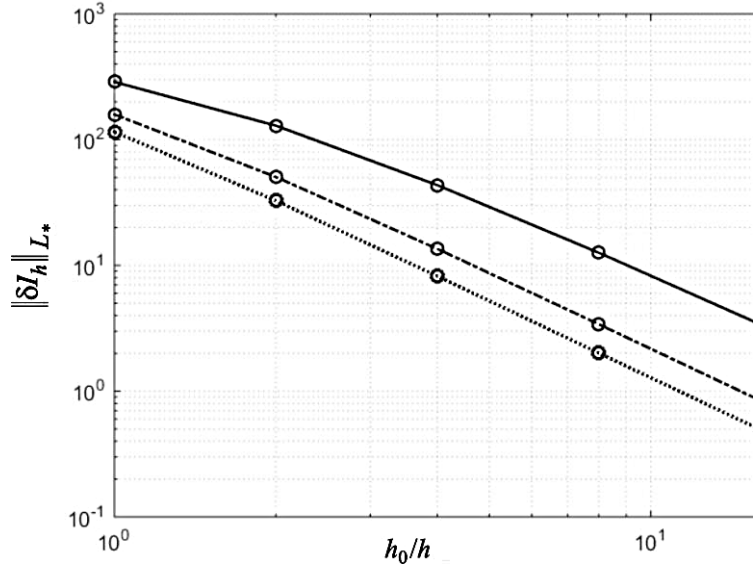


Рис. 5. Порядок численной сходимости для TVD⁺(SB)-схемы

Рис 6. Численная сходимость в сеточных нормах L_* для TVD⁺(SB) схемы

Из анализа результатов следует, что на гладком решении порядок численной сходимости St схемы меньше 1, для DD, LC схем близок к 2, что вполне соответствует ожиданиям. Схема TVD⁺ показала сопоставимые результаты со схемами повышенного порядка точности для рассмотренных ограничителей. Выбор ограничителей обусловлен исключительно предпочтениями автора и практическим опытом. Ее сходимость несколько хуже немонокотонных и неположительных схем LC и DD. Однако, например, для DD схемы условие положительности $\frac{\alpha_c \Delta z}{2|\mu|} > 1$ является достаточно обременитель-

ным. Обращает на себя внимание результат LC схемы для величины I^+ , которая вычисляется точно. Это объясняется тем, что в конечно-разностном представлении решения (3) экспонента присутствует явно, а не в приближенном виде [1]. Отметим, что ранее аналогичные результаты в норме L_1 схема TVD⁺ продемонстрировала в [10] на двух тестовых задачах в двумерной осесимметричной геометрии.

ЗАМЕЧАНИЕ

Полагая в кинетическом уравнении $\frac{\partial I}{\partial t} = 0$, мы получим квазистационарный (стационарный в случае нейтронов) режим. Если предположить, что рассматриваемое уравнение (1) имеет асимптотическое решение в форме

$$I = \tilde{I} e^{\lambda t}, \quad \lambda = \frac{\partial \ln \left(\int_{\Omega} I d\Omega \right)}{\partial t},$$

то тогда решение нестационарного уравнения выходит на регулярный режим, где параметр λ может быть определен как предел логарифмической производной от интегральной функции распределения частиц по времени. В этом случае получаем

$$\Omega \nabla \tilde{I} + \left(\alpha + \frac{\lambda}{c} \right) \tilde{I} = \frac{\alpha_s}{4\pi} \int_{\Omega} \tilde{I} d\Omega. \quad (4)$$

При этом краевые условия остаются в силе с точностью до переобозначения. Так как асимптотическое решение (4) имеет экспоненциальный характер, функция $\tilde{I}(\mathbf{r}, \Omega)$ гораздо слабее зависит от времени, чем решение $I(\mathbf{r}, \Omega, t)$. Уравнение переноса в регулярном режиме (4) занимает промежуточное положение между нестационарным и квазистационарным режимами [2]. Это позволяет существенно экономить память компьютера, так как не нужно хранить величины с предыдущего шага. В этом случае можно также использовать схему TVD⁺, применив в лимитере величины с предыдущей итерации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для численного моделирования процессов переноса излучения в кинетической модели для многомерной геометрии ранее была предложена

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ С ЛИМИТЕРОМ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

абсолютно устойчивая консервативная нелинейная схема с лимитером. Впоследствии она была использована для решения гиперболических систем уравнений, являющимися следствиями исходной системы. В статье приведены ее краткая характеристика, обзор источников и показан реальный численный порядок сходимости для типовой модельной задачи. Она не требует дополнительных затрат по памяти, положительна и квазимоноотонна, но на практике ее немоноотонность проявляется чрезвычайно редко. Вообще говоря, даже схемы, принадлежащие к классу TVD, могут демонстрировать немоноотонность [20]. Схема использует для нахождения основных величин двухточечный сеточный шаблон на искомом временном шаге и более широкий шаблон для TVD реконструкции основных величин и их производных с предыдущего шага, что важно для решения кинетического уравнения переноса в многомерном случае ввиду большого числа направлений. Такая аппроксимация позволяет пользоваться экономичными численными методами, в которых число арифметических операций пропорционально количеству узлов разностной сетки. Для повышения порядка аппроксимации применяется ограничитель, который использует информацию на трехточечном шаблоне в каждом направлении. В результате, в граничных ячейках может несколько понижаться точность расчета. Во избежание этого эффекта в таких ячейках разумно применять другие схемы. Лимитер вполне можно брать даже с предыдущего временного шага, что обычно приемлемо понижает точность. Также к достоинствам можно отнести следующие качества. Простота реализации – повышение точности достигается при незначительном усложнении алгоритма St схемы и обеспечивает второй порядок аппроксимации по пространству кроме отдельных точек с экстремумами. Сопоставимое со St схемой число итераций за счет монотонного поведения численного решения и отсутствия переключений, применяемого в гибридных схемах, например DD/St [15]. Это очень важно поскольку, как правило, для кинетического уравнения переноса правая часть зависит от решения и необходимо использовать итерационные методы. Во многих случаях это оказывается чрезвычайно обременительным ввиду большой размерности и сильной нелинейности в случае переноса фотонов. Автором неоднократно применялась возможность использования в лимитере величин с предыдущей итерации. Это, как правило, не-

сколько повышает точность, но может приводить к увеличению числа итераций и, соответственно, времени расчета. Некоторым недостатком предлагаемого подхода является неоднозначность выбора лимитера, что в зависимости от задачи может влиять на результаты численных расчетов.

Приведенные в статье расчеты на тестовой задаче, описывающей базовый закон Бугера-Ламберта для задач переноса излучения и многолетний опыт эксплуатации в РФЯЦ-ВНИИТФ показывают практическую эффективность схемы.

Очевидно, рассмотренная схема может применяться и для моделирования других явлений, но автором она применялась только для переноса излучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басс Л.П., Волощенко А.М., Гермогенова Т.А. Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения. М.: ИПМ АН СССР, 1986. 231 с.
2. Pomraning G.C. The Equations of Radiation Hydrodynamics. New York, Dover Publications Inc., 2005. 286 p.
3. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник, 1959. Т. 47(89). № 3. С. 271–306.
4. Гаджиев А.Д., Завьялов В.В., Шестаков А.А. Применение TVD подхода к DSn методу решения уравнения переноса теплового излучения // ВАНТ; сер.: Математическое моделирование физических процессов, 2009. Вып. 2. С. 37–48.
5. Гаджиев А.Д., Завьялов В.В., Шестаков А.А. Применение TVD подхода к DSn методу решения уравнения переноса теплового излучения в осесимметричной RZ геометрии // ВАНТ; сер.: Математическое моделирование физических процессов, 2010. Вып. 2. С. 30–39.
6. Арсентьев А.П., Писарев В.Н. Особенности применения TVD подхода к DSn методу решения трехмерного уравнения переноса нейтронов в криволинейной системе координат // ВАНТ; сер.: Математическое моделирование физических процессов, 2011. Вып. 1. С. 25–39.
7. Шестаков А.А. TVDR схемы для решения системы уравнений переноса теплового излучения // ВАНТ; сер.: Математическое моделирование физических процессов, 2019. Вып. 2. С. 17–36.
8. Гаджиев А.Д., Кошутин Д.А., Шестаков А.А. DSn метод с TVD реконструкцией и синтетическим P1SA методом ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в осесимметричной RZ геометрии // ВАНТ; сер.: Математическое моделирование физических процессов, 2016. Вып. 4. С. 13–19.

9. Гаджиев А.Д., Грабовенская С.А., Завьялов В.В., Шестаков А.А. Применение TVD подхода к решению уравнения переноса теплового излучения квазидиффузионным методом // ВАНТ; сер.: Математическое моделирование физических процессов, 2010. Вып. 3. С. 3–14.

10. Грабовенская С.А., Завьялов В.В., Шестаков А.А. О двух подходах эффективного понижения размерности для задач переноса теплового излучения в многомерной геометрии // Математическое моделирование, 2021. Т. 33. № 9. С. 35–46.

11. Егорова А.С., Карлыханов Н.Г. Решение кинетического уравнения переноса излучения методом усредненных косинусов // ВАНТ; сер.: Математическое моделирование физических процессов, 2011. Вып. 3. С. 29–38.

12. Исакова А.С., Карлыханов Н.Г. Сравнительный анализ квазидиффузионного подхода и метода усредненных косинусов для решения кинетического уравнения переноса излучения // ВАНТ; сер.: Математическое моделирование физических процессов, 2013. Вып. 3. С. 16–29.

13. Вершинская А.С., Гаджиев А.Д., Грабовенская С.А., Шестаков А.А. Применения TVD подхода к решению уравнения переноса теплового излучения в P1 приближении // ВАНТ; сер.: Математическое моделирование физических процессов, 2009. Вып. 2. С. 21–36.

14. Гаджиев А.Д., Чубарешко И.С., Шестаков А.А. Неявный конечно-объемный TVD метод для численного решения двумерного уравнения переноса

са теплового излучения в P1 приближении // ВАНТ; сер.: Математическое моделирование физических процессов, 2017. Вып. 2. С. 18–29.

15. Барабанов С. К. Схемы типа TVD для численного решения двумерного кинетического уравнения переноса в декартовой системе координат на неструктурированных сетках // Сборник докладов 16-й научно-технической конференции «Молодежь в науке», Саров, 2017. Т. 1. С. 45–50.

16. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. 656 с.

17. Yee H.C. A Class of High-Resolution Explicit and Implicit Shock-Capturing Methods. NASA Ames Research Center Computational Fluid Dynamics Branch, California, 94035 USA, 1989. 218 p.

18. Чирков Д.В., Черный С.Г. Сравнение точности и сходимости некоторых TVD схем // Вычислительные технологии, 2000. Т. 5. № 5. С. 86–107.

19. Гаджиев А.Д., Кондаков И.А., Писарев В.Н., Стародумов О.И., Шестаков А.А. Метод дискретных ординат с искусственной диссипацией (DDAD-схема) для численного решения уравнения переноса нейтронов // ВАНТ; сер.: Математическое моделирование физических процессов, 2003. Вып. 4. С. 13–24.

20. Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Некоторые замечания о схемах, сохраняющих монотонность численного решения // Вычислительные технологии, 2012. Т. 17. № 2. С. 78–98.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 4, pp. 221–231

A NONLINEAR FINITE-DIFFERENCE SCHEME WITH A LIMITER FOR RADIATION TRANSPORT SIMULATION

V.V. Zavyalov

FSUE «RFNC-VNIITF named after Academ. E.I. Zababakhin», Snezhinsk, Chelyabinsk region, 456770, Russia

e-mail: v.v.zavyalov@vniitf.ru

Received March 25, 2024; revised August 5, 2024; accepted August 6, 2024

Numerical modeling of non-stationary radiation transfer process in the kinetic model is a very labor-intensive task. The complexity is caused by the large dimension of the problem and, additionally, for radiant energy transfer problems – by strong nonlinearity. For deterministic approaches based on discretization of the particle flight direction, it is necessary to solve a system of hyperbolic equations of large dimension. Accordingly, it is desirable that the schemes used for numerical modeling are economical both in terms of memory use and calculation time and show acceptable results for a wide range of Courant numbers. In the case of radiant transfer, the situation is aggravated by the strong nonlinearity of the problem being solved, which leads to a significant change in the properties of the medium at time steps. This imposes increased requirements for the monotonicity of the schemes with a change in optical thickness. According to Godunov's theorem, among two-layer linear schemes in time, there are no monotonic schemes of a higher approximation order. One of the directions of solving this problem is the development of NFC (Nonlinear Flux Correction) schemes of end-to-end counting, in which an increased order of accuracy on smooth solutions and monotonicity are achieved due to nonlinear correction of flows. The numerical solution is monotonicized using a special algorithm in the vicinity of large gradients of the exact solution. The paper provides a brief overview

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ С ЛИМИТЕРОМ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

and characteristics of the finite-difference scheme developed and successfully used for many years at RFNC-VNIITF to solve radiation transfer problems. The TVD (Total Variation Diminishing) methodology is used to monotone the scheme.

Keywords: kinetic transport equation, TVD, finite-difference scheme, numerical method.

REFERENCES

1. Bass L.P., Voloshchenko A.M., Germogenova T.A. Metody diskretnykh ordinat v zadachah o perenose izlucheniya [Methods of Discrete Ordinates in Radiation Transport Problems]. Moscow, IPM AN USSR Publ., 1986. 231 p. (in Russian).
2. Pomraning G.C. The Equations of Radiation Hydrodynamics. New York, Dover Publications Inc., 2005, 286 p.
3. Godunov S.K. Raznostnyj metod chislennogo rascheta razryvnykh reshenij uravnenij gidrodinamiki [Difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of hydrodynamic equations]. Matematicheskij sbornik, 1959. Vol. 47(89). No. 3. Pp. 271–306. (in Russian).
4. Gadzhiev A.D., Zaviyalov V.V., Shestakov A.A. Primenenie TVD podhoda k DS_n методу resheniya uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya [Application of the TVD Approach to the DS_n Method for Solving the Thermal Radiation Transfer Equation]. VANT, Seriya «Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh processov», 2009. Iss. 2. Pp. 37–48 (in Russian).
5. Gadzhiev A.D., Zaviyalov V.V., Shestakov A.A. Primenenie TVD podhoda k DS_n методу resheniya uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya v osesimmetrichnoj RZ geometrii [Application of the TVD Approach to the DS_n Method for Solving the Equation of Thermal Radiation Transfer in Axisymmetric RZ Geometry]. VANT, Seriya «Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh processov», 2010. Iss. 2. Pp. 30–39 (in Russian).
6. Arsent'ev A.P., Pisarev V.N. Osobennosti primeneniya TVD podhoda k DS_n методу resheniya trekhmernogo uravneniya perenosa nejtronov v krivolinejnoj sisteme koordinat [Features of the Application of the TVD Approach to the DS_n Method for Solving the Three-dimensional Neutron Transport Equation in a Curvilinear Coordinate System]. VANT, Seriya «Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh processov», 2011. Iss. 1. Pp. 25–39 (in Russian).
7. Shestakov A.A. TVDR skhemy dlya resheniya sistemy uravnenij perenosa teplovogo izlucheniya [TVDR Schemes to Solve a System of Radiative Heat Transfer Equations]. VANT, Seriya «Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh processov», 2019. Iss. 2. Pp. 17–36 (in Russian).
8. Gadzhiev A.D., Koshutin D.A., Shestakov A.A. DS_n метод s TVD rekonstrukciej i sinteticheskim P1SA методом uskoreniya iteracij dlya chislennogo resheniya dvumernogo uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya v osesimmetrichnoj RZ geometrii [DS_n Method with TVD Reconstruction and Synthetic P1SA Iteration Acceleration Method for the Numerical Solution of the Two Dimensional Equation of Thermal Radiation Transfer in Axisymmetric RZ Geometry]. VANT, Seriya «Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh processov», 2016. Iss. 4. Pp. 13–19 (in Russian).
9. Gadzhiev A.D., Grabovenskaya S.A., Zaviyalov V.V., Shestakov A.A. Primenenie TVD podhoda k resheniyu uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya kvazidiffuzionnym metodom [Application of the TVD Approach to Solving the Equation of Thermal Radiation Transfer Using the Quasidiffusion Method]. VANT, Seriya «Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh processov», 2010. Iss. 3. Pp. 3–14 (in Russian).
10. Grabovenskaya S.A., Zaviyalov V.V., Shestakov A.A. O dvuh podhodah effektivnogo ponizheniya razmernosti dlya zadach perenosa teplovogo izlucheniya v mnogomernoj geometrii [Two Approaches to Effectively Reduce the Size of Radiative Heat Transfer Problems in Multidimensional Geometry]. Matematicheskoe modelirovanie, 2021. Vol. 33. No. 9. Pp. 35–46.
11. Egorova A.S., Karlyhanov N.G. Reshenie kineticheskogo uravneniya perenosa izlucheniya metodom usrednennykh kosinusov [Solution of the Kinetic Equation of Radiation Transfer by the Averaged Cosine Method]. VANT, Seriya «Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh processov», 2011. Iss. 3. Pp. 29–38 (in Russian).
12. Isakova A.S., Karlyhanov N.G. Sravnitel'nyj analiz kvazidiffuzionnogo podhoda i metoda usrednennykh kosinusov dlya resheniya kineticheskogo uravneniya perenosa izlucheniya [Comparative Analysis of the Quasidiffusion Approach and the Averaged Cosine Method for Solving the Kinetic Equation of Radiative Transfer]. VANT, Seriya «Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh processov», 2013. Iss. 3. Pp. 16–29 (in Russian).
13. Vershinskaya A.S., Gadzhiev A.D., Grabovenskaya S.A., Shestakov A.A. Primeneniya TVD podhoda k resheniyu uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya v P1 priblizhenii [Applications of the TVD Approach to Solving the Thermal Radiation Transfer Equation in the P1 Approximation]. VANT, Seriya «Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh processov», 2009. Iss. 2. Pp. 21–36 (in Russian).
14. Gadzhiev A.D., Chubaresheko I.S., Shestakov A.A. Neyavnyj konechno-ob'emnyj TVD метод dlya chislennogo resheniya dvumernogo uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya v P1 priblizhenii [Implicit Finite Volume TVD Method for the Numerical Solution of the 2D Thermal Radiation Transport Equation in the P1 Approximation]. VANT, Seriya «Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh processov», 2019. Iss. 2. Pp. 17–36 (in Russian).

elirovanie fizicheskikh processov», 2017. Iss. 2. Pp. 18–29 (in Russian).

15. *Barabanov S. K.* Sxemy tipa TVD dlya chislennogo resheniya dvumernogo kineticheskogo uravneniya perenosa v dekartovoj sisteme koordinat na nestrukturirovannyh setkah [TVD-type schemes for the numerical solution of the two-dimensional kinetic transport equation in a Cartesian coordinate system on unstructured grids]. // *Cbornik dokladov 16-j nauchno-tehnicheskoy konferencii «Molodezh v nauke»*, Sarov, 2017. Vol. 1. Pp. 45–50 (in Russian).

16. *Kulikovskij A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu.* Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravnenij [Mathematical Problems of Numerical Solution of Hyperbolic Systems]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2012. 656 p. (in Russian).

17. *Yee N.S.* A Class of High-Resolution Explicit and Implicit Shock-Capturing Methods. NASA Ames Research Center Computational Fluid Dynamics Branch, California, 94035 USA, 1989. 218 p.

18. *Chirkov D.V., Chernyj S.G.* Sravnenie tochnosti i skhodimosti nekotorykh TVD skhem [Comparison of Accuracy and Convergence of Some TVD Schemes]. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2000. Vol. 5. No. 5. Pp. 86–107 (in Russian).

19. *Gadzhiev A.D., Kondakov I.A., Pisarev V.N., Starodumov O.I., Shestakov A.A.* Metod diskretnykh ordinat s iskusstvennoj dissipaciej (DDAD-skHEMA) dlya chislennogo resheniya uravneniya perenosa nejtronov [Discrete Ordinate Method with Artificial Dissipation (DDAD-scheme) for Numerical Solution of the Neutron Transport Equation]. *VANT, Seriya «Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh processov»*, 2003. Iss. 4. Pp. 13–24 (in Russian).

20. *Hakimzyanov G.S., Shokina N.Yu.* Nekotorye zamechaniya o skhemah, sohranyayushchih monotonnost' chislennogo resheniya [Some Notes on Monotonicity Preserving Schemes]. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2012. Vol. 17. No. 2. Pp. 78–98 (in Russian).

УДК 537.8

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ

С.П. Баутин^{1,*}, А.Г. Обухов^{2,**}

¹Снежинский физико-технический институт НИЯУ МИФИ, Снежинск, 456776, Россия

²Тюменский индустриальный университет, Тюмень, 625000, Россия

*e-mail: spbautin@mail.ru

**e-mail: agobukhov@inbox.ru

Поступила в редакцию: 15.05.2024

После доработки: 15.05.2024

Принята к публикации: 05.07.2024

В работе в случае двух независимых пространственных переменных рассматривается полная система уравнений Навье-Стокса, решения которой описывают движения сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Для нее в квадрате на плоскости xOy ставится задача Коши с непрерывными начальными данными. После соответствующего продолжения этих данных на больший квадрат решение задачи Коши представляется в виде соответствующих тригонометрических рядов по пространственным переменным. Коэффициенты рядов являются искомыми функциями от времени. Для этих коэффициентов приведена бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими начальными условиями. Построены конечные отрезки тригонометрических сумм, приближенно передающие решения рассматриваемых задач Коши.

Ключевые слова: полная система уравнений Навье-Стокса, задача Коши, тригонометрические ряды, приближенные решения.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.349

EDN KPTRWQ

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день основным способом построения решений начально-краевых задач для нелинейных уравнений с частными производными являются разностные методы, при которых численно определяется конечное число значений искомых функций в отдельных изолированных точках. Но очень часто под вопросом остаются надежность и адекватность получаемых разностными методами численных результатов.

Среди аналитических методов получения решений нелинейных уравнений с частными производными одним из основных методов является использование конечных или бесконечных представлений с применением различных систем базисных функций для разных функциональных пространств.

На протяжении более чем двухсотлетней истории исследований уравнений с частными производными одним из востребованных функциональных базисов является базис из тригонометрических функций. Хотя в 1804 г. при первых

изложениях предложенного Ж.Б.Ж. Фурье подхода к решению линейного уравнения теплопроводности современники ставили чуть не в вину ему то, что он не использует степенные ряды. Заметим, что через семьдесят лет, в 1874 г., С.В. Ковалевская привела свой знаменитый контрпример, показывающий, что линейное уравнение теплопроводности может не иметь решения в виде сходящегося ряда по степеням времени [1, 2]. К сожалению, эффективность тригонометрических рядов Фурье и более поздних обобщений этого подхода имеет место только при решении линейных задач.

Чуть более десяти лет назад, т.е. спустя двести лет после первых работ Ж.Б.Ж. Фурье, методика применения бесконечных тригонометрических рядов была эффективно применена для математического моделирования одномерных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа при построении решений нелинейной системы уравнений с частными производными смешанного типа [3]. Но доказать сходимость используемых тригонометрических рядов тогда не удалось.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ

Проведенные численные расчеты [3] показали «машинную» сходимость используемых представлений: при увеличении числа слагаемых в конечных отрезках тригонометрических рядов, используемых для приближенного описания решений, отличия в разных приближениях фактически стремились к нулю.

Недавно, применяя описанную методику представления с помощью тригонометрического ряда решения задачи Коши для уравнения Бюргерса

$$u_t + uu_x = \mu_0 u_{xx}; \quad u(t, x) \Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^0 \sin(kx),$$

являющегося нелинейным уравнением с частными производными, удалось доказать сходимость построенного тригонометрического ряда [4].

Также и в случае нелинейной системы уравнений движения построены [5, 6] сходящиеся тригонометрические ряды, задающие решения соответствующих задач Коши.

Эти факты и послужили отправной точкой для исследований, представленных в данной работе: в случае двух независимых пространственных переменных построение в виде тригонометрических рядов течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа.

1. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Рассматривается полная система уравнений Навье-Стокса, решения которой в безразмерном виде описывают движения сжимаемого вязкого теплопроводного политропного газа [2]:

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} &= 0, \\ \rho \left[\mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] + \frac{1}{\gamma} (T \nabla \rho + \rho \nabla T) &= \\ = \mu_0 \left[\frac{1}{4} \nabla (\operatorname{div} \mathbf{V}) + \frac{3}{4} \Delta \mathbf{V} \right], & \\ \rho (T_t + \mathbf{V} \cdot \nabla T) + (\gamma - 1) \rho T \operatorname{div} \mathbf{V} &= \\ = \kappa_0 \Delta T + \Phi(\gamma, \mu_0, \mathbf{V}), & \end{aligned} \right. \quad (1.1)$$

где ρ – плотность газа; $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$ – вектор скорости газа в декартовых переменных; T – температура; μ_0, κ_0 – положительные постоянные коэффициенты вязкости и теплопроводности;

$\gamma = \text{const} > 1$; $\Phi(\gamma, \mu_0, \mathbf{V})$ – диссипативная функция:

$$\Phi = \frac{\mu_0 \gamma (\gamma - 1)}{2} \left\{ \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] + \frac{3}{2} \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] \right\}.$$

Система уравнений (1.1) в дифференциальной форме передает законы сохранения массы, импульса и энергии. Константа

$$\gamma = 1 + \frac{R}{c_{vo}} > 1$$

есть показатель политропы (или показатель адиабаты) газа.

В системе (1.1) и в уравнениях состояния стандартным образом введены безразмерные переменные [2]

$$f = \frac{\tilde{f}}{f_{00}},$$

где f – безразмерное значение величины $\tilde{f}$; f_{00} – ее масштабное значение. При этом для всех пространственных переменных выбирается одно и то же масштабное значение x_{00} , а для всех компонент вектора скорости – одно и то же масштабное значение v_{00} . При выбранных значениях $\rho_{00}, T_{00}, x_{00}$ за масштабные значения v_{00}, t_{00}, p_{00} выбирают такие значения, чтобы выполнялись равенства

$$v_{00} = \sqrt{R\gamma T_{00}}, \quad t_{00} = \frac{x_{00}}{v_{00}}, \quad p_{00} = R\rho_{00}T_{00}, \\ e_{00} = c_{vo}T_{00}.$$

Из приведенных равенств следует, что за масштабные значения скорости, давления и внутренней энергии выбраны, соответственно, скорость звука, давление и внутренняя энергия газа с параметрами ρ_{00}, T_{00} .

При этом значения положительных констант μ_0 и κ_0 будут такими:

$$\mu_0 = \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho_{00} v_{00} x_{00}}, \quad \kappa_0 = \frac{\kappa}{c_{vo} \rho_{00} v_{00} x_{00}}.$$

При исследовании течений вязкого теплопроводного газа часто вводят числа Рейнольдса и Прандтля:

$$Re = \frac{\rho_{00} v_{00} x_{00}}{\mu}, \quad Pr = \frac{c_{vo} \gamma \mu}{\kappa}.$$

Тогда

$$\mu_0 = \frac{4}{3Re}$$

и

$$\begin{aligned} Pr = c_{vo} \gamma \frac{\mu}{\kappa} &= \frac{3}{4} c_{vo} \gamma \frac{\frac{3}{4} \rho_{00} v_{00} x_{00} \mu_0}{c_{vo} \rho_{00} v_{00} x_{00} \kappa_0} = \\ &= \frac{3}{4} c_{vo} \gamma \frac{\mu_0}{c_{vo} \kappa_0} = \frac{3}{4} \gamma \frac{\mu_0}{\kappa_0}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\kappa_0 = \frac{3}{4} \gamma \frac{\mu_0}{Pr}.$$

Для воздуха обычно полагают $Pr = 0.72$, $\gamma = 1.4$ и тогда

$$\kappa_0 = \frac{0.75 \cdot 1.4}{0.72} \mu_0 \approx 1.458333 \mu_0.$$

Далее рассматривается случай двумерных течений:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = v_3 = 0.$$

Поскольку система (1.1) не разрешена относительно производных по времени (что и затрудняет аналитическое исследование ее решений), в качестве искомого берутся: удельный объем $\delta = 1/\rho$ и давление p . Тогда полная система уравнений Навье-Стокса имеет следующий вид [2]:

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_t + u \delta_x + v \delta_y - \delta (u_x + v_y) &= 0, \\ u_t + u u_x + v u_y + \frac{1}{\gamma} \delta p_x &= \mu_0 \delta \left(\frac{1}{4} v_{xy} + u_{xx} + \frac{3}{4} u_{yy} \right), \\ v_t + u v_x + v v_y + \frac{1}{\gamma} \delta p_y &= \mu_0 \delta \left(\frac{1}{4} u_{xy} + v_{yy} + \frac{3}{4} v_{xx} \right), \\ p_t + u p_x + v p_y + \gamma p (u_x + v_y) &= \kappa_0 p (\delta_{xx} + \delta_{yy}) + \\ &+ 2 \kappa_0 (p_x \delta_x + p_y \delta_y) + \kappa_0 \delta (p_{xx} + p_{yy}) + \\ &+ \mu_0 \gamma (\gamma - 1) \left[(u_x^2 - u_x v_y + v_y^2) + \frac{3}{4} (u_y + v_x)^2 \right], \end{aligned} \right. \quad (1.2)$$

а четвертое уравнение системы (1.1) (т.е. уравнение для $v_3 = w$) выполняется тождественно. В рассматриваемом случае уравнения состояния такие [2]:

$$T = \delta p, \quad e = \delta p.$$

В системе (1.2) использованы следующие обозначения: $x = x_1$, $y = x_2$, e – внутренняя энергия.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КОШИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЕЕ РЕШЕНИЙ

На плоскости xOy задается некоторый квадрат и, не нарушая общности рассмотрения, полагается, что он такой:

$$\{0 \leq x \leq \pi; 0 \leq y \leq \pi\}.$$

Для системы (1.2), решения которой описывают двумерные нестационарные течения сжимаемого вязкого теплопроводного политропного газа в указанном квадрате, задаются непрерывные начальные условия, разделенные по пространственным переменным:

$$\left\{ \begin{aligned} \delta(t, x, y) \Big|_{t=0} &= 1 + \delta_1^o(x) + \delta_2^o(y), \\ u(t, x, y) \Big|_{t=0} &= u_1^o(x) + u_2^o(y), \\ v(t, x, y) \Big|_{t=0} &= v_1^o(x) + v_2^o(y), \\ p(t, x, y) \Big|_{t=0} &= 1 + p_1^o(x) + p_2^o(y). \end{aligned} \right.$$

Функции $\delta_1^o(x)$, $p_1^o(x)$, $\delta_2^o(y)$, $p_2^o(y)$ продолжаются четным образом: первые две на отрезок $\{-\pi \leq x \leq 0\}$, вторые две функции – на отрезок $\{-\pi \leq y \leq 0\}$.

Четыре другие функции из начальных условий: $u_1^o(x)$, $v_1^o(x)$, $u_2^o(y)$, $v_2^o(y)$ – продолжаются нечетным образом: на отрезок $\{-\pi \leq x \leq 0\}$ первая пара, на отрезок $\{-\pi \leq y \leq 0\}$ вторая пара.

После такого продолжения для системы (1.2) при $\{-\pi \leq x \leq \pi\}$ и при $\{-\pi \leq y \leq \pi\}$ начальные

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ

условия с учетом их четности могут быть представлены в виде

$$\left\{ \begin{aligned} \delta(t, x, y) \Big|_{t=0} &= \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\delta_{k,1}^0 \cos(kx) + \delta_{k,2}^0 \cos(ky) \right], \\ u(t, x, y) \Big|_{t=0} &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[u_{k,1}^0 \sin(kx) + u_{k,2}^0 \sin(ky) \right], \\ v(t, x, y) \Big|_{t=0} &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[v_{k,1}^0 \sin(kx) + v_{k,2}^0 \sin(ky) \right], \\ p(t, x, y) \Big|_{t=0} &= \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[p_{k,1}^0 \cos(kx) + p_{k,2}^0 \cos(ky) \right], \end{aligned} \right. \quad (2.1)$$

где вследствие непрерывности функций $f_1^0(x)$, $f_2^0(y)$ выписанные тригонометрические ряды сходятся при всех x, y . Здесь символ f принимает значения δ, u, v, p .

Смысл двойных индексов следующий: первый индекс задает частоту гармоник, перед которой стоит данный коэффициент тригонометрического ряда; второй индекс равен единице, если гармоника зависит от первой пространственной переменной x ; второй индекс равен двойке, если гармоника зависит от второй пространственной переменной y .

Решение задачи (1.2), (2.1) ищется в виде

$$\begin{aligned} \delta(t, x, y) &= \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\delta_{k,1}(t) \cos(kx) + \delta_{k,2}(t) \cos(ky) \right]; \\ u(t, x, y) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[u_{k,1}(t) \sin(kx) + u_{k,2}(t) \sin(ky) \right]; \\ v(t, x, y) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[v_{k,1}(t) \sin(kx) + v_{k,2}(t) \sin(ky) \right]; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$p(t, x, y) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[p_{k,1}(t) \cos(kx) + p_{k,2}(t) \cos(ky) \right],$$

с неизвестными коэффициентами

$$\delta_{k,1}(t), \delta_{k,2}(t), u_{k,1}(t), u_{k,2}(t), v_{k,1}(t), v_{k,2}(t), p_{k,1}(t), p_{k,2}(t),$$

зависящими от t , и для которых заданы начальные условия при $x=0, y=0$

$$f_{k,1}(0) = f_{k,1}^0; \quad f_{k,2}(0) = f_{k,2}^0.$$

Здесь символ f также принимает значения δ, u, v, p , переменная k принимает целые положительные значения.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ СИСТЕМЫ (1.2)

Для первого уравнения системы (1.2) все требуемые преобразования ниже выписаны подробно.

Сначала по представлениям (2.2) определяются частные производные, входящие в первое уравнение системы (1.2). А потом в это уравнение подставляются представления (2.2) и найденные выражения для производных. В полученном соотношении раскрываются скобки, и оно расписывается через двойные суммы

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} \delta'_{k,1}(t) \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta'_{k,2}(t) \cos(ky) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{k,1}(t) m \delta_{m,1}(t) \sin(kx) \sin(mx) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{k,2}(t) m \delta_{m,1}(t) \sin(ky) \sin(mx) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} v_{k,1}(t) m \delta_{m,2}(t) \sin(kx) \sin(my) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} v_{k,2}(t) m \delta_{m,2}(t) \sin(ky) \sin(my) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} k u_{k,1}(t) \cos(kx) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{k,1}(t) m u_{m,1}(t) \cos(kx) \cos(mx) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{k,2}(t) m u_{m,1}(t) \cos(ky) \cos(mx) + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} k v_{k,2}(t) \cos(ky) + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{k,1}(t) m v_{m,2}(t) \cos(kx) \cos(my) + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{k,2}(t) m v_{m,2}(t) \cos(ky) \cos(my).
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Полученное уравнение проецируется на базис

$$\{\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots\},$$

т.е. это уравнение последовательно умножается на $\cos(lx)$, $l=1, 2, \dots$ и интегрируется по x и y на отрезках от $-\pi$ до $+\pi$. Далее учитываются значения конкретных определенных интегралов и также вводятся две константы

$$\begin{aligned}
 a_{kml} &= \begin{cases} 1, & \text{если } l=k+m \text{ или } l=|k-m|; \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \\
 b_{kml} &= \begin{cases} 1, & \text{если } l=|k-m|; \\ -1, & \text{если } l=k+m; \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}
 \end{aligned}$$

с помощью которых вычисляются такие интегралы:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(kx) \cos(mx) \cos(lx) dx &= \frac{\pi}{2} a_{kml}, \\
 \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(kx) \sin(mx) \cos(lx) dy &= \frac{\pi}{2} b_{kml}.
 \end{aligned}$$

В результате получается бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений и после деления каждого уравнения на $2\pi^2$ эта система имеет нормальную форму:

$$\begin{aligned}
 \delta'_{l,1}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m u_{k,1}(t) \delta_{m,1}(t) b_{kml} + l u_{l,1}(t) + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m u_{k,1}(t) \delta_{m,1}(t) a_{kml}; \quad l=1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Для построения приближенных решений системы (1.2) используются конечные суммы

$$\begin{aligned}
 f(t, x, y) &= \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^K \left[f_{k,1}(t) \cos(kx) + f_{k,2}(t) \cos(ky) \right], \\
 g(t, x, y) &= \sum_{k=1}^K \left[g_{k,1}(t) \cos(kx) + g_{k,2}(t) \cos(ky) \right],
 \end{aligned}$$

где K – выбранное значение числа слагаемых в конечных отрезках рядов; значок f принимает значения δ , p , а значок g – u , v .

Тогда бесконечные системы обыкновенных дифференциальных уравнений перейдут в конечные системы следующего вида:

$$\begin{aligned}
 \delta'_{l,1}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K m u_{k,1}(t) \delta_{m,1}(t) b_{kml} + l u_{l,1}(t) + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K m u_{k,1}(t) \delta_{m,1}(t) a_{kml}; \quad l=1, 2, \dots, K.
 \end{aligned}$$

Учет значений констант a_{kml} , b_{kml} приводит к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям для коэффициентов $\delta_{l,1}(t)$.

При $l=1$:

$$\begin{aligned}
 \delta'_{1,1}(t) &= \sum_{j=1}^{K-1} \left[j u_{j+1,1}(t) \delta_{j,1}(t) + \right. \\
 & \left. + (j+1) u_{j,1}(t) \delta_{j+1,1}(t) \right] + u_{1,1}(t).
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

При $2 \leq l \leq K-1$:

$$\begin{aligned}
 \delta'_{l,1}(t) &= \sum_{j=1}^{K-l} \left[j u_{j+l,1}(t) \delta_{j,1}(t) + \right. \\
 & \left. + (j+l) u_{j,1}(t) \delta_{j+l,1}(t) \right] + l u_{l,1}(t).
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

При $l=K$:

$$\begin{aligned}
 \delta'_{K,1}(t) &= \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K-1} (K-2j) u_{K-j,1}(t) \delta_{j,1}(t) + K u_{K,1}(t).
 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Затем первое уравнение системы (1.2) проецируется на базис

$$\{\cos y, \cos 2y, \cos 3y, \dots\},$$

т.е. это уравнение последовательно умножается на $\cos(ly)$, $l=1, 2, \dots, K$ и интегрируется по x и y на отрезках от $-\pi$ до $+\pi$.

После соответствующих преобразований получается следующая конечная система обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов $\delta_{l,2}(t)$.

При $l=1$:

$$\delta'_{1,2}(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K-1} (2j+1) \left[v_{j,2}(t) \delta_{j+1,2}(t) + v_{j+1,2}(t) \delta_{j,2}(t) \right] + u_{1,2}(t). \quad (3.5)$$

При $2 \leq l \leq K-1$:

$$\delta'_{l,2}(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K-l} (2j+l) \left[v_{j,2}(t) \delta_{j+l,2}(t) + v_{j+l,2}(t) \delta_{j,2}(t) \right] + l u_{l,2}(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{l-1} (l-2j) v_{l-j,2}(t) \delta_{j,2}(t). \quad (3.6)$$

При $l=K$:

$$\delta'_{K,2}(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K-1} (K-2j) v_{K-j,2}(t) \delta_{j,2}(t) + K u_{K,2}(t). \quad (3.7)$$

Построение соответствующих приближений остальных искомых функций задачи (1.2), (2.1) также сводится к получению соответствующих конечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$f'_{l,i}(t) = F_{l,i}(f_{j,i}(t)); \quad l=1, 2, \dots, K; \quad i=1, 2. \quad (3.8)$$

Значок f принимает значения u, v, p . Данные системы достаточно громоздкие, и поэтому их вид здесь не приводится.

4. ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СИСТЕМЫ (1.2)

Численное построение решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений (3.2)–(3.8) позволяет построить начальные отрезки тригонометрических рядов (2.2) и тем самым получить приближенные решения задачи (1.2)–(2.1).

В рассмотренном ниже примере взяты следующие начальные условия

$$\begin{cases} \delta|_{t=0} = 1, & u|_{t=0} = 0, & v|_{t=0} = 0, \\ p|_{t=0} = 1 + 0.2 \cos x + 0.2 \cos y, \end{cases} \quad (4.1)$$

и число слагаемых в тригонометрических суммах есть $K=90$. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений решались численно с точностью 10^{-4} . В системе (1.2) положено $\mu_0 = 0.001$, $\kappa_0 = 1.458333\mu_0$.

По результатам расчетов сделан фильм¹, в котором представлено поведение с течением времени всех газодинамических параметров. На рис. 1–3 даны поверхности давления в различные моменты времени.

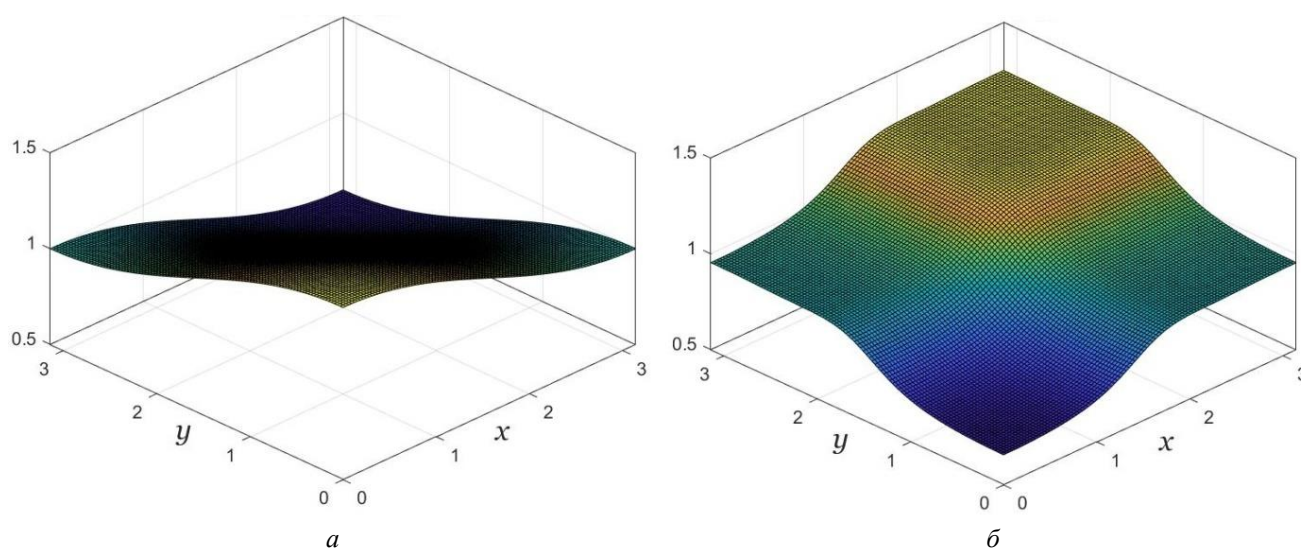


Рис. 1. Поверхности давления в моменты времени $t=0$ (а) и $t=20$ (б)

¹ Баутин С.П., Обухов А.Г. Результаты расчетов // https://vk.com/wall-71669107_3941

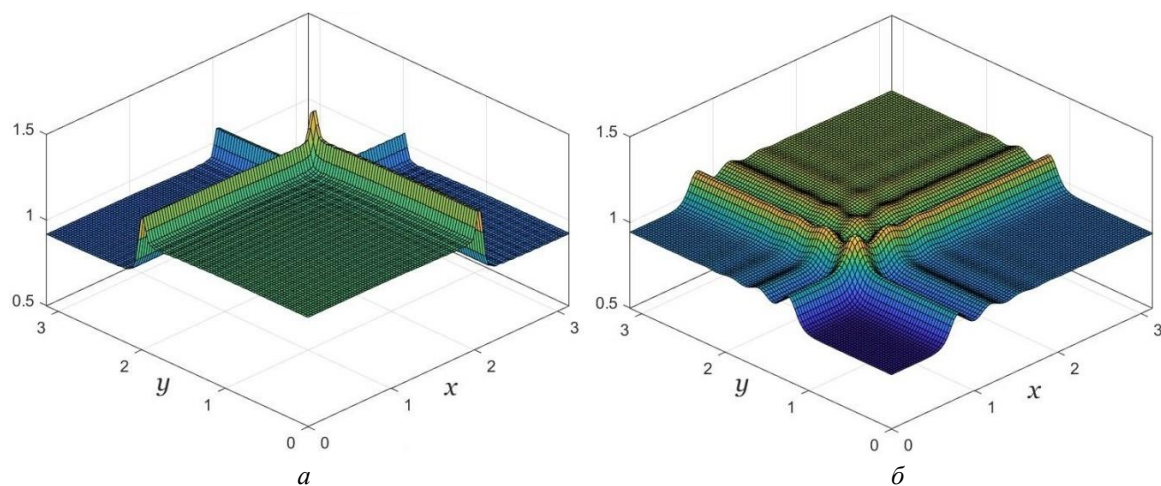


Рис. 2. Поверхности давления в моменты времени $t = 39$ (а) и $t = 83$ (б)

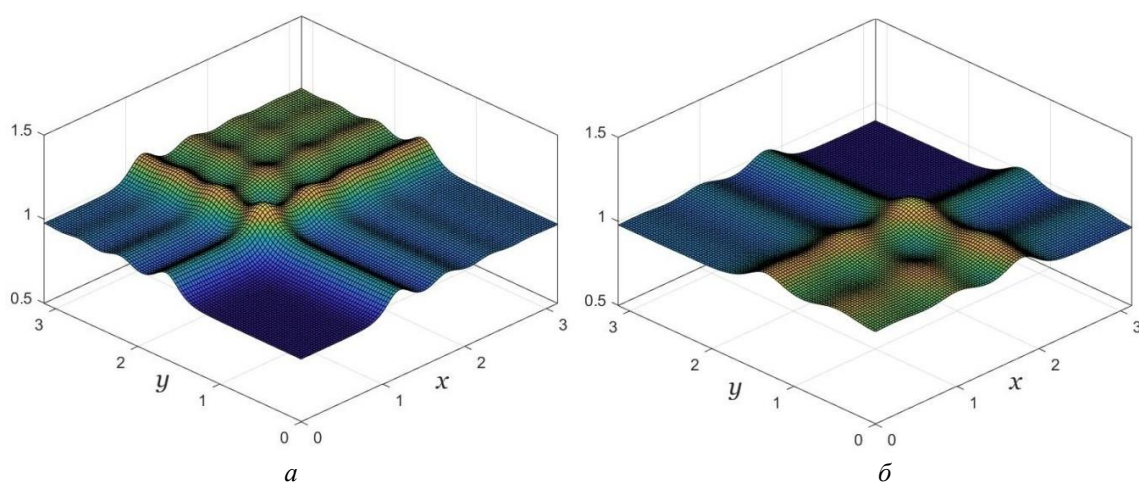


Рис. 3. Поверхности давления в моменты времени $t = 120$ (а) и $t = 151$ (б)

Видно, что вначале течение изменяется плавно, а затем в нем образуются волновые структуры. Можно сделать вывод о том, что наличие осциллирующих участков перед фрон-

тами и за ними никак не связано с выбранным конкретным и достаточно большим числом K .

Поверхности, задающие остальные газодинамические параметры δ , u , v в момент времени $t = 20$, приведены на рис. 4–6.

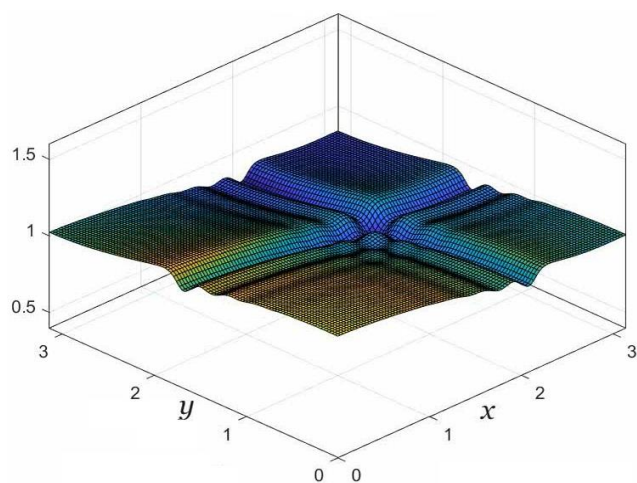


Рис. 4. Поверхность функции δ в момент времени $t = 20$

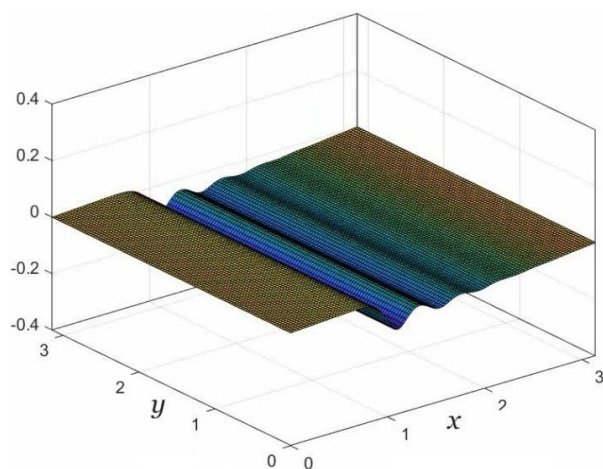


Рис. 5. Поверхность функции u в момент времени $t = 20$

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ

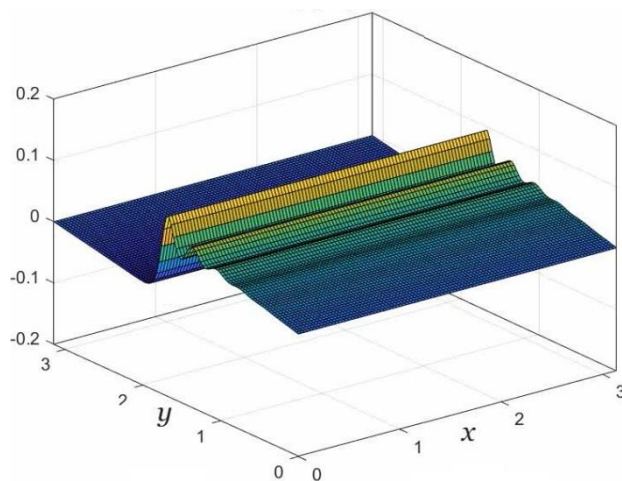


Рис. 6. Поверхность функции v в момент времени $t = 20$

На рис. 7 приведены мгновенные линии тока построенного течения в моменты времени $t = 5$ и $t = 20$.

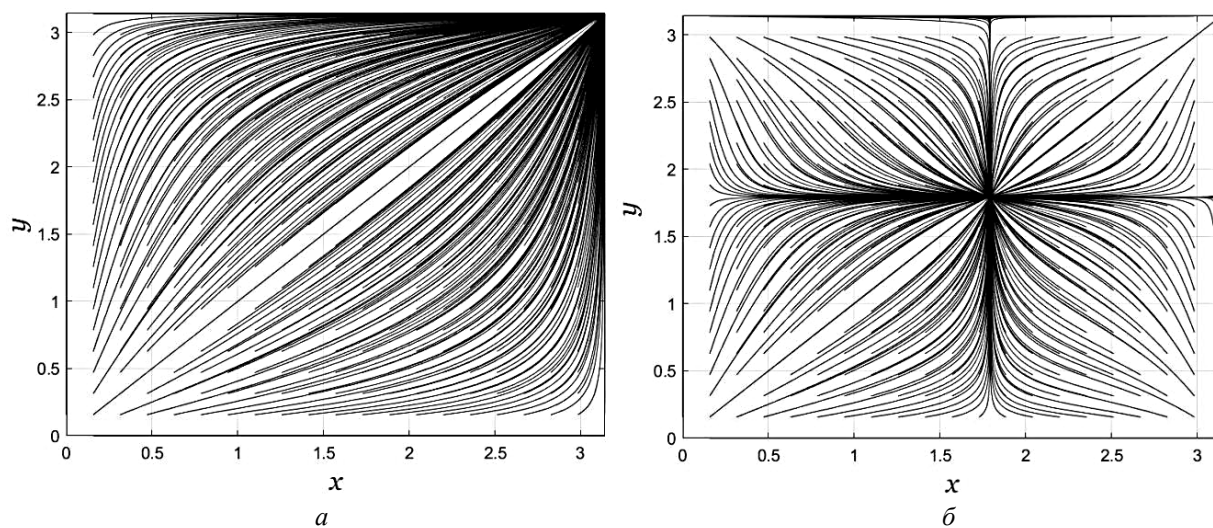


Рис. 7. Мгновенные линии тока в моменты времени $t = 5$ (а) и $t = 20$ (б)

На рис. 8 представлены мгновенные линии тока построенного течения в моменты времени $t = 35$ и $t = 65$.

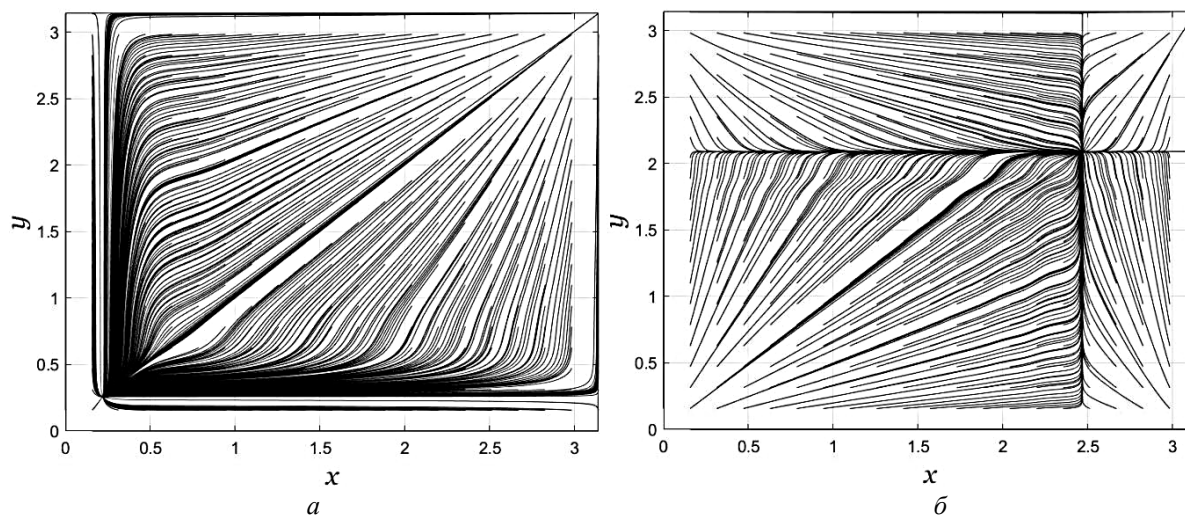


Рис. 8. Мгновенные линии тока в моменты времени $t = 35$ (а) и $t = 65$ (б)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, показано, что методика решения нелинейных уравнений с частными производными с помощью тригонометрических сумм эффективно применяется для описания течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковалевская С.В. Научные труды. К теории дифференциальных уравнений с частными производными. М.: Изд-во АН СССР, 1948. 368 с.
2. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.

3. Баутин С.П., Замыслов В.Е., Скачков П.П. Математическое моделирование тригонометрическими рядами одномерных течений вязкого теплопроводного газа. Новосибирск: Наука, Екатеринбург: УрГУПС, 2014. 91 с.

4. Баутин С.П., Замыслов В.Е. Представление решений уравнения Бюргерса тригонометрическими рядами // Вестник НИЯУ МИФИ, 2022. Т. 11. № 4. С. 305-318. DOI: 10.26583/vestnik.2022.238.

5. Баутин С.П., Карелина О.А., Обухов А.Г. Представление решений системы уравнений движения с помощью тригонометрических рядов // Вестник НИЯУ МИФИ, 2023. Т. 12. № 1. С. 39-51. DOI:10.26583/vestnik.2023.251.

6. Баутин С.П., Карелина О.А., Обухов А.Г. Некоторые нестационарные двумерные течения газа, определяемые с помощью тригонометрических рядов // Вестник НИЯУ МИФИ, 2023. Т. 12. № 4. С. 223-232. DOI: 10.26583/vestnik.2023.295.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 4, pp. 232-241

REPRESENTATION OF VISCOUS HEAT-CONDUCTING GAS FLOWS TRIGONOMETRIC SERIES

S.P. Bautin^{1,*}, A.G. Obukhov^{2,**}

¹ National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Snezhinsk, 456776, Russia

² Tyumen Industrial University, Tyumen, 625000, Russia

*e-mail: spbautin@mail.ru

**e-mail: agobukhov@inbox.ru

Received May 15, 2024; revised May 15, 2024; accepted June 05, 2024

In the paper, in the case of two independent spatial variables, a complete system of equations is considered Navier-Stokes, whose solutions describe the movements of a compressible viscous heat-conducting gas. For it, the Cauchy problem with continuous initial data is posed squared on the xOy plane. After a corresponding continuation of these data on the second square, the solution of the Cauchy problem is presented in the form of corresponding trigonometric series for spatial variables. The coefficients of the series are the desired functions of time. An infinite system of ordinary differential equations with corresponding initial conditions is given for these coefficients. Finite segments of trigonometric sums are constructed, approximating the solutions of the Cauchy problem under consideration.

Keywords: the complete system of Navier-Stokes equations, the Cauchy problem, trigonometric series, approximate solutions.

REFERENCE

1. Kovalevskaya S.V. Nauchnye trudy. K teorii differentsial'nyh uravnenij s chastnymi proizvodnymi. [Research Works. To the Theory of Differential Equations with Partial Derivatives] Moscow, Izd-vo AN SSSR Publ., 1948. 368 p.

2. Bautin S. P. Harakteristicheskaya zadacha Koshi i ee prilozheniya v gazovoj dinamike. [The characteristic

problem of the Koshi and its applications in gas dynamics] Novosibirsk, Nauka Publ., 2009. 368 p.

3. Bautin S.P., Zamylov V.E., Skachkov P.P. Matematicheskoe modelirovanie trigonometricheskimi ryadami odnomernykh techenij vyazkogo teploprovodnogo gaza. [Mathematical modeling by trigonometric series of onedimensional flows of viscous heat conducting gas] Novosibirsk, Nauka Publ., Ekaterinburg, UrGUPS Publ., 2014. 91 p.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ

4. *Bautin S.P., Zamyslov V.E.* Predstavlenie reshenii uravneniya Byurgersa trigonometricheskimi ryadami. [Representation of solutions of the Burgers equation by trigonometric series]. Vestnik NIYaU MIFI, 2022. Vol. 11. No. 4. Pp. 305–318 (in Russian). DOI: 10.26583/vestnik.2022.238.

5. *Bautin S.P., Karelina O.A., Obuhov A.G.* Predstavlenie reshenii sistemy uravneniya dvizeniay s pomoshuy trigonometricheskih ryadov. [Representation of solutions to a system of equations of motion using

trigonometric series]. Vestnik NIYaU MIFI, 2023. Vol. 12. No. 1. Pp. 39–51 (in Russian). DOI: 10.26583/vestnik.2023.251.

6. *Bautin S.P., Karelina O.A., Obuhov A.G.* Neco-torye nestacionarnye dvumernye techeniay gaza, opredelajemye s pomoshuy trigonometricheskih ryadov. [Some unsteady two-dimensional gas flows determined using trigonometric series]. Vestnik NIYaU MIFI, 2023. Vol. 12. No. 4. Pp. 223–232 (in Russian). DOI: 10.26583/vestnik.2023.295.

УДК 004.62

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КЛАССИФИКАЦИИ КРЕДИТНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДЕРЕВЬЕВ РЕШЕНИЙ И ИХ АНСАМБЛЕЙ

Е.П. Акишина¹, В.В. Иванов^{1,2}, А.В. Крянев^{1,2}, А.С. Приказчикова²*

¹Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, 141980, Россия

²Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

*e-mail: AVKryanev@mephi.ru

Поступила в редакцию: 10.05.2024

После доработки: 19.05.2024

Принята к публикации: 20.05.2024

В статье рассматривается задача применения деревьев решений и их ансамблей (лесов решений) в задаче классификации кредитных организаций, как объектов экономической безопасности. Хотя деревья решений и их ансамбли успешно применяются в банковском секторе, для автоматизированной идентификации неблагонадежных кредитных организаций деревья решений и их ансамбли ранее не использовались. Классификация кредитных организаций проводилась на основе формы банковской отчетности № 101. В результате проведенного анализа были выделены ключевые показатели деятельности кредитных организаций, а именно «Прибыль», «Счета в Банке России», «Ценные бумаги». С учетом этих показателей для модели CART была получена точность классификации, составившая 85 %. Для моделей Random Forest, Adaboost и Xgboost использовались все 23 показателя финансовой отчетности (форма 101), а достигнутая при этом точность составила 83, 80 и 80 %, соответственно, решена актуальная научно-практическая задача – разработаны математические модели, позволяющие идентифицировать высокорисковые кредитные организации и прогнозировать риски отзыва у них лицензий. В ходе их применения идентифицирован список потенциально неблагонадежных кредитных организаций, на которые рекомендуется обратить пристальное внимание органам государственной власти.

Ключевые слова: экономическая безопасность, кредитные организации, автоматизированный мониторинг, дерево решений, лес решений, модель CART, Random Forest, Adaboost, Xgboost.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.350

EDN LGWWEN

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время существуют различные методы классификации многомерных объектов, к которым, в частности, можно отнести нейронные сети, метод опорных векторов, метод распознавания образов и др. Однако, как показывает практика, для интерпретации полученных результатов эти методы требуют определенной квалификации и знаний экспертов, а правила извлечения значимой информации (результатов) не всегда очевидны.

С целью решения задачи идентификации высокорисковых кредитных организаций, как объектов экономической безопасности, нами был выбран метод деревьев решений, который позволяет оценить обстановку в финансовом секторе рядовому аналитику, а также визуализиро-

вать отдельные аспекты деятельности кредитных организаций [1, 2].

Деревья решений и их ансамбли успешно применяются в банковском секторе, промышленности, медицине, молекулярной биологии. Вместе с тем для автоматизированной идентификации неблагонадежных кредитных организаций деревья решений и их ансамбли ранее не использовались.

Деревья решений основаны на логических схемах, позволяющих получить решение о классификации объектов с помощью ответов на иерархически организованную систему вопросов. Основная идея данного метода заключается в построении бинарного дерева, в котором каждый узел представляет собой условие на признак, а листья – конечный результат работы алгоритма (в нашем случае принадлежность к определенному классу – благонадежных или

неблагонадежных кредитных организаций). Решающее дерево является бинарным, если каждый узел этого дерева при разбиении имеет только двух потомков. Для того чтобы провести классификацию нового случая, необходимо двигаться по дереву от корня до листа, значение метки класса для которого и будет искомым ответом [1].

ОСОБЕННОСТИ ДЕРЕВА CART

В работе рассматривались три наиболее распространенных вида бинарных деревьев решений: CART (Classification And Regression Tree), C5, CHAID. В табл. 1 представлена информация о метриках качества классификации кредитных организаций с использованием указанных моделей.

Таблица 1. Метрики качества классификации для моделей деревьев

Данные за 2021 г.	C5	CART	CHAID
Общая точность, %	69.03	97.95	93.30
Precision, %	66.87	96.81	90.50
Recall, %	99.70	100.00	99.70
F1, %	80.05	98.38	94.87

По результатам применения указанных моделей (реализованных на языке Python) к исследуемым данным (данные за 2021 г.) было установлено, что максимальная точность классификации кредитных организаций достигается при использовании алгоритма CART, в связи с чем данный алгоритм будет детально рассмотрен далее.

CART является алгоритмом построения бинарного дерева решений – дихотомической классификационной модели [1]. Алгоритм на каждом шаге построения дерева последовательно сравнивает все возможные разбиения для всех показателей и выбирает наилучший из них и наилучшее разбиение для этого показателя.

В качестве меры оценки качества разбиения выборки алгоритм CART использует индекс *Gini*, принимающий значения от 0 до 1. Индекс *Gini* для выборки *A* с *n* классами можно представить следующим образом (1):

$$Gini(A) = 1 - \sum_{i=1}^n p_i^2, \quad (1)$$

где p_i – вероятность класса в выборке *A* [3].

В общем случае задача классификации рассматриваемых объектов формулируется так: для некоторого вектора $\vec{x} = (\{x_1, \dots, x_m\})$, где *m* – число показателей, необходимо провести процедуру принятия решения о принадлежности данного вектора к классу из множества $F = (\{f_1, \dots, f_n\})$, где *n* – число классов, основываясь на обучающей выборке данных.

Для того чтобы реализовать дерево решений CART, необходимо задать его характеристики или гиперпараметры, которые будут определять это дерево. В табл. 2 приведены основные гиперпараметры модели дерева решений CART.

Таблица 2. Основные гиперпараметры модели CART

№	Гиперпараметр	Описание
1	criterion	Функция оценки качества разбиения
2	max_depth	Максимальная глубина дерева
3	min_samples_split	Минимальное количество образцов, необходимое для разделения внутреннего узла
4	min_samples_leaf	Минимальное количество объектов в листьях
5	max_features	Количество показателей, которые следует учитывать при поиске лучшего разделения в узле

По результатам отработки алгоритма CART в Python нами были рассчитаны значения точностей на обучающей и тестовой выборках, составившие 100 и 70 %, соответственно. Так как

точность на тестовой выборке оказалась заметно ниже, чем на обучающей, наша модель дерева решений переобучена. Используем полученную модель в качестве базовой, чтобы ее можно

было сравнивать с другими моделями, к которым мы применим методы борьбы с переобучением, а именно настройку гиперпараметров дерева и использование лесов решений.

НАСТРОЙКА ГИПЕРПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ CART

В качестве первого шага исследуем влияние ключевого гиперпараметра дерева решений CART – максимальной глубины (`max_depth`) на точность классификации (рис. 1). При значе-

нии `max_depth`, равном 4, модель становится оптимальной, т.е. отсутствует переобучение. Она очень хорошо соответствует обучающим данным, а также может быть обобщена на новые данные. После построения дерева решений с `max_depth = 4` точность новой модели не стала существенно выше, чем для базовой модели, однако при этом проблема с переобучением была успешно решена: точность для обучающей выборки составила 78.5 %, для тестовой – 70.4 %.

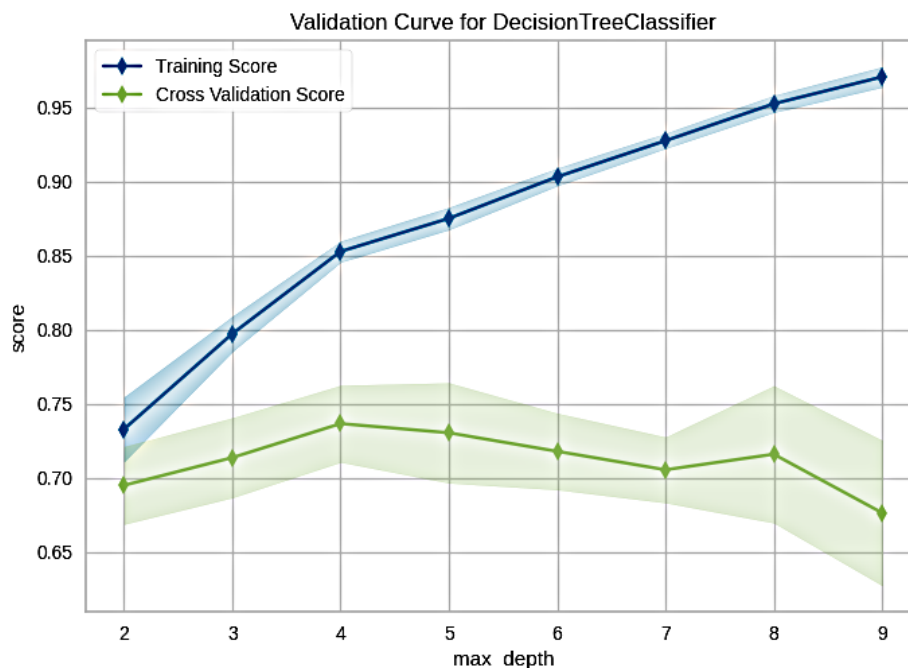


Рис. 1. График зависимости точности модели CART от максимальной глубины дерева

Далее используем поиск комбинации нескольких гиперпараметров для дерева CART, что позволит уменьшить переобучение и оптимизировать точность модели.

В библиотеке `scikit-learn` языка программирования Python реализованы специальные методы подбора оптимальных гиперпараметров, в частности `GridSearchCV` и `RandomisedSearchCV`. Первый метод реализует полный перебор совокупности значений гиперпараметров, а второй – случайный перебор. Использование указанных методов позволяет в полуавтоматическом режиме подбирать наилучшие гиперпараметры, что значительно улучшает качество классификации.

В данной работе мы использовали следующий подход. На первом шаге локализовали область оптимальных значений гиперпараметров с помощью метода `RandomSearchCV`, центром

которой являлась точка в многомерном пространстве гиперпараметров, отвечающая максимальной точности модели CART. На втором шаге мы осуществляли проверку значений гиперпараметров из найденной области с использованием `GridSearchCV`. При таком подходе мы существенно сократили время поиска гиперпараметров и максимально приблизились к их оптимальным значениям.

Результаты поиска оптимальных значений гиперпараметров для дерева CART на тестовых данных приведены в табл. 3.

Как видно из табл. 3, построенное дерево CART обладает точностью классификации на тестовой выборке – 78 %.

С помощью модели CART можно идентифицировать показатели, которые в первую очередь влияют на отнесение объекта к одному из классов: благонадежные кредитные организации

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КЛАССИФИКАЦИИ КРЕДИТНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДЕРЕВЬЕВ РЕШЕНИЙ И ИХ АНСАМБЛЕЙ

(класс «0») и неблагонадежные (класс «1»). В связи с чем в Python была реализована оценка значимости показателей. Наиболее важными для модели CART оказались «Прибыль», «Счета в Банке России» и «Ценные бумаги». На основе выделенных показателей была построена новая модель дерева решений CART, точность

которой увеличилась на 7 % по сравнению с исходной и составила 85 %. На рис. 2 представлена кривая операционных характеристик для модели дерева CART и рассчитано значение AUC – площадь под кривой.

Таблица 3. Оптимальные гиперпараметры для дерева CART

Гиперпараметр CART	Поисковый диапазон	Оптимальное значение
Максимальная глубина	(3, 11)	6
Максимальное количество признаков	(4, 24)	11
Максимальное количество листьев	(3, 30)	11
Минимальное количество объектов в листе	(1, 21)	10
Минимальное количество объектов в узле для его разделения	(2, 21)	2
Минимальное уменьшение неоднородности	[0.0001, 0.0005, 0.001, 0.002, 0.003, 0.004, 0.005, 0.006, 0.007, 0.008, 0.009, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.7]	0.001
Точность модели	78%	

Перейдем к анализу структуры построенного дерева CART. Рассмотрим листы (результатирующие классы) дерева CART, индекс *Gini* которых не более 0.2. В листовых элементах 1–4 дерева CART содержатся правильно классифици-

рованных 96, 91, 100 и 94 % неблагонадежных объектов, соответственно.

На рис. 3, в качестве примера, представлена характеристика первого листового элемента.

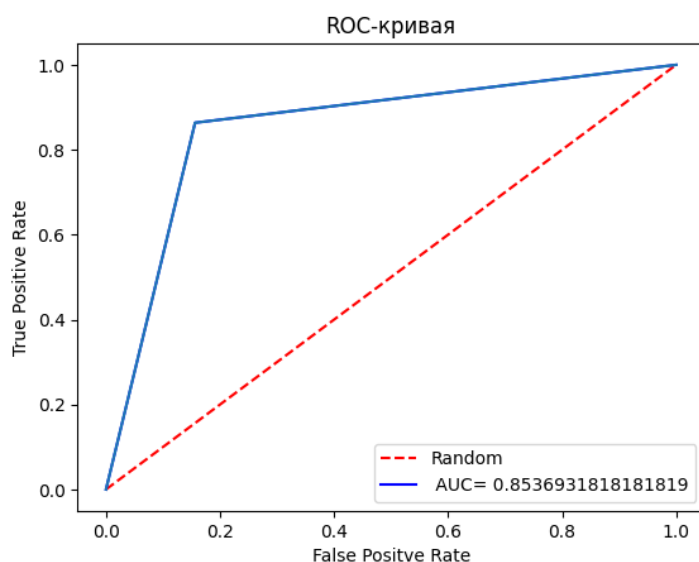


Рис. 2. Кривая операционных характеристик для модели дерева CART



Путь до листа № 1:
 Прибыль ≤ -7282000
 Ценные бумаги ≤ 775474496
 Счета в ЦБ ≤ 316499488
 Прибыль ≤ -27401500

Рис. 3. Характеристика первого листового элемента дерева CART

ЛЕСА РЕШЕНИЙ: МЕТОД RANDOM FOREST

Одним из самых перспективных методов, позволяющим понизить уровень переобучения, является ансамблирование деревьев решений в леса решений. Леса решений строят множество деревьев решений и усредняют их результаты. Рассмотрим леса, показавшие наибольшую эффективность при решении задач финансового мониторинга: Random Forest, Adaboost и Xgboost. Все леса рассчитывались по исходным 23 показателям.

Random Forest или случайный лес – один из способов объединения деревьев решений в ансамбль. В задаче классификации Random Forest выбирает решение по большинству результатов, выданных совокупностью деревьев, сочетая в себе идеи метода бэггинга [4] и метода случайных подпространств [5]. В методе Random

Forest, как и в методе бэггинга, обучение происходит независимо друг от друга на разных подмножествах обучающей выборки, что решает проблему построения одинаковых деревьев на одном и том же множестве данных. Как и в методе случайных подпространств, в методе Random Forest деревья обучаются по случайным подмножествам показателей.

При реализации случайного леса важнейшим этапом является определение его гиперпараметров. При этом в качестве критерия разделения узла при решении задачи классификации может быть использован критерий *Gini*. В табл. 4 представлены результаты поиска оптимальных гиперпараметров для модели Random Forest.

На рис. 4 представлена кривая операционных характеристик для Random Forest и рассчитана площадь под кривой – AUC.

Таблица 4. Оптимальные гиперпараметры Random Forest

Гиперпараметр Random Forest	Поисковой диапазон	Оптимальное значение
Количество деревьев	(100, 1000)	300
Максимальная глубина	(3, 10)	6
Максимальное количество признаков	(4, 23)	17
Максимальное количество листьев	(3, 15)	5
Минимальное количество объектов в листе	(1, 10)	1
Минимальное количество объектов в узле для его разделения	(2, 10)	2
Точность модели	83 %	

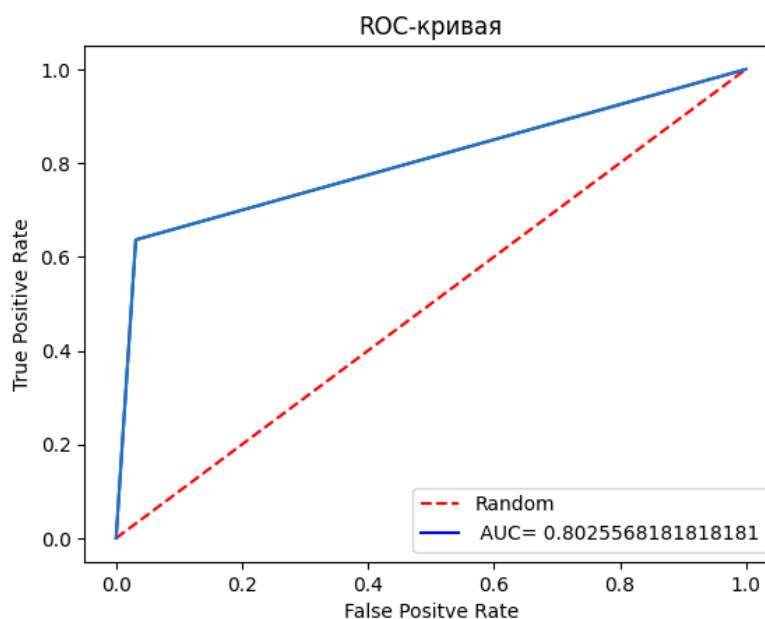


Рис. 4. Кривая операционных характеристик для Random Forest

УДК 004.62

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КЛАССИФИКАЦИИ КРЕДИТНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДЕРЕВЬЕВ РЕШЕНИЙ И ИХ АНСАМБЛЕЙ

Е.П. Акишина¹, В.В. Иванов^{1,2}, А.В. Крянев^{1,2}, А.С. Приказчикова²*

¹Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, 141980, Россия

²Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

*e-mail: AVKryanev@mephi.ru

Поступила в редакцию: 10.05.2024

После доработки: 19.05.2024

Принята к публикации: 20.05.2024

В статье рассматривается задача применения деревьев решений и их ансамблей (лесов решений) в задаче классификации кредитных организаций, как объектов экономической безопасности. Хотя деревья решений и их ансамбли успешно применяются в банковском секторе, для автоматизированной идентификации неблагонадежных кредитных организаций деревья решений и их ансамбли ранее не использовались. Классификация кредитных организаций проводилась на основе формы банковской отчетности № 101. В результате проведенного анализа были выделены ключевые показатели деятельности кредитных организаций, а именно «Прибыль», «Счета в Банке России», «Ценные бумаги». С учетом этих показателей для модели CART была получена точность классификации, составившая 85 %. Для моделей Random Forest, Adaboost и Xgboost использовались все 23 показателя финансовой отчетности (форма 101), а достигнутая при этом точность составила 83, 80 и 80 %, соответственно, решена актуальная научно-практическая задача – разработаны математические модели, позволяющие идентифицировать высокорисковые кредитные организации и прогнозировать риски отзыва у них лицензий. В ходе их применения идентифицирован список потенциально неблагонадежных кредитных организаций, на которые рекомендуется обратить пристальное внимание органам государственной власти.

Ключевые слова: экономическая безопасность, кредитные организации, автоматизированный мониторинг, дерево решений, лес решений, модель CART, Random Forest, Adaboost, Xgboost.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.350

EDN LGWWEN

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время существуют различные методы классификации многомерных объектов, к которым, в частности, можно отнести нейронные сети, метод опорных векторов, метод распознавания образов и др. Однако, как показывает практика, для интерпретации полученных результатов эти методы требуют определенной квалификации и знаний экспертов, а правила извлечения значимой информации (результатов) не всегда очевидны.

С целью решения задачи идентификации высокорисковых кредитных организаций, как объектов экономической безопасности, нами был выбран метод деревьев решений, который позволяет оценить обстановку в финансовом секторе рядовому аналитику, а также визуализиро-

вать отдельные аспекты деятельности кредитных организаций [1, 2].

Деревья решений и их ансамбли успешно применяются в банковском секторе, промышленности, медицине, молекулярной биологии. Вместе с тем для автоматизированной идентификации неблагонадежных кредитных организаций деревья решений и их ансамбли ранее не использовались.

Деревья решений основаны на логических схемах, позволяющих получить решение о классификации объектов с помощью ответов на иерархически организованную систему вопросов. Основная идея данного метода заключается в построении бинарного дерева, в котором каждый узел представляет собой условие на признак, а листья – конечный результат работы алгоритма (в нашем случае принадлежность к определенному классу – благонадежных или

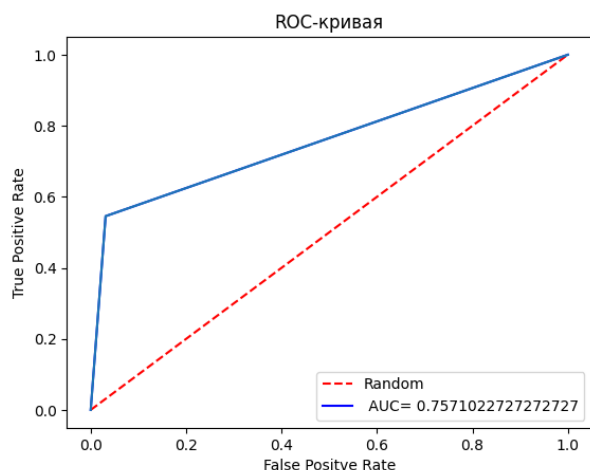


Рис. 5. Кривая операционных характеристик для Adaboost

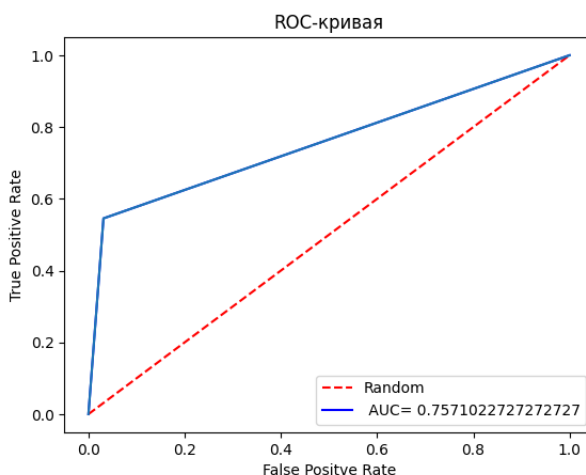


Рис. 6. Кривая операционных характеристик для Xgboost

На рис. 7 представлена гистограмма, которая демонстрирует эффект от проведения поиска оптимальных значений гиперпараметров модели дерева CART и моделей лесов решений Random Forest, Adaboost, Xgboost. Видно, что максимальный результат достигнут при оптимизации дерева CART при условии построения модели на трех параметрах (15 %). Следующей по величине прироста точности классификации идет модель Random Forest (13 %), далее Adaboost (6 %) и, наконец, Xgboost (4 %).

В табл. 7 представлены итоговые метрики качества модели дерева CART и моделей лесов

решений Random Forest, Adaboost, Xgboost. Общая точность (Accuracy) для модели CART, реализованной на трех показателях, оказалась максимальной и составила 85 %. Высокие значения метрик Recall, F1-score и AUC для модели CART также свидетельствуют о целесообразности ее применения. Однако максимальное значение точности классификации неблагонадежных объектов (Precision) было достигнуто при использовании модели Random Forest и составило 93 %.

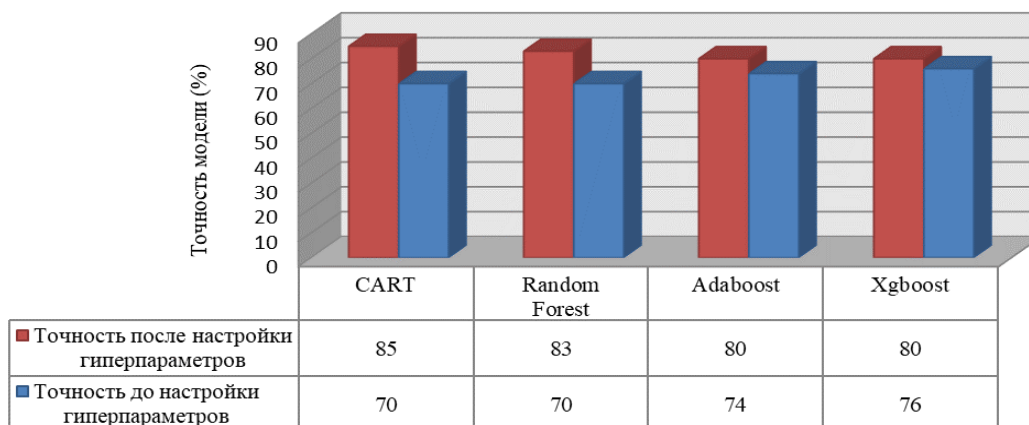


Рис. 7. Сравнительный анализ точностей моделей до и после поиска оптимальных гиперпараметров

Таблица 7. Итоговые метрики качества моделей деревьев решений и их ансамблей

Метрика	CART		Random Forest		Adaboost		Xgboost	
	1	0	1	0	1	0	1	0
Accuracy	85	85	83	83	80	80	80	80
Precision	79	90	93	79	92	76	92	76
Recall	86	84	64	97	55	98	56	97
F1-score	83	87	76	87	69	86	69	85
AUC	85	85	80	80	76	76	76	76

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ
И ВЫВОДЫ

В настоящей работе исследована проблема идентификации высокорисковых кредитных организаций с помощью моделей дерева решений CART и лесов решений Random Forest, Adaboost и Xgboost. В результате проведенного анализа были выделены ключевые показатели деятельности кредитных организаций, а именно «Прибыль», «Счета в Банке России», «Ценные бумаги». С учетом этих показателей для модели CART была получена максимальная точность классификации, составившая 85 %. Для моделей Random Forest, Adaboost и Xgboost использовались все 23 показателя финансовой отчетности (форма 101), а достигнутая при этом точность составила 83, 80 и 80 %, соответственно. Таким образом, нами была решена актуальная научно-практическая задача – разработаны математические модели, позволяющие идентифицировать высокорисковые кредитные организации и прогнозировать риски отзыва у них лицензий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Han J., Kamber M., Pei J. Data mining. Concepts and techniques. 3th ed. Elsevier Inc., 2012. 740 p.
2. Акишина Е.П., Иванов В.В., А. Крянев А.В., Приказчикова А.С. Многомерный анализ данных в задачах прогнозирования попадания кредитных организаций в зону риска // Вестник НИЯУ МИФИ, 2024. Т. 13, № 1. С. 22–29. DOI: 10.26583/vestnik.2024.302
3. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высш. Школа, 2003. 400 с.
4. Breiman L. Random Forests // Machine Learning, 2001. V. 45. No. 1. P. 5–32.
5. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. The Elements of Statistical Learning : Data Mining, Inference, and Prediction. 2th ed. Springer – Verlag, 2009. 746 p. ISBN: 978-0-387-84857-0.
6. Mishra A. Fraud Detection: A Study of AdaBoost Classifier and K-Means Clustering // SSRN. 2021. № 2 (16). P. 1–9. DOI: 10.21203/rs.3.rs-247874/v1.
7. Vassallo D. Vella V., Ellul J. Application of Gradient Boosting Algorithms for Anti-money Laundering in Crypto currencies // SN Computer Science, 2021. № 2 (3). P. 142-157. DOI: 10.1007/s42979-021-00558-z.
8. Chen T., Guestrin C. XGBoost: A Scalable Tree Boosting System // Computer Science Machine Learning, 2016 (v1). URL: <https://arxiv.org/abs/1603.02754> (дата обращения: 08.02.2024).

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 4, pp. 242–250

MATHEMATICAL MODELS DEVELOPMENT FOR CREDIT INSTITUTIONS
CLASSIFICATION USING DECISION TREES AND THEIR ENSEMBLES

E.P. Akishina¹, V.V. Ivanov^{1,2}, A.V. Kryanev^{1,2*}, A.S. Prikazchikova²

¹Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, 141980 Russia,

²National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, 115409 Russia,

*e-mail: AVKryanev@mephi.ru

Received May 10, 2024; revised May 19, 2024; accepted May 20, 2024

The article examines the problem of using decision trees and their ensembles (decision forests) in the problem of classifying credit institutions as objects of economic security. Although decision trees and their ensembles have been successfully used in the banking sector, decision trees and their ensembles have not previously been used for automated identification of unreliable credit institutions. The classification of credit institutions was carried out on the basis of bank reporting form No. 101. As a result of the analysis, key performance indicators of credit institutions were identified, namely «Profit», «Accounts with the Bank of Russia», «Securities». Taking into account these indicators, the classification accuracy of 85 % was obtained for the CART model. For the Random Forest, Adaboost, and Xgboost models, all 23 financial statement measures (Form 101) were used, and the accuracy achieved was 83, 80, and 80 %, respectively. an urgent scientific and practical problem has been solved - mathematical models have been developed that make it possible to identify high-risk credit organizations and predict the risks of revo-

cation of their licenses. During their application, a list of potentially unreliable credit institutions was identified, to which it is recommended that government authorities pay close attention.

Keywords: economic security, credit organizations, automated monitoring, decision tree, decision forest, CART model, Random Forest, Adaboost, Xgboost.

REFERENCES

1. *Han J., Kamber M., Pei J.* Data mining. Concepts and techniques 3th ed. Elsevier Inc., 2012. 740 p.
2. *Akishina E.P., Ivanov V.V., Kryanev A.V., Pri-kazchikova A.S.* Mnogomernyj analiz dannyh v zadachah prognozirovaniya popadaniya kreditnyh organizacij v zonu riska [Multidimensional data analysis in problems of predicting whether credit institutions will fall into the risk zone]. Vestnik NIYAU MIFI, 2024. Vol. 13. No. 1. Pp. 22–29. DOI: 10.26583/vestnik.2024.302
3. *Gmurman, V.E.* Rukovodstvo k resheniyu zadach po teorii veroyatnostej i matematicheskoy statistike. [Guide to solving problems in probability theory and mathematical statistics]. Moscow, Vyssh. Shkola Publ., 2003. 400 p.
4. *Breiman L.* Random Forests Machine Learning, 2001. Vol. 45. No. 1. Pp. 5–32.
5. *Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.* The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction. 2th ed. Springer-Verlag, 2009. 746 p. ISBN: 978-0-387-84857-0.
6. *Mishra A.* Fraud Detection: A Study of AdaBoost Classifier and K-Means Clustering. SSRN. 2021. No. 2 (16). Pp. 1–9. DOI: 10.21203/rs.3.rs-247874/v1.
7. *Vassallo D. Vella V., Ellul J.* Application of Gradient Boosting Algorithms for Anti-money Laundering in Crypto currencies. SN Computer Science, 2021. No. 2 (3). Pp. 142–157. DOI: 10.1007/s42979-021-00558-z.
8. *Chen T., Guestrin C.* XGBoost: A Scalable Tree Boosting System. Computer Science Machine Learning, 2016 (v1). Available at: <https://arxiv.org/abs/1603.02754> (accessed: 08.02.2024).

УДК 517.929+517.95

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА С ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В.Г. Сорокин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия
e-mail: vsesor@gmail.com

Поступила в редакцию 28.06.2024

После доработки: 28.06.2024

Принята к публикации: 09.07.2024

Рассматриваются нелинейные уравнения переноса с пропорциональным запаздыванием, допускающие точные решения. Описано более тридцати уравнений с пропорциональным запаздыванием и постоянным коэффициентом переноса либо с зависящим от искомой функции коэффициентом переноса степенного, экспоненциального или логарифмического вида. Кинетические функции всех рассматриваемых уравнений содержат свободные параметры и в большинстве случаев также содержат произвольные функции. Получены точные решения с аддитивным, мультипликативным, обобщенным и функциональным разделением переменных, а также решения типа бегущей волны и автомодельные решения. Большинство точных решений содержат свободные параметры. Приводится также свыше двадцати более сложных нелинейных уравнений переноса с произвольными аргументами, допускающих точные решения. Все рассматриваемые уравнения и их точные решения могут быть использованы в формулировках тестовых задач для оценки точности численных методов.

Ключевые слова: нелинейные уравнения переноса с пропорциональным запаздыванием, нелинейные уравнения переноса с произвольными аргументами, функционально-дифференциальные уравнения, уравнения математической физики с запаздыванием, точные решения, решения с разделением переменных, решения типа бегущей волны, автомодельные решения.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.351

EDN OHSXWJ

ВВЕДЕНИЕ

Уравнения переноса с пропорциональным запаздыванием применяются в биологии и биомедицине для описания процесса пролиферации клеток, т.е. процесса одновременного роста и деления клеток некоторой ткани организма. Переменная x называется «переменной созревания» (от англ. «maturation variable») и отвечает не за пространственное расположение клетки, а за некоторое количественное свойство, характеризующее ее зрелость, например, массу клетки, содержание ДНК, содержание гемоглобина и т.п.

В [1] рассматривается модель пролиферации клеток, основанная на линейном уравнении с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + au_x = p^2bw - bu - \mu u, \quad w = u(px, t), \quad (1)$$

где $u = u(x, t)$ – плотность популяции клеток зрелости x в момент времени t ; $a > 0$, $b > 0$, $\mu > 0$ – скорости созревания, деления и гибели

клеток соответственно; p – коэффициент пропорциональности.

Коэффициент пропорциональности $p > 1$ показывает, на сколько дочерних клеток зрелости x/p делится родительская клетка (обычно $p = 2$). В [1] показано, что аналитическое решение начально-краевой задачи с произвольными начальными данными для уравнения (1) может быть получено путем сведения рассматриваемой задачи к последовательности более простых задач Коши.

Модель, основанная на нелинейном уравнении переноса с пропорциональным запаздыванием по x и постоянным запаздыванием по t , предложена в [2]:

$$u_t + a(x)u_x = cw(1 - w) - \delta u, \quad (2) \\ w = u(px, t - \tau),$$

где $a(x) > 0$ – переменная скорость созревания (рассматривается случай $a(x) = rx$, $r > 0$ – некоторая константа); $\delta > 0$ и $c > 0$ – некоторые константы; $\tau > 0$ – время запазды-

вания, $p > 0$ – коэффициент пропорциональности.

В [2] изучается существование и локальная устойчивость решений различного вида для различных начальных данных и значений параметров уравнения (2). Похожие модели рассматриваются также в [3, 4]. Численный метод для решения уравнений вида (2) разрабатывается в [5]. В [6] рассматривается модель с более сложным нелинейным уравнением с произвольным аргументом по x и постоянным запаздыванием по t :

$$u_t + a(x)u_x = f(t, u, w), \quad w = u(\xi(x), t - \tau),$$

где $0 \leq \xi(x) < x$.

Точность численных и приближенных аналитических методов интегрирования уравнений переноса с запаздыванием можно проверять путем сопоставления численных решений с решениями тестовых задач. Для формулировок тестовых задач используются уравнения, которые содержат произвольные функции и допускают точные решения со свободными параметрами. Такие уравнения и точные решения позволяют легко формулировать большой набор тестовых задач, которые в том числе дают возможность наблюдать и сравнивать работу методов в обычных и особых случаях, например, в устойчивых и неустойчивых областях.

Большой объем литературы посвящен построению точных решений уравнений математической физики с запаздыванием второго порядка. Выделяются методы группового анализа [7–9], метод функциональных связей [10–17] и метод структурной аналогии решений [18–23]. Результаты последних лет по точным решениям уравнений математической физики второго порядка с постоянным, пропорциональным и переменным запаздыванием обобщены и структурированно изложены в монографии [24].

При этом, на данный момент известна лишь одна статья о построении точных решений уравнений переноса с запаздыванием. В [25] проводится полная групповая классификация уравнения переноса с постоянным запаздыванием

$$u_t + g(u)u_x = f(u, w), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (3)$$

Для $g(u) = u$ получено четыре уравнения, которые допускают точные решения: одно уравнение с произвольной функцией, допускающее решение типа бегущей волны, одно линейное уравнение и два уравнения со

степенными нелинейностями. Полученные решения содержат произвольные функции и свободные параметры.

В данной статье мы рассматриваем нелинейные уравнения переноса с пропорциональным запаздыванием и произвольными аргументами. Точные решения построены методом функциональных связей и с помощью принципа структурной аналогии решений.

Термин «точное решение нелинейного уравнения переноса с пропорциональным запаздыванием (с произвольными аргументами)» применяется в случаях, когда решение выражается в элементарных функциях, и/или через неопределенные интегралы, и/или через решения ОДУ или систем ОДУ, и/или через решения ОДУ или систем ОДУ с пропорциональным запаздыванием (с произвольными аргументами).

Во втором разделе статьи приводятся точные решения уравнений переноса с пропорциональным запаздыванием и постоянным коэффициентом переноса:

$$u_t + au_x = f(u, w), \quad w = u(px, t). \quad (4)$$

Так как уравнение (4) симметрично относительно аргументов x и t (с точностью до переобозначений константы a и кинетической функции f), точные решения для уравнений с пропорциональным запаздыванием по t могут быть легко выписаны и в статье не приводятся. Рассматриваются также уравнения с запаздываниями по обоим переменным, когда $w = u(px, qt)$.

Третий раздел статьи содержит точные решения более сложных уравнений переноса с пропорциональным запаздыванием и зависящим от u коэффициентом переноса:

$$u_t + h(u)u_x = f(u, w), \quad w = u(px, t). \quad (5)$$

Рассматриваются также уравнения с запаздыванием по t , когда $w = u(x, qt)$, и уравнения с запаздываниями по обоим переменным, когда $w = u(px, qt)$.

В четвертом разделе статьи представлена таблица, которая содержит нелинейные уравнения переноса с произвольными аргументами вида (4) и (5), где $w = u(\xi(x), t)$, или $w = u(x, \eta(t))$, или $w = u(\xi(x), \eta(t))$. Точные решения этих уравнений получены с помощью решений уравнений с пропорциональным запаздыванием (4) и (5) с помощью принципа структурной аналогии решений [26].

Замечание 1. Точным решениям уравнений математической физики первого, второго и более старших порядков без запаздывания посвящена книга [27], которая содержит более четырех с половиной тысяч уравнений, допускающих точные решения.

УРАВНЕНИЯ С ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПЕРЕНОСА

Уравнение 1. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием:

$$u_t + au_x = bw^{1/p}, \quad w = u(px, t), \quad (6)$$

допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = (a\lambda)^{\frac{p}{1-p}} e^{-\lambda x} \left(A e^{\frac{(p-1)a\lambda}{p} t} - b \right)^{\frac{p}{p-1}},$$

где λ, A – произвольные постоянные.

Уравнение 2. Рассмотрим нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием:

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= u(b \ln u + c \ln w + d), \\ w &= u(px, t). \end{aligned} \quad (7)$$

1°. Уравнение (7) допускает точное решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = \sum_{n=0}^N t^n \varphi_n(x),$$

где N – любое натуральное число, а функции $\varphi_n = \varphi_n(x)$ ($0 \leq n \leq N$) определяются из системы ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\begin{aligned} a\varphi'_0 &= b\varphi_0 + c\bar{\varphi}_0 - \varphi_1 + d, \\ a\varphi'_n &= b\varphi_n + c\bar{\varphi}_n - (n+1)\varphi_{n+1}, \\ 1 \leq n &\leq N-1, \\ a\varphi'_N &= b\varphi_N + c\bar{\varphi}_N, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\bar{\varphi}_n = \varphi_n(px)$ ($0 \leq n \leq N$).

2°. Уравнение (7) допускает также точное решение вида

$$u = \exp[\varphi_1(x)e^{ct} + \varphi_2(x)],$$

где функции $\varphi_i = \varphi_i(x)$ ($i = 1, 2$) удовлетворяют линейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\begin{aligned} a\varphi'_1 &= (b-c)\varphi_1 + c\bar{\varphi}_1, \\ a\varphi'_2 &= b\varphi_2 + c\bar{\varphi}_2 + d, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\bar{\varphi}_i = \varphi_i(px)$ ($i = 1, 2$).

Уравнение 3. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + au_x = f(u-w), \quad w = u(px, t), \quad (10)$$

где f – произвольная функция, допускает точное решение вида

$$u = At + \varphi(x),$$

где A – произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$a\varphi' = f(\varphi - \bar{\varphi}) - A, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px). \quad (11)$$

Уравнение 4. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + au_x = bu + f(u-w), \quad w = u(px, t), \quad (12)$$

допускает точное решение с аддитивным разделением переменных вида

$$u = Ae^{bt} + \varphi(x),$$

где A – произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$a\varphi' = b\varphi + f(\varphi - \bar{\varphi}), \quad \bar{\varphi} = \varphi(px). \quad (13)$$

Уравнение 5. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + au_x = uf\left(\frac{w}{u}\right), \quad w = u(px, t), \quad (14)$$

допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных вида

$$u = e^{\lambda t} \varphi(x),$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$a\varphi' + \lambda\varphi - \varphi f\left(\frac{\bar{\varphi}}{\varphi}\right) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px). \quad (15)$$

Уравнение 6. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + au_x = bu \ln u + uf\left(\frac{w}{u}\right), \quad w = u(px, t), \quad (16)$$

допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных вида

$$u = \exp(Ae^{bt} + B/b)\varphi(x),$$

где A, B – произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$a\varphi' = \varphi \left[B + b \ln \varphi + f\left(\frac{\bar{\varphi}}{\varphi}\right) \right], \quad \bar{\varphi} = \varphi(px). \quad (17)$$

Замечание 2. Описанные выше уравнения переноса с пропорциональным запаздыванием по переменной x и постоянным коэффициентом переноса (6), (7), (10), (12), (14), (16) симметричны относительно аргументов x и t (с точностью до переобозначений константы a и кинетической функции f). Поэтому точные решения для уравнений с пропорциональным запаздыванием по переменной t могут быть легко записаны и в статье не приводятся.

Уравнение 7. Рассмотрим нелинейное уравнение переноса с пропорциональными запаздываниями по обоим переменным:

$$u_t + au_x = bw^k, \quad w = u(px, qt), \quad (18)$$

1°. Уравнение (18) допускает автомodelное точное решение вида

$$u = t^{\frac{1}{1-k}} \theta(z), \quad z = xt^{-1},$$

где функция $\theta = \theta(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$(z - a)\theta' + \frac{1}{k-1}\theta + bq^{\frac{k}{1-k}}\bar{\theta}^k = 0, \\ \bar{\theta} = \theta(sz), \quad s = pq^{-1}.$$

2°. Уравнение (18) при $q = p$ допускает точное решение типа бегущей волны:

$$u = \theta(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где k, λ – произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$(\lambda - ak)\theta' + b\bar{\theta}^k = 0, \quad \bar{\theta} = \theta(pz).$$

Уравнение 8. Рассмотрим нелинейное уравнение переноса с пропорциональными запаздываниями по обоим переменным:

$$u_t + au_x = bu^m w^k, \quad w = u(px, qt). \quad (19)$$

1°. Уравнение (19) допускает автомodelное точное решение:

$$u = t^{\frac{1}{1-k-m}} \theta(z), \quad z = xt^{-1},$$

где функция $\theta = \theta(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$(z - a)\theta' + \frac{1}{k+m-1}\theta + bq^{\frac{k}{1-k-m}}\theta^m \bar{\theta}^k = 0, \\ \bar{\theta} = \theta(sz), \quad s = pq^{-1}.$$

2°. Уравнение (19) при $q = p$ допускает точное решение типа бегущей волны:

$$u = \theta(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где k, λ – произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$(\lambda - ak)\theta' + b\theta^m \bar{\theta}^k = 0, \quad \bar{\theta} = \theta(pz).$$

3°. Уравнение (19) при $m = 1 - kq$ допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = e^{\lambda t} \varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$a\varphi' = b\varphi^{1-kq}\bar{\varphi}^k - \lambda\varphi, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

4°. Уравнение (19) при $m = 1 - kp$ допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = e^{\lambda x} \psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\psi' = b\psi^{1-kp}\bar{\psi}^k - a\lambda\psi, \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 9. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональными запаздываниями по обоим переменным

$$u_t + au_x = be^{\mu u + \lambda w}, \quad w = u(px, qt),$$

допускает точное решение вида

$$u = \theta(z) - \frac{1}{\mu + \lambda} \ln t, \quad z = xt^{-1},$$

где функция $\theta = \theta(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$(z - a)(\mu + \lambda)\theta' + \\ + b(\mu + \lambda)q^{-\frac{\lambda}{\mu + \lambda}} e^{\mu\theta + \lambda\bar{\theta}} + 1 = 0, \\ \bar{\theta} = \theta(sz), \quad s = pq^{-1}.$$

Уравнение 10. Рассмотрим нелинейное уравнение переноса с пропорциональными запаздываниями по обоим переменным:

$$u_t + au_x = u(b \ln u + c \ln w + d), \quad (20) \\ w = u(px, qt).$$

1°. Уравнение (20) допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных вида

$$u = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются нелинейными ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\begin{aligned} a\varphi' &= (b\ln\varphi + c\ln\bar{\varphi} - A)\varphi, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px), \\ \psi' &= (b\ln\psi + c\ln\bar{\psi} + d + A), \quad \bar{\psi} = \psi(qt), \end{aligned} \quad (21)$$

где A – произвольная постоянная.

2°. Уравнение (20) при $q = p$ допускает точное решение типа бегущей волны:

$$u = \theta(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где k, λ – произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$(\lambda - ak)\theta' + (b \ln \theta + c \ln \bar{\theta} + d)\theta = 0, \\ \bar{\theta} = \theta(pz).$$

Уравнение 11. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональными запаздываниями по обоим переменным

$$u_t + au_x = e^{\lambda u} f(u - w), \quad w = u(px, qt),$$

допускает точное решение вида

$$u = \theta(z) - \frac{1}{\lambda} \ln t, \quad z = xt^{-1},$$

где функция $\theta = \theta(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$(z - a)\theta' + e^{\lambda \theta} f\left(\theta - \bar{\theta} + \frac{1}{\lambda} \ln q\right) + \frac{1}{\lambda} = 0, \\ \bar{\theta} = \theta(sz), \quad s = pq^{-1}.$$

УРАВНЕНИЯ С ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ЗАВИСЯЩИМ ОТ ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПЕРЕНОСА

Уравнение 12. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + au^k u_x = uf(w/u), \quad w = u(px, t),$$

допускает точное решение вида

$$u = e^{\lambda t} \theta(z), \quad z = e^{-k\lambda t} x,$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$(k\lambda z - a\theta^k)\theta' + \theta f(\bar{\theta}/\theta) - \lambda\theta = 0, \quad \bar{\theta} = \theta(pz).$$

Уравнение 13. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + au^k u_x = u^{k+1} f(w/u), \quad w = u(px, t),$$

допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных вида

$$u = t^{-1/k} \varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет нелинейному обыкновенному функционально-дифференциальному уравнению:

$$a\varphi' = \varphi f(\bar{\varphi}/\varphi) + \frac{1}{k} \varphi^{1-k}, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px). \quad (22)$$

Уравнение 14. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + au^k u_x = bu^{-k} + f(u^{k+1} - w^{k+1}), \\ w = u(px, t),$$

допускает точное решение с функциональным разделением переменных вида

$$u = [\varphi(x) + b(k+1)t]^{\frac{1}{k+1}},$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$a\varphi' = (k+1)f(\varphi - \bar{\varphi}), \quad \bar{\varphi} = \varphi(px). \quad (23)$$

Уравнение 15. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + ae^{\lambda u} u_x = e^{\lambda u} f(u - w), \quad w = u(px, t),$$

допускает точное решение с аддитивным разделением переменных вида

$$u = \varphi(x) - \frac{1}{\lambda} \ln t,$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$a\varphi' = e^{\lambda \varphi} f(\varphi - \bar{\varphi}) + \frac{1}{\lambda}, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px). \quad (24)$$

Уравнение 16. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + f'_u u_x = \frac{a}{f'_u} + g[f(u) - f(w)], \\ w = u(px, t),$$

допускает точное решение в неявном виде:

$$f(u) = at + \varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\varphi' = g(\varphi - \bar{\varphi}), \quad \bar{\varphi} = \varphi(px). \quad (25)$$

Уравнение 17. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + au^k u_x = uf(w/u), \quad w = u(x, qt),$$

допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных вида

$$u = (Ax + B)^{1/k} \psi(t),$$

где A, B – произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\psi' = \psi f(\bar{\psi}/\psi) - \frac{Aa}{k} \psi^{k+1}, \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (26)$$

Уравнение 18. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + au^k u_x = bu^{k+1} + uf(w/u), \quad w = u(x, qt),$$

допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных вида

$$u = e^{bx/a} \psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\psi' = \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (27)$$

Уравнение 19. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + au^k u_x = u^{k+1} f(w/u), \quad w = u(x, qt),$$

допускает точное решение вида

$$u = t^{-\frac{1}{k}} \theta(z), \quad z = x + \lambda \ln t,$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(z)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с постоянным запаздыванием:

$$k(\lambda + a\theta^k)\theta' = k\theta^{k+1}f\left(\frac{q^{-\frac{1}{k}}\bar{\theta}}{\theta}\right) + \theta, \\ \bar{\theta} = \theta(z + \sigma), \quad \sigma = \lambda \ln q.$$

Уравнение 20. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + au^k u_x = b + u^{-k} f(u^{k+1} - w^{k+1}), \\ w = u(x, qt),$$

допускает точное решение с функциональным разделением переменных:

$$u = [\psi(t) + b(k+1)x/a]^{\frac{1}{k+1}},$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\psi' = (k+1)f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (28)$$

Уравнение 21. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + ae^{\lambda u} u_x = f(u - w), \quad w = u(x, qt),$$

допускает точное решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln(Ax + B) + \psi(t),$$

где A, B – произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\psi' = f(\psi - \bar{\psi}) - \frac{aA}{\lambda} e^{\lambda \psi}, \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (29)$$

Уравнение 22. Рассмотрим нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием:

$$u_t + ae^{\lambda u} u_x = be^{\lambda u} + f(u - w), \\ w = u(x, qt). \quad (30)$$

1°. Уравнение (30) допускает точное решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln(Ae^{b\lambda x/a} + B) + \psi(t),$$

где A, B – произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\psi' = Bbe^{\lambda \psi} + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (31)$$

2°. Уравнение (30) допускает другое точное решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = \psi(t) + bx/a,$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\psi' = f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (32)$$

Уравнение 23. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + ae^{\lambda u} u_x = b + e^{-\lambda u} f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}), \\ w = u(x, qt),$$

допускает точное решение с функциональным разделением переменных:

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln[\psi(t) + b\lambda x/a],$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\psi' = \lambda f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (33)$$

Уравнение 24. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + (a \ln u + b)u_x = cu \ln u + uf\left(\frac{w}{u}\right),$$

$$w = u(x, qt),$$

допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = e^{cx/a} \psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$a\psi' = a\psi f(\bar{\psi}/\psi) - bc\psi, \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (34)$$

Уравнение 25. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + af'_u u_x = b + \frac{1}{f'_u} g[f(u) - f(w)],$$

$$w = u(x, qt),$$

где f и g – произвольные функции, допускает точное решение в неявном виде:

$$f(u) = \psi(t) + bx/a,$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\psi' = g(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (35)$$

Уравнение 26. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + af'_u u_x = bf(u) + \frac{f(u)}{f'_u} g\left[\frac{f(w)}{f(u)}\right],$$

$$w = u(x, qt),$$

допускает точное решение в неявном виде:

$$f(u) = e^{bx/a} \psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\psi' = \psi g(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (36)$$

Уравнение 27. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t = u^k F\left(\frac{u_x}{u}, \frac{w}{u}, \frac{w_x}{u}\right), \quad w = u(x, qt),$$

допускает точное решение вида

$$u = t^{\frac{1}{1-k}} \theta(z), \quad z = x + \lambda \ln t,$$

где функция $\theta = \theta(z)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с постоянным запаздыванием:

$$(k-1)\lambda\theta' =$$

$$= \theta + (k-1)\theta^k F\left(\frac{\theta'}{\theta}, q^{\frac{1}{1-k}} \frac{\bar{\theta}}{\theta}, q^{\frac{1}{1-k}} \frac{\bar{\theta}'}{\theta}\right),$$

$$\bar{\theta} = \theta(z + \sigma), \quad \sigma = \lambda \ln q.$$

Уравнение 28. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t = au + bw + F(x, u_x, w_x) + G(t, u - w),$$

$$w = u(x, qt),$$

где F и G – произвольные функции, допускает точное решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = \varphi(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются нелинейным ОДУ и нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$F(x, \varphi', \varphi') + (a+b)\varphi = C,$$

$$\psi' = a\psi + b\bar{\psi} + G(t, \psi - \bar{\psi}) + C, \quad (37)$$

$$\bar{\psi} = \psi(qt),$$

C – произвольная постоянная.

Уравнение 29. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t = au \ln u + uF\left(x, \frac{u_x}{u}\right) + uG\left(t, \frac{w}{u}\right),$$

$$w = u(x, qt),$$

допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ удовлетворяют нелинейному ОДУ и нелинейному ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$F(x, \varphi'/\varphi) + a \ln \varphi = C,$$

$$\psi' = C\psi + a\psi \ln \psi + \psi G\left(t, \frac{\bar{\psi}}{\psi}\right), \quad (38)$$

$$\bar{\psi} = \psi(qt),$$

C – произвольная постоянная.

Уравнение 30. Рассмотрим нелинейное уравнение переноса с пропорциональными запаздываниями по обоим переменным:

$$u_t + au^k u_x = u^n f(w/u), \quad w = u(px, qt). \quad (39)$$

1°. Уравнение (39) допускает автомодельное точное решение:

$$u = t^{\frac{1}{1-n}} \theta(z), \quad z = xt^{\frac{n-k-1}{1-n}},$$

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА С ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

где функция $\theta = \theta(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\left[\frac{n-k-1}{n-1} z - a\theta^k \right] \theta' + \\ + \theta^n f(q^{\frac{1}{1-n}} \bar{\theta} / \theta) + \frac{1}{n-1} \theta = 0, \\ \bar{\theta} = \theta(sz), \quad s = pq^{\frac{n-k-1}{1-n}}.$$

2°. Уравнение (39) при $q = p$ допускает точное решение типа бегущей волны:

$$u = \theta(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где k, λ – произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$(\lambda - ak\theta^k) \theta' + \theta^n f\left(\frac{\bar{\theta}}{\theta}\right) = 0, \\ \bar{\theta} = \theta(pz).$$

Уравнение 31. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональными запаздываниями по обоим переменным

$$u_t + ae^{\lambda u} u_x = e^{\mu u} f(u - w), \\ w = u(px, qt),$$

допускает точное решение вида

$$u = \theta(z) - \frac{1}{\mu} \ln t, \quad z = xt^{\frac{\lambda-\mu}{\mu}},$$

где функция $\theta = \theta(z)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\left(\frac{\lambda-\mu}{\mu} z + ae^{\lambda\theta} \right) \theta' = \\ = e^{\mu\theta} f\left(\theta - \bar{\theta} + \frac{\ln q}{\mu}\right) + \frac{1}{\mu}, \\ \bar{\theta} = \theta(sz), \quad s = pq^{\frac{\lambda-\mu}{\mu}}.$$

Уравнение 32. Нелинейное уравнение переноса достаточно общего вида с одинаковыми пропорциональными запаздываниями по обоим переменным

$$u_t = F(u, w, u_x, w_x), \quad w = u(px, pt),$$

где F – произвольная функция, допускает точное решение типа бегущей волны:

$$u = \theta(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где k, λ – произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(z)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\lambda \theta' + F(\theta, \bar{\theta}, k\theta', k\bar{\theta}') = 0, \quad \bar{\theta} = \theta(pz).$$

Уравнение 33. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональными запаздываниями по обоим переменным

$$u_t = u^{k+1} F\left(u^n u_x, \frac{w}{u}, u^n w_x\right), \\ w = u(px, qt),$$

допускает автомодельное точное решение:

$$u = t^{-1/k} \theta(z), \quad z = xt^{\frac{n+1}{k}},$$

где функция $\theta = \theta(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$(n+1)z\theta' = \\ = \theta + k\theta^{k+1} F\left(\theta^n \theta', \frac{q^{-\frac{1}{k}} \bar{\theta}}{\theta}, q^{-\frac{1}{k}} \theta^n \bar{\theta}'\right), \\ \bar{\theta} = \theta(sz), \quad s = pq^{\frac{n+1}{k}}.$$

УРАВНЕНИЯ С АРГУМЕНТАМИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ВИДА

Некоторые уравнения с пропорциональным запаздыванием, рассмотренные выше, можно обобщить на случай уравнений с аргументами произвольного вида и построить для них точные решения в соответствии с *принципом структурной аналогии решений*, который формулируется следующим образом [26]: *точные решения более простых уравнений могут служить основой для построения решений более сложных родственных уравнений*. В табл. 1 перечислены нелинейные уравнения переноса с аргументами произвольного вида и их точные решения. В последнем столбце даны ссылки на определяющие уравнения из предыдущих разделов статьи, в функциях которых необходимо формально заменить аргументы px на $\xi(x)$ и qt на $\eta(t)$.

Таблица 1. Нелинейные уравнения переноса с аргументами произвольного вида и их точные решения

№	Уравнение	Точные решения	Определяющие уравнения
Уравнения с произвольным аргументом по x , когда $w = u(\xi(x), t)$			
1	$u_t + au_x = u(b \ln u + c \ln w + d),$	$u = \sum_{n=0}^N t^n \varphi_n(x);$ $u = \exp[\varphi_1(x)e^{ct} + \varphi_2(x)]$	(8) (9)
2	$u_t + au_x = f(u - w)$	$u = At + \varphi(x)$	(11)
3	$u_t + au_x = bu + f(u - w)$	$u = Ae^{bt} + \varphi(x)$	(13)
4	$u_t + au_x = uf(w/u)$	$u = e^{\lambda t} \varphi(x)$	(15)
5	$u_t + au_x = bu \ln u + uf(w/u)$	$u = \exp(Ae^{bt} + B/b) \varphi(x)$	(17)
6	$u_t + au^k u_x = u^{k+1} f(w/u)$	$u = t^{-1/k} \varphi(x)$	(22)
7	$u_t + au^k u_x = bu^{-k} + f(u^{k+1} - w^{k+1})$	$u = [\varphi(x) + b(k+1)t]^{\frac{1}{k+1}}$	(23)
8	$u_t + ae^{\lambda u} u_x = e^{\lambda u} f(u - w)$	$u = \varphi(x) - \frac{1}{\lambda} \ln t$	(24)
9	$u_t + f'_u u_x = \frac{a}{f'_u} + g[f(u) - f(w)]$	$f(u) = at + \varphi(x)$	(25)
Уравнения с произвольным аргументом по t , когда $w = u(x, \eta(t))$			
10	$u_t + au^k u_x = uf(w/u)$	$u = (Ax + B)^{1/k} \psi(t)$	(26)
11	$u_t + au^k u_x = bu^{k+1} + uf(w/u)$	$u = e^{bx/a} \psi(t)$	(27)
12	$u_t + au^k u_x = b + u^{-k} f(u^{k+1} - w^{k+1})$	$u = [\psi(t) + b(k+1)x/a]^{\frac{1}{k+1}}$	(28)
13	$u_t + ae^{\lambda u} u_x = f(u - w)$	$u = \frac{1}{\lambda} \ln(Ax + B) + \psi(t)$	(29)
14	$u_t + ae^{\lambda u} u_x = be^{\lambda u} + f(u - w)$	$u = \frac{1}{\lambda} \ln(Ae^{b\lambda x/a} + B) + \psi(t);$ $u = \psi(t) + bx/a$	(31) (32)
15	$u_t + ae^{\lambda u} u_x = b + e^{-\lambda u} f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w})$	$u = \frac{1}{\lambda} \ln[\psi(t) + b\lambda x/a]$	(33)
16	$u_t + (a \ln u + b)u_x = cu \ln u + uf(w/u)$	$u = e^{cx/a} \psi(t)$	(34)
17	$u_t + af'_u u_x = b + \frac{1}{f'_u} g[f(u) - f(w)]$	$f(u) = \psi(t) + bx/a$	(35)
18	$u_t + af'_u u_x = bf(u) + \frac{f(u)}{f'_u} g[f(w)/f(u)]$	$f(u) = e^{bx/a} \psi(t)$	(36)
19	$u_t = au + bw + F(x, u_x, w_x) + G(t, u - w)$	$u = \varphi(x) + \psi(t)$	(37)
20	$u_t = a \ln u + uF(x, u_x/u) + uG(t, w/u)$	$u = \varphi(x) \psi(t)$	(38)
Уравнения с произвольными аргументами по обоим переменным, когда $w = u(\xi(x), \eta(t))$			
21	$u_t + au_x = u(b \ln u + c \ln w + d)$	$u = \varphi(x) \psi(t)$	(21)

КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Рассмотрено более тридцати нелинейных уравнений переноса с пропорциональным запаздыванием и более двадцати уравнений с произвольными аргументами, допускающих точные решения. Получены точные решения с аддитивным, мультипликативным и обобщенным разделением переменных, решения типа бегущей волны и автомодельные решения. Большинство уравнений и точных решений содержат свободные параметры, многие уравнения зависят от произвольных функций. Рассмотренные уравнения и их точные решения могут использоваться при изучении соответ-

ствующих процессов с запаздыванием и в формулировках тестовых задач для оценки точности численных и приближенных аналитических методов.

Автор благодарит А.Д. Полянина за внимание к статье и полезные замечания.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500440-9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zaidi A.A., Van Brunt B., Wake G.C. Solutions to an advanced functional partial differential equation of the

pantograph type // Proceedings of the Royal Society A, 2015. V. 471. 20140947.

DOI: 10.1098/rspa.20140947.

2. Rey A.D., Mackey M. C. Bifurcations and traveling waves in a delayed partial differential equation // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 1992. V. 2. P. 231–244.

3. Mackey M.C., Rudnicki R. Global stability in a delayed partial differential equation describing cellular replication // Journal of Mathematical Biology, 1994. V. 33. P. 89–109.

4. Dyson J., Villella-Bressan R., Webb G.F. A semilinear transport equation with delays // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2003. V. 32. P. 2011–2026.

5. Solodushkin S.I., Yumanova I.F., De Staelen R.H. First order partial differential equations with time delay and retardation of a state variable // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015. V. 289. P. 322–330.

6. Mackey M.C., Rudnicki R. A new criterion for the global stability of simultaneous cell replication and maturation processes // Journal of Mathematical Biology, 1999. V. 38. P. 195–219.

7. Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008. V. 338. P. 448–466.

8. Long F.-S., Meleshko S.V. On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein–Gordon equation with a delay // Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2016. V. 39. № 12. P. 3255–3270.

9. Lobo J.Z., Valaulikar Y.S. Group analysis of the one dimensional wave equation with delay // Applied Mathematics and Computation, 2020. V. 378. Iss. C, 125193. DOI: 10.1016/j.amc.2020.125193

10. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014. V. 19. P. 417–430.

11. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients // International Journal of Non-linear Mechanics, 2014. V. 6. P. 267–277.

12. Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Точные решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений гиперболического типа с запаздыванием // Вестник НИЯУ МИФИ, 2014. Т. 3. № 2. С. 141–148.

13. Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Точные решения нелинейных уравнений в частных производных с переменным запаздыванием типа пантографа // Вестник НИЯУ МИФИ, 2020. Т. 9. № 4. С. 315–328.

14. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations //

Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014. V. 19. № 3. P. 409–416.

15. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Generalized and functional separable solutions to nonlinear delay Klein–Gordon equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014. V. 19. № 8. P. 2676–2689.

16. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions // Applied Mathematics Letters, 2014. V. 37. P. 43–48.

17. Polyanin A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction–diffusion equations // International Journal of Non-linear Mechanics, 2014. V. 59. P. 16–22.

18. Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Построение точных решений нелинейных уравнений математической физики с запаздыванием с помощью решений более простых уравнений без запаздывания // Вестник НИЯУ МИФИ, 2020. Т. 9. № 2. С. 115–128.

19. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nonlinear pantograph-type diffusion PDEs: Exact solutions and the principle of analogy // Mathematics, 2021. V. 9 (5). 511. DOI: 10.3390/math9050511

20. Polyanin A.D., Sorokin V.G. A method for constructing exact solutions of nonlinear delay PDEs // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2021. V. 494 (2). 124619. DOI: 10.1016/j.jmaa.2020.124619.

21. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Construction of exact solutions to nonlinear PDEs with delay using solutions of simpler PDEs without delay // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2021. V. 95(1). 105634. DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105634.

22. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Reductions and exact solutions of nonlinear wave-type PDEs with proportional and more complex delays // Mathematics, 2023. V.11. 516. DOI: 10.3390/math11030516.

23. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Exact solutions of reaction-diffusion PDEs with anisotropic time delay // Mathematics, 2023. V.11. 3111. DOI: 10.3390/math11143111.

24. Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Журов А.И. Дифференциальные уравнения с запаздыванием: Свойства, методы, решения и модели. М: ИПМех РАН, 2022. 464 с.

25. Tanthanuch J. Symmetry analysis of the nonhomogeneous inviscid Burgers equation with delay // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012. V. 17. P. 4978–4987.

26. Полянин А.Д. Построение решений нелинейных уравнений математической физики с помощью точных решений более простых уравнений // Вестник НИЯУ МИФИ, 2024. Т. 13. № 2. С. 66–75.

27. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.

EXACT SOLUTIONS OF NONLINEAR TRANSPORT EQUATIONS WITH PROPORTIONAL DELAY

V.G. Sorokin

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, 119526, Russia

e-mail: vsesor@gmail.com

Received June 28, 2024; revised June 28, 2024; accepted July 9, 2024

Nonlinear transport equations with proportional delay, allowing exact solutions, are considered. More than thirty equations with proportional delay and a constant transfer coefficient, or with a transfer coefficient of power-law, exponential or logarithmic form depending on the desired function, have been described. The kinetic functions of all equations under consideration contain free parameters and in most cases also contain arbitrary functions. Exact additive, multiplicative, generalized and functional separable solutions, as well as traveling-wave and self-similar solutions are obtained. Most exact solutions contain free parameters. Over twenty more complex nonlinear transport equations with arbitrary arguments, allowing exact solutions, are also presented. The equations considered and their exact solutions can be used in the formulation of test problems to assess the accuracy of numerical methods.

Keywords: nonlinear transport equations with proportional delay, nonlinear transport equations with arbitrary arguments, functional-differential equations, equations of mathematical physics with delay, exact solutions, separable solutions, traveling-wave solutions, self-similar solutions.

REFERENCES

1. Zaidi A.A., Van Brunt B., Wake G.C. Solutions to an advanced functional partial differential equation of the pantograph type. *Proceedings of the Royal Society A*, 2015. Vol. 471. 20140947. DOI: 10.1098/rspa.20140947.
2. Rey A.D., Mackey M.C. Bifurcations and traveling waves in a delayed partial differential equation. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 1992. Vol. 2. Pp. 231–244.
3. Mackey M.C., Rudnicki R. Global stability in a delayed partial differential equation describing cellular replication. *Journal of Mathematical Biology*, 1994. Vol. 33. Pp. 89–109.
4. Dyson J., Villella-Bressan R., Webb G.F. A semilinear transport equation with delays. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2003. Vol. 32. Pp. 2011–2026.
5. Solodushkin S.I., Yumanova I.F., De Staelen R.H. First order partial differential equations with time delay and retardation of a state variable. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015. Vol. 289. Pp. 322–330.
6. Mackey M.C., Rudnicki R. A new criterion for the global stability of simultaneous cell replication and maturation processes. *Journal of Mathematical Biology*, 1999. Vol. 38. Pp. 195–219.
7. Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay. *Journal of mathematical analysis and applications*, 2008. Vol. 338. Pp. 448–466.
8. Long F.-S., Meleshko S.V. On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein-Gordon equation with a delay. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2016. Vol. 39. No. 12. Pp. 3255–3270.
9. Lobo J.Z., Valaulikar Y.S. Group analysis of the one dimensional wave equation with delay. *Applied Mathematics and Computation*, 2020. Vol. 378, iss. C, 125193. DOI: 10.1016/j.amc.2020.125193.
10. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014. Vol. 19. Pp. 417–430.
11. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2014. Vol. 6. Pp. 267–277.
12. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Tochnye resheniya nelinejnykh reakcionno-diffuzionnykh uravnenij giperbolicheskogo tipa s zapazdyvaniem [Exact solutions of nonlinear delay reaction-diffusion equations of hyperbolic type]. *Vestnik NIYaU «MIFI»*, 2014. Vol. 3. No. 2. Pp. 141–148 (in Russian).
13. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Tochnye resheniya nelinejnykh uravnenij v chastnykh proizvodnykh s peremennym zapazdyvaniem tipa pantografa [Exact Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations

with Pantograph Type Variable Delay]. Vestnik NIYaU MIFI, 2020. Vol. 9. No. 4. Pp. 315–328 (in Russian).

14. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014. Vol. 19. No. 3. Pp. 409–416.

15. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Generalized and functional separable solutions to nonlinear delay Klein–Gordon equations. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014. Vol. 19. No. 8. Pp. 2676–2689.

16. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions. Applied Mathematics Letters, 2014. Vol. 37. Pp. 43–48.

17. Polyanin A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction–diffusion equations. International Journal of Non-linear Mechanics, 2014. Vol. 59. Pp. 16–22.

18. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Postroenie tochnykh reshenij nelinejnykh uravnenij matematicheskoy fiziki s zapazdyvaniem s pomoshh'ju reshenij bolee prostykh uravnenij bez zapazdyvaniya [Construction of exact solutions for nonlinear equations of mathematical physics with delay using solutions of simpler equations without delay]. Vestnik NIYaU MIFI, 2020. Vol. 9. No. 2. Pp. 115–128 (in Russian).

19. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nonlinear pantograph-type diffusion PDEs: Exact solutions and the principle of analogy. Mathematics, 2021. V. 9 (5). 511. DOI: 10.3390/math9050511.

20. Polyanin A.D., Sorokin V.G. A method for constructing exact solutions of nonlinear delay PDEs. Journal of Mathematical Analysis and Applications,

2021. V. 494 (2). 124619. DOI: 10.1016/j.jmaa.2020.124619.

21. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Construction of exact solutions to nonlinear PDEs with delay using solutions of simpler PDEs without delay. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2021. V. 95(1). 105634. DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105634.

22. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Reductions and exact solutions of nonlinear wave-type PDEs with proportional and more complex delays. Mathematics, 2023. Vol. 11. 516. DOI: 10.3390/math11030516.

23. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Exact solutions of reaction-diffusion PDEs with anisotropic time delay. Mathematics, 2023. Vol. 11. 3111. DOI: 10.3390/math11143111.

24. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I. Differentsial'nye uravneniya s zapazdyvaniem: Svoystva, metody, resheniya i modeli [Differential equations with delay: Properties, methods, solutions and models]. Moscow, IPMech RAS Publ., 2022. 464 p. (in Russian).

25. Tanthanuch J. Symmetry analysis of the nonhomogeneous inviscid Burgers equation with delay. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012. Vol. 17. Pp. 4978–4987.

26. Polyanin A.D. Postroenie reshenij nelinejnykh uravnenij matematicheskoy fiziki s pomoshh'ju tochnykh reshenij bolee prostykh uravnenij [Constructing solutions to nonlinear equations of mathematical physics using exact solutions to simpler equations]. Vestnik NIYaU MIFI, 2024. Vol. 13. No. 2. Pp. 66–75 (in Russian).

27. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton, CRC Press, 2012.

УДК 004.421.2:004.77:327.88

ГЕНЕРАТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ В ИНФОРМАЦИОННЫХ ВОЙНАХ

А.Д. Вуйкович

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

e-mail: Anastasia.Vuykovich@yandex.ru

Поступила в редакцию 18.07.2022 г.

После доработки: 15.05.2024

Принята к публикации: 28.05.2024

Развитие информационно-коммуникационных технологий привело к существенному изменению жизни общества в области формирования потребления информации. С распространением сети Интернет начали появляться и различные средства распространения информации такие, как социальные сети, поддерживающие текстовый, визуальный и аудио-форматы. У общества появилась возможность публиковать и создавать контент, что в свою очередь сказывается на информационной среде, которая уже стала ареной информационного противоборства не только государств и организаций, но и отдельных индивидов. Особую роль в информационном противоборстве сегодня занимают методы автоматической генерации контента, основанные на генеративных алгоритмах, которые могут создавать объекты таких форматов, как изображения, видео, аудио и текст. В статье рассматриваются возможности использования генеративных алгоритмов в информационных войнах. Основная трудность обоснования совокупности тематик генеративных алгоритмов и информационных войн – новизна такого инструмента, как генеративно-состязательная сеть, отсутствие нормативно-правовой базы в Российской Федерации, а также подтвержденных случаев использования генеративных алгоритмов в информационной войне.

Ключевые слова: информационные войны, генеративный алгоритм, генеративно-состязательные сети, генератор, дискриминатор.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.352

EDN STQNGE

ВВЕДЕНИЕ

Изучением вопросов информационного противоборства (информационная война – синонимичное понятие) занимались разные ученые как в Российской Федерации, так и за рубежом.

Если рассматривать трактовки понятия ИВ полвека назад и сейчас, то они существенно различаются. В XX веке под ИВ понимали идеологическое и психологическое влияние, сейчас же с развитием технологий это понятие имеет множество толкований и смыслов, которые объединяются только объектной направленностью – информационным оружием.

Введем определения термина «**информационная война**» (далее **ИВ**), данное специалистами из нашей страны.

А.В. Манойло, доктор политических наук, специалист в области кибербезопасности и киберобороны, информационной безопасности, международного терроризма, определяет **ИВ** как процесс противоборства человеческих общностей, направленный на достижение политиче-

ских, экономических, военных или иных целей стратегического уровня, путём воздействия на гражданское население, власти и (или) вооруженные силы противостоящей стороны, посредством распространения специально отобранной и подготовленной информации, информационных материалов, и, противодействия таким воздействиям на собственную сторону [1].

Документы, которые были разработаны в МИД РФ, определяют **ИВ** как противоборство между государствами в информационном пространстве с целью нанесения ущерба информационным системам, процессам и ресурсам, критически важным структурам, подрыва политической, экономической и социальной систем, а также массовой психологической обработки населения с целью дестабилизации общества и государства [2].

Термин **ИВ** в Соглашении между правительствами государств – членов Шанхайской организации сотрудничества о сотрудничестве в области обеспечения международной информационной безопасности от 16 июня 2009 года трак-

туется как противоборство между двумя или более государствами в информационном пространстве с целью нанесения ущерба информационным системам, процессам и ресурсам, критически важным и другим структурам, подрыва политической, экономической и социальной систем, массовой психологической обработки населения для дестабилизации общества и государства, а также принуждения государства к принятию решений в интересах противоборствующей стороны¹.

Термины **ИВ** и «**информационное противоборство**» (далее **ИП**) зачастую сливаются в единое целое. Введем определение ИП, чтобы сравнить два понятия.

Сулейманова Ш.С., доктор политических наук, и Назарова Е.А., доктор социологических наук, определяют **ИП** как соперничество в информационно-психологической сфере, целью которого является усиление влияния на определенные сферы отношений и установления контроля над стратегическими ресурсами, в результате чего одни участники противоборства получают преимущество, другие – утрачивают [1].

Также под **ИП** понимают борьбу в информационной среде, то есть деструктивное воздействие на информацию, системы, инфраструктуру соперника и защиты собственной информации, систем и инфраструктуры от воздействия подобного рода.

Зарубежные специалисты дают похожие определения. Приведем некоторые из них.

«Объединенная доктрина информационных операций» Министерства обороны США 1998 года определяет **ИВ** как комплексное воздействие или совокупность информационных мероприятий на систему государственного или военного управления противостоящей стороны, на ее военно-политическое руководство, которое уже в мирное время приводило бы к принятию благоприятных для стороны-инициатора информационного воздействия решений, а в ходе конфликта полностью парализовало бы функционирование инфраструктуры управления противника [1].

В документах НАТО **ИВ** трактуется, как операция, проводимая с целью получения информационного преимущества над противни-

ком. Она заключается в контроле собственного информационного пространства, защите доступа к собственной информации, приобретении и использовании информации противника, разрушении его информационных систем и нарушении информационного потока².

Исходя из данных определений термина, можно ввести понятие, которое объединяет в себе все вышесказанное. **ИВ** или **ИП** – форма борьбы сторон с использованием специальных методов, средств и способов, направленная на достижение военных, политических, экономических и других целей, путем воздействия на население, власти и сторону противника, посредством распространения информации, выгодной определенной стороне для защиты собственных интересов.

Понятие генеративного алгоритма впервые появилось в статье А. Гудфеллоу «Генеративно-состязательные сети» в 2014 году [3]. **Генеративно-состязательная сеть**, или **генеративный алгоритм** – алгоритм машинного обучения без учителя, построенный на комбинации нейронных сетей – генеративной и дискриминативной и основанный на теоретико-игровом сценарии с нулевой суммой. Генератор производит образцы. Дискриминатор пытается отличить реальные образцы от сгенерированных.

Цель генератора – повысить процент ошибок дискриминатора, а **цель дискриминатора** – усовершенствование точности распознавания результатов.

Когда дискриминатор успешно отличает реальные образцы от сгенерированных, никаких изменений в параметрах его модели не требуется, в отличие от генератора. Когда генератору удастся обмануть дискриминатор, то его параметры не требуют изменения, а параметры дискриминатора обновляются. Когда объекты, созданные генератором, неотличимы от реальных, дискриминатор выдает результат 1/2 и может быть отброшен [4]. Этот принцип можно схематически изобразить (рис. 1). Идеализированную архитектуру генеративно-состязательной сети в книге «Глубокое обучение» описал ученый А. Гудфеллоу [4], его схема представлена на рис. 1. Автор настоящей статьи доработала данную схему [5].

¹ Соглашение между правительствами государств – членов Шанхайской организации сотрудничества о сотрудничестве в области обеспечения международной информационной безопасности // Консорциум КОДЕКС. 2009. [Электронный ресурс]. URL: <https://docs.cntd.ru/document/902289626> (дата обращения: 12.02.2022).

² Media – (dis)information – security // NATO. [Электронный ресурс]. URL: https://www.nato.int/nato_static_fl2014/assets/pdf/2020/5/pdf/2005-deepportal1-fake-news.pdf (дата обращения: 12.07.2022).

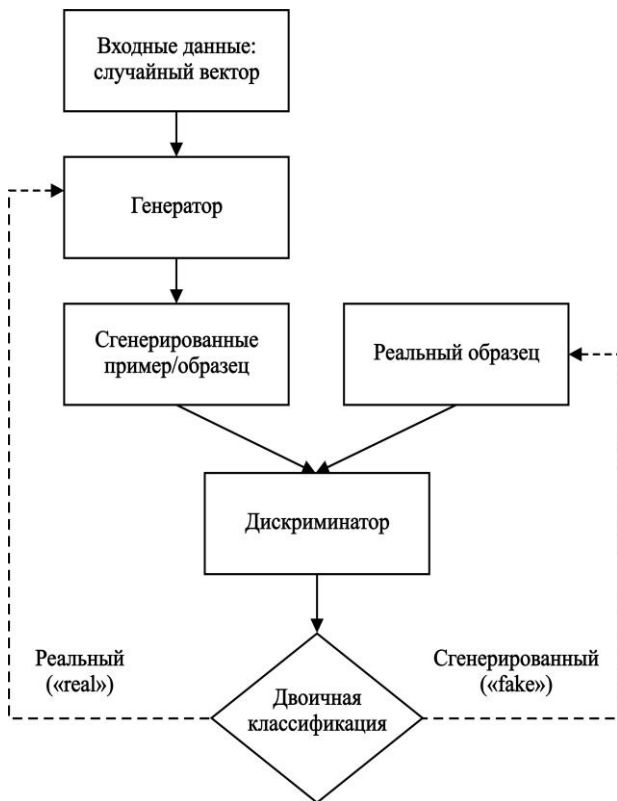


Рис. 1. Архитектура модели генеративно-сопоставительной сети

Изначально генеративно-сопоставительная сеть использовалась для достраивания изображений. А. Гудфеллоу и команда ученых под его руководством провели эксперимент по созданию примеров для набора данных изображений. Они обучили генеративную сеть набору данных MNIST (рис. 2,а), TDF (рис. 2,б), CIFAR-10 (рис. 2,в) и CIFAR-10 (сверточный дискриминатор и «деконволюционный» генератор) (рис. 2,г).

Крайние правые столбцы на рис. 2 (выделены желтой рамкой) показывают ближайшие обучающие примеры из соседних образцов, чтобы продемонстрировать, что модель не запомнила обучающий набор. Образцы являются случайными, а не отобранными.

На рис. 2 [3] изображены образцы, взятые из сети генератора после обучения. Исследователи пришли к выводу, что эти образцы конкурируют с лучшими генеративными моделями и подчеркивают потенциал состязательной структуры [3].

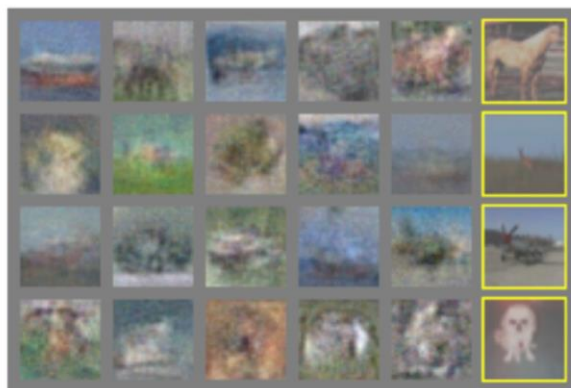
В настоящее время генеративный алгоритм используется в информационной среде для освещения событий, в том числе для создания как правдивой, так и ложной информации. Что ставит перед учеными задачу разработать средства программного обеспечения для идентификации сгенерированного контента.



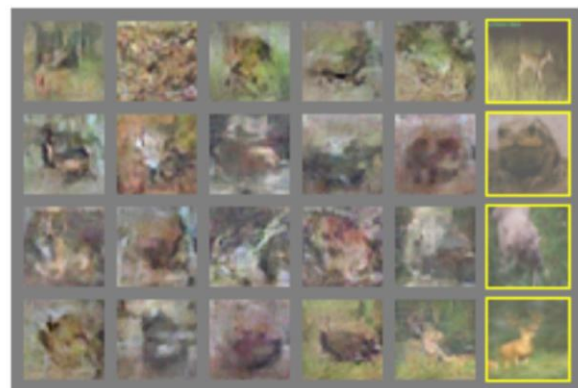
а



б



в



г

Рис. 2. Визуализация образцов из модели [3]

МЕТОДЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

Генеративные алгоритмы могут быть использованы для создания четырех видов объектов информации: изображений, видео, текста и аудио.

Использование генеративных алгоритмов для создания и преобразования изображений

Генеративно-состязательным сетям, у которых заданы определенные условия на входе, для преобразования изображения в изображение, таких как преобразование дня в ночь, дискриминатору предоставляются примеры реальных и сгенерированных ночных фотографий, а также реальных дневных фотографий в качестве входных данных. Генератор снабжен случайным вектором из скрытого пространства, исходя из заданных условий, а также реальными дневными фотографиями в качестве входных данных.

Для повышения качества изображений могут быть использованы следующие инструменты: обрезка, переворачивание, масштабирование и другие преобразования существующих изображений в обучающем наборе данных.

В сложных областях или областях с ограниченным объемом данных генеративные алго-

ритмы способны моделировать и обрабатывать недостающие данные.

Приведем несколько примеров использования генеративных алгоритмов в преобразовании изображений.

В научной работе «Преобразование изображения в изображение с помощью условных состязательных сетей» рассматриваются проблемы в обработке изображений: преобразование входного изображения в соответствующее выходное изображение, как показано на рисунке 3 [6]. Решение проблемы было найдено в условных состязательных сетях [6].

Помимо преобразования изображения в изображение исследователи проводили эксперименты с генеративно-состязательными сетями, в которых создавали реалистичные фотографии из текстовых описаний.

Ученые разработали многоуровневые генеративно-состязательные сети (StackGAN) для генерации фотореалистичных изображений размером 256×256 , обусловленных текстовыми описаниями. Принцип работы StackGAN состоит из двух этапов:

- первый этап: GAN рисует примитивную форму и цвета объекта на основе заданного текстового описания, получая изображение с низким разрешением (строка (а) на рис. 4) [7];



Рис. 3. Преобразование изображений Google Maps в спутниковый снимок (слева) и преобразование спутникового снимка в изображение Google Maps (справа) [6]



Рис. 4. Результаты работы StackGAN [7]

- второй этап: GAN прорабатывает результаты первого этапа и текстовые описания в качестве входных данных и генерирует изображения с высоким разрешением и фотореалистичными деталями. На втором этапе алгоритм устраняет дефекты в результатах первого этапа и добавляет дополнительные детали в процессе доработки (строка (b) на рис. 4) [7].

Р. Хуан в статье «За пределами поворота лица: глобальное и локальное восприятие GAN для фотореалистичного и сохраняющего идентичность синтеза фронтального вида» демонстрируют использование генеративных алгоритмов для создания фронтальных фотографий человеческих лиц, сделанных под углом. В итоге, сгенерированные фронтальные фотографии могут быть использованы в качестве входных данных для системы проверки или идентификации лиц [8].

Применение генеративно-сопоставительных сетей в ИП заключается в решении задач, требующих создания новых примеров. На основе приведенных в работе исследований укажем на возможности применения генеративных алгоритмов:

1. Преобразование изображения в изображение: возможность

трансформировать фотографии из разных областей, например, день в ночь, лето в зиму, спутниковые фотографии в Google Maps, черно-белые фотографии в цветные.

2. Создание реалистичных фотографий из текстовых описаний.

3. Использование фотографий для системы проверки или идентификации лиц.

По мнению Гудфеллоу генеративные алгоритмы смогли создавать фотографии настолько реалистичные, что даже эксперты не могли отличить сгенерированные алгоритмом изображения от действительности [4].

Использование генеративных алгоритмов для создания видеоматериалов

Исследователи из Facebook изобрели генераторы, которые имеют специально созданные структуры взаимосвязанных слоев. Каждый из уровней генератора состоит из определенного алгоритма, применяемого к входным данным, которые получает сеть. Первый уровень запускает алгоритм, который извлекает необработанные пиксели и простые мотивы из набора данных, представляющего изображение. Следующий уровень объединяет эти мотивы в более сложные композиции. Другие уровни обнаруживают части объектов, собирают их в единое целое и создают отдельные сцены, пока не будет получено все изображение.

Генеративно-сопоставительная сеть смогла научиться рисовать определенные объекты по мере прохождения обучения. Учеными были протестированы прогностические возможности генератора — использование необработанных

данных для создания видеокладов. Генератору передали 4 кадра видео и заставили его создать другие 2 кадра на основе этих данных. Полученные кадры, сгенерированные искусственным интеллектом, выглядели как реалистичное продолжение действия [9].

Использование генеративного алгоритма для создания текста

М. Хоссам и его команда ученых разработали возможность составления текста генеративным алгоритмом, используя набор данных IMDB movie reviews. Набор данных состоял из 100 000 отзывов, извлеченных с веб-сайта IMDB и был разделен на 3 группы: 12 500 положительных, 12 500 отрицательных и 50 000 немаркированных отзывов, а тестовый набор состоял из 12 500 положительных и отрица-

тельных отзывов в каждой. Во всех экспериментах использовались предложения длиной 20 слов и объемом словарного запаса 10 000 [10].

Чтобы оценить качество полученного результата, ученые показали сгенерированные выборки с низкими (0 – 33,33 %) или средними (38,33 – 50 %) показателями BLEU (рис. 5 [10]). Показатель BLEU – это алгоритм, который оценивает качество автоматически переведенного текста: чем ближе машинный перевод к профессиональному человеческому, тем ниже показатель BLEU и, соответственно, лучше качество перевода. Предложения с низким уровнем BLEU имеют грамматическую структуру.

Ученые доказали, что генеративный алгоритм может генерировать грамматически и семантически верные предложения с высоким разнообразием.

Образцы с низким/средним показателем BLUE

BLEU-3	Образцы предложений
00.00%	a creative , well-made comedy that focuses into a scary film by peter jackson , are heading for <UNK>
00.00%	this direction struck me , that's ! this dreadful zombie movie , generally and curtis are terrific but doesn't .
00.00%	but effort , rural accent must be developed from joke a video <UNK> this new version starts ! some say
11.11%	okay exceptionally documentary about steve hayes (who doesn't even destroy to the <UNK> ! that doesn't act better than
11.11%	sorry you're a fan , might even like your a spoiler as a master of shakespeare ; a little girl
11.11%	the wish i can relate to seeing many kind of kills the other well-made film adaptations than the godfather documentary
22.22%	wow hitchcock's prince meets thriller of the modern relationships in <UNK> terror and <UNK> above <UNK> the war film and
27.77%	the fine ending is , not even close to " princess <UNK> , " that it'd be extremely cool .
27.77%	this is an excellent , unbelievable , rather colorful show . brian <UNK> did never become a straight to part
33.33%	brilliant carpenter's halloween is actually my favorite films of my life . it made thriller a few laughs of new
33.33%	seriously imdb many previous reviews posted here about this movie due to a pair of art killings & <UNK> combined
33.33%	i haven't been such a clever flick , which is neither so <UNK> a mystery . the acting is somewhere
33.33%	so is a lovely film by any <UNK> . it makes a dumb decision to play fairly typical thing .
38.33%	wow surprised how wanted to see this . i thought about two of steven johnson are superb . however ,
44.44%	the tense 1931 melodrama is one of the finest entries to all ideas . while this is a great anime
44.44%	i believe i know things i can say , you always come out of my time and the way max
44.44%	the movie is a piece of crap . a group of guy lives off the shelf who meets shrek ,
50.00%	this izzard is a one-in-a-million comic genius ! many stars in this film ? <br / ><br / <UNK> the

Рис. 5. Образцы с низким/средним показателем BLUE [10]

Использование генеративных алгоритмов для создания аудиозаписей

Для обучения генеративного алгоритма Р. Аленкар использовал базу данных Freesound-Audio-Tagging, содержащую более 10 000 аудиосэмплов с разрядностью 16 бит и частотой дискретизации 44,1 кГц, монофоническими аудиофайлами, каждый из которых имеет разную длительность. Кроме того, все примеры разделены на 41 различные категории, такие как «Труба», «Аплодисменты», «Скрипка» и другие.

Основными категориями, использованными для эксперимента, были «Саксофон» и «Скрипка». Все аудиофайлы были повторно обработаны до 16 кГц, с продолжительностью 4 секунды, а затем нормализованы.

Эксперимент Р. Аленкара показал, что сгенерированные аудиодорожки более шумные по сравнению с оригинальными, а части тишины в оригинальных образцах не могут быть воспроизведены генератором, как изображено на рис. 6, 7 [11].

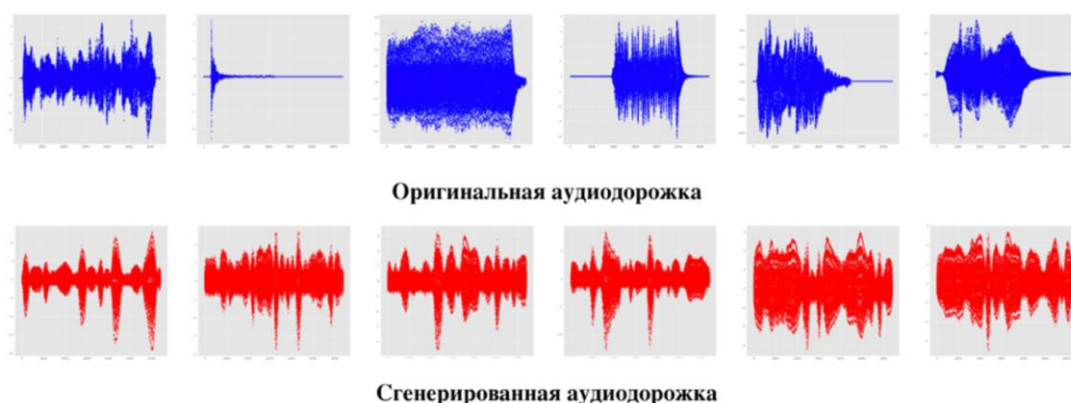


Рис. 6. Сравнение оригинальной аудиодорожки и сгенерированной [11]

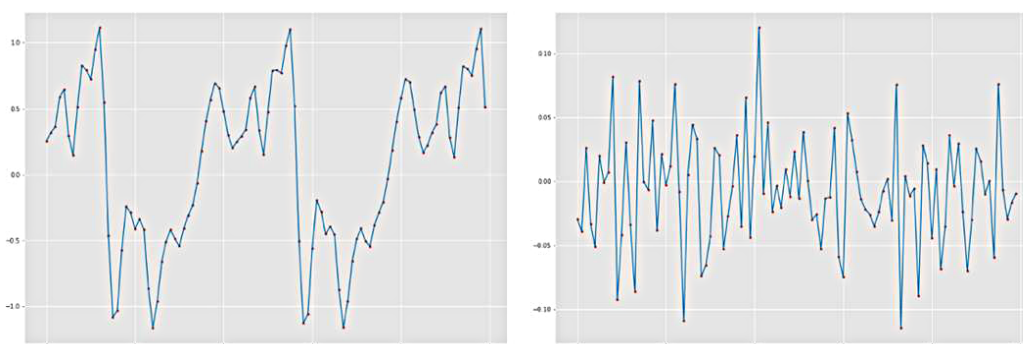


Рис. 7. Оригинальная аудиодорожка слева и сгенерированная аудиодорожка справа (в увеличении) [11]

Оригинальная волна выглядит лучше, чем сгенерированная. Ее форма определяет тембр, который отличает различные типы производства звука. Сгенерированная волна выглядит как случайный шум. Поэтому, чтобы улучшить эту модель, нужно обратить внимание на тембр этого звука и попытаться улучшить качество его генерации [11].

По сравнению с исследованиями 2019 года сгенерированные генеративными алгоритмами аудиозаписи сложно отличить от реальных, не используя специальные технологии. Нейросети научились создавать аудиоматериалы, которые подражают человеческой манере речи.

Примеры использования генеративных алгоритмов в информационных войнах

Наиболее часто в контексте информационных войн используются фото, видео и аудиоматериалы. В период предвыборной кампании использование «грязных» методов или черного пиара возрастает в разы, чтобы дискредитировать оппонента или очистить доброе имя. Ниже приведены некоторые примеры.

Один из них связан с фальшивым голосом Джо Байдена, который использовался в автоматически сгенерированных робозвонках, чтобы отговорить демократов от участия в первичных выборах. Байдена даже не было в избиратель-

ном бюллетене, хотя от его имени была запущена кампания по внесению изменений¹. Стоит отметить, что аудиозаписи, созданные с помощью генеративных алгоритмов, не только копируют голос человека, но и манеру речи, а также фирменные слова и фразы, поэтому достаточно сложно сходу понять, что это фальшивка.

Так в предвыборной гонке в Индии сами кандидаты просили специалистов, создающих контент с помощью генеративных алгоритмов, наложить лица соперников на порнографические изображения или же создать некачественные поддельные видеоролики с кандидатом, которые впоследствии могут быть опубликованы, чтобы поставить под сомнение любые изображающие реальные видеоролики, появившиеся во время выборов².

¹ The deepfake era of US politics is upon us // CNN, 2024 . [Электронный ресурс] URL: <https://edition.cnn.com/2024/01/24/politics/deepfake-politician-biden-what-matters/index.html> (дата обращения: 13.05.2024).

² AI deepfakes threaten to upend global elections. No one can stop them. // The Washington Post, 2024. [Электронный ресурс] URL: <https://www.washingtonpost.com/technology/2024/04/23/ai-deepfake-election-2024-us-india/> (дата обращения: 13.05.2024).

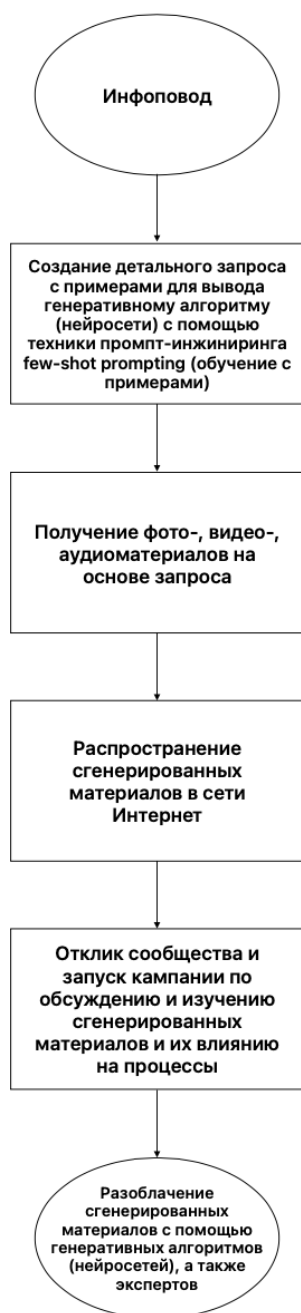


Рис. 8. Схема использования генеративных алгоритмов в информационной войне

Легкий доступ к инструментам искусственного интеллекта, таким как ChatGPT, приводит к тому, что в сети распространяются фейковые видео, записи разговоров, картинки, которые влияют на все сферы жизни общества, а не только на политическую, как приведено в примерах выше. Для того, чтобы сфабриковать видео, аудио или фото требуется всего несколько минут и умения составлять промпты (запросы-подсказки) для нейросетей. Как правило, используется техника *few-shot prompting* (обучение с примерами): пользователь приводит примеры и детально описывает нейросети, что хо-

чет получить на выходе, нейросеть в свою очередь отправляет пользователю файл в соответствии с его запросом. Далее информация распространяется с помощью социальных сетей, где набирает просмотры, лайки и репосты, а потом на волне популярности появляется в различных ток-шоу и новостях, где будет разобрана подробно и, возможно, разоблачена. Проще этот процесс представить схематично, как показано на рис. 8.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Изображения, видео, тексты и аудиозаписи, созданные с помощью генеративных алгоритмов, могут быть использованы как объекты информационного противостояния. Некоторые изображения, прошедшие через генеративно-состязательные сети, не обладают высоким качеством, но могут быть использованы в информационных войнах. Камеры видеонаблюдения, фотографии, сделанные в экстренных ситуациях, также не отличаются высоким разрешением, поэтому могут быть использованы в корыстных целях. Броский заголовок, опора на авторитеты и непрерывное раскручивание темы приводят к желаемому результату – общественность поверит и примет происходящее на видео или изображении за реальность.

Короткий текст, созданный генеративным алгоритмом, имеет право на существование в условиях информационной войны, так как он не лишен смысла и несет в себе верную грамматическую структуру, то есть для продвижения на платформах с ограниченным количеством знаков в сообщении, как никогда подойдет и впишется органично, донося до читателей нужную повестку. Аудиозаписи, сгенерированные с помощью генеративно-состязательных сетей, ранее не передавали тембров, а лишь сплошной шум. Спустя некоторое время, аудиоматериалы, созданные нейросетями, почти что неотличимы от оригинала и могут подстраиваться под речь человека, используя его фирменные слов и выражения.

Технологии, разработанные в лаборатории Facebook, отличаются лучшим качеством видео и возможностью генерировать продолжение кадров. Так как кадры выглядят реалистично, что даже эксперт с трудом сможет отличить сгенерированное видео от реального, мировая общественность безоговорочно поверит в происходящее. Видео будет «кочевать» из одного ресурса в другой, «обрастать» комментариями, пок кадровыми разборами и каждый участник

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

информационной войны будет трактовать увиденное в выгодном для него свете.

Помимо создания фейков и вбросов, генеративный алгоритм можно использовать для преобразования изображений в изображение, улучшения качества изображений, создания фотографий из текстовых описаний, а также дотраивания профиля лица на фотографиях, чтобы впоследствии использовать их для проверки и идентификации лиц. Эти возможности также важны в информационных войнах для создания качественного контента и доказательной базы.

Основная трудность обоснования использования генеративных алгоритмов в информационных войнах – новизна такого инструмента, как генеративно-состязательная сеть, отсутствие нормативно-правовой базы в большинстве стран мира. Так в Соединенных Штатах Америки¹ и Китайской Народной Республике² за распространение фейков с помощью генеративных алгоритмов и отсутствие маркировки на фото- и видеоконтенте, созданных с помощью нейросетей, предусмотрены штрафы и заключение под стражу. Даже при жестком правовом регулировании остаются трудности в поиске создателей фейкового контента, а также его маркировке, так как материалы распространяются лавинообразно. Поэтому целесообразно проработать нормативно-правовую базу, например, в Российской Федерации не регулируется распространение материалов, созданных генеративными алгоритмами³, а пользователям критично относиться к поступающей информации и перепроверять ее.

¹ H.R.3230 – DEEP FAKES Accountability Act [Электронный ресурс] // CONGRESS.GOV, 2019. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.congress.gov/bill/116th-congress/house-bill/3230/text> (дата обращения: 14.05.2024).

² 国家互联网信息办公室关于《互联网信息服务深度合成管理规定（征求意见稿）》公开征求意见的通知 [Электронный ресурс] // Office of the Central Cyberspace Affairs Commission, 2022. [Электронный ресурс]. URL: http://www.cac.gov.cn/2022-01/28/c_1644970458520968.htm (дата обращения: 14.05.2024).

³ ГК РФ Статья 152.1. Охрана изображения гражданина [Электронный ресурс] // КонсультантПлюс: [сайт]. [2022]. URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_5142/14c6c3902cffa17ab26d330b2fd4fae28e5cd059/ (дата обращения: 14.05.2024).

1. Сулейманова Ш.С., Назарова Е.А. Информационные войны: история и современность: учеб. пособие. М.: Международный издательский центр «Этносоциум», 2017. 126 с.

2. Ромашина Н.П., Ковалев В.И., Топычанов П.В., Евсеев В.В., Идаятов А.К. Угрозы информационной безопасности в кризисах и конфликтах XXI века. М.: ИМЭМО РАН, 2015. 151 с.

3. Goodfellow I.J., Pouget-Abadie J., Mirza M., Xu B., Warde-Farley D., Ozair S., Courville A., Bengio Y. Generative Adversarial Nets, 2014. [Электронный ресурс]. URL: <https://arxiv.org/pdf/1406.2661.pdf> (дата обращения: 01.04.2022).

4. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. Deep learning. Massachusetts Institute of Technology, 2016. 700 p.

5. Вуйкович А.Д. Генеративные алгоритмы в информационных войнах // Сборник тезисов докладов IX Международной молодежной научной школы-конференции «Современные проблемы физики и технологий», 26–28 апреля 2022 г. М.: НИЯУ МИФИ, 2022. С. 247–250.

6. Isola P., Zhu J.Y., Zhou T., Efros A.A. Image-to-Image Translation with Conditional Adversarial Networks, 2018. [Электронный ресурс]. URL: <https://arxiv.org/pdf/1611.07004.pdf> (дата обращения: 02.04.2022).

7. Zhang H., Xu T., Li H., Zhang S., Wang X., Huang X., Metaxas D. StackGAN: Text to Photo-realistic Image Synthesis with Stacked Generative Adversarial Networks, 2017. [Электронный ресурс]. URL: <https://arxiv.org/pdf/1612.03242.pdf> (дата обращения: 02.04.2022).

8. Brownlee J. 18 Impressive Applications of Generative Adversarial Networks (GANs) // Machine Learning Mastery, 2019. [Электронный ресурс]. URL: <https://machinelearningmastery.com/impressive-applications-of-generative-adversarial-networks/> (дата обращения: 03.04.2022).

9. Greenemeier L. When Will Computers Have Common Sense? Ask Facebook // SCIENTIFIC AMERICAN, 2016. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.scientificamerican.com/article/when-will-computers-have-common-sense-ask-facebook/> (дата обращения: 19.03.2022).

10. Hossam M., Le T., Papasimeon M., Huynh V., Phung D. Text Generation with Deep Variational GAN, 2021. [Электронный ресурс]. URL: <https://arxiv.org/pdf/2104.13488.pdf> (дата обращения: 04.04.2022).

11. Alencar R. Audio Generation with GANs // Medium, 2019. [Электронный ресурс]. URL: <https://medium.com/neuronio/audio-generation-with-gans-428bc2de5a89> (дата обращения: 04.04.2022).

GENERATIVE ALGORITHMS IN INFORMATION WARFARE

A.D. Vuykovich

National Nuclear Research University MEPhI, Moscow, 115409 Russia

e-mail: Anastasia.Vuykovich@yandex.ru

Received July 18, 2022; revised May 15, 2024; accepted May 28, 2024

The development of information and communication technologies has led to a significant change in the life of society in the field of information consumption formation. With the spread of the Internet, various means of information dissemination began to appear, such as social networks that support text, visual and audio formats. The society has the opportunity to publish and create content, which in turn affects the information environment, which has already become the arena of information confrontation not only between states and organizations, but also individuals. Methods of automatic content generation based on generative algorithms that can create objects of such formats as images, video, audio and text play a special role in the information confrontation today. The article discusses the possibilities of using generative algorithms in information warfare. The main difficulty in substantiating the totality of topics of generative algorithms and information warfare is the novelty of such a tool as a generative adversarial network, the lack of a regulatory framework in the Russian Federation, as well as confirmed cases of the use of generative algorithms in information warfare.

Key words: information warfare, generative algorithm, generative adversarial network, GAN, generator, discriminator.

REFERENCES

1. Suleymanova Sh.S., Nazarova E.A. *Informatsionniye voyni: istoria i sovremennost'* [Information wars: history and modernity]. Moscow, International Publishing Center «Ethnosocium» Publ., 2017. Pp. 4–46.
2. Romashkina N.P., Kovalev V.I., Topychkanov P.V., Evseev V.V., Idayatov A.K. *Ugrozy informatsionnoi bezopasnosti v krizisah i ugrozah XXI veka* [Threats to information security in crises and conflicts of the XXI century]. Moscow, IMEMO RAS, 2015. Pp. 21–30.
3. Goodfellow I.J., Pouget-Abadie J., Mirza M., Xu B., Warde-Farley D., Ozair S., Courville A., Bengio Y. *Generative Adversarial Nets* 2014. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1406.2661.pdf> (accessed: 01.04.2022).
4. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. *Deep learning*. Massachusetts Institute of Technology, 2016. Pp. 700.
5. Vuykovich A.D. *Generativnyye algoritmy v informatsionnykh voynah* [Generative algorithms in information wars]. *Sbornik tezisev dokladov IX Mezhdunarodnoj molodezhnoj nauchnoj shkoly-konferencii «Sovremennye problemy fiziki i tekhnologii»*, 26–28 aprelya 2022g. [Collection of abstracts of the IX International Youth Scientific School-Conference «Modern Problems of Physics and Technologies», April 26–28, 2022]. Moscow, NIYAU MIFI Publ., 2022. Pp. 247–250 (in Russian).
6. Isola P., Zhu J.Y., Zhou T., Efros A.A. *Image-to-Image Translation with Conditional Adversarial Networks* 2018. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1611.07004.pdf> (accessed: 02.04.2022).
7. Zhang H., Xu T., Li H., Zhang S., Wang X., Huang X., Metaxas D. *StackGAN: Text to Photo-realistic Image Synthesis with Stacked Generative Adversarial Networks* 2017. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1612.03242.pdf> (accessed: 02.04.2022).
8. Brownlee J. *18 Impressive Applications of Generative Adversarial Networks (GANs)*. Machine Learning Mastery, 2019. Available at: <https://machinelearningmastery.com/impressive-applications-of-generative-adversarial-networks/> (accessed 03.04.2022).
9. Greenemeier L. *When Will Computers Have Common Sense? Ask Facebook*. Scientific American, 2016. Available at: <https://www.scientificamerican.com/article/when-will-computers-have-common-sense-ask-facebook/> (accessed: 19.03.2022).
10. Hossain M., Le T., Papasimeon M., Huynh V., Phung D. *Text Generation with Deep Variational GAN*, 2021. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2104.13488.pdf> (accessed: 04.04.2022).
11. Alencar R. *Audio Generation with GANs*. Medium, 2019. Available at: <https://medium.com/neuronio/audio-generation-with-gans-428bc2de5a89> (accessed: 04.04.2022).

УДК 620.193

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ХРОМОВОГО ПОКРЫТИЯ С ОБОЛОЧКОЙ ТВЭЛА ИЗ СТАЛИ ЭП823-Ш В ДИАПАЗОНЕ ТЕМПЕРАТУР 420–650 °С

Р.Ш. Исаев, П.С. Джумаев*

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 115409, Москва, Россия

**e-mail: RSIsayev@mephi.ru*

Поступила в редакцию: 30.06.2024

После доработки: 23.07.2024

Принята к публикации: 30.07.2024

Хромовое покрытие может увеличить коррозионную стойкость оболочки твэла из стали ЭП823-Ш в среде жидкого свинца при температуре до 650 °С. В свою очередь целесообразно блокировать диффузионное взаимодействие хромового покрытия и стали в течение всего периода эксплуатации твэла. Электронно-микроскопические исследования образцов после высокотемпературных испытаний показали наличие слоя взаимодействия «покрытие-сталь». При температуре 420 °С и времени выдержки 1000 ч хромовое покрытие сохранило адгезию, взаимодействия между покрытием и сталью не наблюдалось. Однако при испытании 540 и 650 °С и времени выдержки 1000 ч на границе «покрытие-сталь» появляется неравномерный по толщине слой взаимодействия в пределах 150–600 нм. Этот слой имеет сложный состав и блокирует дальнейшую взаимную диффузию компонентов стали и покрытия друг в друга. Сталь ЭП823-Ш содержит молибден и вольфрам около 1 мас.%, и эти элементы могут способствовать ускоренному образованию слоя взаимодействия. Анализ взаимодействия в системе «покрытие-сталь» показал перспективность использования хрома как защитного покрытия внутренней поверхности оболочки твэла из стали ЭП823-Ш.

Ключевые слова: коррозия, ферритно-мартенситная сталь, ЭП823-Ш, хромовое покрытие.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.354

EDN TPOLQW

ВВЕДЕНИЕ

Более эффективное использование отработанного ядерного топлива возможно посредством использования реакторов на быстрых нейтронах, которые разрабатываются в рамках реакторов четвертого поколения (Gen4) [1]. В России идет строительство демонстративного комплекса с реактором БРЕСТ-ОД-300 со свинцовым теплоносителем, включающего заводы по переработке отработанного ядерного топлива, фабрики топлива в замкнутом топливном цикле [2, 3]. Успешная работа быстрых реакторов зависит в значительной степени от свойств конструктивных материалов активной зоны (оболочек твэлов, чехлов упругости тепловыделяющих сборок, направляющих каналов), которые работают в температурном диапазоне 400–650 °С и при высоком потоке быстрых нейтронов. Ферритно-мартенситные стали обладают высокой устойчивостью к радиационному набуханию и являются перспективными для быстрых реакторов [4].

Совместимость ферритно-мартенситных сталей со свинцом и эвтектикой свинец-висмут представляет собой значительную проблему при разработке быстрых реакторов с тяжелым жидкометаллическим теплоносителем. Жидкометаллическая коррозия оказывает негативное влияние на хромистую сталь ЭП823-Ш (16Х12МВССФБР-Ш) [4] ферритно-мартенситного класса. Механизм жидкометаллической коррозии сталей отвечает физико-химическому растворению, если содержание кислорода в свинце превышает равновесное значение. Регистрируется селективное растворение компонентов стали с поверхности оболочек. В случае если концентрация кислорода меньше равновесного значения, продуктами коррозии является внешний оксидный слой магнетита, хромистая шпинель нестехиометрического состава типа $\text{Fe}(\text{Fe}_{1-x}\text{Cr}_x)_2\text{O}_4$, а также наблюдается развитие по границам зерен зоны внутреннего окисления. Пострадиационные испытания экспериментальных сборок с уран-плутониевым топливом, облученных в реакторах БН-600 и БОР-60, показали наличие коррозионного повреждения

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ХРОМОВОГО ПОКРЫТИЯ С ОБОЛОЧКОЙ ТВЭЛА ИЗ СТАЛИ ЭП823-Ш В ДИАПАЗОНЕ ТЕМПЕРАТУР 420–650 °С

внутренней стороны оболочек из ферритно-мартенситной стали ЭП823-Ш [5]. Чистый свинцовый теплопередающий подслоя между топливом и оболочкой вызывает растворение и отложения компонентов стали на внутренней поверхности оболочки [6]. Эффект растворения-осаждения наблюдается в высокотемпературной

части твэла. При увеличении длительности облучения происходит распространение и увеличение эффекта растворения-осаждения в нижнюю, относительно холодную часть твэла. При выгорании 5.5 % т.а. в высокотемпературной части твэла оболочки максимальная глубина растворения достигала 230 мкм (рис. 1).

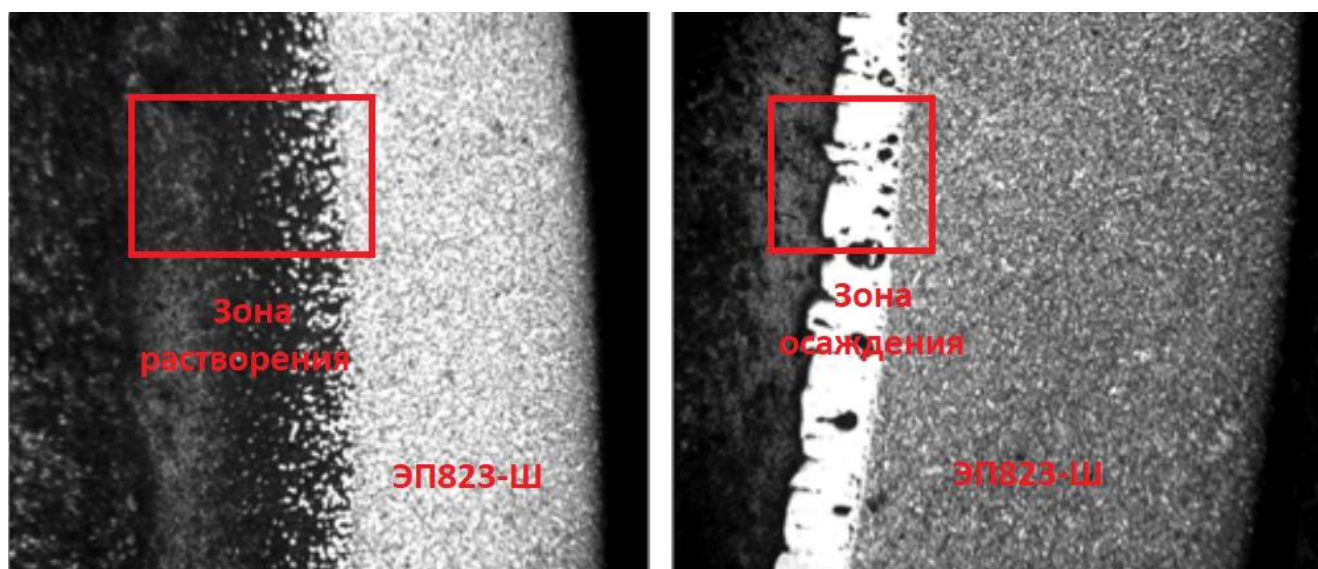


Рис. 1. Эффект растворения и осаждения оболочки твэла из стали ЭП823-Ш при выгорании 5.5 % т.а. [6]

Одним из вариантов решения этой проблемы может быть применение хромового покрытия. Для обеспечения работоспособности хромового покрытия на оболочках твэлов из стали ЭП823-Ш до температур 650 °С целесообразно блокировать диффузионное взаимодействие хромового покрытия и стали в течение всего периода эксплуатации твэла. Взаимная диффузия хрома и железо в объемном материале изучены, однако диффузионные свойства материала при толщинах покрытия (10–15 мкм) отличаются от свойств объемного материала, так как дефектность структуры, макронапряжения и другие параметры покрытия имеют значительное влияние. На диаграмме состояния хром-железо имеется интерметаллидная σ -фаза, которая стабильна в температурном диапазоне 440–820 °С (рис. 2). При 600 °С область стабильности σ -фазы простирается от 43 до 49 % (ат.) Cr, σ -фаза – хрупкая и обладает сложной тетрагональной структурой с тридцатью атомами в элементарной ячейке [7].

Обычно интерметаллиды отличаются высокой твердостью, повышенной хрупкостью и, соответственно, менее пластичны, чем исходные металлы. Это обстоятельство может привести к растрескиванию слоя взаимодействия покрытие-сталь и отслоению покрытия. Однако предполагается, что слой взаимодействия на границе покрытие-сталь из сложного интерметаллида может выступить как диффузионный барьер и предотвратит негативное взаимодействие между сталью и хромом при температуре до 650 °С. Целью данного исследования является выявление взаимодействия хромового покрытия с оболочкой твэла из стали ЭП823-Ш в диапазоне температур 420–650 °С. Данный температурный диапазон выбран исходя из рабочих параметров реактора БРЕСТ-ОД-300. Теплоноситель из жидкого свинца на входе в реактор будет иметь 420 °С, а на выходе – 540 °С. Однако у наиболее энергонапряженных твэлов температура оболочки может достигнуть 650 °С [4].

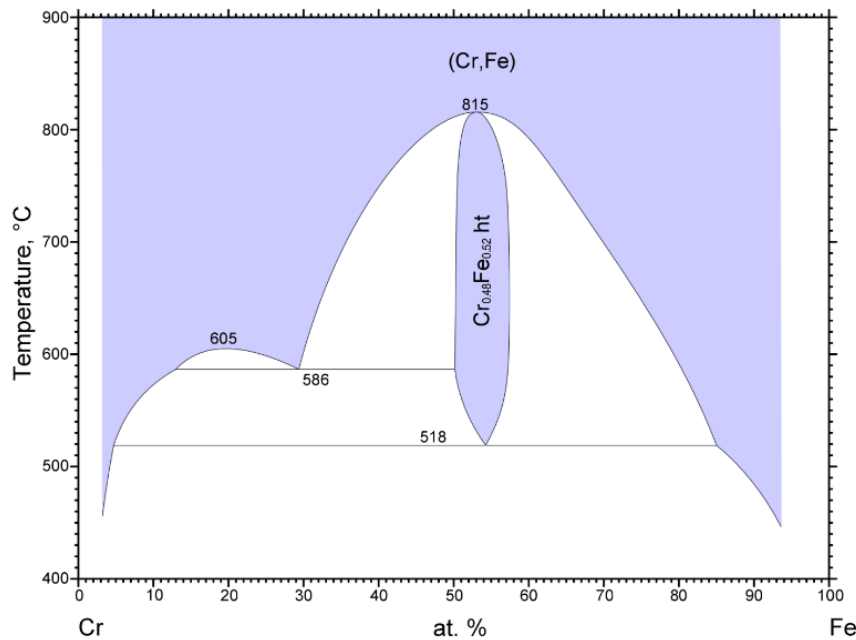


Рис. 2. Диаграмма состояния хром-железо в температурном диапазоне 400–900 °С [8]

1. МЕТОДИКА ПОЛУЧЕНИЯ, ПРОВЕДЕНИЯ ИСПЫТАНИЙ И АНАЛИТИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ ОБРАЗЦОВ

1.1. Электролитическое осаждение покрытий

В качестве образцов для исследования использованы фрагменты оболочки твэла длиной 50 мм, диаметром 9.7 мм (толщина стенки 0.5 мм), изготовленные из хромистой стали ЭП823-Ш (16Х12МВСБФР). Хромовые покрытия получали гальваническим способом, используя постоянный ток с различной продолжительностью. В качестве электролита использовали водный раствор хромовой (250 г/л) и серной (2.5 г/л) кислот. Во время процесса осаждения электролит поддерживался в изотермических равновесии при различных температурах. В качестве анода использовали проволоку из свинца, которая проходила через центр оболочки твэла и дополнительно натягивалась пружиной. оснащенный анодом, фрагмент оболочки твэла погружался в ванну с электролитом. Толщина хромового слоя линейно увеличивалась с увеличением времени процесса электролиза. Температурный диапазон для электролита был 25–35 °С, скорость электроосаждения ~0.35 мкм/мин. На рис. 3 показаны фрагменты оболочки твэла с хромовым покрытием на внутренней поверхности длиной 50 мм.

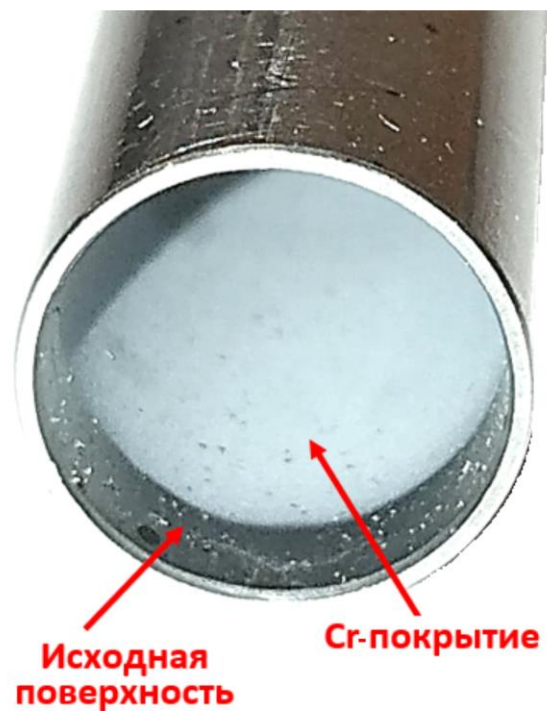


Рис. 3. Фрагменты оболочки твэла с хромовым покрытием на внутренней поверхности

1.2. Методика электронно-микроскопических исследований

Исследование топографии и микроструктуры поверхности и поперечных шлифов образцов проводили с помощью аналитического растрового электронного микроскопа EVO 50 XVP производства фирмы Carl Zeiss (Германия). Изображение в РЭМ получали в отраженных и обратнорассеянных электронах при изучении

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ХРОМОВОГО ПОКРЫТИЯ С ОБОЛОЧКОЙ ТВЭЛА ИЗ СТАЛИ ЭП823-Ш В ДИАПАЗОНЕ ТЕМПЕРАТУР 420–650 °С

топографии поверхности и микроструктуры, соответственно.

Анализ элементного состава образцов проводили методом рентгеноспектрального микроанализа с использованием энергодисперсионного ((INCA 350x-Act) и волнового (INCA Wave 500) спектрометров производства Oxford Instruments, совмещенных с растровым электронным микроскопом EVO 50. Спектрометр INCA 350x-Act оснащен кремний-дрейфовым детектором. Измерения проводили при ускоряющем напряжении 10–20 кВ и токе зонда 5–50 нА.

1.3. Высокотемпературные испытания в инертной среде и жидком свинце

Для высокотемпературных испытаний в свинце и аргоне оболочки твэла с хромовым покрытием отмывались в ультразвуковой ванне в ацетоне, затем в дистиллированной воде, высушивались и помещались в аргонный бокс. Для испытаний в свинце в отмытые образцы загружался свинец марки С0 ($Pb > 99.992\%$) и ниобиевая стружка в качестве геттера в соотношении 25:1, соответственно. По нашим оценкам концентрация кислорода в расплавленном свинце составляла $\sim 10^{-5}$ мас.%, при исходной концентрации кислорода $\sim 10^{-4}$ мас.% в свинце марки С0. Для испытаний в инертной среде в отмытые образцы загружался кислородный геттер и происходила герметизация в среде аргонного бокса. Далее образцы перемещались в муфельную печь и происходила выдержка при температурах 420, 540 и 650 °С в течение 1000 ч. После окончания высокотемпературных испытаний оболочки твэлов разрезались на фрагменты. После очистки от коррозионно-

активных компонентов (Pb, геттер) фрагменты образцов были переданы на металлографические анализы.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

2.1. Электронно-микроскопические исследования образцов

На рис. 4 представлены РЭМ-снимки поверхности хромового покрытия и участка поперечного сечения границы покрытие-сталь после электроосаждения. Толщина хромового покрытия полученных образцов составила ~ 10 мкм, структура представлена мелкими равноосными зернами с размером 0.8–1.2 мкм. Размер зерна не изменяется по мере отдаления от границы сталь-покрытие. Покрытие обладает хорошей адгезией к поверхности основного материала, несплошностей, и трещин не наблюдается. Распределение хрома по толщине покрытия – однородное, в пределах чувствительности энергодисперсионного детектора примесей в хромовом покрытии не обнаружено.

Для первоначальной оценки взаимодействия хромового покрытия со сталью ЭП823-Ш были проведены кратковременные высокотемпературные испытания при 650 °С. На рис. 5 приведены снимки микроструктуры поперечного сечения внутренней поверхности оболочки твэла после 650 °С и времени выдержки 100 ч. Было выявлено, что на границе покрытие-сталь образуется интерметаллидный слой взаимодействия, имеющий состав преимущественно железо-хром. Толщина слоя взаимодействия составляет 150–250 нм.

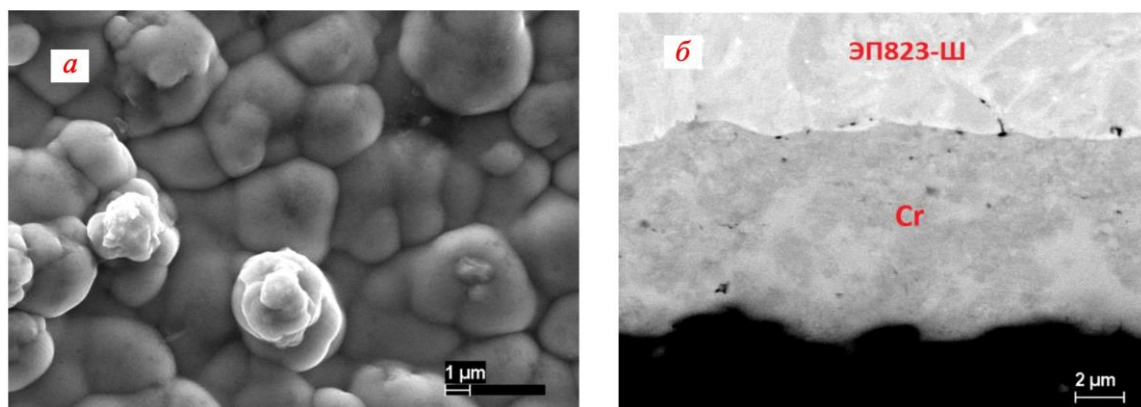


Рис. 4. РЭМ-снимки поверхности хромового покрытия (а) и поперечное сечения границы покрытие-сталь (б) после электроосаждения

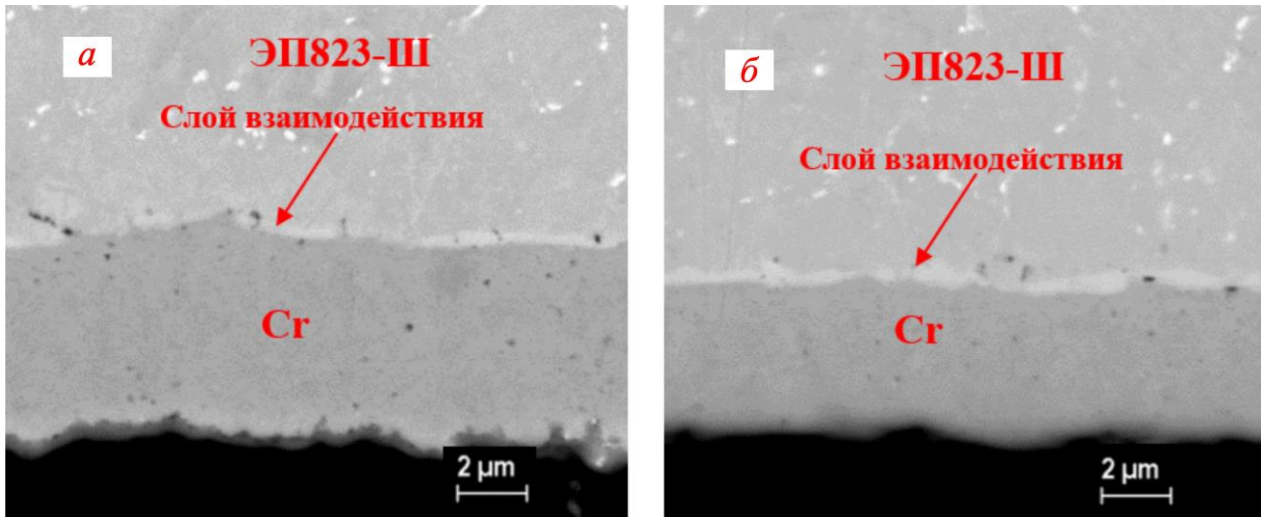


Рис. 5. РЭМ-снимки границы покрытие-сталь в аргоне (а) и жидком свинце (б) после 650 °С в течение 100 ч

Далее образцы с хромовым покрытием были испытаны в диапазоне 420–650 °С и времени выдержки 1000 ч. На рис. 6–8 приведены фотографии микроструктуры поперечного сечения внутренней поверхности оболочки твэла после высокотемпературных испытаний. При температуре 420 °С хромовое покрытие сохранило адгезию к поверхности стали, взаимодействия между покрытием и сталью не наблюдается (см. рис. 6). Как показано на диаграмме состояния хром-железо (см. рис. 2), температура появления σ -фазы составляет 440 °С, и она стабильна до температуры 820 °С. По этой причине при 420 °С взаимодействие покрытие-сталь не происходит. Однако у образцов при испытании 540 °С и 650 °С (см. рис. 7 и 8) на границе покрытие-сталь появляется слой взаимодействия.

У образцов с хромовым покрытием при испытании в диапазоне температур 420–650 °С и времени выдержки 1000 ч в жидком свинце эффекта растворения и осаждения на поверхностном слое не выявлено. Электронно-микроскопические исследования этих образцов показали отсутствие значительных признаков коррозионного повреждения как при испытаниях в среде аргона, так и в жидком свинце.

Для выявления состава слоя взаимодействия было проведено рентгеновское картирование. На рис. 9–11 приведены снимки элементного картирования участка поперечного сечения границы покрытие-сталь после высокотемпературных испытаний в аргоне.

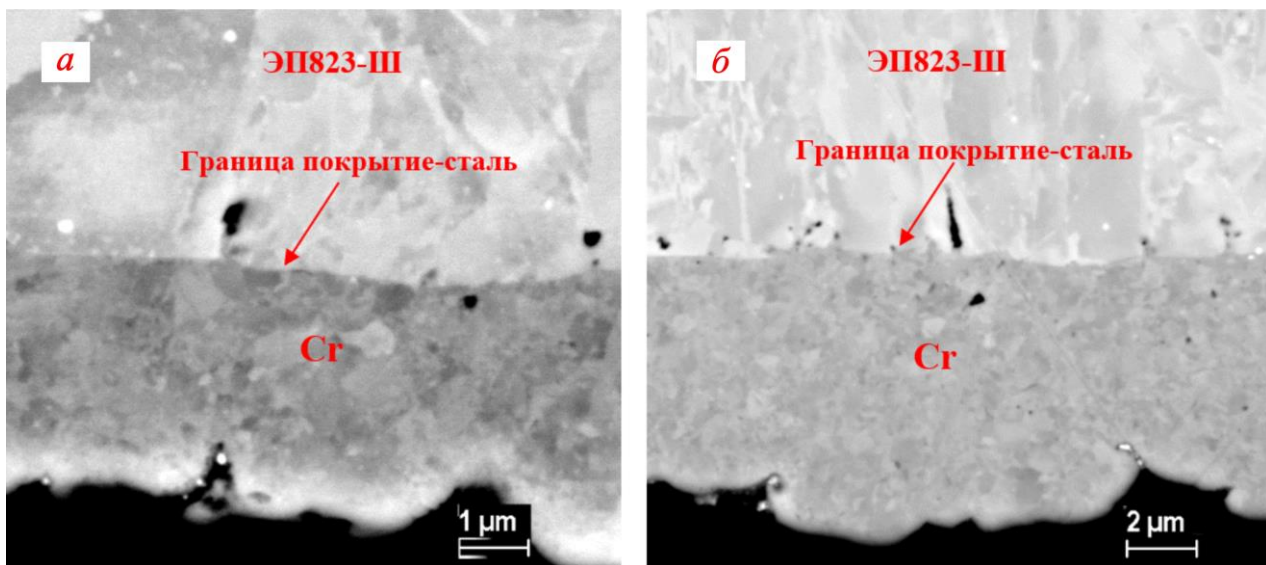


Рис. 6. РЭМ-снимки границы покрытие-сталь в аргоне (а) и жидком свинце (б) после 420 °С в течение 1000 ч

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ХРОМОВОГО ПОКРЫТИЯ С ОБОЛОЧКОЙ ТВЭЛА
ИЗ СТАЛИ ЭП823-Ш В ДИАПАЗОНЕ ТЕМПЕРАТУР 420–650 °С

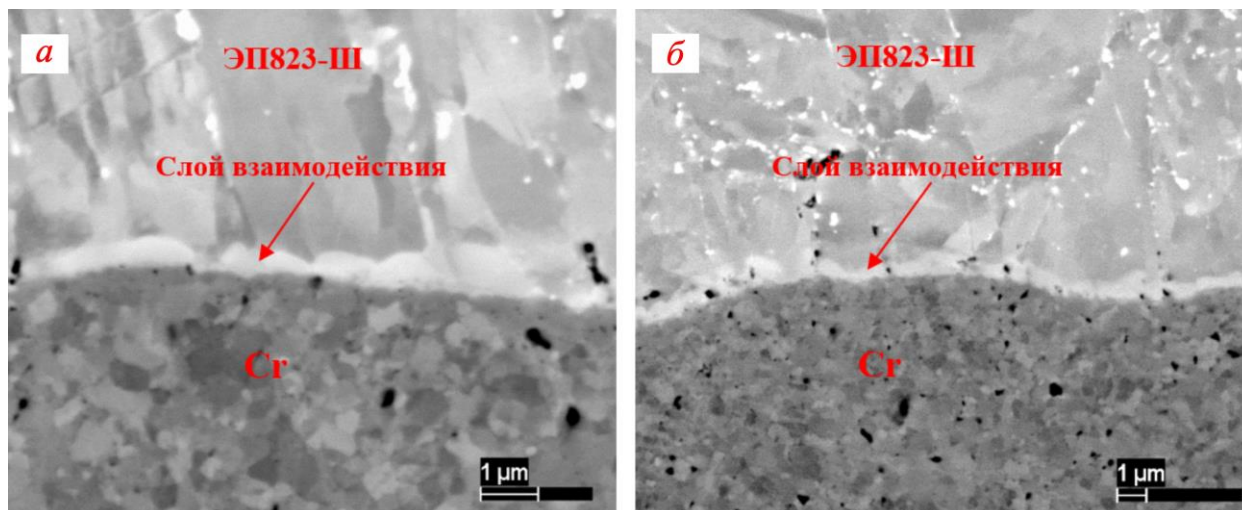


Рис. 7. РЭМ-снимки границы покрытие-сталь в аргоне (а) и жидком свинце (б) после 540 °С в течение 1000 ч

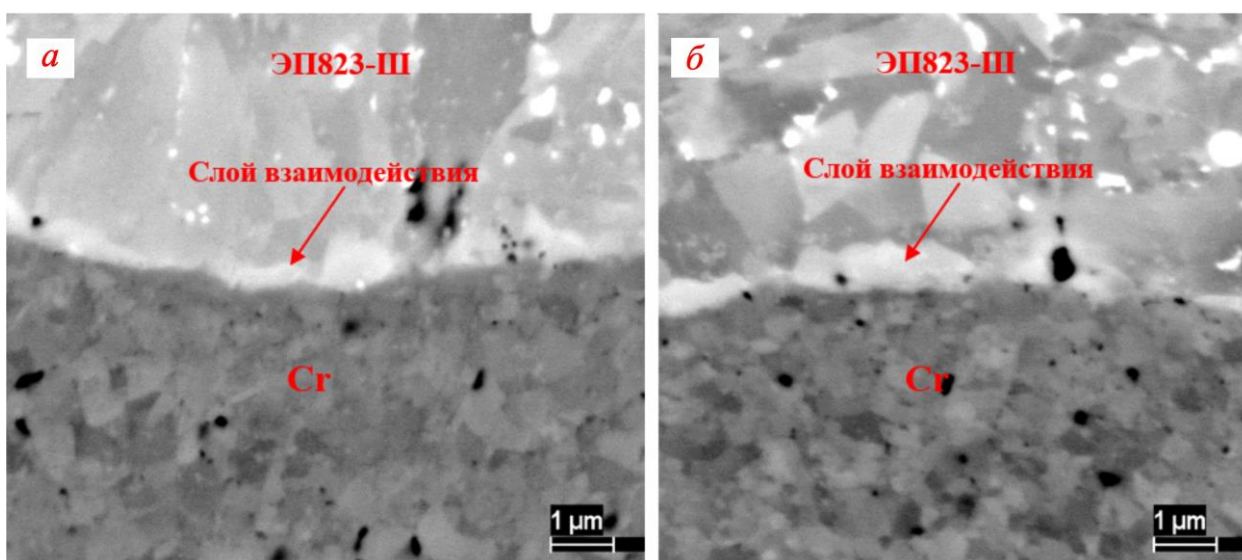


Рис. 8. РЭМ-снимки границы покрытие-сталь в аргоне (а) и жидком свинце (б) после 650 °С в течение 1000 ч

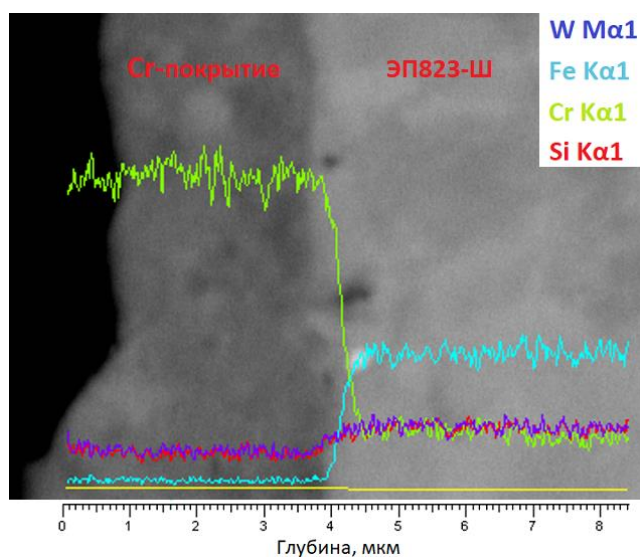


Рис. 9. Элементное картирование участка поперечного сечения границы покрытие-сталь в аргоне после 420 °С в течение 1000 ч

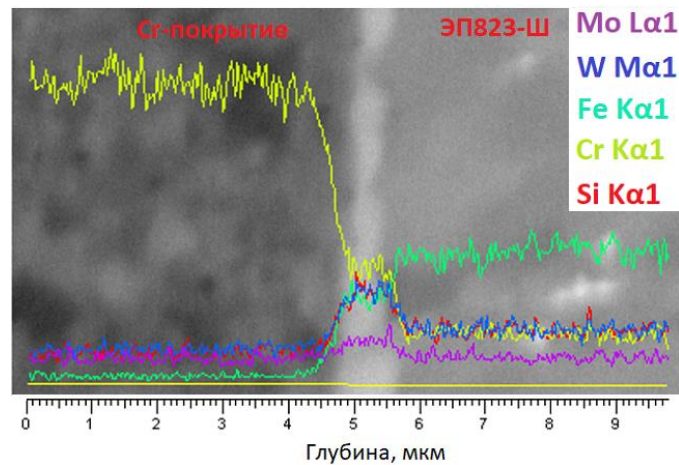


Рис. 10. Элементное картирование участка поперечного сечения границы покрытие-сталь в аргоне после 540 °С в течение 1000 ч

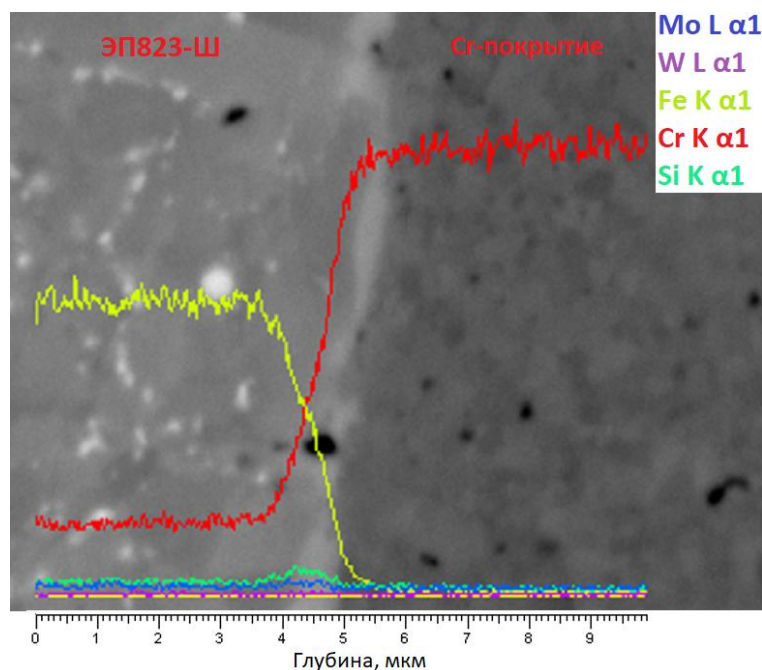


Рис. 11. Элементное картирование участка поперечного сечения границы покрытие-сталь в аргоне после 650 °С в течение 1000 ч

Так же, как и у образцов с кратковременным высокотемпературным испытанием при 650 °С, интерметаллидный слой взаимодействия имеет сложный состав, преимущественно состоит из железа и хрома. Толщина этого слоя как при испытании 540 °С, так и при 650 °С в течение 1000 ч неравномерна по толщине и колеблется в пределах 150–600 нм, в то время как у образцов с временем выдержки 100 ч при 650 °С толщина интерметаллида составляет 150–250 нм. Зерна стали, граничащие с интерметаллидным слоем, имеют такой же процентный состав по хромu (~13 мас.%), как и у тех зерен, которые не граничат со слоем взаимодействия покрытие-сталь. Авторы патента [9] обнаружили, что σ -фаза об-

разуется при добавке 2 мас.% Мо при 580 °С уже через 273 ч и 2 мас.% W при 560 °С через 838 ч. Учитывая, что сталь ЭП823-Ш (16Х12МВCFБР-Ш) [4] содержит Мо, W, Nb, V, Si около 1 мас.% и эти элементы могут способствовать быстрому образованию интерметаллидного слоя взаимодействия, который в свою очередь выступает в роли диффузионного барьера, предотвращающего дальнейшее взаимодействие хрома с железом. Как видно из рис. 7 и 8, трещин в покрытии, а также трещин и отслоений по границе покрытие-сталь не образовывается. Это говорит о том, что при таких условиях испытаний покрытие сохраняет целостность и коррозионно-стойкие свойства.

ВЫВОДЫ

В работе представлены результаты экспериментального исследования взаимодействия электролитического хромового покрытия, осажденного на внутреннюю поверхность оболочек ТВЭЛ из ферритно-мартенситной коррозионно-стойкой стали ЭП823-III. Образцы с хромовым покрытием были испытаны в диапазоне температур 420–650 °С и времени выдержки 1000 ч в среде аргона и жидкого свинца. Анализ взаимодействия в системе Cr/ЭП823-III позволяет сделать следующие выводы.

1. Кратковременные высокотемпературные испытания при 650 °С и времени выдержки 100 ч выявили на границе покрытие-сталь интерметаллидный слой взаимодействия по составу преимущественно из железа и хрома. Толщина слоя взаимодействия составляет 150–250 нм.

2. Испытания при 420 °С и времени выдержки 1000 ч показали, что хромовое покрытие сохранило адгезию, взаимодействия между покрытием и сталью не наблюдается.

3. Испытания при 540 и 650 °С и времени выдержки 1000 ч показали, что на границе покрытие-сталь появляется слой взаимодействия. Интерметаллидный слой взаимодействия имеет сложный состав и преимущественно состоит из железа и хрома. Этот слой неравномерен по толщине, и колеблется в пределах 150–600 нм.

4. Легирующие элементы стали ЭП823-III (16X12МВСФБР-III) могут способствовать быстрому образованию интерметаллидного слоя взаимодействия.

5. Интерметаллидный слой взаимодействия сложного состава выступает в роли диффузионного барьера, предотвращающего глубокое взаимодействие хромового покрытия со сталью. Трещин в покрытии, а также трещин и отслоений по границе покрытие-сталь не образуются. Это говорит о том, что при таких условиях испытаний покрытие сохраняет целостность и коррозионно-стойкие свойства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Piolo I. (ed.). Handbook of Generation IV Nuclear Reactors: A Guidebook. Woodhead Publishing, 2022. 1098 с. <https://doi.org/10.1016/C2019-0-01219-8>.*
2. *Tolstoukhov D., Panov S., Presnyakov I. Economic aspects of nuclear fuel cycle closure on the basis of fast neutron reactors in the framework of «Proryv» project direction implementation // Nuclear Engineering and Design, 2021. V. 384, Article ID 111471. <https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2021.111471>.*
3. *Zabudko L. M., Grachev A.F., Zherebtsov A.A., Lachkanov E.V. et al. Status on performance study of mixed nitride fuel pins of BREST reactor type // Nuclear Engineering and Design, 2021. V. 384. Article ID 111430. <https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2021.111430>*
4. *Бозин С.Н., Родченков Б.С., Каушанов А.Д., Марков В.Г. и др. Исследования конструкционных материалов для реактора со свинцовым теплоносителем // Атомная энергия, 2012. Т. 113. №. 5. С. 257–263.*
5. *Гринь П.И., Никитин О.Н., Беляева А.В. Основные результаты исследований ТВЭЛов экспериментальных сборок ЭТВС-9 и ЭТВС-10 после облучения в реакторе БН-600 // Научный годовой отчет АО «ГНЦ НИИАР» (отчет об основных исследовательских работах, выполненных в 2019 г.), 2020. С. 110–112.*
6. *Гильмутдинов И.Ф., Крюков Ф.Н., Никитин О.Н., Жемков И.Ю., Скупов М.В. Иванов Ю.А. Результаты исследований коррозии оболочек из стали марки ЭП823-III в ТВЭЛх со свинцовым и гелиевым подслоем // Тезисы докладов XI конференции по реакторному материаловедению, посвященной 55-летию отделения реакторного материаловедения АО «ГНЦ НИИАР», 2019. С. 196–197.*
7. *Лякишев Н.П. (ред.). Диаграммы состояния двойных металлических систем: справочник. Т. 3. М. Машиностроение, 1996. С. 872.*
8. *Villars P., Okamoto H. Cr-Fe Binary Phase Diagram 0-100 at.% Fe.: Datasheet from «PAULING FILE Multinaries Edition – 2022» in SpringerMaterials. https://materials.springer.com/isp/phase-diagram/docs/c_0903645.*
9. *Хаттендорф Х. и др. Жаростойкий железо-хром-алюминиевый сплав с низкой скоростью испарения хрома и повышенной жаропрочностью. Патент РФ, № 2014101607/02А, 2015.*

INTERACTION OF CHROME COATING WITH CLADDING MADE OF EP823-Sh STEEL IN THE TEMPERATURE RANGE 420–650 °C

R.Sh. Isayev*, P.S. Dzumaev

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

**e-mail: RSIsayev@mephi.ru*

Received June 30, 2024; revised July 23, 2024; accepted July 30, 2024

Chromium coating can increase the corrosion resistance of a fuel rod cladding made of EP823-Sh steel in a liquid lead environment at temperatures up to 650 °C. It is advisable to block the diffusion interaction of the chromium coating and steel during the entire period of operation of the fuel rod. Studies of samples after high-temperature tests showed the presence of a coating-steel interaction layer. At a temperature of 420 °C and a holding time of 1000 hours, the coating retained adhesion, and no interaction between the coating and steel was observed. When tested at 540 °C and 650 °C and a holding time of 1000 hours, an interaction layer of uneven thickness within the range of 150–600 nm appears at the coating-steel interface. This layer has a complex composition and blocks further mutual diffusion of the steel components and coating into each other. EP823-Sh steel contains molybdenum and tungsten about 1 wt.% and they accelerate coating-steel interactions. An analysis of the interaction in the coating-steel system revealed the promise of using chromium as a protective coating for the inner surface of the fuel rod cladding made of EP823-Sh steel.

Keywords: corrosion, ferritic-martensitic steel, EP823-Sh, chromium coating.

REFERENCES

1. *Pioro I. (ed.). Handbook of Generation IV Nuclear Reactors: A Guidebook. Woodhead Publishing, 2022. 1098 c. <https://doi.org/10.1016/C2019-0-01219-8>.*
2. *Tolstoukhov D., Panov S., Presnyakov I. Economic aspects of nuclear fuel cycle closure on the basis of fast neutron reactors in the framework of «Proryv» project direction implementation. Nuclear Engineering and Design, 2021. Vol. 384. Article ID 111471. <https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2021.111471>.*
3. *Zabudko L.M., Grachev A.F., Zhrebtsov A.A., Lachkanov E.V., et al. Status on performance study of mixed nitride fuel pins of BREST reactor type. Nuclear Engineering and Design, 2021. Vol. 384. Article ID 111430. <https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2021.111430>*
4. *Bozin S.N., Rodchenkov B.S., Kashtanov A.D., Markov V.G. et al. Issledovaniya konstruktsionnykh materialov dlya reaktora so svincovym teplonositelem [Research on structural materials for a lead-cooled reactor]. Atomnaya energiya, 2012. Vol. 113. No. 5. Pp. 257–263 (in Russian).*
5. *Grin' P.I., Nikitin O.N., Belyaeva A.V. Osnovnye rezul'taty issledovaniy tvелov eksperimental'nykh sborok ETVS-9 i ETVS-10 posle oblucheniya v reaktore BN-600 [The main results of studies of fuel rods of experimental assemblies ETVS-9 and ETVS-10 after irradiation in the BN-600 reactor]. Nauchnyy godovoy otchet AO «GNC NIAR» (otchet ob osnovnykh issledovatel'skikh rabotah, vypolnennykh v 2019 g.) [Scientific annual report of JSC «SSC RIAR» (report on the main research work carried out in 2019)], 2020. Pp. 110–112 (in Russian).*
6. *Gil'mutdinov I.F., Kryukov F.N., Nikitin O.N., Zhemkov I.YU., Skupov M.V. Ivanov Yu.A. Rezul'taty issledovaniy korrozii obolochek iz stali marki EP823-SH v TVELah so svincovym i gelievym podsloem [Results of studies of corrosion of EP823-Sh steel shells in fuel rods with a lead and helium sublayer]. Tezisy dokladov XI konferencii po reaktornomu materialovedeniyu, posvyashchyonnyaya 55-letiyu otdeleniya reaktornogo materialovedeniya AO «GNC NIAR» [Abstracts of the XI Conference on Reactor Materials Science, dedicated to the 55th anniversary of the Department of Reactor Materials Science of JSC «SSC RIAR»], 2019. Pp. 196–197 (in Russian).*
7. *Lyakishev N.P. (ed.). Diagrammy sostoyaniya dvoynykh metallicheskih sistem: spravochnik. T.3 [State diagrams of binary metal systems: a reference book. Vol. 3]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1996. 872 p.*
8. *Villars P., Okamoto H. Cr-Fe Binary Phase Diagram 0–100 at.% Fe.: Datasheet from «PAULING FILE Multinaries Edition – 2022» in SpringerMaterials. https://materials.springer.com/isp/phase-diagram/docs/c_0903645.*
9. *Hattendorf H. et al. Zharostojkij zhelezo-hrom-aluminievyy splav s nizkoj skorost'yu ispareniya hroma i povyshennoj zharoprochnost'yu [Heat-resistant iron-chrome-aluminum alloy with low chromium evaporation rate and increased heat resistance]. Patent RF. No. 2014101607/02A, 2015.*

