

<https://vestnikmephi.elpub.ru>

**ВЕСТНИК  
НАЦИОНАЛЬНОГО  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО  
ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА  
«МИФИ»**



# ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ»

Том 13 № 5 2024 СЕНТЯБРЬ - ОКТЯБРЬ

Основан в июле 2012 г.

Выходит 6 раз в год

ISSN: 2304-487X

ПИ № ФС 77 - 41948

**Главный редактор**

М.Н. Стриханов

**Редакционная коллегия:**

А.В. Аксёнов, Pavel Bedrikovetsky,  
С.Г. Гаранин, Vladimir S. Gerjikov, Н.Н. Евтихийев,  
Yalchin Efendiev, Alexei I. Zhurov, Н.П. Калашников, Н.И. Каргин, С.А. Кащенко,  
Н.А. Кудряшов (*заместитель главного редактора*),  
Raytcho Lazarov, О.В. Нагорнов, А.Д. Полянин,  
В.В. Цегельник, Б.Н. Четверушкин,  
М.А. Чмыхов (*ответственный секретарь*), William E. Schiesser

Выпускающий редактор: Н.В. Ермолаева

*Адрес редакции:* 115409, Москва, Каширское ш., 31,

Вестник НИЯУ МИФИ

Интернет: <https://vestnikmephi.elpub.ru>

Электронная почта: [vestnik@mephi.ru](mailto:vestnik@mephi.ru)

**Москва  
НИЯУ МИФИ**

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 13, № 5, 2024

---

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

- Определение скорости заполнения нанопористого материала несмачивающей жидкостью**  
*В.Д. Асафова, С.А. Кулаков, В.А. Быркин, С.А. Бортникова, А.А. Белогорлов* 285
- 

## ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

- Экспериментальное исследование истечения воды из вертикальной трубки, нагруженной на клапан Тесла**  
*Д.Н. Исхакова, Г.Н. Колесов, А.Е. Дубинов* 293
- 

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

- Об одном методе построения нерегулярной сетки для одномерного уравнения конвекции-диффузии**  
*С.А. Ладыгин, Р.Н. Карачурин, К.Е. Шильников, П.Н. Рябов* 303
- Математическая модель равновесия плазмы в неодносвязной области магнитной ловушки**  
*К.В. Брушлинский, М.Т. Истомина, В.В. Крюченков, Е.В. Степин* 316
- Об обратной задаче определения коэффициента поглощения в параболическом уравнении при условии финального наблюдения**  
*В.Л. Камынин* 329
- Нелинейные уравнения Шредингера с запаздыванием: точные решения, редукции и преобразования**  
*А.Д. Полянин, Н.А. Кудряшов* 340
- 

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

- Методика формирования базы данных характеристик сложного технологического объекта с использованием больших языковых моделей**  
*А.Р. Матвеева, Е.В. Антонов* 350
- 

## АВТОМАТИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

- Автоматизация функционального контроля модулей индикации датчиков давления с применением системы машинного зрения**  
*И.В. Днепровский* 358

# Contents

---

---

Volume 13 Number 5, 2024

---

## THEORETICAL AND EXPERIMENTAL PHYSICS

- The filling rate determination of a nanoporous materials with a non-wetting liquid**  
*V.D. Asafova, S.A. Kulakov, V.A. Byrkin, S.A. Bortnikova, A.A. Belogorlov* 285
- 

## TECHNICAL PHYSICS

- Experimental research of water outflow from a vertical tube through a Tesla valve**  
*Dj.N. Iskhakova, H.N. Kolesov, A.E. Dubinov* 293
- 

## MATHEMATICAL MODELS AND NUMERICAL METHODS

- On a method for constructing an irregular grid for the one-dimensional convection-diffusion equation**  
*S.A. Ladygin, R.N. Karachurin, K.E. Shilnikov, P.N. Ryabov* 303
- Mathematical model of plasma equilibrium in the multiply connected domain of a magnetic trap**  
*K.V. Brushlinskii, M.T. Istomina, V.V. Kriuchenkov, E.V. Stepin* 316
- On inverse problem of determining the absorption coefficient in the parabolic equation under the condition of final observation**  
*V.L. Kamynin* 329
- Nonlinear Schrödinger equations with delay: exact solutions, reductions, and transformations**  
*A.D. Polyagin, N.A. Kudryashov* 340
- 

## APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

- Methodology for forming a database of characteristics of a complex technological object using large language models**  
*A.R. Matveeva, E.V. Antonov* 350
- 

## AUTOMATION AND ELECTRONICS

- Automation of functional control of pressure sensor display modules using machine vision systems**  
*I.V. Dneprovskii* 358

УДК 532.6

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ЗАПОЛНЕНИЯ НАНОПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА НЕСМАЧИВАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

*В.Д. Асаfoва\**, *С.А. Кулаков*, *В.А. Быркин*, *С.А. Бортникова*, *А.А. Белогорлов*  
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 115409, Россия  
\*e-mail: [asafovalera@gmail.com](mailto:asafovalera@gmail.com)

Поступила в редакцию: 10.07.2024

После доработки: 10.07.2024

Принята к публикации: 24.09.2024

Изучение процессов взаимодействия нанопористого материала с несмачивающей жидкостью вызывает интерес не только с точки зрения фундаментальной науки в части распространения жидкости в наноканалах (нанофлюидика), но и как применение таких систем для поглощения энергии удара, взрыва и вибраций. Именно для этих приложений особенно важно знать механизм распространения жидкости в нанопористых материалах и делать оценки временных характеристик отклика системы на высокоскоростные импульсные воздействия. Целью данной работы являлось исследование влияния скорости изменения давления в системе на процесс заполнения пор нанопористого материала несмачивающей жидкостью. Проведена серия экспериментов заполнения – вытекания в системе нанопористый материал (гидрофобизированный нанопористый силикагель Fluka 100 C<sub>8</sub> (60759-50G) производства Sigma-Aldrich) – несмачивающая жидкость (деионизированная дистиллированная вода) при скоростях изменения внутреннего объема  $0.24\div 11.78 \cdot 10^{-2} \text{ см}^3/\text{с}$  при температуре 20 °С. На основе экспериментальных данных разработана методика определения скорости заполнения нанопористого материала несмачивающей жидкостью. Разработанная методика будет в дальнейшем использоваться для изучения заполнения нанопористых материалов несмачивающими жидкостями.

*Ключевые слова:* нанопористый материал, несмачивающая жидкость, нанофлюидика.

**DOI:** 10.26583/vestnik.2024.5.1

**EDN** AYRBOG

### ВВЕДЕНИЕ

Нанофлюидные системы могут быть использованы в различных инженерных приложениях благодаря их уникальным свойствам: высокой удельной поверхности пор и удельному объему пор. Кроме того, ключевыми фундаментальными вопросами для нанофлюидики являются вопросы распространения жидкости в нанопористом материале и возможность осуществления контроля над распространением жидкости в наносматричных структурах. В работах [1–3] были получены результаты моделирования, согласно которым скорость течения жидкости в углеродных нанотрубках (диаметром 7 нм) была на 4–5 порядков быстрее, чем в классической макромасштабной трубке, и, кроме того, скорость потока не уменьшалась с увеличением вязкости жидкости. Также экспериментально было обнаружено, что заполнение глицерином нанопористого углерода не зависит от скорости

роста [4]. В работе [5] авторы предоставили экспериментальные результаты по влиянию скорости заполнения жидкостями гидрофобизированного нанопористого материала и показали, что скорость заполнения связана как со свойствами границы раздела твердое тело – жидкость, так и с вязкостью жидкости, причем снижение скорости происходит исключительно из-за увеличения вязкости.

Анализ литературных данных показал, что результаты существующих численных и натуральных экспериментов противоречат друг другу. Кроме того, в большинстве исследований не уделяется достаточного внимания систематическому изучению влияния скорости изменения давления в системе на процесс заполнения нанопористого материала. Чтобы восполнить этот пробел, в данной статье была разработана подробная методика определения скорости заполнения нанопористого материала несмачивающей жидкостью.

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ЗАПОЛНЕНИЯ НАНОПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА НЕСМАЧИВАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

## 1. МАТЕРИАЛЫ

Исследовалась система нанопористый материал – несмачивающая жидкость. В качестве нанопористого материала был использован гидрофобизированный силикагель Fluka 100 C<sub>8</sub> (#60759-50G) производства Sigma Aldrich, который обладает следующими характеристиками: удельная площадь поверхности пор  $S_p = 222 \pm 6 \text{ м}^2/\text{г}$  по БЭТ [6], удельный объем пор  $V_p = 0.44 \pm 0.02 \text{ см}^3/\text{г}$ , средний размер пор  $\langle R \rangle = 4.00 \pm 0.02 \text{ нм}$  и плотность материала  $\rho = 1.7500 \pm 0.0016 \text{ г}/\text{см}^3$ . На рис. 1 представлена

функция распределения пор по размерам, полученная согласно методике ВЖН [6]. Характеристики пористого материала определены с использованием низкотемпературной сорбции азота на установке Autosorb IQ (Quantachrome Instruments, США) и гелиевого пикнометра UL-TRAPУС 1200е той же фирмы.

В качестве несмачивающей жидкости была использована деионизированная дистиллированная вода. Согласно [7] поверхностное натяжение и вязкость воды составляют от 72 мН/м и 1 мПа·с, соответственно.

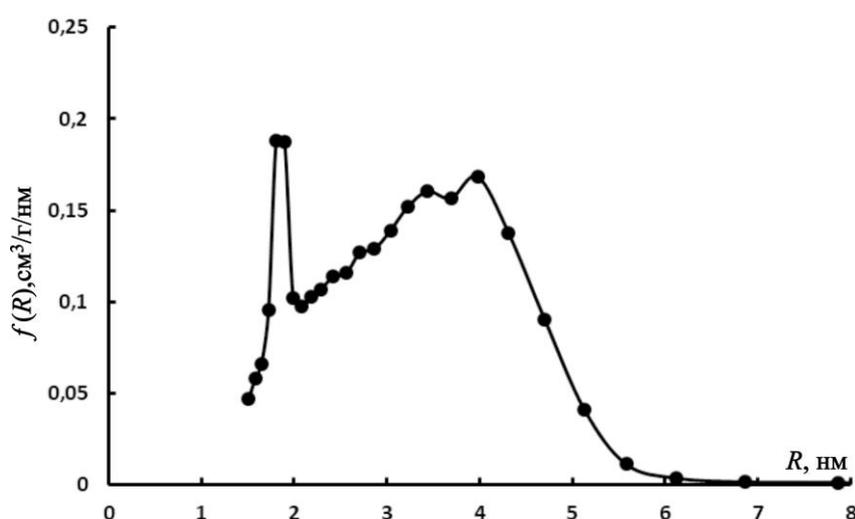


Рис. 1. Функция распределения пор по размерам для Fluka 100 C<sub>8</sub>, полученная методом ВЖН

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТ

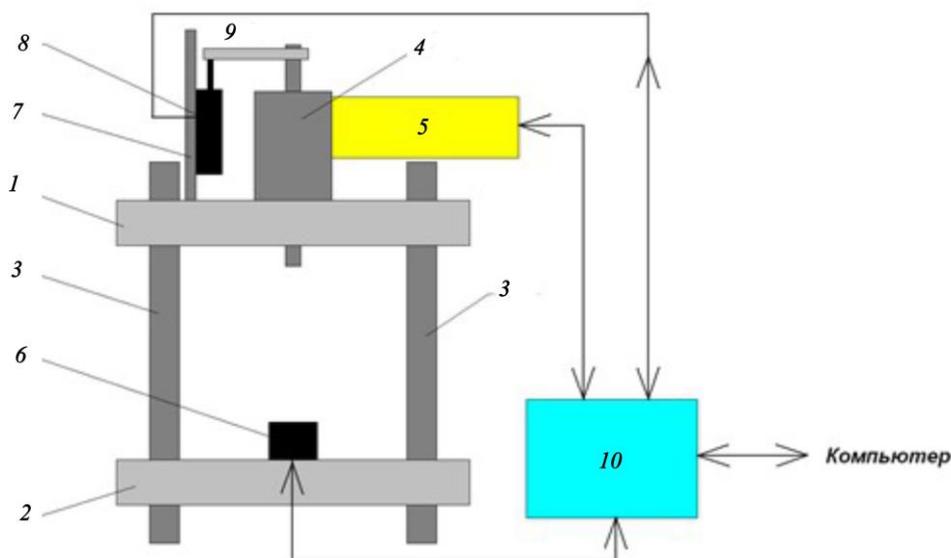
Исследование системы при разных скоростях производилось на установке ИТЖМ-20, схема которой представлена на рис. 2. Принцип работы установки подобен принципу работы установки описанной в работе [8]. Основой установки являются верхняя 1 и нижняя 2 плиты основания, стянутые четырьмя стержнями 3. На верхней плите установлен винтовой домкрат 4 (ZIMM), перемещение винта которого осуществляется сервоприводом 5 с шаговым двигателем (СПШ10). На нижней плите 2 установлен датчик силы на 1 тонну (DACEL, Южная Корея), а на верхней плите на стойке 7 закреплен реохордный датчик перемещения 7 (Burstner, ФРГ) связанный с винтом домкрата 4 соединительной планкой 9. Управление, питание и съем данных осуществляется посредством узла 10. Узел 10 состоит из АЦП ЛА2-USB12 (Руднев-Шиляев), блоков питания датчиков и сервопривода, а также усилителя сигналов датчиков.

Обмен данными узла 10 с компьютером происходит по интерфейсу USB 2.0.

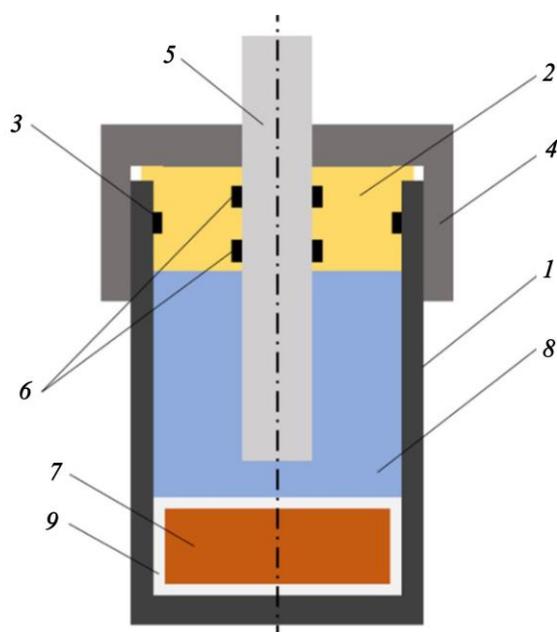
Нанопористый материал массой 1 г помещался в камеру высокого давления. Камера представлена на рис. 3 и состоит из: корпуса 1, пробки 2, резинового кольцевого уплотнения 3, крышки 4, штока 5, уплотнений 6, также внутри показан нанопористый материал 7 в проникаемом для жидкости 8 контейнере 9. Корпус, пробка и крышка изготовлены из титанового сплава. Максимально возможный объем нанопористого материала составляет 20 мл. Свободный объем камеры, закрытой пробкой, без пористого материала составляет 60 мл. Конструкция камеры позволяет проводить измерения при увеличении внутреннего давления до 1000 атм. Свободный объем полностью заполнялся несмачивающей жидкостью. Система выдерживалась 1–1.5 ч при постоянной температуре с помощью жидкостного криотермостата LOIP FT-316-40. Ячейка герметизировалась штоком и устанавливалась на датчик силы, причем шток

касаясь подвижной части домкрата. С помощью домкрата шток входил в ячейку и уменьшал ее внутренний объем. Это приводило к увеличению давления в ячейке. При росте избыточного давления в системе наблюдалось заполнение нанопористого материала несмачивающей жид-

костью [10–12]. После полного заполнения подвижная часть домкрата поднималась вверх, шток поднимался, давление снижалось до атмосферного, в результате чего жидкость вытекала из нанопористого материала.



**Рис. 2.** Схема ИТЖМ-20, где 1, 2 – верхняя и нижняя плиты основания; 3 – соединительные стержни; 4 – винтовой домкрат (ZIMM); 5 – сервопривод с шаговым двигателем (СПШ10), 6 – датчик силы; 7 – стойка; 8 – датчик перемещения; 9 – соединительная планка; 10 – управляющий узел



**Рис. 3.** Камера высокого давления, где 1 – корпус; 2 – пробка; 3 – уплотнение; 4 – крышка; 5 – шток; 6 – уплотнения; 7 – нанопористый материал; 8 – несмачивающая жидкость; 9 – контейнер

Были получены экспериментальные зависимости изменения внутреннего объема системы и давления от времени при температуре 20 °С и

линейных скоростях движения штока 0.03, 0.15, 0.30 и 1.5 мм/с. Диаметр штока в экспериментах был равен 10 мм, что соответствует скоростям изменения внутреннего объема  $0.24 \cdot 10^{-2}$ ,  $1.18 \cdot 10^{-2}$ ,  $2.36 \cdot 10^{-2}$  и  $11.78 \cdot 10^{-2}$  см<sup>3</sup>/с соответственно.

### 3. МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ ЗАПОЛНЕНИЯ НАНОПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА НЕСМАЧИВАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

Типичные экспериментальные данные для скорости изменения внутреннего объема  $11.78 \cdot 10^{-2}$  см<sup>3</sup>/с и массы образца 1 г представлены на рис. 4. Также на рис. 4 представлены результаты обработки данных с учетом сжимаемости элементов системы ( $\chi$ ). Обработка осуществлялась по формуле:

$$V^*(t) = V(t) - P(t) \cdot \chi.$$

Величина  $\chi$  была определена в эксперименте без пористого материала. На рис. 5 видно изменение заполненного объема пор материала от времени.

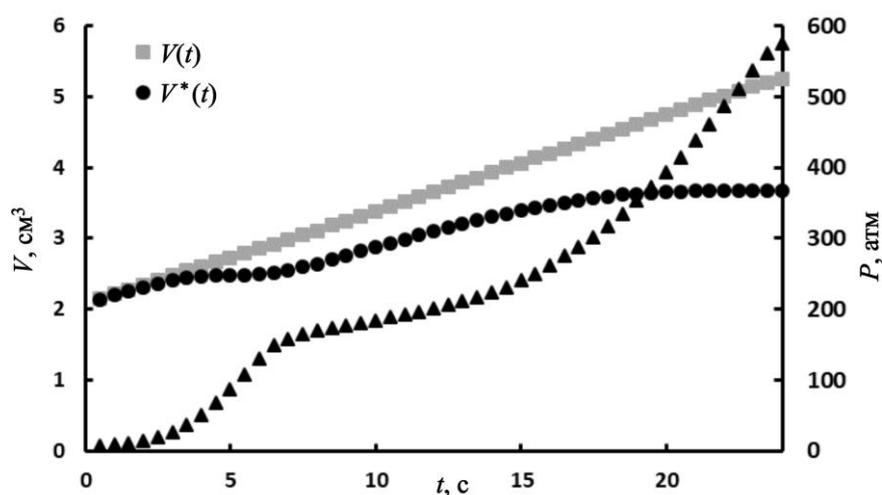


Рис. 4. Экспериментальные данные зависимости скорости изменения внутреннего объема от времени (погрешность измерений < 10 %)

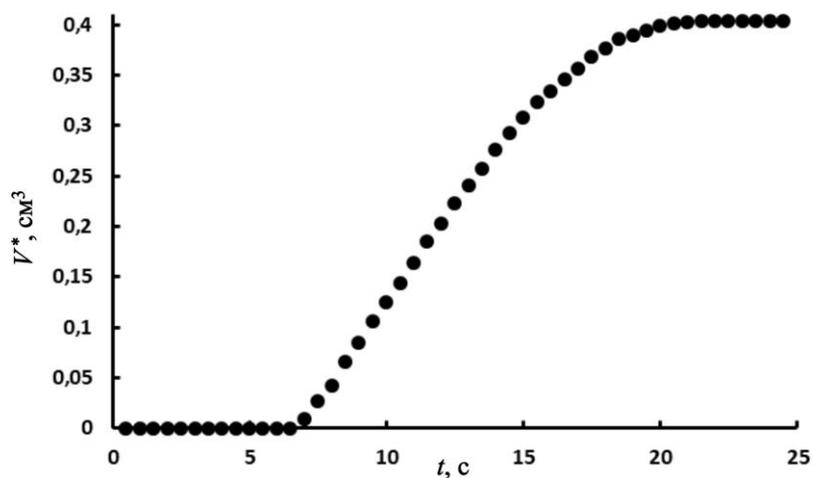


Рис. 5. Зависимость заполнения объема пор материала от времени

Полученные данные численно дифференцировались по времени согласно методике, предложенной в работе [9]. Результат численного

дифференцирования – скорость заполнения пор от времени представлен на рис. 6.

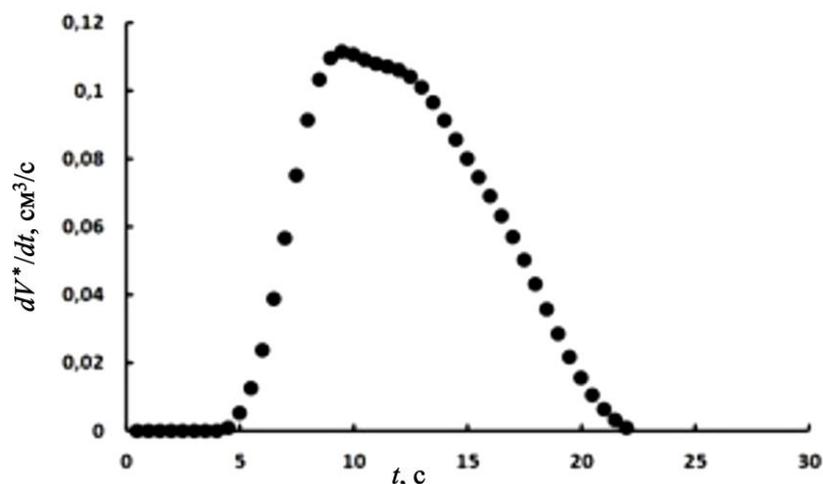


Рис. 6. Зависимость скорости заполнения пор от времени

Видно, что между участками роста скорости заполнения пор от времени и убывания находится область, в которой скорость заполнения почти не меняется или остается постоянной. Следует отметить, что для других скоростей при изменении внутреннего объема область, где скорость близка к постоянной, выражена ярче. Такое поведение связано с тем, что рассматриваемый нанопористый материал представляет собой рыхлую структуру, заполнение которого может быть рассмотрено в рамках перколяционного перехода [8]. В этом случае при заполнении материала жидкостью происходит рост числа пор, через которое может происходить дальнейшее перетекание жидкости вглубь гранул. Это приводит к увеличению скорости заполнения. Далее, когда материал оказывается

почти полностью заполненным, число пор на границе перколяционного кластера начинает падать, что приводит к соответствующему снижению скорости заполнения. В целом, характер такой зависимости может быть объяснен изменением периметра перколяционного кластера [13], однако это задача отдельного исследования.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На основе разработанной методики были получены графики скорости заполнения пор для всех исследованных скоростей изменения внутреннего объема (рис. 7). Как видно из рисунка скорости заполнения подобны друг другу.

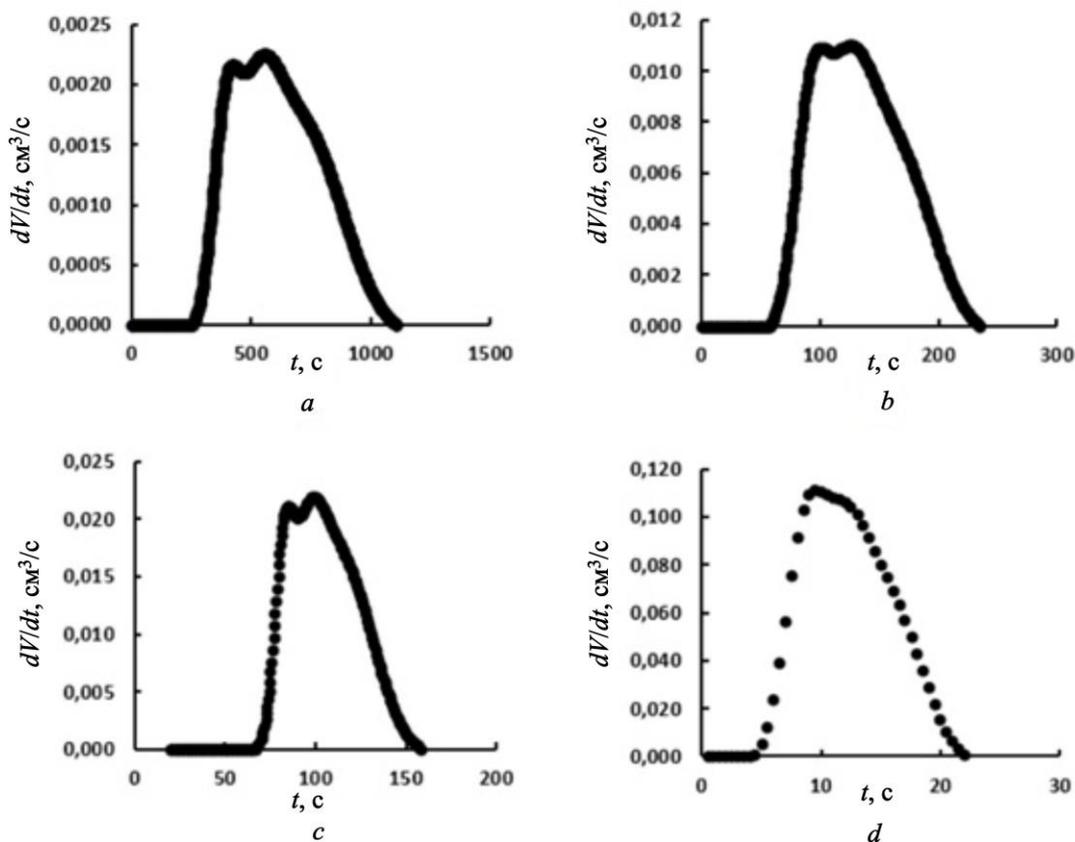


Рис. 7. Зависимость скорости заполнения пор от времени при различных скоростях изменения внутреннего объема:  $0.24 \cdot 10^{-2} \text{ см}^3/\text{с}$  (a);  $1.18 \cdot 10^{-2} \text{ см}^3/\text{с}$  (b);  $2.36 \cdot 10^{-2} \text{ см}^3/\text{с}$  (c);  $11.78 \cdot 10^{-2} \text{ см}^3/\text{с}$  (d)

Для сравнения на рис. 8 представлены зависимости скорости заполнения пор от давления в системе, и также видно их качественное совпадение и достижение максимума при близких давлениях. Это подтверждает перколяционный характер заполнения пор.

Сравнение характерных скоростей заполнения со скоростями изменения внутреннего объема представлено на рис. 9. Видно, что характерные скорости заполнения пор пропорциональны скорости изменения внутреннего объема.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ЗАПОЛНЕНИЯ НАНОПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА НЕСМАЧИВАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

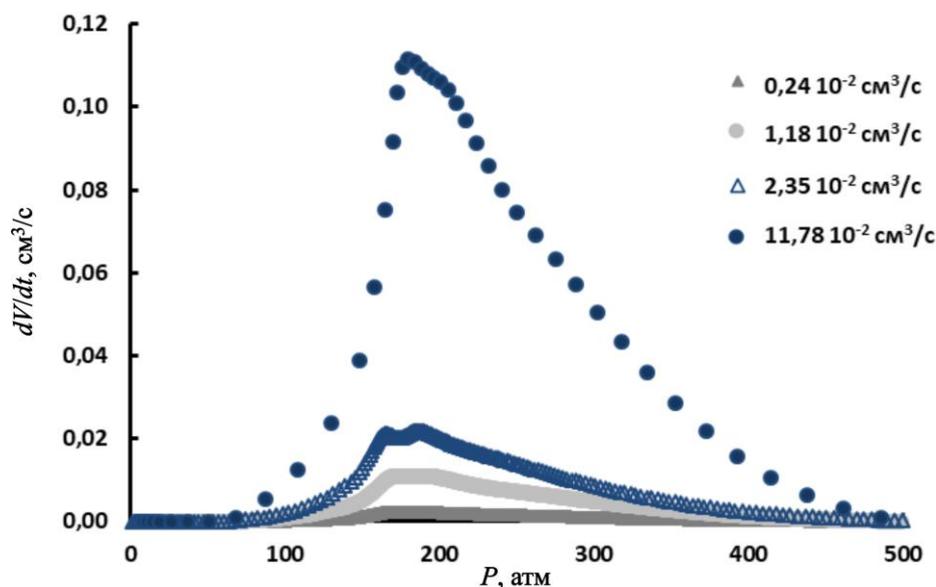


Рис. 8. Зависимость скорости заполнения пор от давления в системе

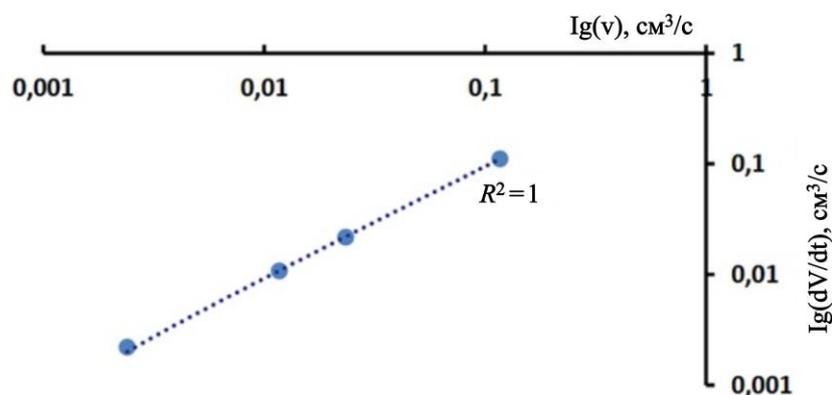


Рис. 9. Зависимость характерной скорости заполнения пор от скорости изменения внутреннего объема системы

Линейный вид в исследованном диапазоне подтверждает неизменчивость характера заполнения пористого материала несмачивающей жидкостью.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена методика определения скорости заполнения пор нанопористого материала несмачивающей жидкостью. Получены скорости заполнения пор для четырех скоростей изменения внутреннего объема системы. Обнаружен линейный характер зависимости характерной скорости заполнения от скорости изменения внутреннего объема. Данный результат можно интерпретировать как адаптацию системы на внешнее воздействие.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00352, <https://rscf.ru/project/23-29-00352/>.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Majumder M. et al.* Nanoscale hydrodynamics: Enhanced flow in carbon nanotubes // *Nature*, 2005. V. 438. Iss. 7064. P. 44.
2. *Skoulidas A. I. et al.* Rapid transport of gases in carbon nanotubes // *Physical review letters*, 2002. V. 89. Iss. 18. 185901.
3. *Hummer G., Rasaiah J. C., Noworyta J. P.* Water conduction through the hydrophobic channel of a carbon nanotube // *Nature*, 2001. V. 414. Iss. 6860. P. 188–190.
4. *Chen X. et al.* Nanoscale fluid transport: size and rate effects // *Nano letters*, 2008. V. 8. Iss. 9. P. 2988–2992.

5. Sun Y. *et al.* Rate effect of liquid infiltration into mesoporous materials // RSC advances, 2017. V. 7. Iss. 2. P. 971–974.

6. Lowell S. *et al.* Characterization of porous solids and powders: surface area, pore size and density // Springer Science & Business Media, 2012. V. 16.

7. Физические величины. Справочник / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1234 с.

8. Борман В. Д. и др. Перколяционный переход при заполнении нанопористого тела несмачивающей жидкостью // ЖЭТФ, 2005. Т. 127. № 2. С. 431–444.

9. Belogorlov A.A. *et al.* The distribution of captured non-wetting liquid dispersed in nanoporous medium recovery method // Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing, 2016. V. 751. Iss. 1. 012030.

10. Belogorlov A.A. *et al.* Study of the model system for delivery and controlled release of anticancer drugs in affected areas // Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing, 2020. V. 1696. Iss. 1. 012032.

11. Borman V.D., Belogorlov A.A., Tronin V.N. Observation of relaxation of the metastable state of a non-wetting liquid dispersed in a nanoporous medium // Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects, 2016. V. 496. P. 63–68.

12. Борман В. Д. и др. Переход диспергирования и неэргодичность системы неупорядоченная нанопористая среда – несмачивающая жидкость // ЖЭТФ, 2013. Т. 144. №. 6. С. 1290–1318.

13. Grinchuk P. S., Rabinovich O. S. Surfaces of percolation systems in lattice problems // Physical Review E, 2003. V. 67. Iss. 4. 046103.

---

**Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 5, pp. 285–292**

---

## THE FILLING RATE DETERMINATION OF A NANOPOROUS MATERIALS WITH A NON-WETTING LIQUID

*V.D. Asafova\*, S.A. Kulakov, V.A. Byrkin, S.A. Bortnikova, A.A. Belogorlov*  
*National Research Nuclear University «MEPhI», 31 Kashirskoye highway, Moscow, 115409, Russia*  
*\*e-mail: [asafovalera@gmail.com](mailto:asafovalera@gmail.com)*

Received July 10, 2024; revised July 10, 2024; accepted September 24, 2024

The study of the interaction of a nanoporous material with a non-wetting liquid is of interest not only from the point of fundamental science view in terms of liquid distribution in nanochannels, but also as an application of such systems to absorb the energy of impact, explosion and vibrations. It is for these applications that it is especially important to know the mechanism of liquid distribution in nanoporous materials and to make estimates of the time characteristics of the system response to high-speed pulse effects. The purpose of this work was to study the effect of the rate of pressure change in the system on the process of filling the pores of a nanoporous material with a non-wetting liquid. A series of intrusion – extrusion experiments was carried out in the nanoporous material (hydrophobized nanoporous silica gel Fluka 100 C<sub>8</sub> (60759-50G) by Sigma-Aldrich) – non-wetting liquid (deionized distilled water) system at internal volume change rates of  $0.24 \div 11.78 \cdot 10^{-2}$  cc/s at a temperature of 20 °C. Based on experimental data, a method for determining the filling rate of a nanoporous material with a non-wetting liquid has been developed. The developed technique will be further used to study the filling of nanoporous materials with non-wetting liquids.

*Keywords:* nanoporous material, non-wetting liquid, nanofluidics.

### REFERENCES

1. Majumder M. *et al.* Nanoscale hydrodynamics: Enhanced flow in carbon nanotubes. Nature, 2005. Vol. 438. Iss. 7064. Pp. 44.

2. Skoulidas A.I. *et al.* Rapid transport of gases in carbon nanotubes. Physical review letters, 2002. Vol. 89. Iss. 18. 185901.

3. Hummer G., Rasaiah J.C., Noworyta J.P. Water conduction through the hydrophobic channel of a

carbon nanotube. Nature, 2001. Vol. 414. Iss. 6860. Pp. 188–190.

4. Chen X. *et al.* Nanoscale fluid transport: size and rate effects. Nano letters, 2008. Vol. 8. Iss. 9. Pp. 2988–2992.

5. Sun Y. *et al.* Rate effect of liquid infiltration into mesoporous materials. RSC advances, 2017. Vol. 7. Iss. 2. Pp. 971–974.

6. Lowell S. *et al.* Characterization of porous solids and powders: surface area, pore size and density, Springer Science & Business Media, 2012. Vol. 16.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ЗАПОЛНЕНИЯ НАНОПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА  
НЕСМАЧИВАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

7. Fizicheskie velichiny. Spravochnik / Pod red. *I.S. Grigor'eva, E.Z. Mejlilova*. [Physical quantities. Handbook / Ed. *I.S. Grigorieva, E.Z. Meilikhova*]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1991. 1234 p.

8. *Borman V.D. et al.* [The percolation transition in filling a nanoporous body by a nonwetting liquid]. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2005. Vol. 100. Pp. 385–397 (in Russian).

9. *Belogorlov A.A. et al.* The distribution of captured non-wetting liquid dispersed in nanoporous medium recovery method. *Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing, 2016. Vol. 751. Iss. 1, 012030.

10. *Belogorlov A.A. et al.* Study of the model system for delivery and controlled release of anticancer drugs in affected areas. *Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing, 2020. Vol. 1696. Iss. 1. 012032.

11. *Borman V.D., Belogorlov A.A., Tronin V.N.* Observation of relaxation of the metastable state of a non-wetting liquid dispersed in a nanoporous medium. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 2016. Vol. 496. Pp. 63–68.

12. *Borman V. D. et al.* Perekhod dispergirovaniya i neergodichnost' sistemy neuporyadochennaya nanoporistaya sreda – nesmachivayushchaya zhidkost'. [Dispersion transition and the nonergodicity of the disordered nanoporous medium-nonwetting liquid system]. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2013. Vol. 117. Pp. 1139–1163 (in Russian).

13. *Grinchuk P. S., Rabinovich O. S.* Surfaces of percolation systems in lattice problems. *Physical Review E*, 2003. Vol. 67. Iss. 4. 046103.

УДК 532.57

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИСТЕЧЕНИЯ ВОДЫ ИЗ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРУБКИ, НАГРУЖЕННОЙ НА КЛАПАН ТЕСЛА

Дж.Н. Исхакова<sup>1</sup>, Г.Н. Колесов<sup>1,2</sup>, А.Е. Дубинов<sup>1,2,\*</sup>

<sup>1</sup>Саровский физико-технический институт – филиал Научно-исследовательского ядерного университета  
«Московский инженерно-физический институт» (СарФТИ НИЯУ МИФИ),

г. Саров, Нижегородская обл., 607186, Россия

<sup>2</sup>Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт  
экспериментальной физики (РФЯЦ-ВНИИЭФ), г. Саров, Нижегородская обл., 607188, Россия

\*e-mail: [dubinov-ae@yandex.ru](mailto:dubinov-ae@yandex.ru)

Поступила в редакцию: 13.06.2024

После доработки: 23.09.2024

Принята к публикации: 24.09.2024

Экспериментально исследованы режимы истечения воды из вертикального цилиндрического сосуда сквозь клапан Тесла, включенный в прямом или реверсивном направлении. Регистрировалась кинематика убывания уровня воды в сосуде. Было получено, что время опорожнения сосуда через клапан Тесла существенно превосходит время опорожнения сосуда через обычную трубку меньшего поперечного сечения (как для прямого, так и для реверсивного включения клапана), опорожнение сосуда при прямом включении клапана Тесла происходит в два раза быстрее, чем при реверсивном включении клапана, а скорость движения уровня водяного столба для обоих направлений включения клапана убывает во времени линейно. Полученные данные свидетельствуют о существенной диодности клапана, а также о том, что истечение жидкости из сосуда через клапан Тесла кинематически сходно с законом Торричелли, но происходит с существенно отличающимися эффективными коэффициентами замедления.

*Ключевые слова:* клапан Тесла, диодность, закон Торричелли, коэффициент замедления.

**DOI:** 10.26583/vestnik.2024.5.2

**EDN** JZCTNT

### ВВЕДЕНИЕ

Знаменитый электротехник и изобретатель Никола Тесла, справедливо называемый «Повелителем Молний» [1], в 1920 г. изобрел не связанный с электричеством жидкостной клапан. Главное достоинство клапана Тесла заключается в том, что он не имеет механически подвижных частей (рис. 1) [2].

Принцип действия клапана Тесла основан на разделении потока жидкости, заходящей в клапан с одной из его сторон, на две части и перенаправлении одной из этих частей навстречу другой части. В результате этого обеспечивается значительное возрастание активного гидравлического сопротивления клапана в направлении напуска жидкости в клапан. При напуске жидкости с противоположной стороны клапана разделение ее на две части практически не происходит (направления течений жидкости

в клапане при прямом и реверсивном включениях показаны на рис. 1 стрелками). В итоге клапан будет проводить поток жидкости в первом случае с бóльшим гидравлическим сопротивлением (реверсивное включение клапана), а в другом – с меньшим (прямое включение клапана). Иными словами, клапан Тесла демонстрирует диодность (т.е. неодинаковость протекания в нем жидкости в прямом и реверсивном включении).

На долгое время изобретение Тесла считалось забытым. Однако в последнее время клапан Тесла привлек внимание исследователей, работающих в различных областях науки и техники: микрофлюидике; химических технологиях смешивания жидкостей; двигателестроении; робототехнике и др. [3–20]. Также возник интерес к нему у преподавателей механики и физики в учебных заведениях [21–23].

# UNITED STATES PATENT OFFICE.

NIKOLA TESLA, OF NEW YORK, N. Y.

## VALVULAR CONDUIT.

1,329,559.

Specification of Letters Patent.

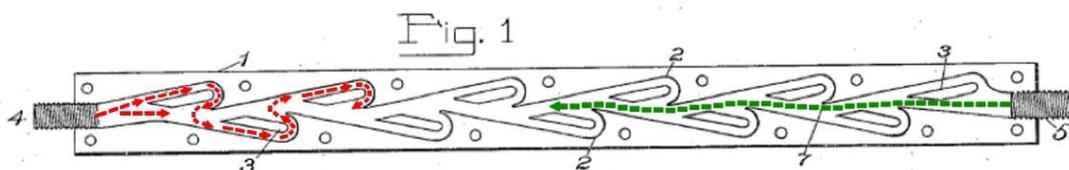
Patented Feb. 3, 1920.

Application filed February 21, 1916, Serial No. 79,703. Renewed July 8, 1919. Serial No. 309,482.

To all whom it may concern:

Be it known that I, NIKOLA TESLA, a citizen of the United States, residing at New York, in the county and State of New York, have invented certain new and useful Improvements in Valvular Conduits, of which the following is a full, clear, and exact description.

direction, other than surface friction, constitute an almost impassable barrier to its flow in the opposite sense by reason of the more or less sudden expansions, contractions, deflections, reversals of direction, stops and starts and attendant rapidly succeeding transformations of the pressure and velocity energies.



INVENTOR  
Nikola Tesla

Рис. 1. Коллаж из фрагментов описания Патента US 1329559, 1920 [2]:  
стрелки справа показывают течение воды в клапане при прямом включении клапана;  
стрелки слева – течение воды при реверсивном включении клапана (из [23])

Недавно был открыт еще один удивительный факт, связанный с клапаном Тесла: оказывается, у некоторых видов акул, скатов и морских коньков желудочно-кишечный тракт выполнен в виде спирального клапана Тесла, что обеспечивает однонаправленное движение продуктов переваривания пищи без перильстатического мышечного проталкивания [24].

Следует отметить, что геометрия клапана Тесла достаточно сложная, поэтому общепринятой теории течения жидкости в клапане пока не существует. Для получения новых знаний о работе клапана проводятся экспериментальные исследования [3, 22] и осуществляются численные симуляции [4, 8, 12, 17, 19].

В [22] были измерены потоки жидкости и гидравлическое сопротивление клапана при прямом и реверсивном подключении. Потоки и гидравлические сопротивления оказались различными. Из этого, в частности, следует, что истечение жидкости из сосуда сквозь клапан, включенный в прямом направлении, происходит существенно быстрее, чем из такого же сосуда сквозь этот же клапан, включенный в реверсивном направлении.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЦЕЛИ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для многих приложений важно знать не только время истечения жидкости из сосуда, но и динамику убывания уровня жидкости в этом сосуде во времени.

Известны, по меньшей мере, три режима истечения жидкости из сосуда через патрубок, установленный на дне этого сосуда.

Например, режим истечения Торричелли, при котором скорость  $v$  вытекания жидкости из сосуда через малое отверстие на его дне подчиняется закону  $v = \sqrt{2gh}$  [25–27]. Здесь обозначено:  $h$  – высота столба жидкости в сосуде и  $g$  – ускорение свободного падения. Можно вывести простое обыкновенное дифференциальное уравнение, которое следует из закона Торричелли и описывает динамику уровня столба жидкости в цилиндрическом сосуде во времени при вытекании жидкости через патрубок на дне сосуда [25, 26] (без учета факторов диссипации – вязкости, трения, смачиваемости жидкостью стенок, сопротивления воздуха и т.п.):

$$\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}, \quad (1)$$

где коэффициент  $k = (s/S)\sqrt{2g}$ , имеющий размерность  $\text{cm}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$ ;  $S$  – площадь поперечного сечения сосуда;  $s$  – площадь поперечного сечения отверстия на дне сосуда;  $g$  – ускорение свободного падения.

Точное решение уравнения (1) показывает, что  $h$  убывает по квадратичной функции от времени, выпуклой вниз:

$$h = \frac{k^2 t^2}{4} - k\sqrt{h_0} t + h_0, \quad (2)$$

а модуль скорости движения уровня воды в сосуде  $V$ , выражение для которого можно получить дифференцированием (2) по времени, убывает по линейному закону, т.е. движение уровня – равнозамедленное:

$$V = \frac{s}{S}\sqrt{2gh_0} - \left(\frac{s}{S}\right)^2 gt. \quad (3)$$

В (2) и (3) обозначено:  $h_0$  – начальная высота жидкости в сосуде. При этом, отрицательное ускорение (замедление)  $a = -g(s/S)^2$  может служить удобной числовой характеристикой, определяющей замедляющееся движение уровня воды.

Из (2) и (3) можно определить, что полное время опорожнения сосуда составляет

$$T = \frac{2\sqrt{h_0}}{k} = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}. \quad (4)$$

Другой режим истечения возникает в процессе вытекания жидкости в свободное пространство при полном отсутствии дна в сосуде. Тогда уменьшение уровня жидкости в сосуде происходит по другому закону, близкому к свободному падению. В этом случае скорость  $V$  нарастает по линейному закону равноускоренно, а уровень воды  $h$  убывает по квадратичной функции от времени, но выпуклой вверх. Реальное ускорение уровня жидкости  $a$  в этом случае немного меньше  $g$  из-за силы вязкого трения и смачиваемости стенок сосуда жидкостью.

И еще один режим истечения жидкости возникает, когда площадь поперечного сечения патрубка больше площади поперечного сечения сосуда – суперпадение с ускорением, превышающем  $g$  [28, 29].

Установление того, как происходит убывание высоты жидкости и изменение скорости истечения во времени из сосуда, нагруженного на клапан Тесла при прямом и реверсивном подключении, ранее нигде не исследовалось. Оставался нерешенным следующий вопрос: в каком режиме будут происходить изменения высоты жидкости  $h$  в сосуде и скорости движения уровня  $V$  во времени при истечении воды через клапан Тесла? И будет ли скорость движения уровня  $V$  изменяться линейно во времени?

Экспериментальное получение ответа на этот вопрос – цель данной работы.

#### ОБОРУДОВАНИЕ, МАТЕРИАЛЫ, МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Исследовалось истечение жидкости из сосуда в форме прозрачной эластичной ПВХ трубки, имеющей внутренний диаметр 6 мм и длину 1000 мм. Трубчатый сосуд закреплялся на плите, которая устанавливалась вертикально. В нижней части сосуда подключался кран золотниковой типа с длиной канала 60 и имеющий проходное отверстие диаметром 6 мм.

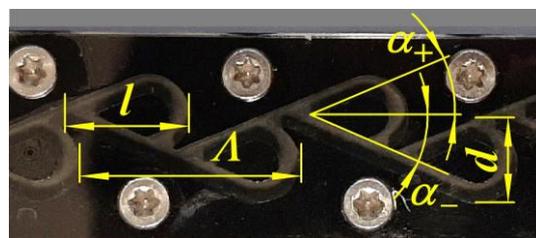
Снизу к крану могла быть подсоединена трубка меньшего диаметра  $d = 3$  мм, другой конец которой работал на свободный слив жидкости в водоприемник. Тогда истечение жидкости происходило через резкое сужение труб, характеризующееся отношением  $s/S = 0.25$ . Этот вариант подключения использовалась нами для контроля и калибровки.

Для проведения основных экспериментов использовался одноканальный пластиковый клапан Тесла с габаритными размерами  $225 \times 22 \times 18$  мм (рис. 2) [30]. Каналы клапана были выполнены с прямоугольным поперечным сечением: глубина  $\times$  ширина =  $4 \times 2$  мм. Каналы имели периодически расположенные 16 одинаковых петель по 2 петли в периоде, длина периода  $\Lambda = 24$  мм. Петли имели габаритные размеры  $l \times d = 12 \times 7$  мм, питч-углы каналов при разветвлении  $\alpha_{\pm} = \pm 24^\circ$ . На концах клапана имелись резьбовые отверстия М6.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИСТЕЧЕНИЯ ВОДЫ ИЗ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРУБКИ, НАГРУЖЕННОЙ НА КЛАПАН ТЕСЛА



а



б

**Рис. 2.** Используемый в работе клапан Тесла:  
а – лицевое фотоизображение клапана;  
б – геометрия петли

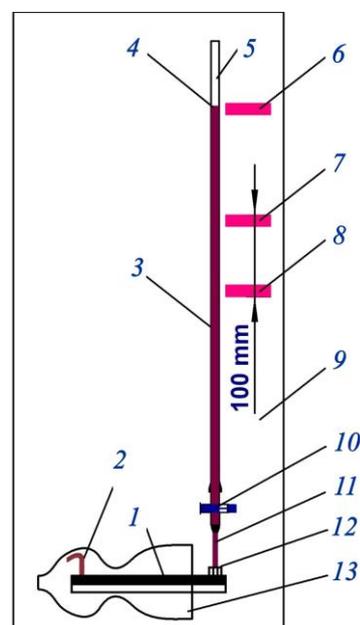
Клапан Тесла с одного из концов подключался с помощью штуцера к сосуду. Тогда соотношение площадей поперечного сечения сосуда  $S$  и поперечного сечения канала  $s_T$  в клапане Тесла составляло  $s_T/S \approx 0.59$ . При этом второе отверстие клапана работало на свободный слив жидкости в водоприемник. Клапан располагался горизонтально. Схема плиты с закрепленным на ней оборудованием показана на рис. 3.

В качестве жидкости использовалась вода. Для улучшения качества визуализации уровня воды в сосуде, согласно рекомендациям [31–33], вода подкрашивалась несколькими кристаллами перманганата калия  $KMnO_4$ . Ранее было определено, что лиловый цвет водному раствору  $KMnO_4$  придают ионы  $MnO_4^-$  [34], а добавление несколько кристаллов  $KMnO_4$  размером  $\sim 200\text{--}400\ \mu\text{m}$  в воду объемом в несколько сотен миллилитров практически не изменяет такие свойства воды, как вязкость и смачиваемость твердых поверхностей.

Эксперименты проводились следующим образом. Сначала сосуд при закрытом кране заполнялся водой на высоту  $h_0 = 750\ \text{mm}$ . Далее делалась пауза длительностью несколько минут, в течение которой из водяного столба в сосуде удалялись пузыри воздуха. После этого открывался кран, и вода стекала вниз под действием гравитации.

Для регистрации динамики истечения воды из сосуда применялся метод, основанный на видеозаписи процесса, последующем раскадрировании видеозаписи и оцифровке положения

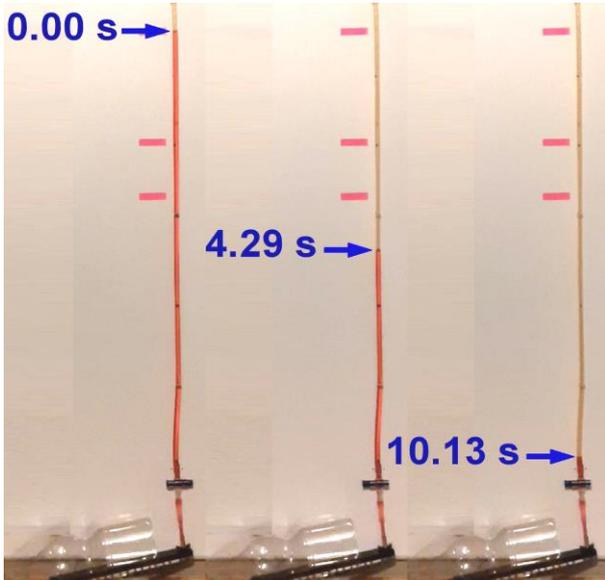
уровня воды в сосуде в зависимости от номера кадра. Подобный метод часто использовался для исследования быстрых механических движений [35, 36]. Так как процесс истечения воды из сосуда имеет длительность несколько секунд, то для видеозаписи вполне может подойти смартфон [37]. В данной работе мы использовали установленный на трипode смартфон Samsung Galaxy A50, позволяющий регистрировать динамические процессы с частотой 240 fps.



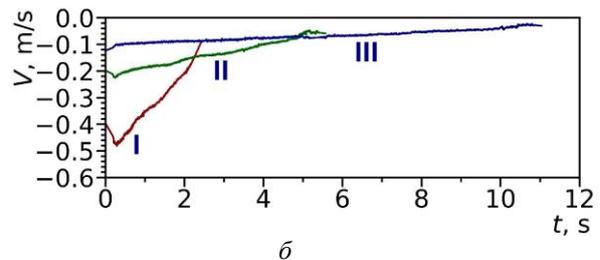
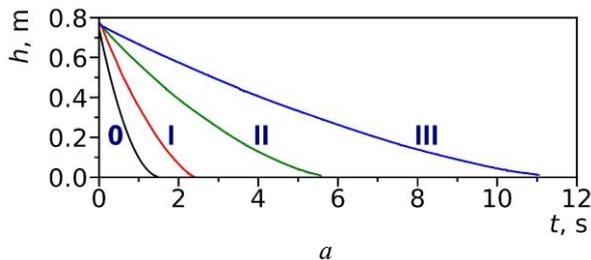
**Рис. 3.** Схема плиты с закрепленным на ней оборудованием: 1 – клапан Тесла; 2 – фонтанирование вытекающей из клапана воды; 3 – столб воды; 4 – верхний уровень столба воды; 5 – ПВХ трубка; 6 – стикер, по которому устанавливался начальный уровень столба воды  $h_0$ ; 7 и 8 – размерные стикеры для калибровки высоты; 9 – плита; 10 – золотниковый кран; 11 – патрубок; 12 – штуцер; 13 – водосборник

Экспериментально исследовались три режима истечения жидкости из сосуда: режим I – истечение жидкости в прямую трубку меньшего диаметра; режим II – истечение жидкости в случае, когда нижний конец трубки был нагружен клапаном Тесла при его прямом включении; режим III – истечение жидкости в случае, когда нижний конец трубки был нагружен клапаном Тесла при его реверсивном включении.

На рис. 4 представлены совмещенные отдельные кадры одной из видеозаписей в режиме III: слева – уровень воды находится в начальной позиции ( $h_0$ ); в центре – уровень воды находится в некоторой позиции в движении  $h(t)$ ; справа – уровень воды находится вблизи завершающей видеозапись позиции  $h=0$  мм, т.е. вблизи крана, соответственно.



**Рис. 4.** Отдельные кадры видеозаписи истечения воды из трубки через клапан Тесла в режиме III; стрелка указывает положение уровня воды в трубке: слева направо – в начальный момент времени; в промежуточный момент; непосредственно перед завершением процесса



**Рис. 5.** Графики экспериментальных зависимостей: а)  $h(t)$ ; б)  $V(t)$

Прямое подключение клапана Тесла к выходу сосуда (режим II) дает неожиданный результат: несмотря на то, что отношение площадей  $s_T/S \approx 0.59$  более чем в 2 раза превышает отношение площадей  $s/S=0.25$  в режиме I, время опорожнения сосуда в режиме II составляет  $\approx 5.1$  s. Отсюда следует, что наличие боковых каналов (рукавов), отводящих воду в сторону от основного канала, а затем воссоединяющихся с ним, существенно снижают пропуск-

Эксперименты во всех трех режимах были повторены многократно. Все эксперименты были проведены при внешнем атмосферном давлении 750 Торг и температуре в помещении 21 °С.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

После цифровой обработки видеозаписей были получены законы движения уровня воды в сосуде  $h(t)$  в трех режимах I, II и III. Они представлены на рис. 5,а, там же показана кривая, соответствующая теоретической зависимости (2) при  $s/S=0.25$ . Видно, что на все четыре кривые демонстрируют убывание  $h(t)$ , причем все кривые выгнуты вниз. Это свидетельствует о том, что динамика истечения воды из сосуда близка к тому, что предсказывается законом Торричелли, и совершенно не похожа на динамику равноускоренного свободного падения.

Заметно некоторое различие кривой в режиме I и теоретической кривой по формуле (2): в эксперименте время полного опорожнения сосуда составляет  $\approx 1.96$  s, а теория дает 1.56 s. Это расхождение можно объяснить тем, что теория не учитывает факторы диссипации, которые замедляют истечение воды из сосуда, а также не учитывается переходной процесс, связанный с длительностью открывания крана.

ную способность клапана даже в прямом направлении.

Опорожнение сосуда при реверсивном подключении клапана Тесла (в режиме III) происходит за еще большее время  $\approx 10.6$  s, более чем в 2 раза превышающее время опорожнения в режиме II. Это доказывает наличие существенной диодности используемого клапана (в [23] была введена величина диодности, равная отношению времен опорожнения сосуда в режимах II и III).

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИСТЕЧЕНИЯ ВОДЫ ИЗ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРУБКИ, НАГРУЖЕННОЙ НА КЛАПАН ТЕСЛА

На рис. 5,б показаны графики скорости уменьшения уровня воды в сосуде от времени  $V(t)$  в трех режимов I, II и III. Они были получены путем численного дифференцирования экспериментальных данных из рис. 5,а с межкадровым шагом дифференцирования 1/240 с. Все кривые  $V(t)$  на рис. 5,б имеют начальный участок роста модуля скорости длительностью  $\sim 0.2 \dots 0.5$  с. Этот участок представляет собой переходной процесс, возникающий из-за конечности времени открывания крана и некоторой инерции столба жидкости.

Далее все кривые показывают линейное убывание модуля скорости  $V(t)$  почти до нуля. Такое поведение кривых  $V(t)$ , аналогичное (3), доказывает, что истечение жидкости из сосуда через клапан Тесла аналогично закону Торричелли для обоих направлений подключения. Однако несмотря на то, что истечение жидкости через клапан Тесла демонстрирует кинематическую схожесть с истечением в режиме Торричелли, отождествлять эти два процесса все же нельзя. Дело в том, что режим истечения Торричелли – ламинарный, а в течении клапана Тесла в местах воссоединения токов возникают вихри и перемешивание [7, 17], что приводит к существенному увеличению локального гидравлического сопротивления.

Многочисленные повторения экспериментов во всех режимах показало, что кривые  $V(t)$  на рис. 5,а,б ложатся друг на друга с точностью до толщины линии. Следовательно, можно с хорошей повторяемостью получить значения темпов замедления  $a$ , а также длительности процесса опорожнения сосуда  $T$  в режимах I, II и III для каждого эксперимента. Обработка кривых на рис. 5,б дало экспериментальные результаты, которые представлены в табл. 1.

**Таблица 1.** Полученные значения коэффициентов замедления  $a$  в движении уровня воды в сосуде и времени  $T$  опорожнения сосуда

Режим	$a, \text{cm/s}^2$	$T, \text{s}$
Свободное падение (теор.)	981	0.39
I (теор.)	-61.3	1.56
I (экспер.)	$-14.6 \pm 0.9$	$1.96 \pm 0.06^*$
II (экспер.)	$-3.2 \pm 0.1$	$5.09 \pm 0.03^*$
III (экспер.)	$-0.78 \pm 0.09$	$10.62 \pm 0.04^*$

\*За вычетом длительности переходного процесса.

В ней все погрешности были вычислены как среднеквадратичные отклонения по нескольким экспериментальным реализациям. Там же, для сравнения, приводятся результаты теоретических расчетов для свободного падения пробного тела с ускорением  $g = 981 \text{ cm/s}^2$  с высоты  $h_0$  и для режима I, вычисленные по формуле (3).

### ВЫВОДЫ

В работе экспериментально исследованы режимы истечения воды из вертикального цилиндрического сосуда сквозь 16-звенный клапан Тесла, включенный в прямом и реверсивном направлении. Регистрировалась кинематика убывания уровня воды в сосуде. Было получено следующее:

1) время опорожнения сосуда через клапан Тесла существенно превосходит время опорожнения сосуда через обычную трубку меньшего поперечного сечения (как для прямого, так и для реверсивного включения клапана);

2) опорожнение сосуда при прямом включении клапана Тесла происходит в 2 раза быстрее, чем при реверсивном включении клапана (этот результат подтверждает диодность используемого клапана);

3) высота уровня водяного столба для обоих направлений включения клапана Тесла убывает во времени по квадратичному закону;

4) скорость движения уровня водяного столба для обоих направлений включения клапана Тесла убывает во времени линейно. Это свидетельствует о том, что истечение жидкости из сосуда через клапан Тесла в обоих случаях кинематически сходно с законом Торричелли с различающимися эффективными темпами замедления для этих режимов, причем эти эффективные темпы заметно отличаются от значения, предсказываемого теорией, основанной на законе Торричелли, и равного квадрату отношения площадей (3) (в единицах  $g$ ).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cheney M., Uth R. Tesla, master of lightning. NY: Barnes & Noble Publishing, 1999. 184 p. <https://teslauniverse.com/nikola-tesla/books/tesla-master-lightning>
2. Tesla N. Valvular conduit, Patent US 1329559, 1920. <https://patentimages.storage.googleapis.com/26/65/c7/c647a84af1f78f/US1329559.pdf>
3. Thompson S.M., Ma H.B., Wilson C. Investigation of a flat-plate oscillating heat pipe with Tesla-type

- check valves // *Experim. Thermal Fluid Sci.*, 2011. V. 35. № 7. P. 1265.  
DOI: 10.1016/j.exptthermflusci.2011.04.014
4. *Nobakht A.Y., Shahsavan M., Paykani A.* Numerical study of diodicity mechanism in different Tesla-type microvalves // *J. Appl. Res. Techn.*, 2013. V. 11. № 6. P. 876. DOI: 10.1016/S1665-6423(13)71594-3
5. *Mohammadzadeh K., Kolahdouz E.M., Shirani E., Shafii M.B.* Numerical study on the performance of Tesla type microvalve in a valveless micropump in the range of low frequencies // *J. Micro-Bio Robot.*, 2013. V. 8. № 1. P. 145.  
DOI: 10.1007/s12213-013-0069-1
6. *Wang C.-T., Chen Y.-M., Hong P.-A., Wang Y.-T.* Tesla valves in micromixers // *Int. J. Chem. Reactor Eng.*, 2014. V. 12. № 1. P. 397.  
DOI: 10.1515/ijcre-2013-0106
7. *de Vries S.F., Florea D., Homburg F.G.A., Frijns A.J.H.* Design and operation of a Tesla-type valve for pulsating heat pipes // *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2017. V. 105. № 1. P. 1–11.  
DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.09.062
8. *Qian J.-Y., Chen M.-R., Gao Z.-X., Jin Z.-J.* Mach number and energy loss analysis inside multi-stage Tesla valves for hydrogen decompression // *Energy*, 2019. V. 179. № 1. P. 647. DOI: 10.1016/j.energy.2019.05.064
9. *Abdelwahed M., Chorfi N., Malek R.* Reconstruction of Tesla micro-valve using topological sensitivity analysis // *Adv. Nonlinear Anal.*, 2020. V. 9. № 1. P. 567. DOI: 10.1515/anona-2020-0014
10. *Nguyen Q.M., Abouezzi J., Ristroph L.* Early turbulence and pulsatile flows enhance diodicity of Tesla's macrofluidic valve // *Nature Comm.*, 2021. V. 12. № 1. P. 2884. DOI: 10.1038/s41467-021-23009-y
11. *Bohm S., Phi H.B., Moriyama A., Runge E., Strehle S., König J., Cierpka C., Dittrich L.* Highly efficient passive Tesla valves for microfluidic applications // *Microsyst. & Nanoeng.*, 2022. V. 8. № 1. P. 97.  
DOI: 10.1038/s41378-022-00437-4
12. *Hu P., Wang P., Liu L., Ruan X., Zhang L., Xu Z.* Numerical investigation of Tesla valves with a variable angle // *Phys. Fluids*, 2022. V. 34. № 3. P. 033603. DOI: 10.1063/5.0084194
13. *Buglie W.L.N., Tamrin K.F., Sheikh N.A., Yasin M.F.M., Mohamaddan S.* Enhanced fluid mixing using a reversed multistage Tesla micromixer // *Chem. Eng. Technol.*, 2022. V. 45. № 7. P. 1255.  
DOI: 10.1002/ceat.202200055
14. *Li X., Worrall K., Vedanthu A., Scott-George A., Harkness P.* The pulse-elevator: A pump for granular materials // *Acta Astronautica*, 2022. V. 200. № 1. P. 33. DOI: 10.1016/j.actaastro.2022.07.052
15. *Wang J., Cui B., Liu H., Chen X., Li Y., Wang R., Lang T., Yang H., L. Li, Pan H., Quan J., Chen Y., Xu J., Liu Y.* Tesla valve-based flexible microhybrid chip with unidirectional flow properties // *ASC Omega*, 2022. V. 7. № 36. P. 31744.  
DOI: 10.1021/acsomega.2c02075
16. *Andriukaitis D., Vargalis R., Šerpytis L., Drevinskis T., Kornyšova O., Stankevičiū M., Bimbraitė-Survilienė K., Kaškonienė V., Maruškas A.S., Jonušauskas L.* Fabrication of microfluidic Tesla valve employing femtosecond bursts // *Micromachines*, 2022. V. 13. № 8. P. 1180. DOI: 10.3390/mi13081180
17. *Wang P., Hu P., Liu L., Xu Z., Wang W., Scheid B.* On the diodicity enhancement of multistage Tesla valves // *Phys. Fluids*, 2023. V. 35. № 5. P. 052010. DOI: 10.1063/50145172
18. *Purwidyantri A., Prabowo B.A.* Tesla valve microfluidics: the rise of forgotten technology // *Chemosensors*, 2023. V. 11. № 4. P. 256.  
DOI: 10.3390/chemosensors11040256
19. *Wang Y., He Y., Xie X., Huang Z., Xu H., Hu Q., Ma C.* Design and simulation of a new near zero-wear non-contact self-impact seal based on the Tesla valve structure // *Lubricants*, 2023. V. 11. № 3. P. 102.  
DOI: 10.3390/lubricants11030102
20. *Zeng G., Xu M., Mou J., Hua C., Fan C.* Application of Tesla valve's obstruction characteristics to reverse fluid in fish migration // *Water*, 2023. V. 15. № 1. P. 40. DOI: 10.3390/w15010040
21. *Stith D.* The Tesla valve – a fluidic diode // *Phys. Teacher*, 2019. V. 57. № 3. P. 201.  
DOI: 10.1119/1.5092491
22. *Nguyen Q.M., Huang D., Zauderer E., Romanelli G., Meyer C.L., Ristroph L.* Tesla's fluidic diode and the electronic-hydraulic analogy // *Amer. J. Phys.*, 2021. V. 89. № 3. P. 393. DOI: 10.1119/10.0003395
23. *Kolesov H.N., Dubinov A.E.* Custom-made tubular Tesla valves for laboratory lessons in classroom // *Phys. Fluids*, 2024. V. 36. № 5. P. 051801.  
DOI: 10.1063/5.0203900
24. *Leigh S.C., Summers A.P., Hoffmann S.L., German D.P.* Shark spiral intestines may operate as Tesla valves // *Proc. Royal Soc. B.*, 2021. V. 288. № 1955. P. 20211359. DOI: 10.1098/rspb.2021.1359
25. *Driver R.D.* Torricelli's law – an ideal example of elementary ODE // *Amer. Math. Monthly*, 1998. V. 105. № 5. P. 453.  
DOI: 10.1080/00029890.1998.12004909
26. *Atkin K.* Investigating the Torricelli law using a pressure sensor with the Arduino and MakerPlot // *Phys. Educ.*, 2018. V. 53. № 6. P. 065001.  
DOI: 10.1088/1361-6552/aad680
27. *Williams H.* Vessel drainage under the influence of gravity // *Phys. Teacher*, 2019. V. 59. № 8. P. 629.  
DOI: 10.1119/5.0020444
28. *Villermaux E., Pomeau Y.* Super free fall // *J. Fluid Mech.*, 2010. V. 642. № 1. P. 147.  
DOI: 10.1017/S0022112009992424
29. *Treviño C., Peralta S., Torres A., Medina A.* Super free fall of an inviscid liquid through interconnected vertical pipes // *Europhys. Lett.*, 2015. V. 112. № 1. P. 14002. DOI: 10.1209/0295-5075/112/1400
30. Plastic Valvular Conduit – Tesla valve. [Электронный ресурс]. <https://www.gyroscope.com/d.asp?product=VC1> (дата обращения 10.06.2024).
31. *Linkoln J.* Electric field patterns made visible with potassium permanganate // *Phys. Teacher*, 2017. V. 55. № 2. P. 74. DOI: 10.1119/1.4974114
32. *Dubinov A.E., Kozhayeva J.P., Lubimtseva V.A., Selemir V.D.* Hydrodynamic and physicochemical phe-

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИСТЕЧЕНИЯ ВОДЫ  
ИЗ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРУБКИ, НАГРУЖЕННОЙ НА КЛАПАН ТЕСЛА

nomena in liquid droplets under the action of nanosecond spark discharges: A review // *Adv. Colloid Interface Sci.*, 2019. V. 271. № 1. P. 101986.

DOI: 10.1016/j.cis.2019.07.007

33. *Dekhtyar V.A., Dubinov A.E.* Visualization of liquids flows in microfluidics and plasma channels in nanosecond spark microdischarges by means of digital microscopy // *Sci. Visualization*, 2023. V. 15. № 1. P. 1. DOI: 10.26583/sv.15.1.01

34. *Pearson R.S.* Manganese color reactions // *J. Chem. Educ.*, 1988. V. 65. № 5. P. 451.

DOI: 10.1021/ed065p451

35. *Dubinov A.E., Iskhakova D.N., Lyubimtseva V.A.* An inversion of contact angle hysteresis when a liquid

drop slides up on an inclined plane under the spark discharge action // *Phys. Fluids*, 2021. V. 33. № 6. P. 061707. DOI: 10.1063/5.0055862

36. *Dubinov A.E., Dubinova I.D.* Added point-like weight increases the levitation time of the falling soft coil spring // *Mech. Res. Comm.*, 2012. V. 113. № 1. P. 103670. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2021.103670

37. *Kuhn J., Vogt P.* Smartphones as mobile minilabs in physics: Edited volume featuring more than 70 examples from 10 years the physics teacher-column *iPhysicsLabs*. Cham, Switzerland: Springer Nature, 2022. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-94044-7>

---

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 5, pp. 293–302

---

EXPERIMENTAL RESEARCH OF WATER OUTFLOW  
FROM A VERTICAL TUBE THROUGH A TESLA VALVE

*Dj.N. Iskhakova<sup>1</sup>, H.N. Kolesov<sup>1,2</sup>, A.E. Dubinov<sup>1,2,\*</sup>*

<sup>1</sup>*Sarov Institute of Physics and Technology – Branch of National Research Nuclear University «Moscow Engineering Physics Institute» (SarFTI–NRNU MEPhI), 6 Dukhova St., Sarov, Nizhny Novgorod region, 607186, Russia*

<sup>2</sup>*Russian Federal Nuclear Center – All-Russia Scientific and Research Institute of Experimental Physics (RFNC–VNIIEF), 37 Mira Ave., Sarov, Nizhny Novgorod region, 607188, Russia*

\* e-mail: [dubinov-ae@yandex.ru](mailto:dubinov-ae@yandex.ru)

Received June 13, 2024; revised September 23, 2024; accepted September 24, 2024

The modes of the water outflow from a vertical cylindrical vessel through a Tesla valve connected in direct or reverse directions were experimentally studied. The kinematics of the water level decrease in the vessel was recorded. It was found that the time of the vessel emptying through a Tesla valve considerably exceeds the time of the vessel emptying through an ordinary tube of a smaller cross-section (both for direct and reverse switching on of the valve). Emptying of the valve at the direct switching on is twice faster than at the reverse one. The velocity of the water column level decreases with time linearly. The obtained data prove that the valve has diodicity, and that the liquid outflow from the vessel through the Tesla valve follow to some analog of the Torricelli's law kinematically with different effective slowing factors.

*Keywords:* Tesla valve, diodicity, Torricelli's law, slowing factor.

REFERENCES

1. *Cheney M., Uth R.* Tesla, master of lightning. New York, Barnes & Noble Publishing, 1999. 184 p. <https://teslauniverse.com/nikola-tesla/books/tesla-master-lightning>

2. *Tesla N.* Valvular conduit, Patent US 1329559, 1920. <https://patentimages.storage.googleapis.com/26/65/c7/c647a84af1f78f/US1329559.pdf>

3. *Thompson S.M., Ma H.B., Wilson C.* Investigation of a flat-plate oscillating heat pipe with Tesla-type check valves. *Experim. Thermal Fluid Sci.*, 2011. Vol. 35. No. 7. Pp. 1265.

DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2011.04.014

4. *Nobakht A.Y., Shahsavan M., Paykani A.* Numerical study of diodicity mechanism in different Tesla-type microvalves. *J. Appl. Res. Techn.*, 2013. Vol. 11, No. 6. Pp. 876. DOI: 10.1016/S1665-6423(13)71594-3

5. *Mohammadzadeh K., Kolahdouz E.M., Shirani E., Shafii M.B.* Numerical study on the performance of Tesla type microvalve in a valveless micropump in the range of low frequencies. *J. Micro-Bio Robot.*, 2013. Vol. 8. No. 1. Pp. 145. DOI: 10.1007/s12213-013-0069-1

6. *Wang C.-T., Chen Y.-M., Hong P.-A., Wang Y.-T.* Tesla valves in micromixers. *Int. J. Chem. Reactor Eng.*, 2014. Vol. 12. No. 1. Pp. 397.

DOI: 10.1515/ijcre-2013-0106

7. *de Vries S.F., Florea D., Homburg F.G.A., Frijns A.J.H.* Design and operation of a Tesla-type valve for pulsating heat pipes. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2017. Vol. 105, No. 1. Pp. 1–11. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.09.062
8. *Qian J.-Y., Chen M.-R., Gao Z.-X., Jin Z.-J.* Mach number and energy loss analysis inside multi-stage Tesla valves for hydrogen decompression. *Energy*, 2019. Vol. 179. No. 1. Pp. 647. DOI: 10.1016/j.energy.2019.05.064
9. *Abdelwahed M., Chorfi N., Malek R.* Reconstruction of Tesla micro-valve using topological sensitivity analysis. *Adv. Nonlinear Anal.*, 2020. Vol. 9. No. 1. Pp. 567. DOI: 10.1515/anona-2020-0014
10. *Nguyen Q.M., Abouezzi J., Ristroph L.* Early turbulence and pulsatile flows enhance diodicity of Tesla's macrofluidic valve. *Nature Comm.*, 2021. Vol. 12. No. 1. Pp. 2884. DOI: 10.1038/s41467-021-23009-y
11. *Bohm S., Phi H.B., Moriyama A., Runge E., Strehle S., König J., Cierpka C., Dittrich L.* Highly efficient passive Tesla valves for microfluidic applications. *Microsyst. & Nanoeng.*, 2022. Vol. 8. No. 1. Pp. 97. DOI: 10.1038/s41378-022-00437-4
12. *Hu P., Wang P., Liu L., Ruan X., Zhang L., Xu Z.* Numerical investigation of Tesla valves with a variable angle. *Phys. Fluids*, 2022. Vol. 34. No. 3. Pp. 033603. DOI: 10.1063/5.0084194
13. *Buglie W.L.N., Tamrin K.F., Sheikh N.A., Yasin M.F.M., Mohamaddan S.* Enhanced fluid mixing using a reversed multistage Tesla micromixer. *Chem. Eng. Technol.*, 2022. Vol. 45. No. 7. Pp. 1255. DOI: 10.1002/ceat.202200055
14. *Li X., Worrall K., Vedanthu A., Scott-George A., Harkness P.* The pulse-elevator: A pump for granular materials. *Acta Astronautica*, 2022. Vol. 200. No. 1. Pp. 33. DOI: 10.1016/j.actaastro.2022.07.052
15. *Wang J., Cui B., Liu H., Chen X., Li Y., Wang R., Lang T., Yang H., L. Li, Pan H., Quan J., Chen Y., Xu J., Liu Y.* Tesla valve-based flexible microhybrid chip with unidirectional flow properties. *ASC Omega*, 2022. Vol. 7. No. 36. Pp. 31744. DOI: 10.1021/acsomega.2c02075
16. *Andriukaitis D., Vargalis R., Šerpytis L., Drevinskas T., Kornyšova O., Stankevičius M., Bimbraitė-Survilienė K., Kaškonienė V., Maruškas A.S., Jonušauskas L.* Fabrication of microfluidic Tesla valve employing femtosecond bursts. *Micromachines*, 2022. Vol. 13. No. 8. Pp. 1180. DOI: 10.3390/mi13081180
17. *Wang P., Hu P., Liu L., Xu Z., Wang W., Scheid B.* On the diodicity enhancement of multistage Tesla valves. *Phys. Fluids*, 2023. Vol. 35. No. 5. Pp. 052010. DOI: 10.1063/5.0145172
18. *Purwidyantri A., Prabowo B.A.* Tesla valve microfluidics: the rise of forgotten technology. *Chemosensors*, 2023. Vol. 11. No. 4. Pp. 256. DOI: 10.3390/chemosensors11040256
19. *Wang Y., He Y., Xie X., Huang Z., Xu H., Hu Q., Ma C.* Design and simulation of a new near zero-wear non-contact self-impact seal based on the Tesla valve structure. *Lubricants*, 2023. Vol. 11. No. 3. Pp. 102. DOI: 10.3390/lubricants11030102
20. *Zeng G., Xu M., Mou J., Hua C., Fan C.* Application of Tesla valve's obstruction characteristics to reverse fluid in fish migration. *Water*, 2023. Vol. 15. No. 1. P. 40. DOI: 10.3390/w15010040
21. *Stith D.* The Tesla valve – a fluidic diode. *Phys. Teacher*, 2019. Vol. 57. No. 3. P. 201. DOI: 10.1119/1.5092491
22. *Nguyen Q.M., Huang D., Zauderer E., Romaneli G., Meyer C.L., Ristroph L.* Tesla's fluidic diode and the electronic-hydraulic analogy. *Amer. J. Phys.*, 2021. Vol. 89. No. 3. Pp. 393. DOI: 10.1119/10.0003395
23. *Kolesov H.N., Dubinov A.E.* Custom-made tubular Tesla valves for laboratory lessons in classroom. *Phys. Fluids*, 2024. Vol. 36. No. 5. Pp. 051801. DOI: 10.1063/5.0203900
24. *Leigh S.C., Summers A.P., Hoffmann S.L., German D.P.* Shark spiral intestines may operate as Tesla valves. *Proc. Royal Soc. B*, 2021. Vol. 288, No. 1955. Pp. 20211359. DOI: 10.1098/rspb.2021.1359
25. *Driver R.D.* Torricelli's law – an ideal example of elementary ODE // *Amer. Math. Monthly*, 1998. Vol. 105. No. 5. Pp. 453. DOI: 10.1080/00029890.1998.12004909
26. *Atkin K.* Investigating the Torricelli law using a pressure sensor with the Arduino and MakerPlot. *Phys. Educ.*, 2018. Vol. 53. No. 6. Pp. 065001. DOI: 10.1088/1361-6552/aad680
27. *Williams H.* Vessel drainage under the influence of gravity. *Phys. Teacher*, 2019. Vol. 59, No. 8. Pp. 629. DOI: 10.1119/5.0020444
28. *Villiermaux E., Pomeau Y.* Super free fall. *J. Fluid Mech.*, 2010. Vol. 642, No. 1. Pp. 147. DOI: 10.1017/S0022112009992424
29. *Treviño C., Peralta S., Torres A., Medina A.* Super free fall of an inviscid liquid through interconnected vertical pipes. *Europhys. Lett.*, 2015. Vol. 112. No. 1. Pp. 14002. DOI: 10.1209/0295-5075/112/14002
30. *Plastic Valvular Conduit - Tesla valve.* Available at: <https://www.gyroscope.com/d.asp?product=VC1> (accessed 10.06.2024)
31. *Lincoln J.* Electric field patterns made visible with potassium permanganate. *Phys. Teacher*, 2017. Vol. 55, No. 2. Pp. 74. DOI: 10.1119/1.4974114
32. *Dubinov A.E., Kozhayeva J.P., Lubimtseva V.A., Selemir V.D.* Hydrodynamic and physicochemical phenomena in liquid droplets under the action of nanosecond spark discharges: A review. *Adv. Colloid Interface Sci.*, 2019. Vol. 271. No. 1. Pp. 101986. DOI: 10.1016/j.cis.2019.07.007
33. *Dekhtyar V.A., Dubinov A.E.* Visualization of liquids flows in microfluidics and plasma channels in nanosecond spark microdischarges by means of digital microscopy. *Sci. Visualization*, 2023. Vol. 15. № 1. Pp. 1. DOI: 10.26583/sv.15.1.01
34. *Pearson R.S.* Manganese color reactions. *J. Chem. Educ.*, 1988. Vol. 65. No. 5. Pp. 451. DOI: 10.1021/ed065p451
35. *Dubinov A.E., Iskhakova D.N., Lyubimtseva V.A.* An inversion of contact angle hysteresis when a liquid drop slides up on an inclined plane under the spark dis-

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИСТЕЧЕНИЯ ВОДЫ  
ИЗ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРУБКИ, НАГРУЖЕННОЙ НА КЛАПАН ТЕСЛА

charge action. *Phys. Fluids*, 2021. Vol. 33. No. 6. Pp. 061707. DOI: 10.1063/5.0055862

36. *Dubinov A.E., Dubinova I.D.* Added point-like weight increases the levitation time of the falling soft coil spring. *Mech. Res. Comm.*, 2012. Vol. 113. No. 1. Pp. 103670.  
DOI: 10.1016/j.mechrescom.2021.103670

37. *Kuhn J., Vogt P.* Smartphones as mobile minilabs in physics: Edited volume featuring more than 70 examples from 10 years the physics teacher-column *iPhysicsLabs*. Cham, Switzerland, Springer Nature, 2022. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-94044-7>

УДК 519.63

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФфуЗИИ

С.А. Ладыгин<sup>1,\*</sup>, Р.Н. Карачурин<sup>1</sup>, К.Е. Шильников<sup>1,2</sup>, П.Н. Рябов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,  
кафедра прикладной математики, Москва, 115409, Россия

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт (МФТИ),  
кафедра вычислительной физики, Московская область, 141701, Россия

\*e-mail: SALadygin@mephi.ru

Поступила в редакцию: 25.07.2024

После доработки: 25.07.2024

Принята к публикации: 06.08.2024

В данной работе предлагается новый метод построения нерегулярной сетки для численного решения задач, содержащих одномерное уравнение конвекции-диффузии, часто встречающегося в различных областях вычислительной математики, физики и химии. Традиционные подходы либо используют регулярные сетки с большим числом узлов, либо адаптивные сетки, требующие перестройки на каждом шаге решения, что может быть вычислительно затратным. Наш метод основан на преобразовании неоднородной сетки в равномерную с помощью функции локальных деформаций, определяемой на основе критерия монотонности. Это позволяет получать монотонное решение на сетке с существенно меньшим числом узлов, повышая тем самым экономичность разностной схемы. Мы рассматриваем как стационарное, так и нестационарное уравнение конвекции-диффузии, описывая соответствующие алгоритмы построения сеток для дивергентной и недивергентной форм записи конвективных членов. Приведены примеры применения метода к различным задачам, демонстрирующие его преимущества по сравнению с существующими подходами на регулярных сетках. Представленный подход сочетает в себе преимущества нерегулярных сеток для повышения эффективности решения и использование критерия монотонности для обеспечения устойчивости схемы, расширяя возможности численных методов для дифференциальных уравнений.

*Ключевые слова:* нерегулярные сетки, дифференциальные уравнения, уравнение конвекции-диффузии, численные методы.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.5.3

EDN KWHCTL

### ВВЕДЕНИЕ

Нерегулярные сетки находят широкое применение при решении различных задач в области вычислительной математики, гидродинамики, физики и других сферах, где встречаются дифференциальные уравнения. Методы конечных разностей [1], конечных элементов [2] и конечных объемов [3] активно используют нерегулярные сетки для численного моделирования. Кроме того, такие сетки могут быть применены в неклассическом численном подходе к решению задач математической физики, включающих дифференциальные уравнения, а именно – в методе с использованием архитектур нейронных сетей [4, 5]. В данной работе рассматривается проблема построения нерегулярной сетки для уравнения конвекции-диффузии.

Для стационарного уравнения конвекции-диффузии было предложено множество методов

построения нерегулярных сеток. В обзорных работах [6, 7] рассматриваются различные подходы, основанные на использовании знаний о виде решения около особенностей и построении сеток, равномерно распределяющих узлы на кривой решения. Также упоминаются адаптивные методы, в которых сетка перестраивается вместе с решением, учитывая численную ошибку. Альтернативный подход представлен в [8], где используются равномерные сетки и специальные схемы, сохраняющие монотонность решения, однако имеющие более низкий порядок аппроксимации по сравнению со схемами на нерегулярных сетках.

Нестационарное уравнение конвекции-диффузии создает дополнительные сложности, для преодоления которых применяются различные методы, в том числе используют подвижные адаптивные сетки. В работе [9] описан ме-

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

тод динамической адаптации для параболических уравнений, основанный на переходе к произвольной нестационарной системе координат, что позволяет формулировать проблему построения и адаптации расчетных сеток на дифференциальном уровне. Данный подход был успешно применен для гиперболических и эллиптических уравнений [10, 11].

В настоящей работе предлагается новый метод построения нерегулярной сетки для одномерного уравнения конвекции-диффузии, основанный на трансформации неоднородной сетки в равномерную с использованием функции локальных деформаций. Отличительной особенностью данного подхода является определение функции локальных деформаций на основе критерия монотонности, что гарантирует монотонность разностной схемы при решении уравнения. Предложенный алгоритм построения сетки минимизирует общее количество используемых узлов, повышая экономичность вычислений. Таким образом, представленный метод сочетает в себе преимущества использования нерегулярных сеток для повышения точности решения и специальных критериев для обеспечения монотонности схемы, что является новым подходом в данной области исследований.

Работа рассматривает два основных случая: стационарное и нестационарное уравнения конвекции-диффузии. В первом разделе подробно описывается алгоритм построения сетки для стационарного уравнения, второй раздел посвящен обобщению этого метода для нестационарного случая. В третьем разделе приведены примеры применения построенных сеток для решения некоторых задач, в постановке которых присутствует уравнение конвекции-диффузии. Последний раздел содержит выводы и подведение итогов.

### СТАЦИОНАРНЫЙ СЛУЧАЙ

**Стационарные задачи конвекции-диффузии.** Поставим задачу о построении нерегулярной сетки для одномерного стационарного уравнения конвекции-диффузии. Для этого будем рассматривать стационарные краевые задачи конвекционно-диффузионного переноса с однородными граничными условиями Дирихле:

$$\begin{cases} (\mathfrak{D} + \mathfrak{C})u(x) = f(x), & x \in (a, b), \\ u|_{x=a} = 0, \\ u|_{x=b} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $u \in C^2(a, b) \cap C^1[a, b]$ ,  $f \in C^0[a, b]$ ,  $\mathfrak{D}$  – оператор диффузионного переноса;  $\mathfrak{C}$  – оператор конвективного переноса.

Оператор  $\mathfrak{D}$  определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}u &= -\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right), \\ k &\in C^1(a, b) \cap C^0[a, b] \\ (\forall x \in [a, b] \quad k(x) > 0). \end{aligned} \quad (2)$$

В работе Оператор  $\mathfrak{C}$  рассматривается в двух различных формах:

1. Недивергентная форма –  $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1$ ,

$$\mathfrak{C}_1 u = v(x) \frac{du}{dx}, \quad v \in C^0[a, b]; \quad (3)$$

2. Дивергентная форма –  $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_2$ ,

$$\mathfrak{C}_2 u = \frac{d}{dx} (v(x)u), \quad v \in C^1(a, b) \cap C^0[a, b]. \quad (4)$$

Целью данной работы является построение нерегулярной сетки, адаптированной к особенностям решения задачи (1) для обеих форм оператора конвективного переноса. Для этого предлагается использовать подход, основанный на замене координат, который подробнее будет разобран в следующем разделе.

**Замена координат.** Так как метод построения нерегулярной сетки, рассмотренный в данной статье основан на преобразовании неоднородной сетки в равномерную, необходимо получить в общем виде задачу (1) при переходе в другую систему координат.

Рассмотрим замену координат:

$$x = x(q), \quad q \in [a, b].$$

Здесь  $q$  – новая независимая переменная. При этом  $x(a) = a$  и  $x(b) = b$ .

Также введем функцию локальных деформаций

$$\Psi = \frac{dx}{dq}. \quad (5)$$

Функция  $\Psi$  имеет следующий смысл: при дискретизации рассматриваемой области меньшие значения функции соответствуют более плотному расположению узлов нерегулярной сетки, т.е. более высокому локальному сжатию координатной системы.

С учетом правила дифференцирования сложной функции в новой системе координат дифференциальные операторы (2)–(4) принимают вид:

1. Оператор диффузионного переноса  $\mathfrak{D}$ :

$$\mathfrak{D}u = -\frac{1}{\Psi} \frac{d}{dq} \left( k(x(q)) \frac{1}{\Psi} \frac{du}{dq} \right); \quad (6)$$

2. Оператор конвективного переноса в недивергентной форме  $\mathfrak{C}_1$ :

$$\mathfrak{C}_1 u = v(x(q)) \frac{1}{\Psi} \frac{du}{dq}; \quad (7)$$

3. Оператор конвективного переноса в дивергентной форме  $\mathfrak{C}_2$ :

$$\mathfrak{C}_2 u = \frac{1}{\Psi} \frac{d}{dq} (v(x(q))u). \quad (8)$$

В этом случае задача (1) примет следующий вид:

$$\begin{cases} (\mathfrak{D} + \mathfrak{C})u = f, & q \in (a, b), \\ u|_{q=a} = 0, \\ u|_{q=b} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Замена координат позволяет перейти от исходной задачи (1) в системе координат  $x$  к задаче (9) в системе координат  $q$ . При этом дифференциальные операторы (2)–(4) преобразуются к виду (6)–(8), учитывающему функцию локальных деформаций  $\Psi$ .

Теперь, когда мы перешли к задаче (9) в равномерной системе координат, следующим шагом будет дискретизация дифференциальных операторов (6)–(8) и построение соответствующих сеточных операторов. Это позволит нам получить численную схему для задачи (9). Подробнее о построении сеточных операторов и виде численной схемы будет рассказано в следующем разделе.

### Сеточные операторы и численная схема.

Введем равномерную сетку в пространстве  $q$  (рис. 1):

$$\bar{\omega}_h = \left\{ q \mid q = q_i = a + ih, \right. \\ \left. i = 0, 1, \dots, N-1, \quad h = \frac{b-a}{N-1} \right\} \quad (10)$$

со множеством внутренних узлов  $\omega_h = \bar{\omega}_h \setminus \{q_0, q_{N-1}\}$ . Здесь  $N$  – количество узлов сетки.

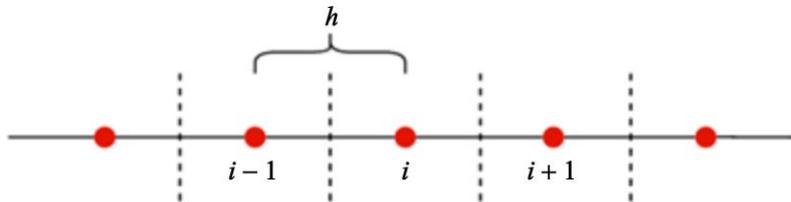


Рис. 1. Регулярная сетка

Пусть  $H$  – гильбертово пространство сеточных функций на сетке (10) со скалярным произведением

$$(u, w) = \sum_{q \in \omega_h} u(q)w(q)h$$

для произвольных сеточных функций  $u(q)$  и  $w(q)$ , обращающихся в нуль при  $q = a$  и  $q = b$ , а также нормой

$$\|u\| = (u, u)^{1/2} = \left( \sum_{q \in \omega_h} u^2(q)h \right)^{1/2}.$$

Определим сеточные функции проекций решения и правой части

$$\begin{cases} u_i = u(x_i) = u(x(q_i)), \\ f_i = f(x_i) = f(x(q_i)) \end{cases}$$

во внутренних узлах регулярной сетки (10), а также сеточные функции проекций коэффициентов диффузии и конвективного переноса

$$\begin{cases} k_{i+1/2} = k(x_{i+1/2}) = k \left( x \left( q_i + \frac{h}{2} \right) \right), \\ v_{i+1/2} = v(x_{i+1/2}) = v \left( x \left( q_i + \frac{h}{2} \right) \right) \end{cases}$$

в полужелтых узлах сетки.

Запишем аппроксимацию функции локальных деформаций (5) в полужелтых узлах со вторым порядком:

$$\Psi_{i+1/2} \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{h}, \quad i = 0, \dots, N-2.$$

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКИ  
ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ

Тогда нерегулярная сетка (рис. 2)

$$\bar{\omega}_h^* = \{x | x = x_i, \quad i = 0, 1, \dots, N-2, \\ x_0 = a, \quad x_{N-1} = b\}$$



Рис. 2. Нерегулярная сетка

Аппроксимируем функцию  $\Psi$  во внутренних узлах регулярной сетки (10) следующим образом:

$$\Psi_i \approx \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2h}, \quad i = 1, \dots, N-2.$$

Аналогично [12] определим разностный оператор диффузионного переноса

$$(Du)_i = -\frac{1}{\Psi_i} \frac{1}{h^2} \left( \frac{k_{i+1/2}}{\Psi_{i+1/2}} (u_{i+1} - u_i) - \frac{k_{i-1/2}}{\Psi_{i-1/2}} (u_i - u_{i-1}) \right), \quad i = 1, \dots, N-2 \quad (11)$$

и разностный оператор конвективного переноса в недивергентной форме

$$(C_1 u)_i = \frac{1}{\Psi_i} \frac{1}{2h} (v_{i+1/2} (u_{i+1} - u_i) + v_{i-1/2} (u_i - u_{i-1})), \quad i = 1, \dots, N-2, \quad (12)$$

которые аппроксимируют дифференциальные операторы диффузионного переноса (6) и конвективного переноса в недивергентной форме (7) соответственно с точностью  $O(h^2)$ .

Разностные операторы конвективного переноса в дивергентной и недивергентной форме являются антисопряженными [12]:

$$C_1^* = -C_2.$$

Отсюда получим выражение для разностного оператора конвективного переноса в дивергентной форме:

$$(C_2 u)_i = \frac{1}{\Psi_i} \frac{1}{2h} (v_{i+1/2} (u_{i+1} + u_i) - v_{i-1/2} (u_i + u_{i-1})), \quad i = 1, \dots, N-2, \quad (13)$$

который аппроксимирует дифференциальный оператор конвективного переноса в дивергентной форме (8) с точностью  $O(h^2)$ .

строится следующим образом:

$$x_{i+1} = x_i + \Psi_{i+1/2} h, \quad i = 0, \dots, N-2.$$

Здесь  $x_i = x(q_i)$ .

В дальнейшем решение разностной задачи, в отличие от решения дифференциальной задачи, будем обозначать буквой  $y$ , так что  $y_i = y(x_i) = y(x(q_i))$ ,  $q_i \in \bar{\omega}_h$ . Тогда разностная аппроксимация задачи (9) будет иметь вид

$$\begin{cases} (Dy)_i + (Cy)_i = f_i, & i = 1, \dots, N-2, \\ y_0 = 0, \\ y_{N-1} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь оператор  $C$  – это один из двух операторов – (12) или (13).

Разностная схема (14) аппроксимирует дифференциальную задачу (9) на нерегулярной сетке  $\bar{\omega}_h^*$ , построенной с помощью функции локальных деформаций  $\Psi$ . Выбор этой функции определяет свойства получаемой разностной схемы, в частности, ее монотонность.

В следующем разделе будут выведены условия монотонности разностной схемы (14). Эти условия позволят найти такую функцию  $\Psi$ , при которой численное решение будет свободно от нефизичных осцилляций. Таким образом, функция  $\Psi$ , будет определяться из требования монотонности разностной схемы.

**Вывод условий монотонности.** Будем искать такую функцию  $\Psi$ , чтобы разностная схема (14) была монотонной. Для начала перепишем задачи (14) в следующем виде:

$$\begin{cases} -\alpha_i y_{i-1} + \gamma_i y_i - \beta_i y_{i+1} = \phi_i, & i = 1, 2, \dots, N-2, \\ y_0 = 0, \\ y_{N-1} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь коэффициенты  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  имеют вид

$$\begin{cases} \alpha_i = \frac{1}{h^2} \frac{k_{i-1/2}}{\Psi_{i-1/2}} + \frac{1}{2h} v_{i-1/2}, & i = 1, 2, \dots, N-2, \\ \beta_i = \frac{1}{h^2} \frac{k_{i+1/2}}{\Psi_{i+1/2}} - \frac{1}{2h} v_{i+1/2}, & i = 1, 2, \dots, N-2. \end{cases}$$

Вид коэффициентов  $\gamma_i$  зависит от оператора  $C$ , а правая часть  $\varphi_i$  выглядит как

$$\varphi_i = \Psi_i f_i, \quad i=1, 2, \dots, N-2.$$

Известно, что монотонность разностной схемы (14) эквивалентна выполнению *разностного принципа максимума* для (15) [12]. В частности, пусть в разностной схеме (15)  $\varphi_i \geq 0$  для всех  $i = 1, 2, \dots, N - 2$  (или же  $\varphi_i \leq 0$  для  $i = 1, 2, \dots, N - 2$ ). Тогда при выполнении условий

$$\begin{cases} \alpha_i > 0, \quad \beta_i > 0, \quad i=1, 2, \dots, N-2, \\ \gamma_i \geq \alpha_i + \beta_i, \quad i=1, 2, \dots, N-2 \end{cases} \quad (16)$$

или

$$\begin{cases} \alpha_i > 0, \quad \beta_i > 0, \quad i=1, 2, \dots, N-2, \\ \gamma_i \geq \alpha_{i+1} + \beta_{i-1}, \quad i=2, 3, \dots, N-3, \\ \gamma_1 > \alpha_2, \quad \gamma_{N-2} > \beta_{N-3} \end{cases} \quad (17)$$

имеет место  $y_i \geq 0$ ,  $i=1, 2, \dots, N-2$  ( $y_i \leq 0$ ,  $i=1, 2, \dots, N-2$ ).

Условия (16) или (17) являются достаточными условиями монотонности для схемы (14). Далее рассмотрим эти условия для разных форм разностного оператора конвективного переноса  $C$ .

#### Условия монотонности при $C = C_1$ .

Рассмотрим недивергентную форму разностного оператора конвективного переноса  $C_1$ .

Коэффициенты  $\gamma_i$  в данном случае имеют вид

$$\gamma_i = \frac{1}{h^2} \left( \frac{k_{i+1/2}}{\Psi_{i+1/2}} + \frac{k_{i-1/2}}{\Psi_{i-1/2}} \right) + \frac{1}{2h} (v_{i-1/2} - v_{i+1/2}),$$

$$i=1, \dots, N-2,$$

откуда видно, что

$$\gamma_i = \alpha_i + \beta_i, \quad i=1, 2, \dots, N-2.$$

Учитывая это, достаточные условия монотонности (16) схемы (14) сведутся к следующему:

$$\begin{cases} \alpha_i > 0, \\ \beta_i > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{h^2} \frac{k_{i-1/2}}{\Psi_{i-1/2}} + \frac{1}{2h} v_{i-1/2} > 0, \\ \frac{1}{h^2} \frac{k_{i+1/2}}{\Psi_{i+1/2}} - \frac{1}{2h} v_{i+1/2} > 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |v_{i+1/2}| < \frac{2}{h} \frac{k_{i+1/2}}{\Psi_{i+1/2}}.$$

Таким образом, достаточные условия монотонности схемы (14), когда разностный опера-

тор конвективного переноса имеет недивергентную форму записи ( $C = C_1$ ):

$$\frac{|v_{i+1/2}| \Psi_{i+1/2} h}{k_{i+1/2}} < 2, \quad i=0, 1, 2, \dots, N-2. \quad (18)$$

#### Условия монотонности при $C = C_2$ .

Рассмотрим дивергентную форму разностного оператора конвективного переноса  $C_2$ .

Коэффициенты  $\gamma_i$  в данном случае имеют вид

$$\gamma_i = \frac{1}{h^2} \left( \frac{k_{i+1/2}}{\Psi_{i+1/2}} + \frac{k_{i-1/2}}{\Psi_{i-1/2}} \right) + \frac{1}{2h} (v_{i+1/2} - v_{i-1/2}),$$

$$i=1, \dots, N-2,$$

откуда видно, что

$$\gamma_i = \alpha_{i+1} + \beta_{i-1}, \quad i=2, 3, \dots, N-3.$$

Учитывая это, достаточные условия монотонности (17) схемы (14) сведутся к следующим:

$$\begin{cases} \alpha_i > 0, \quad i=1, 2, \dots, N-2, \\ \beta_i > 0, \quad i=1, 2, \dots, N-2, \\ \gamma_1 \geq \alpha_2, \\ \gamma_{N-2} > \beta_{N-3}. \end{cases}$$

Проведя выкладки, аналогичные случаю  $C = C_1$ , окончательно получаем, что достаточные условия монотонности схемы (14), когда разностный оператор конвективного переноса имеет дивергентную форму записи ( $C = C_2$ ), имеют такой же вид, как и условия (18):

$$\frac{|v_{i+1/2}| \Psi_{i+1/2} h}{k_{i+1/2}} < 2, \quad i=0, 1, 2, \dots, N-2.$$

**Определение функции локальных деформаций.** Для выполнения достаточных условий монотонности (18) будем искать функцию локальных деформаций в полужелтых узлах сетки в виде

$$\Psi_{i+1/2} = \alpha \frac{k_{i+1/2}}{|v_{i+1/2}| h}, \quad (19)$$

$$i=0, 1, 2, \dots, N-2, \quad \alpha \in (0, 2),$$

где  $\alpha$  – нормировочный коэффициент.

Представление значений функции  $\Psi$  в виде (19) эффективно в областях, где нарушается монотонность, а именно, когда значение отношения  $|v_{i+1/2}|/k_{i+1/2}$  велико. Однако в областях, где данное отношение мало или равно 0, ис-

**ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКИ  
ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ**

пользование (19) становится некорректным. Это обусловлено тем, что в областях, где достаточные условия монотонности (18) уже выполнены, сетка стремится разредиться.

Введем мажоранту для шага по нерегулярной сетке, обозначим ее  $d_m$ . Внесем соответствующие модификации в представление (19) следующим образом:

$$\Psi_{i+1/2} = \min\left(\alpha \frac{k_{i+1/2}}{|v_{i+1/2}|h}, \frac{d_m}{h}\right), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-2.$$

Правильный выбор значения  $d_m$  ограничивает сверху значение шага по сетке и не дает сделать шаг слишком большим.

**Алгоритм нахождения узлов сетки**

**Начальное приближение сетки.** Первым шагом в алгоритме является нахождение начального приближения нерегулярной сетки. Расположение узлов определяется формулой

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Psi_{i+1/2}h = x_i + \min\left(\alpha \frac{k_{i+1/2}}{|v_{i+1/2}|}, d_m\right), & i = 0, 1, \dots, \\ x_0 = a. \end{cases}$$

Здесь значение коэффициента  $\alpha$  подлежит определению. В первом приближении возьмем предельное значение  $\alpha = 2$ . Получение следующего узла находится итеративно с помощью метода Ньютона [13]:

$$\begin{cases} x_{i+1}^{(n)} \rightarrow x_{i+1}^{(n+1)}, & n = 0, 1, \dots, \\ x_{i+1}^{(0)} = x_i. \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow x_{i+1} = \min(x_{i+1}^{(\infty)}, b).$$

Из-за фиксации коэффициента  $\alpha$  будут выполняться следующие выражения:

$$\begin{cases} \frac{|v_{i+1/2}|\Psi_{i+1/2}h}{k_{i+1/2}} = 2, & i = 0, 1, \dots, N-1. \\ \frac{|v_{N-3/2}|\Psi_{N-3/2}h}{k_{N-3/2}} < 2. \end{cases}$$

Причем последнее получается за счет обрезания следующего значения  $x_{i+1}$  правым краем границы. Благодаря этому можно переставить узлы  $x_i$  таким образом, чтобы значение везде было одинаковым и меньше 2.

**Нахождение итоговой сетки.** Вторым шагом в алгоритме будет нахождение итоговой нерегулярной сетки. Она получается путем решения следующей системы нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Psi_{i+1/2}h = x_i + \min\left(\alpha \frac{k_{i+1/2}}{|v_{i+1/2}|}, d_m\right), \\ i = 0, 1, \dots, N-2, \\ x_0 = a, \\ x_{N-1} = b. \end{cases}$$

Здесь коэффициент  $\alpha$  является одной из неизвестных.

Данную систему можно численно решить любым итерационным методом для систем нелинейных уравнений (см. [13]), где начальное приближение для нерегулярной сетки определяется из предыдущего шага алгоритма.

В результате получается нерегулярная сетка, при использовании которой для численного решения задачи с уравнением конвекции-диффузии гарантируется монотонное решение. При этом общее количество используемых узлов довольно мало.

**НЕСТАЦИОНАРНЫЙ СЛУЧАЙ**

**Нестационарные задачи конвекции-диффузии.** Теперь перейдем к постановке задачи о построении нерегулярной сетки для нестационарного уравнения конвекции-диффузии. Для этого будем рассматривать нестационарную краевую задачу конвекционно-диффузионного переноса с однородными граничными условиями Дирихле, а также начальным условием:

$$\begin{cases} u_t(x, t) + (\mathfrak{D} + \mathfrak{C})u(x, t) = f(x, t), \\ x \in (a, b), \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in [a, b], \\ u|_{x=a} = 0, \quad t > 0, \\ u|_{x=b} = 0, \quad t > 0. \end{cases} \quad (20)$$

Здесь  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $u_0 \in C^0[a, b]$ ,  $u \in C^2((a, b) \times (0, +\infty)) \cap C^1([a, b] \times [0, +\infty))$ ,  $f \in C^0([a, b] \times [0, +\infty))$ ,  $\mathfrak{D}$  – оператор диффузионного переноса,  $\mathfrak{C}$  – оператор конвективного переноса.

Оператор  $\mathfrak{D}$  определяется аналогично стационарному случаю (2):

$$\mathfrak{D}u = -\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

где  $k \in C^1((a, b) \times (0, +\infty)) \cap C^0([a, b] \times [0, +\infty))$ , причём  $\forall (x, t) \in [a, b] \times [0, +\infty) k(x, t) > 0$ .

Оператор конвективного переноса  $\mathfrak{C}$ , так же как и в стационарном случае (3)–(4), рассматривается в различных формах:

1. Недивергентная форма  $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1$ :

$$\mathfrak{C}_1 u = v(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v \in C^0([a, b] \times [0, +\infty));$$

2. Дивергентная форма  $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_2$ :

$$\mathfrak{C}_2 u = \frac{\partial}{\partial x} (v(x, t)u),$$

$$v \in C^1((a, b) \times (0, +\infty)) \cap C^0([a, b] \times [0, +\infty)).$$

Как и в стационарном случае, нестационарное уравнение конвекции – диффузии в задаче (20) описывает перенос вещества или другого параметра в среде, где присутствуют как диффузионные, так и конвективные процессы. Однако, в отличие от стационарной задачи, здесь учитывается изменение искомой функции  $u(x, t)$  не только в пространстве, но и во времени.

Для написания численной схемы нестационарной задачи (20) требуется дискретизация не только по пространственной переменной  $x$ , но и по времени  $t$ . В качестве таких схем для нестационарных задач конвекции-диффузии чаще всего выступают двухслойные разностные схемы. В следующем разделе будет рассмотрена дискретизация задачи (20) по времени для которой будет использована именно такая схема.

**Двухслойная разностная схема.** Пусть задано вещественное конечномерное гильбертово пространство и сетка по времени:

$$\bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{0\} = \left\{ t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, M-1; \tau = \frac{T}{M-1} \right\},$$

$$T \in \mathbb{R}.$$

Здесь  $M$  – количество узлов сетки  $\bar{\omega}_\tau$ .

Проведем дискретизацию по пространственной переменной и определим разностные операторы конвективного  $C = C(t)$  и диффузионного  $D = D(t)$  переносов, как и в стационарном случае (11)–(13). Для приближенного решения задачи (20) будем использовать двухслойную чисто неявную схему:

$$\begin{cases} \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + (D + C)y_{n+1} = f_n, & t_n \in \omega_\tau, \\ y_0 = u_0, \end{cases} \quad (21)$$

где  $y_n = y(t_n) \in H$  – искомая функция решения разностной задачи, а  $f_n = f(t_n)$ ,  $u_0 \in H$  – заданы. Данная схема устойчива по времени и имеет по нему первый порядок аппроксимации.

Для получения пространственной сетки на каждом временном слое будем использовать алгоритм для стационарного случая. Тогда у пространственной сетки, имеющей вид

$$\bar{\omega}_h^*(t_n) = \left\{ x \mid x = x_i^n, i = 1, \dots, N_n - 2; \right. \\ \left. x_0^n = a, x_{N_n-1}^n = b \right\},$$

число узлов  $N_n$  и расположение узлов зависят от времени. В связи с этим возникает вопрос об аппроксимации значения функции  $y$  на прошлом временном слое в текущей точке пространственной сетки.

Рассмотрим две пространственные сетки  $\bar{\omega}_h^*(t_n)$  и  $\bar{\omega}_h^*(t_{n+1})$  соответственно на  $n$ -м и  $n+1$ -м временных слоях (рис. 3). Пусть точка  $x_i^{n+1}$  с  $n+1$  временного слоя лежит между точками  $x_j^n$  и  $x_{j+1}^n$  с  $n$ -го временного слоя. Напишем линейную интерполяцию для  $y$  с прошлого временного слоя в точке  $x_i^{n+1}$  [13]:

$$y(x_i^{n+1}, t_n) \approx y(x_j^n, t_n) + \\ + \frac{y(x_{j+1}^n, t_n) - y(x_j^n, t_n)}{x_{j+1}^n - x_j^n} (x_i^{n+1} - x_j^n).$$

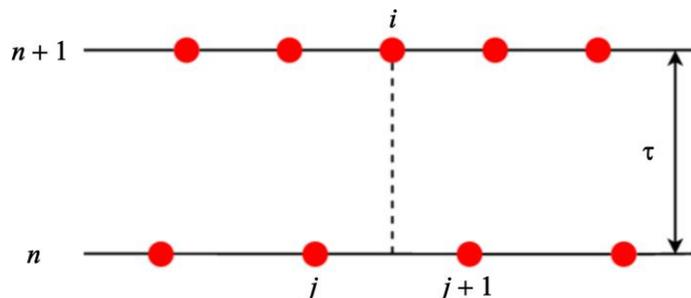


Рис. 3. Последовательно идущие по времени две пространственные сетки

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКИ  
ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

Данный вид интерполяции был выбран из-за того, что он имеет второй порядок аппроксимации. Благодаря этому, порядок аппроксимации схемы (21) будет

$$O(\tau + h^2), \quad \text{где } h = \max_{i,n} |x_{i+1}^n - x_i^n|.$$

**Монотонность разностной схемы.** Покажем, что для монотонности схемы (21) будет достаточно условий монотонности (18).

**Теорема.** Пусть в схеме (21)

$$f_n \geq 0, \quad x \in \bar{\omega}_h^*(t_n), \quad n = 0, 1, \dots, M-1,$$

$$u_0(x) \geq 0, \quad x \in \bar{\omega}_h^*(t_0),$$

и выполнены достаточные условия монотонности стационарного случая (18), тогда

$$y_{n+1} \geq 0, \quad x \in \bar{\omega}_h^*(t_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, M-2.$$

*Доказательство.* Перепишем схему (21) в виде

$$y_{n+1} + \tau(D+C)(y_{n+1}) = y_n + \tau f_n. \quad (22)$$

Предположим, что

$$y_n \geq 0, \quad x \in \bar{\omega}_h^*(t_n)$$

(при  $n = 0$  это имеет место в силу предположений теоремы). Отсюда и из условий теоремы ( $f_n \geq 0, x \in \bar{\omega}_h^*(t_n), n = 0, 1, \dots, M-1$ ) получаем

$$y_n + \tau f_n \geq 0, \quad x \in \bar{\omega}_h^*(t_n).$$

Тогда при выполнении условий (18) в силу принципа максимума из (22) имеем

$$y_{n+1} \geq 0, \quad x \in \bar{\omega}_h^*(t_{n+1}).$$

Из данной теоремы следует, что для монотонности разностной схемы (21) достаточно выполнений условий (18) на каждом временном слое. Таким образом, достаточно на каждом временном слое использовать сетку, которая строится алгоритмом для стационарного случая.

#### ДЕМОНСТРАЦИЯ РАБОТЫ АЛГОРИТМА НА ПРИМЕРАХ

**Уравнение Блэка – Шоулза.** Рассмотрим применение приведенного метода построения оптимальной нерегулярной сетки на примере

краевой задачи, содержащей дифференциальное уравнение Блэка – Шоулза. Данное уравнение при определенных предположениях описывает цену опциона в зависимости от цены акции и времени, благодаря чему оно широко используется на практике [14].

Пусть нам дана задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \\ S \in (1, L), \quad 0 \leq \tilde{t} < T, \\ V|_{\tilde{t}=T} = S - 1, \quad S \in [1, L], \\ V|_{S=1} = 0, \quad 0 \leq \tilde{t} < T, \\ V|_{S=L} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} L, \quad 0 \leq \tilde{t} < T, \end{cases}$$

где  $V$  – цена опциона;  $S$  – цена акции;  $\tilde{t}$  – время (обычно в годах);  $\sigma$  – волатильность акции;  $r$  – безрисковая процентная ставка;  $T$  – время истечения срока действия опциона;  $L$  – максимальная цена акции.

Путем замены переменных

$$\begin{cases} S = x, \\ \tilde{t} = T - t, \\ V(S, \tilde{t}) = x \cdot u(x, t), \end{cases}$$

перейдем от данной задачи к модельной, которая содержит исследуемое нами уравнение конвекции-диффузии:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + v(x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ x \in (1, L), \quad 0 < t \leq T, \\ u|_{t=0} = 1 - 1/x, \quad x \in [1, L], \\ u|_{x=1} = 0, \quad 0 < t \leq T, \\ V|_{x=L} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 1, \quad 0 < t \leq T, \end{cases}$$

где  $k(x) = 1/2\sigma^2 x^2$ , а  $v(x) = -rx$ .

Так как коэффициенты диффузии и конвективного переноса не зависят от времени, то пространственная сетка будет одинаковой для каждого временного слоя. Вид данной сетки для значений параметров  $\sigma = 0.01, r = 0.025, L = 100, T = 25, d_m = 0.5, \tau = 0.5$  можно увидеть на рис. 4.

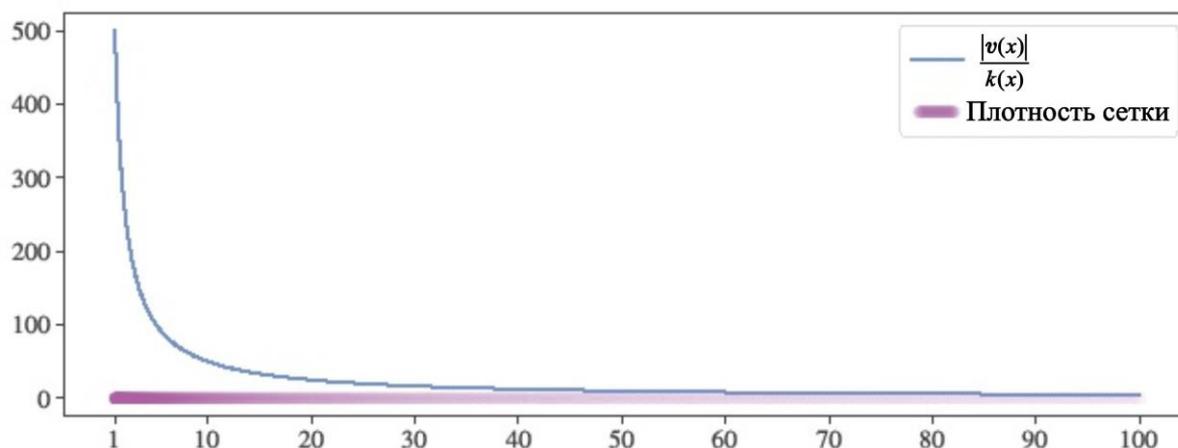


Рис. 4. Плотность распределения сетки и функция отношения из условий монотонности

Решение данной задачи при тех же параметрах на данной сетке и равномерной с тем же числом узлов изображено на рис. 5 и 6 соответственно.

Из полученных решений видно, что при использовании равномерной сетки с таким же числом узлов решение получается немонотонным. Число используемых точек на сетке, построенной предложенным в данной работе методом, в 21 раз меньше, чем на равномерной сетке, для которой точно выполняются условия монотонности (1153 против 24750). Сравнение

времени численного решения задачи на двух разных процессорах при использовании равномерной и нерегулярной сеток можно увидеть в табл. 1. В среднем, вычисление, с использованием оптимизированной алгоритмом сетки, было быстрее в 450 раз. Такой большой прирост производительности достигается за счет того, что в данном случае функции  $v$  и  $k$  не зависят от времени, а значит сетку нужно строить лишь единожды. В подобных задачах применение нерегулярных сеток наиболее выгодно.

Таблица 1. Сравнение времени вычислений при использовании разных сеток

CPU/OS	Равномерная сетка (24750 узлов)	Нерегулярная сетка (1153 узлов)	Ускорение
Intel i7-1260P/ Windows 11	49 мин. 35.8 с.	7.7 с.	386.47
Apple M1 Pro/macOS 13.2	38 мин. 34.1 с.	4.5 с.	514.24

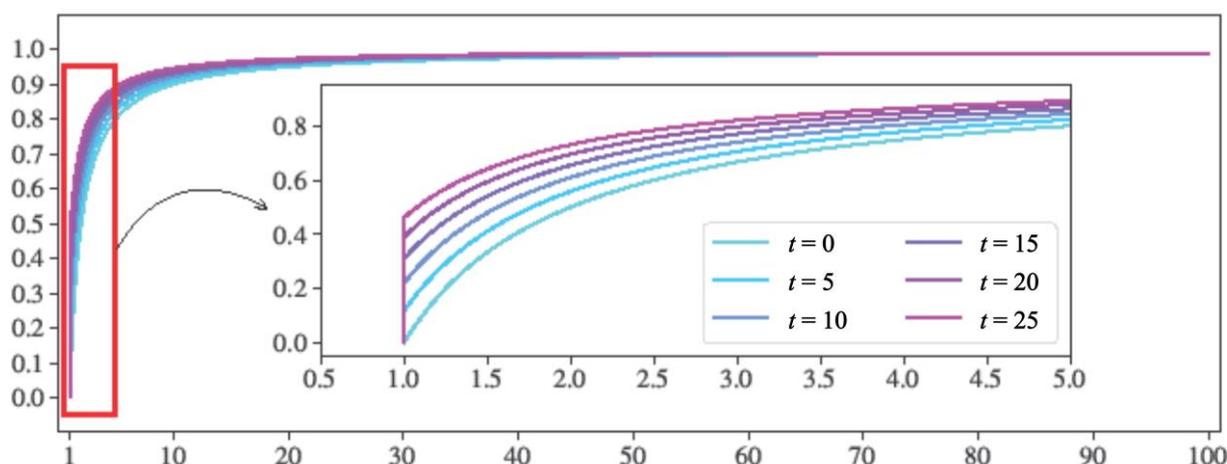


Рис. 5. Решение уравнения Блэка – Шоулза на нерегулярной сетке

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКИ  
ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ

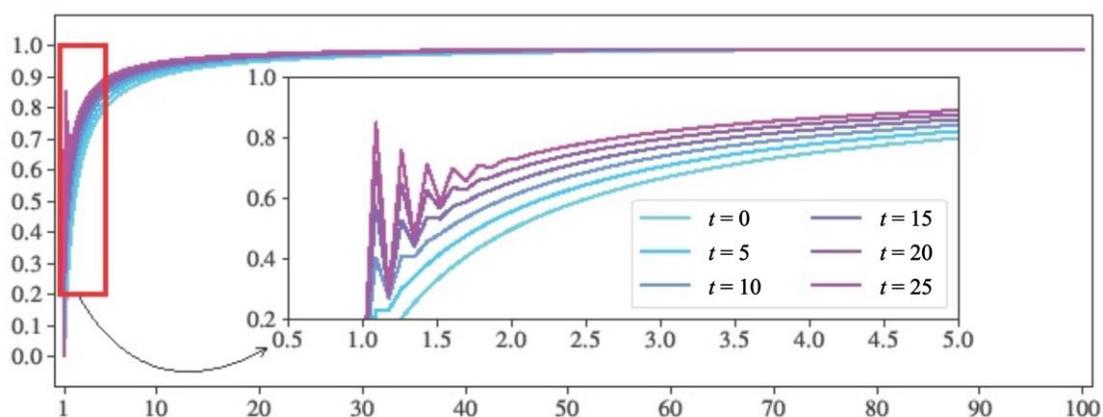


Рис. 6. Решение уравнения Блэка – Шоулза на равномерной сетке

**Уравнение Фоккера – Планка.** Рассмотрим еще один пример краевой задачи. Теперь уже содержащей уравнение Фоккера – Планка [15], которое описывает эволюцию вероятностной плотности системы под воздействием случайных сил. Это уравнение широко используется в физике, химии, экономике и других областях, где присутствуют случайные процессы. Оно также известно под другим названием, а именно – прямое уравнение Колмогорова [16].

Пусть дана задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0, & x \in (-L, L), \quad 0 < t \leq T, \\ S(x, t) = \left[ D^{(1)}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} D^{(2)}(x, t) \right] p(x, t), \\ p|_{t=0} = \frac{1}{2l} \theta(l - |x|), & x \in [-L, L], \\ p|_{x=-L} = p|_{x=L} = 0, & 0 < t \leq T, \end{cases}$$

где  $p(x, t)$  – вероятностная плотность нахождения системы в состоянии  $x$  в момент времени  $t$ ,  $D^{(1)}(x, t)$  и  $D^{(2)}(x, t)$  – коэффициенты дрефта и диффузии соответственно (для уравнения конвекции-диффузии в дивергентной форме представляют собой функции  $v(x, t)$  и  $k(x, t)$ ),  $\theta$  – функция Хевисайда,  $l$  – половина длины интервала распределения,  $L \gg l$  – половина длины исследуемой области,  $T$  – время вычисления.

Рассмотрим ее при следующих значениях функций  $D^{(1)}(x, t)$  и  $D^{(2)}(x, t)$ :

$$\begin{cases} D^{(1)}(x, t) = A\delta(x+t+l) - A\delta(x-t-l), \\ D^{(2)}(x, t) = \exp(-t/T). \end{cases}$$

Здесь  $\delta$  – дельта-функция Дирака, а  $A$  – амплитуда дельта-функции.

Для численных расчетов будем использовать не саму дельта-функцию, а ее аппроксимацию функцией Гаусса:

$$\delta(x) \approx \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} e^{-(\beta x)^2}, \quad \beta \gg 1.$$

Тепловую карту количества точек на единицу площади полученной нерегулярной сетки, а также график поверхности функции  $|D^{(1)}(x, t)| / D^{(2)}(x, t)$  для значений параметров  $A = 30$ ,  $\beta = \sqrt{1000}$ ,  $l = 1$ ,  $L = 10$ ,  $T = 5$ ,  $d_m = 0.05$ ,  $\tau = 0.1$  можно увидеть на рис. 7.

Численное решение задачи при тех же параметрах на построенной нерегулярной сетке и равномерной с таким же числом узлов можно сравнить на рис. 8.

Из сравнения видно, что неравномерная сетка при том же количестве узлов сохраняет монотонность решения. Необходимое число узлов по координате, чтобы решение точно сохраняло монотонность на равномерной сетке, равно 14550, что в 30 раз больше, чем максимальное число узлов по координате на полученной нерегулярной сетке, а именно – 477. Сравнивая общее число узлов данных сеток (суммарно на каждом временном слое), имеем 742050 узлов на равномерной против 22829 на нерегулярной. Из-за такого большого разрыва в количестве точек, хоть и нерегулярная сетка перестраивается на каждом временном слое, время численного решения задачи получается гораздо меньше, что можно увидеть в табл. 2. В ней предоставлены данные, полученные при вычислениях, проводимых на двух разных процессорах и операционных системах. Вычисление с использованием нерегулярной сетки в среднем быстрее в 6 раз.

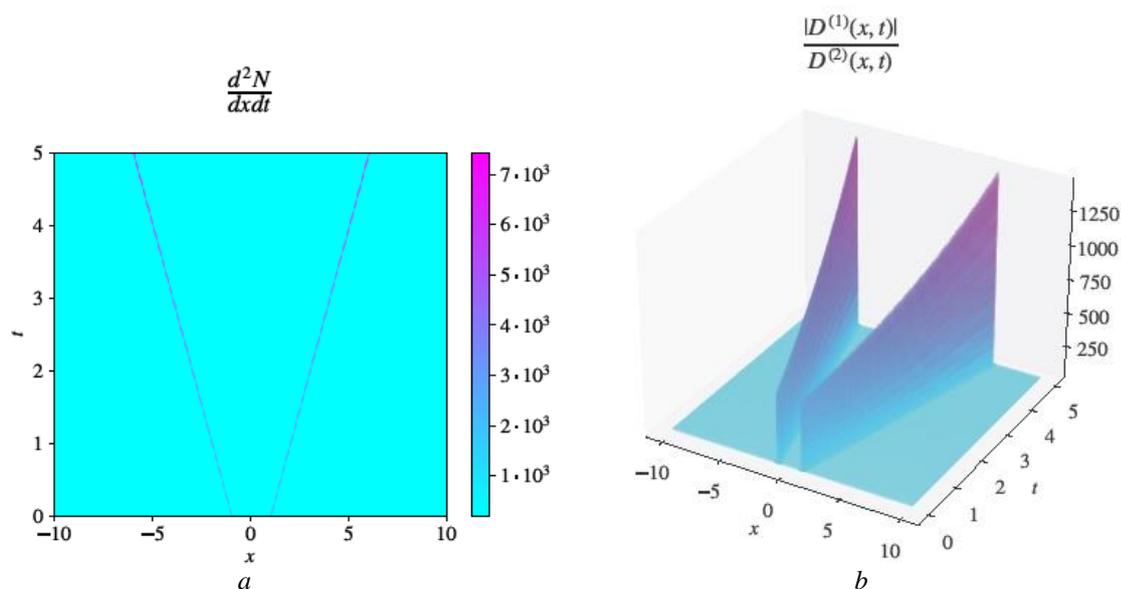


Рис. 7. Плотность сетки (а) и функция модуля отношения коэффициентов (b)

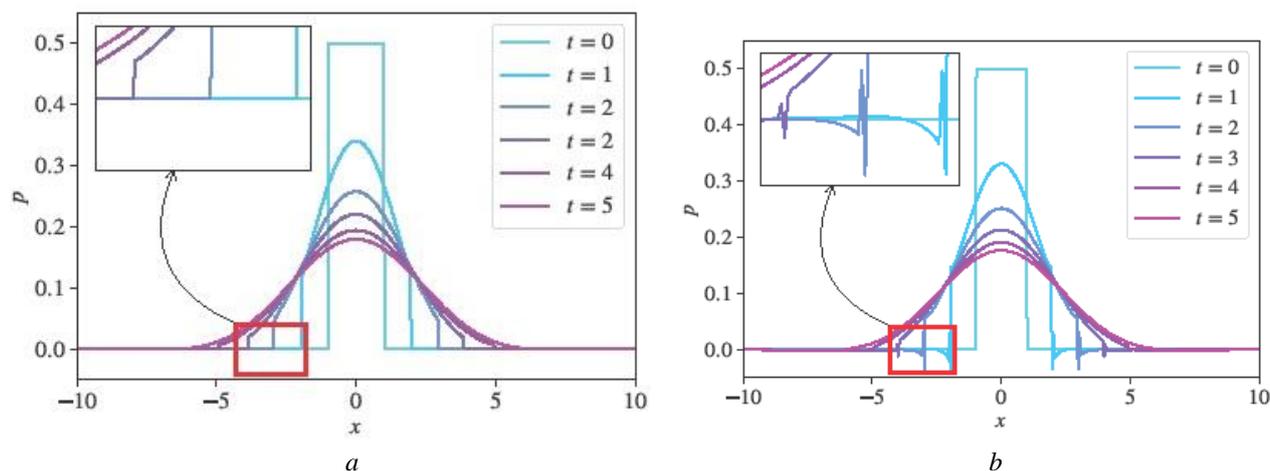


Рис. 8. Срезы численного решения задачи в разные моменты времени: а) нерегулярная сетка; б) равномерная сетка

Таблица 2. Сравнение времени вычислений при использовании разных сеток

CPU/OS	Равномерная сетка (742050 узлов)	Нерегулярная сетка (22829 узлов)	Ускорение
Intel i7-1260P/Windows 11	13 мин 7.8 с	2 мин 11 с	6.01
Apple M1 Pro/macOS 13.2	7 мин 15.9 с	1 мин 16.8 с	5.68

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе проведения работы был разработан и протестирован новый подход к созданию нерегулярных сеток для численного решения задач конвекции-диффузии в одномерном случае. Этот подход основывается на трансформации неоднородной сетки в равномерную с использованием функции локальных деформаций и позволяет обеспечить монотонность разностной

схемы, что является критически важным для многих приложений.

Было показано, что нерегулярные сетки, созданные с использованием предложенного подхода, обеспечивают сохранение монотонности разностной схемы при значительно меньшем количестве узлов, по сравнению с равномерными сетками. Это приводит к существенному увеличению эффективности алгоритмов, использующих такие сетки.

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ

В заключение хотелось бы подчеркнуть, что предложенный подход к построению нерегулярных сеток является перспективным инструментом для решения широкого спектра задач, связанных с уравнением конвекции–диффузии. Он позволяет обеспечить низкое время вычислений при этом не сильно ухудшая точность решения.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-41-00070, <https://rscf.ru/project/23-41-00070/>

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К., Рябенкий В.С. Разностные схемы (введение в теорию): Учебное пособие. М.: Наука, 1997.
2. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация / Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 318 с.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Разностные методы решения задач математической физики на нерегулярных сетках // Математическое моделирование, 2001. Т. 13. № 2. С. 5–16.
4. Ladygin S.A., Karachurin R.N., Ryabov P.N., Kudryashov N.A. On Specific Features of an Approach Based on Feedforward Neural Networks to Solve Problems Based on Differential Equations // Physics of Atomic Nuclei, 2023. V. 86. № 10. P. 2231–2240.
5. Karachurin R.N., Ladygin S.A., Ryabov P.N., Shilnikov K.E., Kudryashov N.A. Exploring the Efficiency of Neural Networks for Solving Dynamic Process Problems: The Fisher Equation Investigation // Biologically Inspired Cognitive Architectures Meeting. Cham: Springer Nature Switzerland, 2023. P. 504–511.
6. Linß T. Layer-adapted meshes for convection–diffusion problems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003. V. 192. № 9–10. P. 1061–1105.
7. Roos H.G. Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations: a survey covering 2008–2012 // International Scholarly Research Notices, 2012. V. 2012. № 1. P. 379547.
8. Kuzmin D., Turek S. Flux correction tools for finite elements // Journal of Computational Physics, 2002. V. 175. № 2. P. 525–558.
9. Мажукин А.В., Мажукин В.И. Динамическая адаптация в параболических уравнениях // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2007. Т. 47. № 11. С. 1913–1936.
10. Shilnikov K.E., Kochanov M.B. On one approach for the numerical solving of hyperbolic initial-boundary problems on an adaptive moving grids // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2023. V. 421. P. 114884.
11. Shilnikov K.E., Kochanov M.B. Numerical solution of two-dimensional (2D) nonlinear heat conductivity problem on moving grids // Journal of Physics: Conference Series, 2020. V. 1686. № 1. P. 012038.
12. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции–диффузии М.: УРСС, 2003. 246 с.
13. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учебное пособие для вузов. М.: Наука, 1989. 432 с.
14. Chan R.H., Guo Y.Z., Lee S.T., Li X. Black–Scholes–Merton Model for Option Pricing // Financial Mathematics, Derivatives and Structured Products. Singapore: Springer Nature Singapore, 2024. P. 155–171.
15. Risken H., Risken H. Fokker-planck equation // Springer Berlin Heidelberg, 1996. P. 63–95.
16. Kolmogorov A. Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeits theorie // Math Annal, 1931. V. 104. P. 415–458.

---

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 5, pp. 303–315

---

## ON A METHOD FOR CONSTRUCTING AN IRREGULAR GRID FOR THE ONE-DIMENSIONAL CONVECTION-DIFFUSION EQUATION

S.A. Ladygin<sup>1</sup>, R.N. Karachurin<sup>1</sup>, K.E. Shilnikov<sup>1,2</sup>, P.N. Ryabov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>National Research Nuclear University «MEPhI», Department of Applied Mathematics,  
Moscow, 115409, Russia.

<sup>2</sup>Moscow Institute of Physics and Technology (MIPT), Department of Computational Physics,  
Moscow Region, 141701, Russia

\*e-mail: [SALadygin@mephi.ru](mailto:SALadygin@mephi.ru)

Received July 25, 2024; revised July 25, 2024; accepted August 06, 2024

In this paper, we propose a new method for constructing an irregular grid for the numerical solution of problems containing a one-dimensional convection-diffusion equation, which is often encountered in various fields of computational mathematics, physics, and chemistry. Traditional approaches either use regular grids with a large number of

nodes or adaptive grids that require rebuilding at each solution step, which can be computationally expensive. Our method is based on transforming a non-uniform grid into a uniform one using a local deformation function determined based on a monotonicity criterion. This allows us to obtain a monotonic solution on a grid with a significantly smaller number of nodes, thereby increasing the efficiency of the difference scheme. We consider both stationary and non-stationary convection-diffusion equations, describing the corresponding grid construction algorithms for divergent and non-divergent forms of recording convective terms. Examples of applying the method to various problems are given, demonstrating its advantages over existing approaches on regular grids. The presented approach combines the advantages of irregular grids to improve the solution efficiency and the use of a monotonicity criterion to ensure the stability of the scheme, expanding the capabilities of numerical methods for differential equations.

*Keywords:* irregular grids, differential equations, convection-diffusion equation, numerical methods.

## REFERENCES

1. *Godunov S.K., Ryaben'kii V.S.* Raznostnye skhemy (vvedenie v teoriyu). Ucheb. pos., [Difference schemes (introduction to theory). Textbook]. Moscow, Nauka Publ., 1997.
2. *Zenkevich O., Morgan K.* Konechnye elementy i aproksimatsiya [Finite Elements and Approximation]. Moscow, Mir Publ., 1986. 318 p. (in Russian).
3. *Samarskii A.A., Vabishchevich P.N.* Raznostnye metody resheniya zadach matematicheskoi fiziki na neregulyarnykh setkakh [Difference methods for solving problems of mathematical physics on irregular grids]. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2001. Vol. 13. No. 2. Pp. 5–16 (in Russian).
4. *Ladygin S.A., Karachurin R.N., Ryabov P.N., Kudryashov N.A.* On Specific Features of an Approach Based on Feedforward Neural Networks to Solve Problems Based on Differential Equations // *Physics of Atomic Nuclei*, 2023. Vol. 86. No. 10. Pp. 2231–2240.
5. *Karachurin R.N., Ladygin S.A., Ryabov P.N., Shilnikov K.E., Kudryashov N.A.* Exploring the Efficiency of Neural Networks for Solving Dynamic Process Problems: The Fisher Equation Investigation. *Biologically Inspired Cognitive Architectures Meeting*. Cham: Springer Nature Switzerland, 2023. Pp. 504–511.
6. *Linß T.* Layer-adapted meshes for convection-diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003. Vol. 192. No. 9–10. Pp. 1061–1105.
7. *Roos H.G.* Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations: a survey covering 2008–2012. *International Scholarly Research Notices*, 2012. Vol. 2012. No. 1. Pp. 379547.
8. *Kuzmin D., Turek S.* Flux correction tools for finite elements. *Journal of Computational Physics*, 2002. Vol. 175. No. 2. Pp. 525–558.
9. *Mazhukin A.V., Mazhukin V.I.* Dinamicheskaya adaptatsiya v parabolicheskikh uravneniyakh [Dynamic adaptation in parabolic equations]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 2007. Vol. 47. No. 11. Pp. 1913–1936 (in Russian).
10. *Shilnikov K.E., Kochanov M.B.* On one approach for the numerical solving of hyperbolic initial-boundary problems on an adaptive moving grids. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2023. Vol. 421. Pp. 114884.
11. *Shilnikov K.E., Kochanov M.B.* Numerical solution of two-dimensional (2D) nonlinear heat conductivity problem on moving grids. *Journal of Physics: Conference Series*, 2020. Vol. 1686. No. 1. Pp. 012038.
12. *Samarskii A.A., Vabishchevich P.N.* Chislennye metody resheniya zadach konveksii-diffuzii [Numerical methods for solving convection-diffusion problems]. Moscow, URSS Publ., 2003. 246 p.
13. *Samarskii A.A., Gulin A.V.* Chislennye metody. Uchebnoye posobie dlya vuzov [Numerical methods. Textbook, manual for universities]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 432 p.
14. *Chan R.H., Guo Y.Z., Lee S.T., Li X.* Black-Scholes–Merton Model for Option Pricing. *Financial Mathematics, Derivatives and Structured Products*. Singapore, Springer Nature Singapore, 2024. Pp. 155–171.
15. *Risken H., Risken H.* Fokker-planck equation. Springer Berlin Heidelberg, 1996. Pp. 63–95.
16. *Kolmogorov A.* Ber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeits theorie. *Math Annal*, 1931. Vol. 104. Pp. 415–458.

УДК 519.63+517.958:533.9

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В НЕОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКИ

*К.В. Брушлинский<sup>1,2,\*</sup>, М.Т. Истомина<sup>2,\*\*</sup>, В.В. Крючков<sup>2,\*\*\*</sup>, Е.В. Степин<sup>1,2,\*\*\*\*</sup>*

<sup>1</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 125047, Россия

<sup>2</sup>Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

\*e-mail: brush@keldysh.ru

\*\*e-mail: Mtistomina@mephi.ru

\*\*\*e-mail: kriuchnikov.viacheslav@mail.ru

\*\*\*\*e-mail: eugene.v.stepin@gmail.com

Поступила в редакцию: 02.08.2024

После доработки: 02.08.2024

Принята к публикации: 20.08.2024

В статье уточняются численная модель и результаты расчетов равновесных плазменных конфигураций в магнитной ловушке «Пояс» из класса предложенных А.И. Морозовым ловушек-галатей. Удерживающее магнитное поле создано токнесущими проводниками, погруженными в плазму, но не соприкасающимися с ней. В серии предшествующих работ были исследованы геометрия и основные закономерности конфигураций в распрямленной в цилиндр тороидальной ловушке «Пояс» с двумя проводниками, параллельными его оси. Двумерная плазмостатическая модель конфигурации основана на численном решении краевой задачи с известным уравнением Грэда–Шафранова для функции магнитного потока в сечении цилиндра. Она содержала существенное упрощающее предположение, позволяющее иметь дело с односвязной областью решения задачи: проводники не исключались из области, а токи в них представлены дополнительными слагаемыми в уравнении. В предлагаемой работе это упрощение отсутствует, и задача ставится в неодносвязной области вне проводников квадратного сечения. Роль электрического тока в образовании и поддержании равновесной магнитоплазменной конфигурации играет граничное условие, содержащее циркуляцию магнитного поля вдоль границы каждого проводника. В серии расчетов с различными значениями безразмерных параметров задачи в неодносвязной области установлено, что основные свойства конфигурации и закономерности их зависимости от параметров качественно совпадают с полученными ранее в односвязной области. Это говорит о легитимности предыдущего варианта модели и в то же время уточняет его результат. Уточнена зависимость геометрии и количественных характеристик конфигураций от безразмерных параметров задачи.

*Ключевые слова:* удержание плазмы, магнитные ловушки, галатеи, равновесные конфигурации, неодносвязная область.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.5.4

EDN MCGOAK

### ВВЕДЕНИЕ

Статья относится к области научных исследований физики плазмы, ориентированных на осуществление и реализацию в практических целях управляемого термоядерного синтеза (УТС). Реакция синтеза частиц легких элементов таблицы Менделеева (изотопов водорода) должна сопровождаться выделением энергии, превосходящей энергию распада тяжелых элементов – урана и следующих за ним в успешно работающих десятилетиях атомных электростанциях всего мира. В предполагаемых установках, относящихся к

программе УТС, постоянно участвуют магнитные ловушки, в которых сжатая и сильно нагретая плазма должна удерживаться в течение времени, необходимого для осуществления упомянутой реакции синтеза. Единственным известным «материалом», способным удерживать плазму при требуемых высоких температурах, является магнитное поле, которое в сплошной электропроводящей среде играет роль давления. Среди наиболее известных примеров магнитных ловушек можно назвать плазменный столб с сильным электрическим током вдоль него, создающим окружающее удерживающее магнит-

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В НЕОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКИ

ное поле (Z-пинч) [1, 2], его тороидальный родственник токамак [3] и стелларатор [4], в котором магнитное поле создается внешними проводниками, окружающими плазменный тор. Тороидальная геометрия многих ловушек связана с тенденцией минимизировать контакты горячей плазмы с элементами их конструкции.

Исследования, представленные в данной работе, относятся к ловушкам, которые можно рассматривать как находящиеся между токамаками и стеллараторами: электрический ток, создающий магнитное поле, течет по проводникам, расположенным внутри плазменной среды, но не соприкасающимся с ней. Этот класс ловушек предложил А.И. Морозов [5, 6], который назвал их галатеями. Рассматриваемый ниже пример «Галатеи-Пояса» [7] предполагается также тороидальным. Однако для простоты первоначальных исследований тор распрямлен в бесконечный цилиндр с двумя прямыми проводниками, симметрично расположенными по разные стороны от оси. Такое упрощение облегчает исследование основных свойств ловушек, а поправки на тороидальность определены, например, в работе [8].

В то же время цилиндрический вариант «Галатеи-Пояса» представляет и самостоятельный интерес ввиду аналогии с известными работами по токовому слою, инициированными С.И. Сыроватским [9] и ведущимися до настоящего времени (см., например, [10] с подробной библиографией).

В исследовании магнитных ловушек существенную роль играют математическое моделирование и расчеты с использованием современной высокопроизводительной вычислительной техники. Плазма в ловушках предполагается достаточно плотной, что позволяет рассматривать ее как сплошную среду и строить математические модели обсуждаемых событий в терминах дифференциальных уравнений магнитной газодинамики (МГД) [11, 12]. Время удержания, предполагаемое для начала реакции синтеза, существенно превосходит характерные времена быстрых плазменных процессов, поэтому состояние плазмы в ловушке можно считать равновесным, т.е. не зависящим от времени. Математической моделью равновесия плазмы становится решение краевой задачи с уравнениями плазмостатики в заданной области ловушки с заданными на ее границах необходимыми условиями.

Задачи в упомянутых бесконечных цилиндрах обладают очевидной плоской симметрией,

т.е. двумерны:  $\partial/\partial z \equiv 0$ ; независимыми переменными в области квадратного или круглого сечений цилиндра плоскостью  $z = \text{const}$  являются декартовы  $(x, y)$  или полярные  $(r, \varphi)$  координаты. Наличие симметрии существенно упрощает математический аппарат задачи: система уравнений плазмостатики сводится к одному скалярному уравнению – плоскому варианту известного уравнения Грэда-Шафранова [13, 14] для неизвестной функции магнитного потока  $\psi(x, y)$ . Оно описывает состояние строгого равновесия при дополнительном предположении бесконечной проводимости плазмы. Краевые задачи с ним представляют собой простейшую математическую модель равновесных конфигураций плазмы. С ее помощью успешно определяются основные сведения о геометрии и количественных параметрах конфигурации со связывающими их закономерностями.

В то же время в исследовании симметричных ловушек-галатей упомянутый математический аппарат содержит определенное неудобство, обязанное проводникам, погруженным в плазменный объем: область решения краевых задач с уравнением Грэда-Шафранова не односвязна, так как из нее должны быть исключены сечения проводников конечного диаметра. В предыдущих работах это преодолевалось дополнительным упрощением модели: задача ставилась и решалась во всей односвязной области сечения цилиндра, а роль токов в проводниках, создающих магнитное поле, играли дополнительные слагаемые в уравнении Грэда-Шафранова, сосредоточенные на их небольших, но конечных территориях.

В настоящей работе это упрощение отсутствует, область решения задачи не односвязна, а токи в проводниках учтены заданием циркуляции магнитного поля в качестве интегрального граничного условия на их поверхностях.

В п. 1 для облегчения труда читателя изложены математическая модель равновесия плазмы в «Галатеях» в предшествующем упрощенном варианте в односвязной области и краткий обзор известных результатов расчетов.

В п. 2 представлена та же модель без упрощения, реализованная в расчетах в не односвязной квадратной области с двумя проводниками также квадратного сечения. Квадратная геометрия позволяет использовать декартовы координаты  $(x, y)$ . Форма внешней границы практически не влияет на основные результаты, поскольку плазменная конфигурация сосредоточена в основном в центральной части области, а

квадратные проводники влияют на результат только в непосредственной близости с ними. Та же геометрия использована в расчетах плазменной модели формирования конфигурации в решении нестационарных начально-краевых задач с двумерными уравнениями МГД в работах [15, 16].

Результаты расчетов и их сопоставление с полученными ранее показали, что основные характеристики равновесных конфигураций несущественно отличаются друг от друга в обоих вариантах модели, что фактически означает легитимность предыдущих расчетов в односвязной области или, точнее говоря, указывает границы их допустимости.

В приведенных результатах серии расчетов, выполненных в предложенной неодносвязной модели, исследована зависимость полученных равновесных конфигураций от безразмерных параметров задачи.

#### ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В ЛОВУШКАХ-ГАЛАТЕЯХ С ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТЬЮ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Математические модели равновесия плазмы в приближении механики сплошных сред основаны на трех уравнениях плазмостатики для трех величин: давления плазмы  $p$ , напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  и плотности электрического поля  $\mathbf{j}$  [17]:

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{H}; \quad \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{H}; \quad \text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (1.1)$$

Первое из них – уравнение МГД при отсутствии скорости ( $\mathbf{V} = 0$ ) и зависимости от времени ( $\partial/\partial t \equiv 0$ ), второе и третье – уравнения Максвелла. Они описывают идеализированный вариант строгого равновесия, позволяющий пренебрегать диссипативными процессами, разрушающими равновесие вследствие гидродинамической вязкости и диффузии тепла и магнитного поля. Уравнения (1.1) здесь и далее участвуют в безразмерной форме: единицами измерения всех величин являются их характерные значения, известные из постановок задач. Модель равновесной конфигурации плазмы в любой ловушке возникает в результате постановки и решения (численного!) краевой задачи с уравнениями (1.1) в заданной области и с заданными граничными условиями.

В общем виде эти задачи с семью уравнениями для семи неизвестных функций (векторы  $\mathbf{H}$ ,

$\mathbf{j}$  и первые два уравнения (1.1) трехмерны) сложны, однако они сильно упрощаются при наличии или допущении какой-либо симметрии магнитных ловушек, например, плоской, осевой или винтовой. В этом случае уравнения (1.1) сводятся к одному скалярному уравнению Грэда–Шафранова для одной функции магнитного потока  $\psi$ . Оно опубликовано впервые в случае осевой симметрии [13, 14], в приложении к тороидальной геометрии ловушек. Приведем его для облегчения понимания дальнейшего в плоском варианте  $\partial/\partial z \equiv 0$ , имея в виду приложение к плазменному цилиндру (см., например, [11, 12]). Из уравнений (1.1) следует, что  $\mathbf{H} = \text{rot } \Psi$ , и

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y}; & H_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \\ j_x &= \frac{\partial I}{\partial y}; & j_y &= -\frac{\partial I}{\partial x}; \\ \psi &= \psi_z; & I &= H_z; \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \nabla p \cdot \mathbf{H} &= \frac{\partial(p, \psi)}{\partial(x, y)} = 0; \\ \nabla p \cdot \mathbf{j} &= \frac{\partial(p, I)}{\partial(x, y)} = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Равенство нулю якобианов (1.3) означает взаимную зависимость функций  $p$ ,  $\psi$ ,  $I$  между собой, которую удобно представить в виде

$$p = p(\psi); \quad I = I(\psi). \quad (1.4)$$

Функции (1.4) описывают распределение давления и электрического тока между магнитными поверхностями  $\psi(x, y) = \text{const}$ . Конкретная зависимость (1.4) не следует из общих соображений и должна определяться требованиями к обсуждаемой ловушке или имеющейся информацией из экспериментов.

Первое уравнение (1.1) превращается в одно скалярное уравнение

$$\Delta \psi + dp/d\psi + I dI/d\psi = 0 \quad (1.5)$$

– вариант уравнения Грэда–Шафранова для неизвестной функции  $\psi$ , соответствующий плоской симметрии ловушек. Это двумерное полулинейное<sup>1</sup> уравнение эллиптического типа участвует в математических моделях более широкого класса процессов взаимодействия реакции (младшие члены) и диффузии (лапласиан), например, в теории горения [19] даже без предположения о симметрии и связанного с ним ограничения размерности [11, 12].

<sup>1</sup> Линейное по старшим производным [18].

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ  
В НЕОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКИ

В рассматриваемых моделях равновесных конфигураций в цилиндре с погруженными в него прямыми проводниками функции  $p(\psi)$  и  $I(\psi)$  задаются, исходя из следующих соображений: продольное поле

$$H_z = I(\varphi) = 0 \quad (1.6)$$

отсутствует, а давление  $p(\psi)$  должно быть близким к нулю вблизи проводников и внешней границы согласно требованию, чтобы плазменная конфигурация не соприкасалась с ними. Типичная геометрия магнитного поля в цилиндре с двумя проводниками представлена на рис. 1 линиями уровня  $\psi(x, y) = \text{const}$ .

Здесь видно, что конфигурацию естественно разместить в центре ловушки, задав давление  $p(\psi)$  максимальным при  $x = y = 0$  и на сепаратрисе магнитного поля, проходящей через центр, и потребовать его достаточно быстрого убывания в сторону границ, например:

$$p(\psi) = p_0 \exp\left(-\left(\frac{\psi - \psi_0}{q}\right)^2\right), \quad (1.7)$$

здесь

$$\psi_0 = \psi(0, 0), \quad (1.8)$$

а  $q$  – достаточно малый параметр, обеспечивающий быстрое убывание давления при удалении от центра. Граничным условием на внешней границе может служить  $H_n = \partial\psi/\partial s = 0$ , т.е. любое постоянное значение  $\psi = \psi_\Gamma \neq \psi_0$ , а на границах проводников – информация о заданных в них токах.

Область, в которой ставится краевая задача – сечение цилиндра за вычетом сечений проводников, неодносвязна, что вызывает дополнитель-

ные вопросы при ее решении. Поэтому в предыдущих работах о равновесии плазмы в рассматриваемых ловушках (тороидальных и цилиндрических) введено еще одно упрощающее предположение: проводники исключены из области, а их влияние на созданное ими магнитное поле представлено дополнительным слагаемым  $j^{ex}(x, y)$  в уравнении (1.5), сосредоточенным в окрестности центров проводников, например:

$$j^{ex}(x, y) = \sum_{k=1}^N j_k e^{-\frac{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2}{r_c^2}}, \quad (1.9)$$

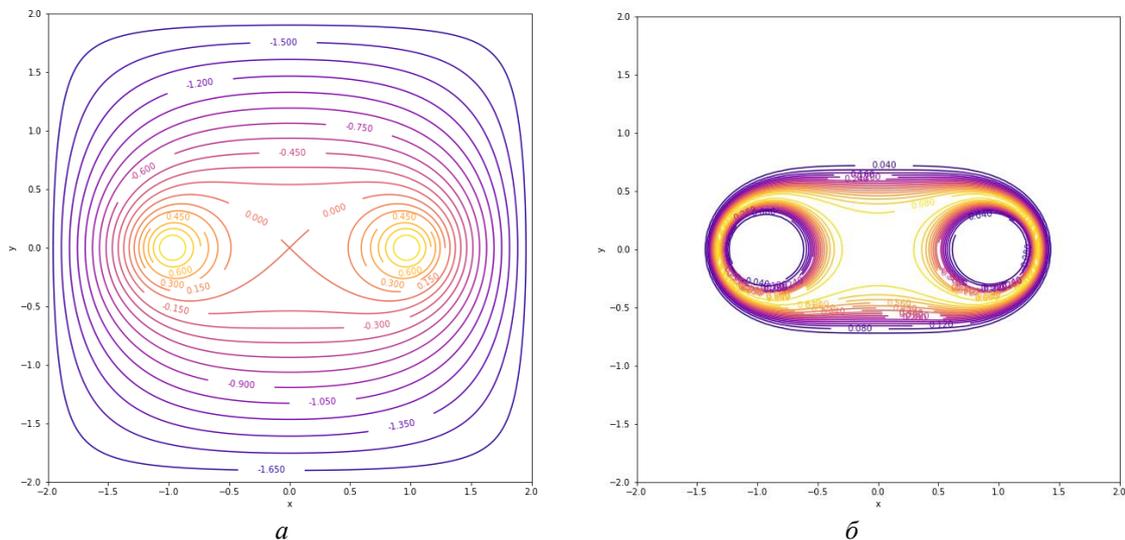
где коэффициенты  $j_k$  обеспечивают равенство интеграла каждого слагаемого по  $(x, y)$  величине (безразмерной) тока в каждом из  $N$  проводников, а  $r_c$  – условный радиус проводника. В цилиндрическом аналоге ловушки «Пояс» (см. рис. 1):

$$N = 2; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = -1; \\ y_1 = y_2 = 0; \quad r_c < 1; \quad j_k = \frac{2}{r_c^2}.$$

Краевая задача с модифицированным таким образом уравнением Грэда–Шафранова

$$\Delta\psi + \frac{dp}{d\psi} + j^{ex}(x, y) = 0, \quad (1.10)$$

ставится и решается в односвязной области сечения цилиндра с упомянутым граничным условием  $\psi = \psi_\Gamma = \text{const}$ . Значение константы роли не играет, поскольку искомая функция  $\psi$  определена с точностью до произвольного аддитивного слагаемого. Точнее говоря, от  $\psi_\Gamma$  зависит значение  $\psi_0$  в центре области, и не зависит разность  $\psi - \psi_0$ , т.е. давление в формуле (1.7) и магнитное поле в формулах (1.2).



**Рис. 1.** Распределение магнитного поля (а) и давления (б) в ловушке «Галатейя-Пояс» при  $p_0 = 0.7, r_c = 0.2, q = 0.2$ .

Решение задачи получено итерационным методом установления в искусственно введенном времени, т.е. численным решением начально-краевой задачи с уравнением

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta \psi + g(x, y), \quad (1.11)$$

где  $g(x, y)$  – младшие члены уравнения (1.10). При этом использовался хорошо известный метод продольно-поперечной прогонки [12, 20–22]. В ранних работах исследованы конфигурации в «Стеллараторе-Галатее» (СГ) [23–25] – распрямленной в цилиндр ловушке с тремя винтовыми проводниками. При этом предполагалась винтовая симметрия, винтовые координаты и винтовой вариант уравнения Грэда–Шафранова [11, 12]. Затем исследованы равновесия в «Галатее-Поясе» [25–29], где в последнее время уделено внимание устойчивости конфигураций. Промежуточный случай «Трилистника» – цилиндра с тремя прямыми проводниками – рассмотрен в [25, 30].

Основной результат всех расчетов состоит в том, что равновесное решение устанавливается только при ограничении безразмерного параметра  $p_0$  – отношения максимального давления  $p$  в плазме к характерному «магнитному» давлению  $H^2/8\pi$ :

$$p_0 < p_0^{cr}. \quad (1.12)$$

При  $p_0 > p_0^{cr}$  решение теряет смысл: либо стационарное решение перестает быть един-

ственным, либо решение вообще не устанавливается со «временем», либо плазменная конфигурация вторгается на «территорию проводников», условно представленную кругами радиусом  $r_c$ .

Ограничение (1.12) имеет и простой физический смысл: ловушка с фиксированной электромагнитной природой не может удержать плазму какого угодно высокого давления.

В перечисленных выше работах исследована зависимость геометрии равновесных конфигураций и относящейся к ним количественной информации от безразмерных параметров задачи: упомянутого выше  $p_0$  и поперечных размеров проводников  $r_c$  и конфигурации  $q$ .

### ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В ЛОВУШКАХ-ГАЛАТЕЯХ С НЕОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТЬЮ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Следующий этап работы вызван желанием уточнить модель равновесия плазмы в ловушках-галатеех, избавившись от представления токов в проводниках заданной функцией  $j^{ex}(x, y)$ , т.е. исключив проводники конечного диаметра из сечения цилиндра. Рассмотрим его подробнее на примере распрямленной в цилиндр «Галатее-Пояса» квадратного сечения с двумя квадратными проводниками (рис. 2), что позволяет пользоваться декартовыми координатами  $(x, y)$  аналогично упомянутым работам [15, 16].

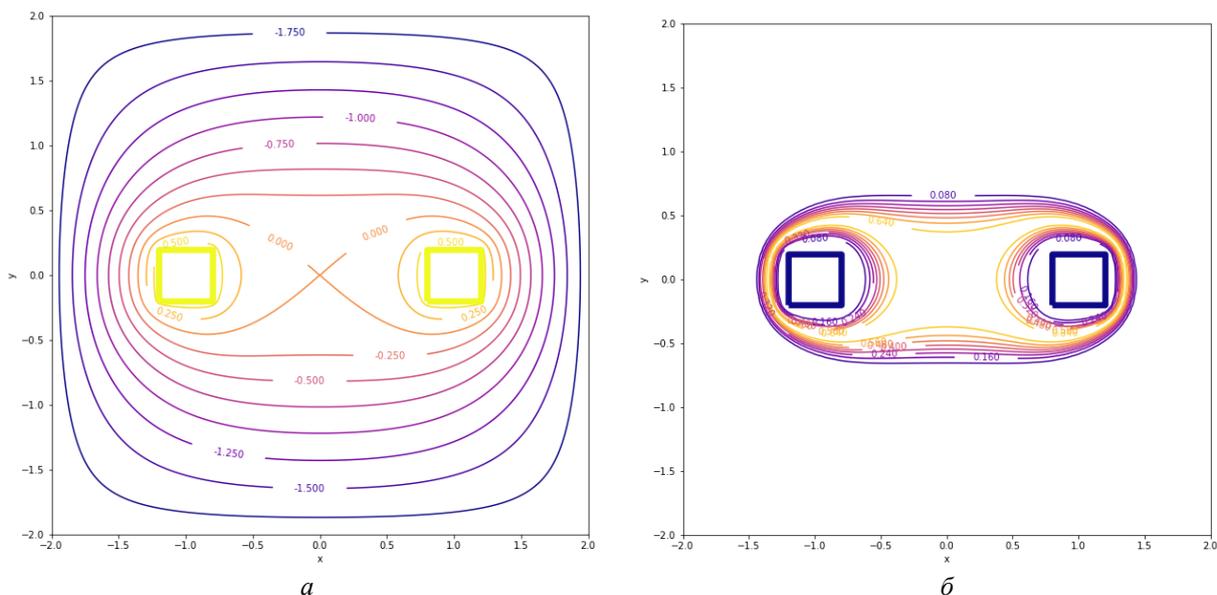


Рис. 2. Распределение магнитного поля (а) и давления (б) в ловушке «Галатее-Пояс» в «неодносвязной» модели при  $p_0 = 0.7, r_c = 0.2, q = 0.2$

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ  
В НЕОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКИ

Сечение цилиндра за вычетом проводников представляет собой неодносвязную область, в которой ставится и решается задача с уравнением Грэда–Шафранова

$$\Delta\psi + \frac{dp}{d\psi} = 0, \quad (2.1)$$

без  $j^{ex}(x, y)$  и продольного поля  $I \equiv H_z \equiv 0$  с барометрической функцией  $p(\psi)$  (1.7) и условием (1.8), располагающим максимум давления в центре и на проходящей через него сепаратрисе магнитного поля.

Граничное условие на внешней границе остается по-прежнему  $\psi = \psi_\Gamma = 0$ . Новым элементом модели становится граничное условие на границах проводников, содержащее информацию о величине протекающих по ним электрических токов и отражающее непрерывность магнитного поля. Его физический смысл легко понять, если приравнять интеграл плотности тока по сечению каждого проводника величине заданного в нем тока и воспользоваться формулой Стокса. В размерных единицах CGS это означает

$$\begin{aligned} \iint j \, dx \, dy &= \frac{c}{4\pi} \iint \text{rot } \mathbf{H} \, dx \, dy = \\ &= \frac{c}{4\pi} \oint H_s \, ds = -\frac{c}{4\pi} \oint \frac{\partial\psi}{\partial n} \, ds = J, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где двойной интеграл берется по площади сечения проводника, а контурный – по его границе. Единицами измерения выбраны заданные постановкой задачи величины:  $x_u = x_1 = |x_2|$  – расстояние от центра до осей проводников,  $H_u = 2J/cx_u$  – напряженность магнитного поля созданного током  $J$  на расстоянии  $x_u$  от него,  $p_u = H_u^2/4\pi$  – характерное «магнитное давление»,  $\psi_u = H_u x_u$ . В безразмерных величинах, отнесенных к указанным единицам, условие (2.2) превращается в

$$-\oint \frac{\partial\psi}{\partial n} \, ds = 2\pi, \quad (2.3)$$

т.е. содержит интеграл нормальной производной искомой функции  $\psi$  по границе каждого проводника. К нему нужно добавить требование:

$$H_n = 0, \text{ т. е. } \psi = \text{const}, \quad (2.4)$$

на границе проводника. Величина этой константы определена значением  $\psi = \psi_\Gamma$  на внешней границе и условием (2.3).

Интегральный характер условия (2.3) вносит определенную сложность в процесс численного

решения краевой задачи с уравнением (2.1) методом установления. Она решается с помощью явной разностной схемы, которая требует мелких шагов по времени  $\Delta t \sim (\Delta x)^2$  [12], что вполне доступно высокой производительности современной вычислительной техники.

Требование (1.8) расположения максимума давления в центре удовлетворяется, как и раньше, в процессе установления: в качестве  $\psi_0^{n+1}$  на каждом следующем шаге по времени берется значение  $\psi^n(0, 0)$  с предыдущего шага.

Наконец, следует обратить внимание на термин «неодносвязность» в тексте статьи и ее заглавии. Строго говоря, он относится к фактической области рассматриваемой ловушки и должен иметь смысл, например, в задачах об устойчивости плазменных конфигураций, где могут представлять интерес возмущения, отличные от нуля в центре области, т.е. на оси цилиндра. В плазмостатической двумерной модели равновесия в «Поясе» конфигурация симметрична относительно осей  $x$  и  $y$ , и ее достаточно рассматривать только в одном, например в первом квадранте с дополнительным граничным условием симметрии:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0 \\ \text{и } H_y &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

В этом случае квадрант односвязен, но со сложной нижней границей, «обтекающей» половину проводника, с условием

$$-\oint \frac{\partial\psi}{\partial n} \, ds = \pi. \quad (2.6)$$

вместо (2.3).

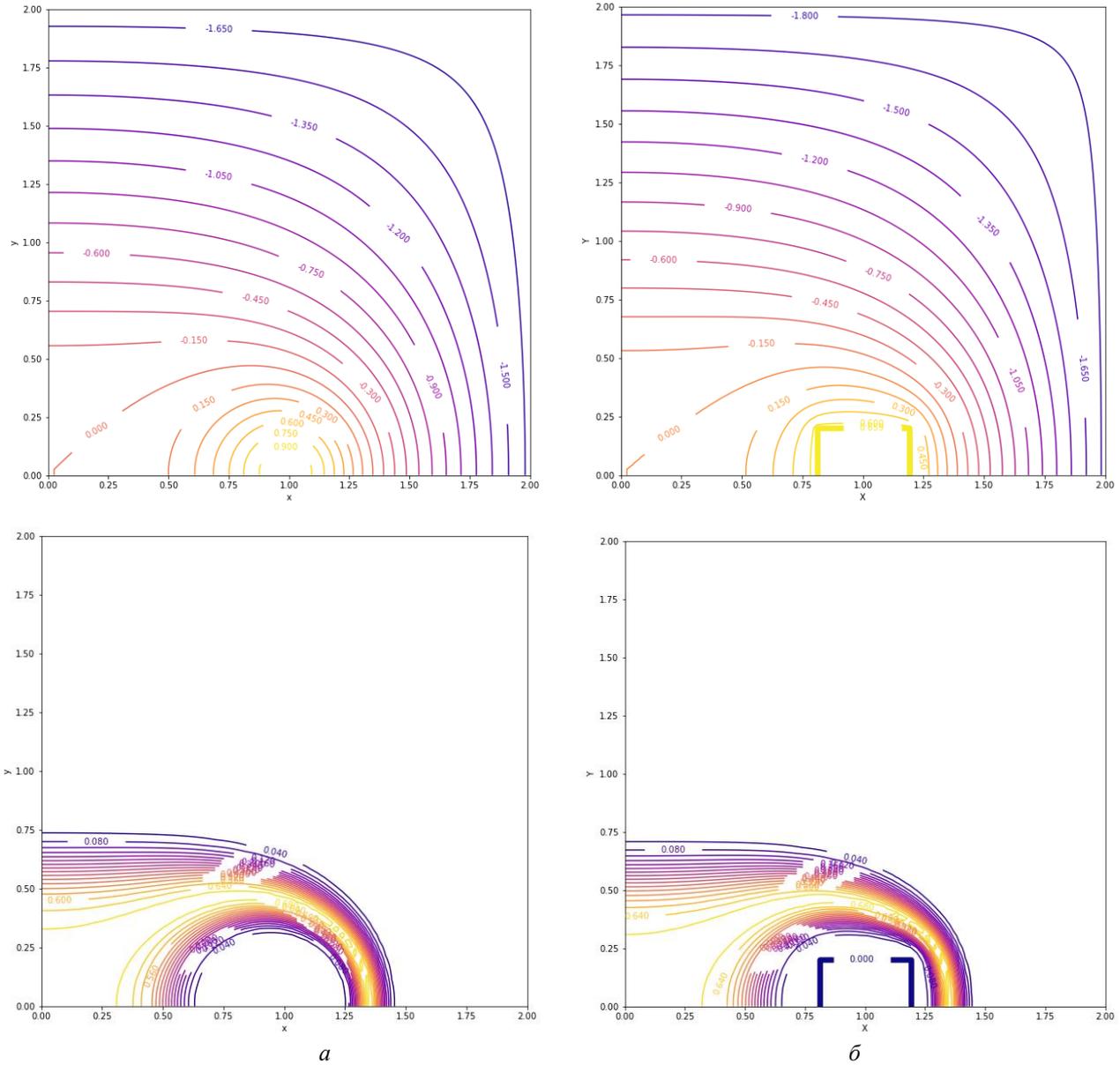
## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В расчетах, проведенных в изложенной в п. 2 математической модели, получены результаты серии вариантов равновесных конфигураций в «Поясе» при различных значениях безразмерных параметров задачи. Они представлены распределением магнитного поля – силовыми линиями  $\psi - \psi_0 = \text{const}$  и давления – изобарами  $p = \text{const}$ . На рис. 3 они сопоставлены с результатами расчетов предыдущей «односвязной» модели при типичных значениях  $p_0 = 0.7, r_c = 0.2, q = 0.2$ .

Здесь видно, что конфигурации практически совпадают в целом а различия заметны только

вблизи проводников, контуры которых видны на рис. 3,б и заменены круговыми линиями, обозначенными  $j^{ex}(x, y)$  на рис. 3,а. Из качественных характеристик можно заметить слабое изменение магнитного потока между сепаратрисой  $\psi - \psi_0 = 0$  и внешней границей: он увеличился

по сравнению с предыдущей моделью с  $\psi - \psi_0 = -1.74$  до  $\psi - \psi_0 = -1.83$ , т.е. в пределах 5%. Заметно изменилось время (безразмерное) установления стационарного решения задачи: от  $T \sim 6$  в старой модели до  $T \sim 3$  в новой.



**Рис. 3.** Распределение магнитного поля (сверху) и давления (снизу) в «односвязной» (а) и «неодносвязной» (б) моделях в ловушке «Галатей-Пояс» при  $p_0 = 0.7, r_c = 0.2, q = 0.2$

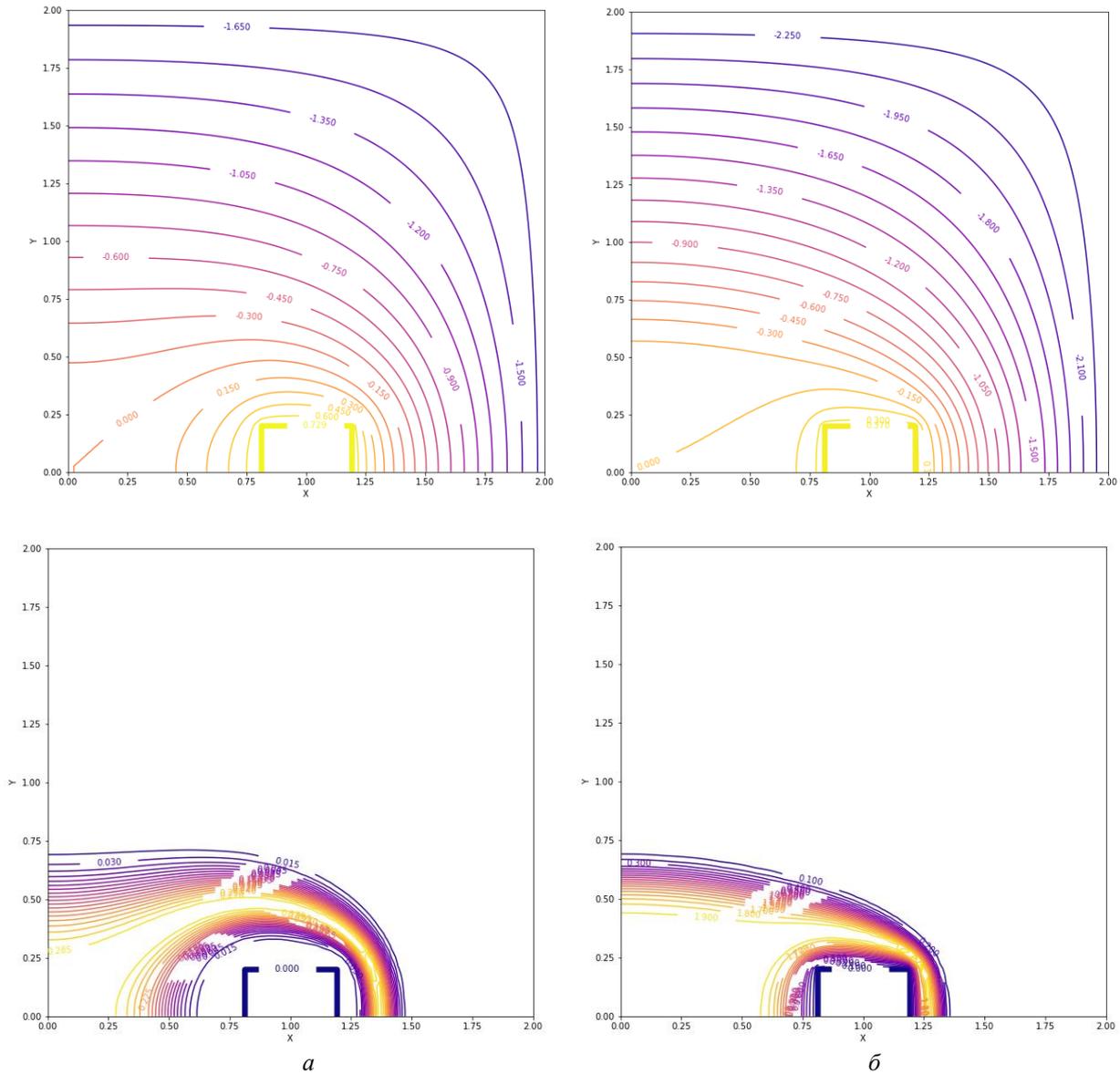
В предыдущих работах существенную роль играет ограничение максимального давления  $p_0$ , измеренного в магнитных единицах (1.12), за пределами которого интересующее нас равновесие конфигурации теряет смысл. В рассматриваемой модели с реально присутствующими в ловушке проводниками, оно также должно существовать, если сохранить требование условной

изоляции плазмы от них. А именно, нужно потребовать, например, чтобы линия  $\psi = \text{const}$ , на которой  $p = \varepsilon_1 \ll 1$ , проходила на расстоянии  $\Delta r = \varepsilon_2 > 0$  от середины сторон квадратного проводника или через вершины этого квадрата. В расчетах вариантов с параметрами  $r_c = 0.2, q = 0.2$  оказалось естественным значение

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В НЕОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКИ

$p_0^{cr} \approx 4$ , что практически не отличается от опубликованного в [27] значения  $p_0 \approx 5$  (которое названо  $p_0^{diff}$ ) в «односвязной» модели, т.е. значение  $p_0 = 0.7$  на рис. 3 находится в допустимых пределах (1.12).

Далее в расчетах прослежена зависимость результатов от параметров. На рис. 4 представлена зависимость конфигурации от параметра  $p_0$  – при фиксированных значениях  $r_c$  и  $q$ .



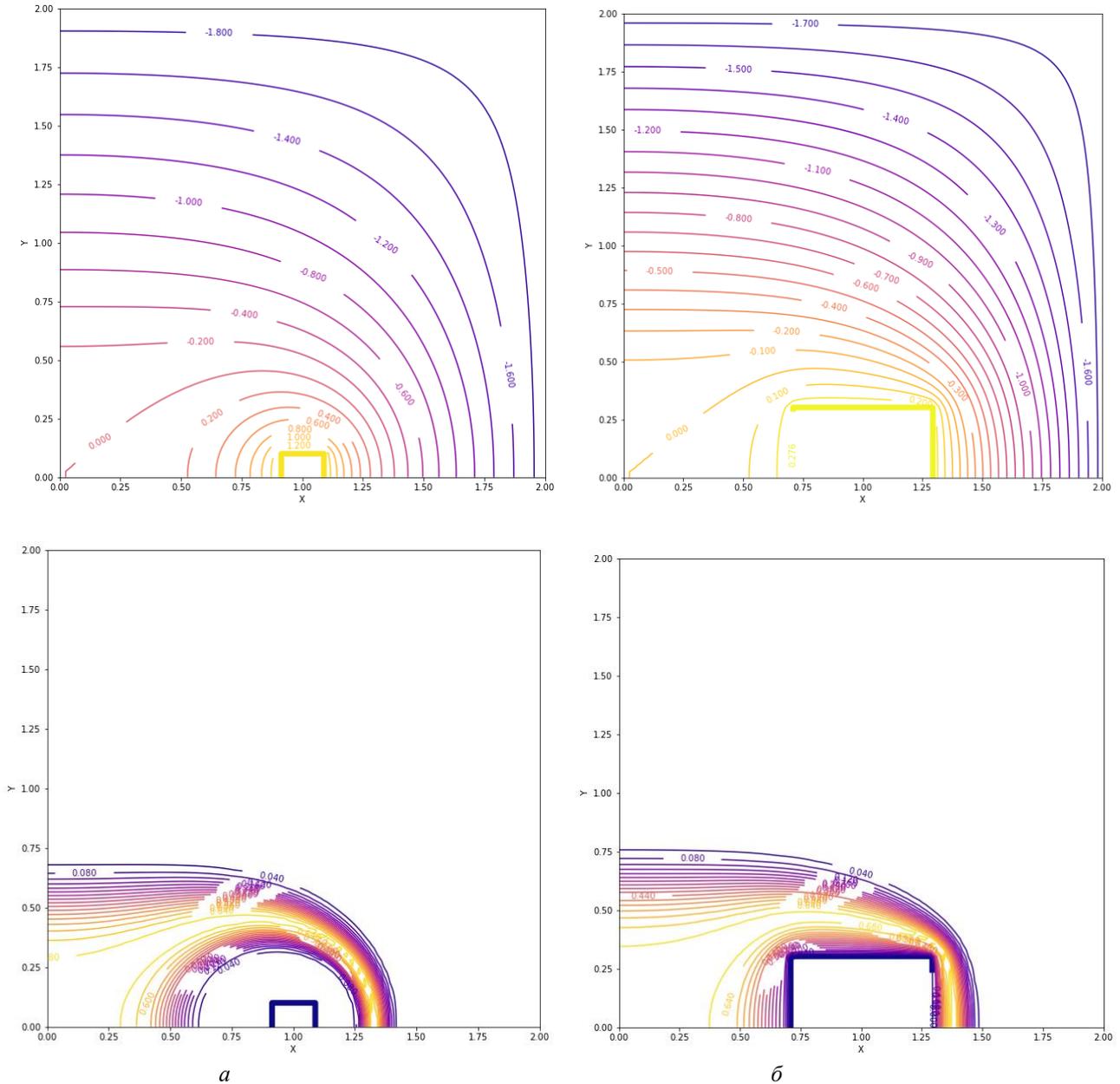
**Рис. 4.** Распределение магнитного поля (сверху) и давления (снизу) при  $p_0 = 0.3$  (а) и  $p_0 = 2.0$  (б).  
В обоих вариантах  $r_c = 0.2, q = 0.2$

Сравнивая их с рис. 3,б можно увидеть, что при уменьшении  $p_0$  конфигурация более сосредоточена в центре области, т.е. более удалена от проводников, а при возрастании  $p_0$  – стремится расшириться и приближается к проводникам. Любопытства ради проведены расчеты и со значениями  $p_0 > p_0^{cr}$ , которые показали, что с неограниченным ростом  $p_0$  конфигурация стре-

мится занять всю область вне проводников и почти соприкасается с проводниками и внешней границей. Из аналогичных расчетов в предыдущей «односвязной» модели следует, что плазма полностью закрывает территорию проводников, т.е. слагаемое  $j^{ex}(x, y)$  в уравнении (1.10) подавлено двумя остальными. При  $p_0 \rightarrow \infty$  плазма

почти равномерно заполняет все сечение проводника, и ее давление резко падает до нуля у внешней границы.

Рис. 5 в дополнение к рис. 3,б представляет зависимость плазменной конфигурации от параметра  $r_c$  – отношения поперечных размеров проводников и всего сечения ловушки при фиксированных «базовых» значениях  $p_0 = 0.7, q = 0.2$ .



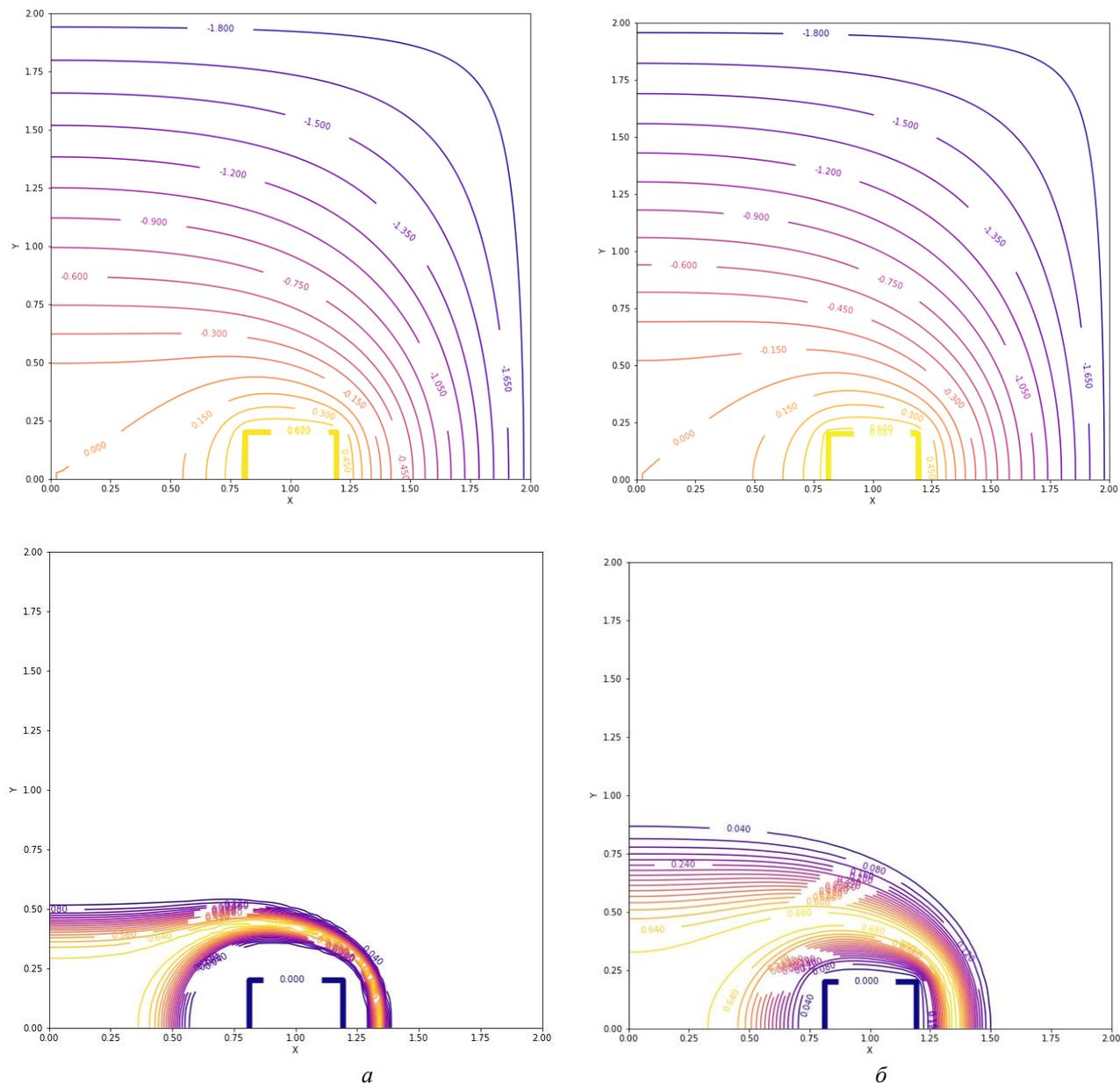
**Рис. 5.** Распределение магнитного поля (сверху) и давления (снизу) при  $r_c = 0.1$  (а) и  $r_c = 0.3$  (б).  
В обоих вариантах  $p_0 = 0.7, q = 0.2$

Здесь видно, что при более тонких проводниках ( $r_c = 0.1$  по сравнению с  $r_c = 0.2$ ) основная часть конфигурации  $0.64 < p < 0.7$  выглядит более компактно, что вместе с освободившимся от проводников пространством способствует более эффективной ее изоляции от них. При более

толстых ( $r_c = 0.3$ ) – имеет место противоположный результат: основная ее часть увеличивается в размерах, а проводники занимают больше места в пространстве ловушки.

Рис. 6 и 3,б иллюстрируют аналогичную зависимость конфигураций от параметра  $q$  в формуле (1.7).

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В НЕОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКИ



**Рис. 6.** Распределение магнитного поля (сверху) и давления (снизу) при  $q = 0.1$  (а) и  $q = 0.3$  (б).  
В обоих вариантах  $p_0 = 0.7, r_c = 0.2$

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При возрастании  $q$  центральная часть конфигурации (криволинейный четырехугольник) почти не меняется, а за ее границей давление падает более плавно, что соответствует формуле (1.7) и, в частности, приближает плазменную периферию к проводникам, т.е. снижает эффективность изоляции проводников.

Перечисленные результаты геометрии равновесной конфигурации и ее зависимости от внешних условий выражены количественно в уточненной здесь математической модели. Они уточняют результаты, полученные ранее в «односвязной» модели, опубликованные в работе [29].

Статья представляет исследования равновесных конфигураций плазмы, удерживаемых магнитным полем в ловушках-галатеех на примере распрямленной в цилиндр тороидальной ловушки «Пояс» с погруженными в плазменный объем двумя прямыми проводниками. Математические модели двумерны вследствие плоской симметрии ловушек и основаны на численном решении краевых задач с уравнением Грэда–Шафранова. Дан краткий обзор используемой в предыдущих вариантах модели, в которой проводники с током участвуют с помощью дополнительных слагаемых в уравнении с целью иметь

дело с задачами в односвязной области сечения цилиндра. Основная цель работы и ее результат – отказаться от этого упрощения и ввести сечения проводников в ставшую от этого неодносвязной область решения задачи. Уточненная таким образом модель изложена в тексте и реализована в серии расчетов с различными значениями участвующих в задаче безразмерных параметров. Основным результатом состоит в том, что конфигурации в обеих моделях заметно отличаются друг от друга только в непосредственной окрестности проводников. Уточнены количественные характеристики исследуемых конфигураций.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дьяченко В.Ф., Имшенник В.С. Двумерная МГД-модель плазменного фокуса Z-пинча // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М: Атомиздат, 1974. Вып. 8. С. 164–246.
2. Брагинский С.И., Гельфанд И.М., Федоренко Р.П. Теория сжатия и пульсаций плазменного столба в мощном импульсном разряде // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций / Под ред. М.А. Леонтовича. М: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 4. С. 201–221.
3. Безбатченко А.Л., Головин И.Н., Козлов П.Н., Стрелков В.С., Явлинский Н.А. Безэлектродный разряд с большой силой тока в тороидальной камере с продольным магнитным полем // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций // Под ред. М.А. Леонтовича. М: Изд. АН СССР. 1958. Т. 4. С. 116–133.
4. Арцимович Л.А. Управляемые термоядерные реакции. М.: Гос. Изд-во «Физ.-мат. Литература», 1961. 468 с.
5. Морозов А.И. О галатях – плазменных ловушках с омываемыми плазмой проводниками // Физика плазмы, 1992. Т. 18. Вып. 3. С. 305–316.
6. Морозов А.И., Савельев В.В. О галатях-ловушках с погруженными в плазму проводниками // Успехи физических наук, 1998. Т. 168. № 11. С. 1153–1194.
7. Морозов А.И., Франк А.Г. Тороидальная магнитная ловушка-галатея с азимутальным током // Физика плазмы, 1994. Т. 20. № 11. С. 982–989.
8. Брушлинский К.В., Кондратьев И.А. Сравнительный анализ расчетов равновесия плазмы в тороидальных и цилиндрических магнитных ловушках // Математическое моделирование, 2018. Т. 30. № 6. С. 76–94.
9. Сыроватский С.И. Токовые слои и вспышки в космической и лабораторной плазме // Вестник АН СССР. 1977. № 10. С. 33–44.
10. Франк А.Г., Кирий Н.П., Марков В.С. Эксперименты по формированию магнитоплазменных конфигураций «Галатея-Пояс» // Физика плазмы, 2019. Т. 45. № 1. С. 32–36.
11. Брушлинский К.В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. М., БИНОМ, Лаборатория знаний, 2009. 200 с.
12. Брушлинский К.В. Математические основы вычислительной механики жидкости, газа и плазмы. Долгопрудный: Изд. дом «Интеллект», 2017. 272 с.
13. Шафранов В.Д. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1957. Т. 33. Вып. 3 (9). С. 710–722.
14. Grad H., Rubin H. Hydrodynamic equilibria and force-free fields // Proc. 2nd United Nations Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy. Geneva, 1958. V. 31. P. 190–197.
15. Дудникова Г.И., Морозов А.И., Федорук М.П. Численное моделирование прямых плазменных конфигураций галатей типа «Пояс» // Физика плазмы, 1997. Т. 23. № 5. С. 387–396.
16. Дудникова Г.И., Федорук М.П., Яковлев В.С. Численное моделирование магнитоплазменных конфигураций «Галатея-Пояс» // Вычислительные технологии, 2000. Т. 5. № 2. С. 26–34.
17. Шафранов В.Д. Равновесие плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы Т. 2/ Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2. С. 92–131.
18. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М: Наука. 1978. 685 с.
19. Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980. 478 с.
20. Peaceman D.W., Rachford H.N. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations // J. Soc. Industr. Appl. Math. ,1955. V. 3. № 1. P. 28–42.
21. Douglas J. On the numerical integration of  $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = \partial u / \partial t$  by implicit method // J. Soc. Industr. Appl. Math. ,1955. V. 3. № 1. P. 42–65.
22. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука. 1967. 197 с.
23. Брушлинский К.В., Зуева Н.М., Михайлова М.С., Морозов А.И., Пустовитов В.Д., Тузова Н.Б. Численное моделирование прямых винтовых шнуров с проводниками, погруженными в плазму // Физика плазмы. 1994. Т. 20. № 3. С. 284–292.
24. Брушлинский К.В., Морозов А.И., Петровская Н.Б. Численное моделирование винтовой равновесной конфигурации с плазмой на сепаратрисе // Математическое моделирование, 1998. Т. 10. № 11. С. 29–36.
25. Брушлинский К.В., Гольдич А.С., Десятова А.С. Плазмостатические модели магнитных ловушек-галатей // Математическое моделирование, 2012. Т. 24. № 8. С. 81–86.
26. Брушлинский К.В., Игнатов П.А. Плазмостатическая модель магнитной ловушки «Галатея-Пояс» // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2010. Т. 50. № 12. С. 2184–2194.
27. Брушлинский К.В., Степин Е.В. Вопросы устойчивости в двумерных математических моделях

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ  
В НЕОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКИ

равновесия плазмы в магнитных ловушках-галатеях // Дифференциальные уравнения, 2021. Т. 57. № 7. С. 867–879.

28. *Brushlinskii K.V., Kryuchenkov V.B., Stepin E.V.* Математическая модель равновесных конфигураций плазмы в магнитных ловушках и исследование их устойчивости // Труды матем. института им. В.А. Стеклова, 2023. Т. 322. С. 58–70.

29. *Brushlinskii K.V., Stepin E.V.* On equilibrium magnetoplasma configurations in «Galatea-Belt» magnetic traps / J. Phys.: Conf. Ser. 2021. V. 2028. P. 012026.

30. *Brushlinskii K.V., Stepin E.V.* Mathematical model and numerical simulation of equilibrium plasma configurations in «Threeleaf» magnetic traps // Lobachevskii journal of mathematics, 2023. V. 14. No. 1. P. 20–25.

---

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 5, pp. 316–328

---

**MATHEMATICAL MODEL OF PLASMA EQUILIBRIUM IN THE  
MULTIPLY CONNECTED DOMAIN OF A MAGNETIC TRAP**

*K.V. Brushlinskii<sup>1,2</sup>, M.T. Istomina<sup>2</sup>, V.V. Kriuchenkov<sup>2</sup>, E.V. Stepin<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*M.V. Keldysh institute of applied mathematics, RAS, Moscow, 125047, Russia*

<sup>2</sup>*National research nuclear university «MEPhI», Moscow, 115409, Russia*

\**e-mail: brush@keldysh.ru*

\*\**e-mail: Mtistomina@mephi.ru*

\*\*\**e-mail: kriuchenkov.viacheslav@mail.ru*

\*\*\*\**e-mail: eugene.v.stepin@gmail.com*

Received August 02, 2024; revised August 02, 2024; accepted August 20, 2024

The article clarifies the numerical model and the results of calculations of equilibrium plasma configurations in the magnetic trap «Belt» from the class of Galatea traps proposed by A.I. Morozov. The confining magnetic field is created by current-carrying conductors immersed in the plasma but not in contact with it. In a series of previous works, the geometry and basic regularities of configurations in the toroidal trap «Belt» straightened into a cylinder with two conductors parallel to its axis were researched. The two-dimensional plasmostatic model of the configuration is based on the numerical solution of the boundary value problem with the known Grad-Shafranov equation for the magnetic flux function in the cross-section of the cylinder. It contained an essential simplifying assumption, that makes it possible to deal with a single-connected domain of the problem solution: conductors were not excluded from the domain, and currents in them were represented by additional summands in equation. In the proposed work this simplification is absent, and the problem is posed in a multiply connected domain of out of conductors of square cross section. The role of the electric current in the formation and maintenance of the equilibrium magnetoplasma configuration is played by a boundary condition containing the circulation of the magnetic field along the boundary of each conductor. In a series of calculations with different values of dimensionless parameters of the problem in the multiply connected domain, it was found that the main properties of the configuration and the regularities of their dependence on the parameters qualitatively coincide with those obtained earlier in the single-connected domain. This indicates the legitimacy of the previous version of the model and at the same time clarifies its result. The dependence of the geometry and quantitative characteristics of configurations on the dimensionless parameters of the problem has been clarified.

*Keywords:* plasma confinement, magnetic traps, Galateas, equilibrium configurations, non-simply connected region.

REFERENCES

1. *D'yachenko V.F., Imshennik V.S.* Dvumernaya MGD-model' plazmennogo fokusa Z-pincha [Two-dimensional MHD model of the Z-pinch plasma focus]. Voprosy teorii plazmy/ Pod red. M.A. Leontovicha. Moscow, Atomizdat Publ., 1974. Iss. 8. Pp. 164–246 (in Russian).

2. *Braginskij S.I., Gel'fand I.M., Fedorenko R.P.* Teoriya szhatiya i pul'sacij plazmennogo stolba v moshchnom impul'snom razryade [Theory of compression and pulsations of a plasma column in a powerful pulsed discharge]. Fizika plazmy i problema upravlyаемых termoyadernyh reakcij / Pod red. M. A. Leontovicha. Moscow, Izd. AN SSSR Publ., 1958. Vol. 4. Pp. 201–221 (in Russian).

3. *Bezbatchenko A.L., Golovin I.N., Kozlov P.N., Strelkov V.S., YAvlinskij N.A.* Bezelektroodnyj razryad s bol'shoj siloj toka v toroidal'noj kamere s prodol'nym magnitnym polem [Electrodeless discharge with high current intensity in a toroidal chamber with a longitudinal magnetic field]. *Fizika plazmy i problema upravlyaemyh termoyadernyh reakcij* Pod red. M. A. Leontovicha. Moscow, Izd. AN SSSR Publ. Vol. 4. Pp. 116–133 (in Russian).
4. *Arcimovich L.A.* Upravlyaemye termoyadernye reakcii [Controlled thermonuclear reactions] Moscow, Gos. Izd. fiz.-mat. Literature Publ., 1961. 468 p
5. *Morozov A.I.* Galathea's – plasma confinement systems in which the conductors are immersed in the plasma. *Sov. J. Plasma Phys.*, 1992. Vol. 18 (3). Pp. 159–165.
6. *Morozov A.I. and Savel'ev V.V.* On Galathea – magnetic traps with plasma-embedded conductors. *Phys. Usp.*, 1998. Vol. 41 (11). Pp. 1049–1089.
7. *Morozov A.I. and Frank A.G.* Galathea toroidal multipole trap with azimuthal current. *Plasma Phys. Rep.*, 1994. Vol. 20 (11). Pp. 879–886.
8. *Brushlinskii K.V. and Kondratyev I.A.* Comparative analysis of plasma equilibrium computations in toroidal and cylindrical magnetic traps. *Math. Models Comput. Simul.*, 2019. Vol. 11 (1). Pp. 121–132.
9. *Syrovatskij S.I.* Tokovyie sloi i vspyshki v kosmicheskoy i laboratornoj plazme [Current layers and flares in space and laboratory plasma]. *Vestnik AN SSSR*. 1977. No. 10. Pp. 33–44 (in Russian).
10. *Frank A.G., Kyrie N.P., Markov V.S.* Experiments of the Formation of Galathea-Belt Magnetoplasma Configurations. *Plasma Physics Reports*, 2019. Vol. 45 (1). Pp. 25–32.
11. *Brushlinskij K.V.* Matematicheskie i vychislitel'nye zadachi magnitnoj gazodinamiki [Mathematical and computational problems of magnetic gas dynamics]. Moscow, BINOM, Laboratoriya znaniy Publ., 2009. 200 p.
12. *Brushlinskij K.V.* Matematicheskie osnovy vychislitel'noj mekhaniki zhidkosti, gaza i plazmy [Mathematical foundations of computational mechanics of liquid, gas and plasma]. *Dolgoprudny, Izd. dom «Intellect» Publ.*, 2017.
13. *Shafranov V.D.* On magnetohydrodynamical equilibrium configurations. *Sov. Phys. JEPT*, 1958. Vol. 6 (3). Pp. 545–554.
14. *Grad H., Rubin H.* Hydrodynamic equilibria and force-free fields. *Proc. 2nd United Nations Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy*. Geneva, 1958. Vol. 31. Pp. 190–197.
15. *Dudnikova G.I., Morozov A.I., Fedoruk M.P.* Chislennoe modelirovanie pryamyh plazmennyh konfiguracij galatej tipa «Poyas» [Numerical modeling of direct plasma configurations of «Belt» type Galathea]. *Fizika plazmy*, 1997. Vol. 23. No. 5. Pp. 387–396 (in Russian).
16. *Dudnikova G.I., Fedoruk M.P., YAKovlev V.S.* Chislennoe modelirovanie magnitoplazmennyh konfiguracij Galathea-Poyas [Numerical modeling of Galathea-Belt magnetoplasma configurations]. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2000. Vol. 5. No. 2. Pp. 26–34 (in Russian).
17. *Shafranov V.D.* Ravnovesie plazmy v magnitnom pole [Plasma equilibrium in a magnetic field]. *Voprosy teorii plazmy* vol. 2/ Pod red. M.A. Leontovicha. Moscow, Gosatomizdat Publ., 1963. Iss. 2. Pp. 92–131 (in Russian).
18. *Rozhdestvenskij B.L., Yanenko N.N.* Sistemy kvazilinejnyh uravnenij i ih prilozheniya k gazovoj dinamike [Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 685 p.
19. *Zel'dovich Ya.B., Barenblatt G.I., Librovich V.B. and Makhviladze G.M.* The Mathematical Theory of Combustion and Explosions. New York, Consultants Bureau, 1985.
20. *Peaceman D.W., Rachford H.H.* The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. *J. Soc. Industr. Appl. Math.*, 1955. Vol. 3. No. 1. Pp. 28–42.
21. *Douglas J.* On the numerical integration of  $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = \partial u / \partial t$  by implicit method. *J. Soc. Industr. Appl. Math.*, 1955. Vol. 3. No. 1. Pp. 42–65.
22. *Yanenko N.N.* Metod drobnnyh shagov resheniya mnogomernyh zadach matematicheskoy fiziki [Method of fractional steps for solving multidimensional problems of mathematical physics]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1967. 197 p.
23. *Brushlinskii K.V., Zueva N.M., Mikhailo-va M.S., Morozov A.I., Pustovitov V.D. and Tuzova N.B.* Numerical simulation of straight helical sheaths with conductors immersed in plasma. *Plasma Phys. Rep.*, 1994. Vol. 20 (3). Pp. 257–264 (1994).
24. *Brushlinskij K.V., Morozov A.I., Petrovskaya N.B.* Chislennoe modelirovanie vintovoj ravnovesnoj konfiguracii s plazmoy na separatrise [Numerical modeling of a helical equilibrium configuration with plasma on a separatrix]. *Matematicheskoe modelirovanie*, 1998. Vol. 10. No. 11. Pp. 29–36 (in Russian).
25. *Brushlinskii K.V., Gol'dich A.S. and Desyatova A.S.* Plasmostatic models of magnetic galathea-traps. *Math. Models Comput. Simul.*, 2013. Vol. 5 (2). Pp. 156–166.
26. *Brushlinskii K.V. and Ignatov P.A.* A plasmostatic model of the galathea-belt magnetic trap. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2010. Vol. 50 (12). Pp. 2071–2081.
27. *Brushlinskii K.V. and Stepin E.V.* Stability issues in two-dimensional mathematical models of plasma equilibrium in magnetic galathea traps. *Diff. Eqns.*, 2021. Vol. 57 (7). Pp. 835–847.
28. *Brushlinskii K.V., Kryuchenkov V.V. and Stepin E.V.* Mathematical Model of Equilibrium Plasma Configurations in Magnetic Traps and Their Stability Analysis. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2023. Vol. 322. Pp. 52–64.
29. *Brushlinskii K.V., Stepin E.V.* On equilibrium magnetoplasma configurations in «Galathea-Belt» magnetic traps. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, Vol. 2028. Pp. 012026.
30. *Brushlinskii K.V., Stepin E.V.* Mathematical model and numerical simulation of equilibrium plasma configurations in «Threeleaf» magnetic traps. *Lobachevskii journal of mathematics*, 2023. Vol. 14. No. 1. Pp. 20–25.

УДК 517.95

## ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ПРИ УСЛОВИИ ФИНАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ

<sup>1</sup>В.Л. Камынин

<sup>1</sup>Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия  
e-mail: [vlkamyinin2008@yandex.ru](mailto:vlkamyinin2008@yandex.ru)

Поступила в редакцию: 18.09.2024

После доработки: 18.09.2024

Принята к публикации: 24.09.2024

В работе рассматривается нелинейная обратная задача определения, зависящего от  $x$  младшего коэффициента в равномерно параболическом уравнении со многими пространственными переменными. Коэффициенты уравнения могут зависеть как от временной, так и от пространственных переменных и предполагаются ограниченными, но, вообще говоря, разрывными. При этом (в отличие от работ других авторов) нет ограничений на знаки младших коэффициентов уравнения и его правой части. В качестве дополнительного условия задается условие финального (в конечный момент времени) наблюдения. Решение обратной задачи понимается в обобщенном смысле и ищется в классах Соболева. Установлены два типа достаточных условий, при которых обобщенное решение обратной задачи существует и единственно. Приведен пример обратной задачи, для которой справедливы доказанные в работе результаты. Отмечено, что решение указанной задачи существует и единственно либо если отрезок времени, на котором рассматривается задача, достаточно велик (а область пространственных переменных фиксирована), либо если область пространственных переменных достаточно мала (а отрезок времени фиксирован).

*Ключевые слова:* обратные задачи определения младшего коэффициента, параболические уравнения, финальное наблюдение.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.5.5

EDN NGQCYO

### ВВЕДЕНИЕ

В работе изучаются вопросы существования и единственности решения обратной задачи определения неизвестного коэффициента  $\gamma(x)$  в параболическом уравнении

$$\begin{aligned} \rho(t, x)u_t - \Delta u + \langle \vec{b}(x), u_x \rangle + c(t, x)u + \gamma(x)u &= \\ &= f(t, x)u, \quad (t, x) \in Q, \end{aligned} \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$u(t, x)|_{\Gamma} = \Psi(t, x)|_{\Gamma} \quad (2)$$

и дополнительным условием финального наблюдения

$$u(T, x) = \varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (3)$$

Здесь  $Q = [0, T] \times \bar{\Omega}$ , где  $\Omega$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$  с гладкой границей  $\partial\Omega$ ,  $\Gamma$  – «параболическая» граница области  $Q$ , т.е.  $\Gamma = \{0\} \times \bar{\Omega} \cup [0, T] \times \partial\Omega$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\vec{b}(x) =$

$$\begin{aligned} &= (b_1(x), \dots, b_n(x)), \quad u_x = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}), \quad \langle \vec{b}(x), u_x \rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}; \quad \vec{b}(x) - \text{известная вектор-функция}; \quad \rho(t, x), c(t, x), f(t, x), \Psi(t, x), \varphi(x) - \text{известные функции.} \end{aligned}$$

Обратная задача (1)–(3) ранее рассматривалась рядом авторов: см., например, [1], [2], где рассматривались классические решения в классах Гельдера, [3], где изучалась единственность решения, [4]–[7], где были доказаны теоремы существования и единственности обобщенных решений задачи вида (1)–(3), но при этом предполагались ограничения на знаки функций  $f(t, x)$ ,  $f_i(t, x)$ , а кроме того, в [4]–[6] рассматривались уравнения с независимыми от  $t$  коэффициентами.

В настоящей работе мы доказываем теоремы существования и единственности обобщенного решения обратной задачи (1)–(3) в классах Соболева без предположений о знаках коэффициентов уравнения (1) и функции  $\Psi(t, x)$ .

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ  
В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ПРИ УСЛОВИИ ФИНАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ

Отметим еще работу [8], где в близкой постановке изучалась однозначная разрешимость обратной задачи определения неизвестной правой части уравнения (1) при дополнительном условии (3).

Перейдем к точным формулировкам.

Все равенства и неравенства в работе предполагаются выполненными почти всюду, все рассматриваемые функции предполагаются, как минимум, измеримыми, производные понимаются в обобщенном смысле по Соболеву. Используемые в работе пространства Лебега, Соболева и Гельдера с соответствующими нормами будем понимать в общепринятом смысле (см, например, [9]). В частности, через  $W_s^{1,2}(Q)$  обозначим пространство Соболева функций, принадлежащих  $L_s(Q)$  и имеющих первую производную по переменной  $t$ , а также все первые и вторые производные по переменным  $x$ , также принадлежащие  $L_s(Q)$ .

Положим

$$Q(t_1, t_2) = [t_1, t_2] \times \bar{\Omega}, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T, \quad Q(0, T) \equiv Q,$$

$$|\vec{b}(x)| = \left( \sum_{i=1}^n b_i^2(x) \right)^{1/2}, \quad |u_x| = \left( \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right)^{1/2},$$

$$|u_{xx}| = \left( \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}^2 \right)^{1/2},$$

$$L_\infty^+(\Omega) = \{z(x) \in L_\infty(\Omega) : z(x) \geq 0\},$$

$$B_R^+ = \{z(x) \in L_\infty(\Omega) : 0 \leq z(x) \leq R\}.$$

Нам понадобится арифметическое неравенство Коши

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \quad \varepsilon > 0, \quad (4)$$

а также неравенство Пуанкаре–Стеклова

$$\|z\|_{L_2(\Omega)} \leq \varkappa(n, \Omega) \|z_x\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall z \in \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega). \quad (5)$$

Отметим, что для  $\varkappa(n, \Omega)$  справедлива оценка (см., например, [10, с. 161])

$$\varkappa(n, \Omega) \leq \left( \frac{1}{\omega_n} |\Omega| \right)^{1/n}, \quad (6)$$

где  $|\Omega|$  – объем области  $\Omega$ , а  $\omega_n$  – объем единичного шара в  $\mathbb{R}^n$ .

Во всех дальнейших рассуждениях будем предполагать выполненными следующие условия:

$$0 < \rho_1 \leq \rho(t, x) \leq \rho_2, \quad \rho_3 \leq \rho(0, x) \leq \rho_4,$$

$$\rho_5 \leq \rho(T, x) \leq \rho_6,$$

$$-K_{\rho,1} \leq \rho_t(t, x) \leq K_{\rho,2}, \quad (t, x) \in Q; \quad (A)$$

$$|\vec{b}(x)| \leq K_b, \quad \text{и для некоторого } i = 1, 2, \dots, n$$

$$b_i(x) \leq b^*, \quad x \in \bar{\Omega}; \quad (B)$$

$$-K_{c,1} \leq c(t, x) \leq K_{c,2}, \quad -K_{c,1}^* \leq c_t(t, x) \leq K_{c,2}^*,$$

$$(t, x) \in Q;$$

$$c(T, x) \geq 0, \quad x \in \bar{\Omega}; \quad K_c^* = \max\{K_{c,1}^*, K_{c,2}^*\}; \quad (C)$$

$$|f(t, x)| \leq K_f, \quad f_1 \leq f(T, x) \leq f_2,$$

$$|f(0, x)| \leq f_3, \quad |f_t(t, x)| \leq K_f^*, \quad (t, x) \in Q; \quad (D)$$

$$\Psi(t, x) \in W_\infty^{1,2}(Q), \quad \Psi_t(t, x) \in W_2^{1,2}(Q),$$

$$\Psi(0, x) = 0, \quad x \in \bar{\Omega};$$

$$|\Psi(t, x)| \leq M_1, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \quad (E)$$

$$|\Psi_t(t, x)| \leq M_2, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega;$$

$$\varphi(x) \in W_\infty^2(\Omega), \quad 0 < \varphi_1 \leq \varphi(x) \leq \varphi_2, \quad (F)$$

$$\varphi_1^* \leq \Delta\varphi - \langle \vec{b}(x), \varphi_x \rangle \leq \varphi_2^*, \quad x \in \bar{\Omega};$$

$$\varphi(x) = \Psi(T, x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (G)$$

В условиях (A) – (F)  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6, M_1, \varphi_1, \varphi_2 = \text{const} > 0, K_{\rho,1}, K_{\rho,2}, K_b, b^*, K_{c,1}, K_{c,2}, K_{c,1}^*, K_{c,2}^*, M_2, f_3, K_f, K_f^* = \text{const} \geq 0, f_1, f_2, \varphi_1^*, \varphi_2^*$  – константы произвольного знака.

**Определение 1.** Обобщенным решением обратной задачи (1)–(3) будем называть пару функций  $\{u(t, x), \gamma(x)\}$  таких, что

$$u(t, x) \in W_2^{1,2}(Q) \cap C^{0,\alpha}(Q),$$

$$\alpha = \text{const} > 0, \quad \gamma(x) \in L_\infty^+(\Omega),$$

$$u(t, x) - \Psi(t, x) \in L_\infty(0, T; \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)),$$

$$\int_\Omega |u(t, x) - \Psi(t, x)| dx \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0^+;$$

пара  $\{u(t, x), \gamma(x)\}$  удовлетворяет уравнению (1) п.в. в  $Q$ , а функция  $u(t, x)$  удовлетворяет условию наблюдения (3).

### СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Пусть  $\gamma(x) \in L_\infty^+(\Omega)$  – известная функция. Рассмотрим прямую задачу (1), (2). В силу [11], [12,

гл. 4] она имеет единственное решение:  $u(t, x) \in W_2^{1,2}(Q) \cap C^{0,\alpha}(Q)$ .

Пусть при некотором  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$   $b_i(x) \leq b^*$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $b^* = \text{const} \geq 0$  (см. условие (B)), а  $d$  – размер области  $\Omega$  в направлении оси  $x_i$ , т.е.  $\forall x \in \bar{\Omega}$ ,  $x_i^0 - d \leq x_i \leq x_i^0$ .

Положим

$$\mu = b^* + 1, \quad m_1 = [M_1 + K_f(e^{\mu d} - 1)]e^{K_{c,i}T/\rho_1}. \quad (7)$$

Тогда в силу [12, с. 59–61] для  $u(t, x)$  справедлива оценка

$$|u(t, x)| \leq m_1, \quad (t, x) \in Q. \quad (8)$$

Покажем, что в силу наших предположений (A) – (E) решение  $u(t, x)$  обладает дополнительной гладкостью.

Положим  $v(t, x) = u(t, x) - \Psi(t, x)$ . Тогда  $v(t, x)$  является обобщенным решением задачи:

$$\begin{aligned} \rho(t, x)v_t - \Delta v + \langle \bar{b}(x), v_x \rangle + c(t, x)v + \\ + \gamma(x)v = F(t, x)u, \quad (t, x) \in Q, \end{aligned} \quad (9)$$

$$v(t, x)|_{\Gamma} = 0, \quad (10)$$

где  $F(t, x) \equiv f(t, x) - \Psi_t(t, x)\rho(t, x) + \Delta\Psi(t, x) - \langle \bar{b}(x), \Psi_x(t, x) \rangle - c(t, x)\Psi(t, x) - \gamma(x)\Psi(t, x) \in L_\infty(Q)$ .

Рассмотрим еще две задачи:

$$\begin{aligned} (\rho(t, x), z)_t - \Delta z + \langle \bar{b}(x), z_x \rangle + \\ + c(t, x)z + \gamma(x)z = \\ = f_t(t, x) - c(t, x)u(t, x), \quad (t, x) \in Q, \end{aligned} \quad (11)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} z(t, x) = \Psi_t(t, x), \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \\ z(0, x) = \frac{f(0, x)}{\rho(0, x)}, \quad x \in \Omega \end{aligned} \quad (12)$$

где в уравнении (11)  $u(t, x)$  – решение задачи (1), (2), и задачу

$$\begin{aligned} (\rho(t, x), \omega)_t - \Delta\omega + \langle \bar{b}(x), \omega_x \rangle + \\ + c(t, x)\omega + \gamma(x)\omega = \\ = F_t(t, x) - c_t(t, x)v(t, x), \quad (t, x) \in Q, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\omega(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \quad (14)$$

$$\omega(t, x)|_{t=0} = \omega_0(x) \equiv \frac{F(0, x)}{\rho(0, x)}, \quad x \in \Omega, \quad (15)$$

где в уравнении (13)  $v(t, x)$  – решение задачи (9), (10).

Заметим, что (11), (12) является формально продифференцированной задачей (1), (2), а (13)–(15) является формально продифференцированной задачей (9), (10).

В силу [11] задача (13)–(15) имеет единственное решение  $\omega(t, x)$ , принадлежащее классу

$$\begin{aligned} C(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; W_2^1(Q)) \cap W_2^{1,2}(Q(\varepsilon, T)), \\ \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Продолжим  $\bar{b}(x)$  нулем вне  $\bar{\Omega}$  и введем средние функции  $\bar{b}^h(x)$ . Рассмотрим следующие две задачи:

$$\begin{aligned} \rho(t, x)v_t^h - \Delta v^h + \langle \bar{b}^h(x), v_x^h \rangle + \\ + c(t, x)v^h + \gamma(x)v^h = F(t, x), \quad (t, x) \in Q, \end{aligned} \quad (16)$$

$$v^h(t, x)|_{\Gamma} = 0, \quad (17)$$

и

$$\begin{aligned} (\rho(t, x)\omega^h)_t - \Delta\omega^h + \langle \bar{b}^h(x), \omega_x^h \rangle + \\ + c(t, x)\omega^h + \gamma(x)\omega^h = \\ = F_t(t, x) - c_t(t, x)v^h(t, x), \quad (t, x) \in Q, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\omega^h(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \quad (19)$$

$$\omega^h(t, x)|_{t=0} = \omega_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (20)$$

Задача (16), (17) имеет единственное решение

$$v^h(t, x) \in C(0, T; W_2^1(Q)) \cap W_2^{1,2}(Q),$$

а задача (18)–(20) имеет единственное решение

$$\begin{aligned} \omega^h(t, x) \in C(0, T; L_2(\Omega)) \cap \\ \cap L_2(0, T; W_2^1(Q)) \cap W_2^{1,2}(Q(\varepsilon, T)), \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Введем понятие обобщенного  $L_2$  – решения задачи (18)–(20).

**Определение 2.** Функция  $\omega^h(t, x) \in L_2(Q)$  называется обобщенным  $L_2$ -решением задачи (18)–(20), если

$$\forall \chi(t, x) \in$$

$$L_2(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap W_2^{1,2}(Q), \quad \chi(T, x) = 0,$$

выполняется интегральное тождество

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ  
В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ПРИ УСЛОВИИ ФИНАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} \rho(0, x) \omega_0(x) \chi(0, x) dx - \\
 & - \int_Q \rho(t, x) \omega^h \chi_t(t, x) dx dt - \int_Q \omega^h \Delta \chi(t, x) dx dt - \\
 & - \int_Q \langle \bar{b}^h(x), \chi(t, x) \rangle \omega^h dx dt - \\
 & - \int_Q \operatorname{div} \bar{b}^h(x) \cdot \omega^h \chi(t, x) dx dt + \\
 & + \int_Q (c(t, x) + \gamma(x)) \omega^h \chi(t, x) dx dt = \\
 & = \int_Q (F_t(t, x) - c_t(t, x) v^h(t, x)) \chi(t, x) dx dt.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Повторяя рассуждения из [14, гл. 4, §1], [8], получаем, что такое решение задачи (18)–(20) единственно.

Пусть  $v^h(t, x)$  – решение задачи (16), (17). Покажем, что  $v_t^h(t, x)$  – обобщенное решение задачи (18)–(20).

Рассмотрим произвольную функцию

$$\begin{aligned}
 \chi(t, x) & \in L_2(0, T; W_2^1(Q)) \cap W_2^{1,2}(Q), \\
 \chi(T, x) & = 0,
 \end{aligned}$$

и продолжим ее нулем при  $t > T$ . Положим

$$\chi_{\delta}(t, x) = \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} \chi(\tau, x) d\tau - \text{усреднение по Стеклову}$$

функции  $\chi(t, x)$ . Тогда  $\chi_{\delta} \in L_2(0, T; W_2^1(Q)) \cap W_2^{1,2}(Q)$ . Умножим (16) на  $-\chi_{\delta}$  и проинтегрируем по  $Q$ . После интегрирования по частям приходим к соотношению

$$\begin{aligned}
 & - \int_Q (\rho v_t^h) \chi_{\delta} dx dt - \int_Q v_t^h \Delta \chi_{\delta} dx dt - \\
 & - \int_Q \langle \bar{b}^h, \chi_{\delta_x} \rangle v_t^h dx dt - \int_Q \operatorname{div} \bar{b}^h \cdot v_t^h \chi_{\delta} dx dt + \\
 & + \int_Q (c(t, x) + \gamma(x)) v_t^h \chi_{\delta} dx dt + \int_Q c_t v^h \chi_{\delta} dx dt = \\
 & = \int_{\Omega} F(0, x) \chi_{\delta}(0, x) dx + \int_Q F_t \chi_{\delta} dx dt.
 \end{aligned}$$

В силу известных свойств средних функций в этом равенстве можно перейти к пределу при  $\delta \rightarrow 0$ . В результате получим интегральное тождество (21) для функции  $v_t^h$ , а следовательно, эта функция является обобщенным  $L_2$ -решением

задачи (18)–(20). В силу единственности такого решения получаем, что

$$\begin{aligned}
 v_t^h(t, x) & = \omega^h(t, x) \in C(0, T; L_2(\Omega)) \cap \\
 & \cap L_2(0, T; W_2^1(Q)) \cap W_2^{1,2}(Q(\varepsilon, T)), \forall \varepsilon > 0.
 \end{aligned}$$

В частности, функция  $v_t^h$  есть «энергетическое решение» задачи (18)–(20) из класса  $C(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; W_2^1(Q))$  (см. [9, гл. 3, §1] и для нее справедливо интегральное тождество

$$\begin{aligned}
 & - \int_Q (\rho v_t^h) \chi_t dx dt - \int_Q \langle v_{tx}^h, \chi_x \rangle dx dt - \\
 & - \int_Q \langle \bar{b}^h, v_{tx}^h \rangle \chi dx dt + \int_Q (c + \gamma) v_t^h \chi dx dt = \\
 & = \int_{\Omega} F(0, x) \chi(0, x) dx + \int_Q F_t \chi dx dt - \\
 & - \int_Q c_t v^h \chi dx dt,
 \end{aligned} \tag{22}$$

и верна равномерная по  $h$  оценка

$$\|v_t^h\|_{W_2^1(Q)} + \|v^h\|_{L_2(Q)} \leq C_1. \tag{23}$$

В силу (23) в тождестве (22) можно сделать предельный переход при  $h \rightarrow 0$ , в результате чего приходим к выводу, что функция  $v_t(t, x)$  является решением задачи (13)–(15) из класса  $L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$ . В силу единственности такого решения (см. [9, с. 172]) получаем, что

$$\begin{aligned}
 v_t(t, x) & = \omega(t, x) \in C(0, T; L_2(\Omega)) \cap \\
 & \cap L_2(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap W_2^{1,2}(Q(\varepsilon, T)), \forall \varepsilon > 0.
 \end{aligned}$$

Повторяя теперь рассуждения из [14, с. 116–117], находим, что  $v_{xx}(t, x) \in C(0, T; L_2(\Omega))$ , причем справедлива оценка

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|v_{xx}(t, \cdot)\|_{L_2(\Omega)} \leq C_2. \tag{24}$$

Но тогда функция  $u_t(t, x) \equiv v_t(t, x) + \Psi_t(t, x)$  является обобщенным решением задачи (11), (12) из класса

$$\begin{aligned}
 & C(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap \\
 & \cap W_2^{1,2}(Q(\varepsilon, T)), \forall \varepsilon > 0,
 \end{aligned}$$

где  $u(t, x)$  – решение задачи (1), (2), причем  $u_{xx} \in C(0, T; L_2(\Omega))$ . Кроме того, в силу [13, с. 59–61] для  $u_t(t, x)$  справедлива оценка

$$\left| u_t(t, x) \right| \leq \left[ M_3 + (K_f^* + K_c^* m_1) \times \right. \\ \left. \times (e^{\mu d} - 1) \right] e^{-\frac{K_{c,1} + K_{p,1}}{\rho_1} t} \equiv m_2, \quad (25)$$

где  $M_3 = \max\{f_3/\rho_3, M_2\}$ , а  $m_1$  определена в (7).

**Замечание 1.** Номер  $i$  оси  $x_i$  при получении оценок (8) и (25) следует выбрать так, чтобы произведение  $\mu d \equiv (b^* + 1)d$  было наименьшим.

### ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (A) – (G). Положим

$$\lambda^* = \max \left\{ 0, \frac{2K_{c,1} + K_{p,1} + K_b^2 - \frac{1}{2\kappa^2}}{\rho_1} \right\}, \quad (26)$$

$$\lambda_0 = \max \left\{ 0, \frac{2K_{c,1} + K_{p,2} + K_b^2 - \frac{1}{2\kappa^2}}{\rho_1} \right\}. \quad (27)$$

Предположим, что справедливо неравенство

$$\frac{4\rho_6^2}{\Phi_1^2} e^{\lambda^* T} \kappa^2 T \left[ m_2^2 + \frac{K_c^{*2}}{\rho_1} e^{\lambda_0 T} m_1^2 \kappa^2 T \right] < 1, \quad (28)$$

где  $m_1$  определена в (7),  $m_2$  определена в (25), константа  $\kappa \equiv \kappa(n, \Omega)$ , из неравенства (5). Тогда обобщенное решение обратной задачи (1)–(3) единственно.

**Доказательство.** Предположим, что существует два решения –  $\{u^{(1)}(t, x), \gamma^{(1)}(x)\}$  и  $\{u^{(2)}(t, x), \gamma^{(2)}(x)\}$  – этой задачи. Положим

$$y(t, x) = u^{(1)}(t, x) - u^{(2)}(t, x),$$

$$\sigma(x) = \gamma^{(1)}(x) - \gamma^{(2)}(x).$$

Тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \rho(t, x) y_t - \Delta y + \langle \bar{b}(x), y_x \rangle + \\ + c(t, x) y + \gamma^{(1)}(x) y = \\ = -u^{(2)}(t, x) \sigma(x), \quad (t, x) \in Q. \end{aligned} \quad (29)$$

$$y(t, x)|_{\Gamma} = 0, \quad (30)$$

$$y(T, x) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (31)$$

Положим  $p(t, x) = y_t(t, x)$ . Тогда, как показано в предыдущем разделе,  $p(t, x)$  удовлетворяет соотношениям («продифференцированной» задаче (29), (30)):

$$\begin{aligned} (\rho(t, x) p)_t - \Delta p + \langle \bar{b}(x), p_x \rangle + \\ + c(t, x) p + \gamma^{(1)}(x) p = \\ = -u_t^{(2)}(t, x) \sigma(x) - c_t(t, x) y(t, x), \quad (t, x) \in Q. \end{aligned} \quad (32)$$

$$p(t, x)|_{\Gamma} = 0. \quad (33)$$

Умножим соотношение (32) на  $e^{-\lambda^* t} p$  и проинтегрируем по  $Q_\tau$ ,  $0 < \tau \leq T$ . После интегрирования по частям приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{-\lambda^* \tau} \int_{\Omega} \rho(\tau, x) p^2(\tau, x) dx + \\ + \frac{\lambda^*}{2} \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} \rho(t, x) p^2 dx dt - \\ - \frac{1}{2} \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} \rho_t(t, x) p^2 dx dt + \\ + \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} |p_x|^2 dx dt + \\ + \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} \langle \bar{b}(x), p_x \rangle p dx dt + \\ + \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} c(t, x) p^2 dx dt + \\ + \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} \gamma^{(1)}(x) p^2 dx dt + \\ + \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} \rho_t(t, x) p^2 dx dt = \\ = - \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} u_t^{(2)}(t, x) \sigma(x) p dx dt - \\ - \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} c_t(t, x) y(t, x) p dx dt. \end{aligned} \quad (34)$$

Учитывая условия (A) – (C), тот факт, что  $\gamma^{(1)}(x) \geq 0$ , и применяя для оценки соответствующих слагаемых в (34) неравенство (4), находим, что

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ  
В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ПРИ УСЛОВИИ ФИНАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} e^{-\lambda^* \tau} \|p(\tau, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda^*}{2} \rho_1 \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} p^2 dx dt + \\ & \quad + \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} |p_x|^2 dx dt \leq \\ & \leq K_{c,1} \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} p^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} |p_x|^2 dx dt + \\ & \quad + \frac{K_b^2}{2} \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} p^2 dx dt + \\ & \quad + \frac{K_{\rho,1}^2}{2} \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} p^2 dx dt + \varepsilon \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} p^2 dx dt + \\ & + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} |u_t^{(2)}|^2 \sigma^2 dx dt + \frac{K_c^2}{2\varepsilon} \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} y^2 dx dt, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} e^{-\lambda^* \tau} \|p(\tau, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda^*}{2} \rho_1 \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} p^2 dx dt + \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} |p_x|^2 dx dt \leq \\ & \leq \left( K_{c,1} + \frac{K_{\rho,1}^2}{2} + \frac{K_b^2}{2} \right) \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} p^2 dx dt + \\ & \quad + \varepsilon \chi^2 \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} |p_x|^2 dx dt + \\ & \quad + \frac{m_2^2}{2\varepsilon} \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} \sigma^2 dx dt + \frac{K_c^2}{2\varepsilon} \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} y^2 dx dt. \end{aligned} \quad (35)$$

Выбирая в (35)  $\varepsilon = \frac{1}{4\chi^2}$  и применяя для оценки снизу третьего слагаемого в левой части (35) неравенство (5), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} e^{-\lambda^* \tau} \|p(\tau, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\ & \quad + \left( \frac{\lambda^*}{2} \rho_1 + \frac{1}{4\chi^2} \right) \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} p^2 dx dt \leq \\ & \leq \left( K_{c,1} + \frac{K_{\rho,1}^2}{2} + \frac{K_b^2}{2} \right) \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} p^2 dx dt + \\ & \quad + 2\chi^2 m_2^2 \int_0^\tau e^{-\lambda^* t} dt \cdot \|\sigma\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\ & \quad + 2\chi^2 K_c^2 \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} y^2 dx dt, \end{aligned}$$

откуда с учетом определения  $\lambda^*$  (см. условие (26)) получаем, что

$$\begin{aligned} \|p(\tau, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 & \leq 4e^{-\lambda^* \tau} \chi^2 \tau \frac{m_2^2}{\rho_1} \|\sigma\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\ & \quad + 4e^{-\lambda^* \tau} \chi^2 \frac{K_c^2}{\rho_1} \|y\|_{L_2(Q)}^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Оценим  $\|y\|_{L_2(Q)}^2$ . Для этого умножим соотношение (29) на  $e^{-\lambda_0 t} y$  и проинтегрируем результат по  $Q(0, \tau)$ . Повторив предыдущие рассуждения и учитывая определение  $\lambda_0$  в (27), придем к неравенству

$$\|y(\tau, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{2}{\rho_1} e^{\lambda_0 \tau} m_1^2 \chi^2 \tau \|\sigma\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

откуда

$$\|y\|_{L_2(Q)}^2 \leq \frac{1}{\rho_1} e^{\lambda_0 T} m_1^2 \chi^2 T^2 \|\sigma\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (37)$$

Подставляя (37) в (36), получаем оценку

$$\begin{aligned} \|y_t(T, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 & \equiv \|p(T, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq \frac{4}{\rho_1} e^{\lambda^* T} \chi^2 T \left[ m_2^2 + \frac{1}{\rho_1} T e^{\lambda_0 T} K_c^2 m_1^2 \chi^2 \right] \times \\ & \quad \times \|\sigma\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (38)$$

Полагая в (29)  $t = T$ , получим с учетом (31), что  $\rho(T, x) y_t(T, x) = -\varphi(x) \sigma(x)$ , откуда

$$\|y_t(T, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq \frac{\Phi_1^2}{\rho_6^2} \|\sigma\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (39)$$

Из (38) и (39), в силу предположения (28), получаем, что  $\|\sigma\|_{L_2(\Omega)}^2 = 0$ , т.е.  $\gamma^{(1)}(x) = \gamma^{(2)}(x)$ ,  $x \in \Omega$ . Но тогда из соотношений (29), (30) при  $\sigma(x) = 0$ , в силу единственности решения прямой задачи, получаем, что и  $y(t, x) = 0$  в  $Q$ , т.е.  $u^{(1)}(t, x) = u^{(2)}(t, x)$  в  $Q$ . Теорема доказана.

Перейдем к вопросу о существовании решения обратной задачи (1)–(3). Выведем операторное уравнение для нахождения неизвестного коэффициента  $\gamma(x) \in L_\infty^+(\Omega)$ . Положим в (1)  $t = T$ . Тогда с учетом (3) получим

$$\begin{aligned} & \rho(T, x) u_t(T, x) - \Delta \varphi + \left( \bar{b}(x), \varphi_x \right) + \\ & \quad + c(T, x) \varphi + \gamma(x) \varphi = f(T, x), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \gamma(x) = & -\frac{\rho(T, x)}{\varphi_x} u_t(T, x) + \\ & + \frac{\Delta\varphi - \langle \bar{b}(x), \varphi_x \rangle + f(T, x)}{\varphi_x} - c(T, x). \end{aligned} \quad (40)$$

Введем оператор  $\mathcal{B}: L_\infty^+(\Omega) \rightarrow L_\infty(\Omega)$  по формуле

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\gamma)(x) = & -\frac{\rho(T, x)}{\varphi(x)} u_t(T, x) + \\ & + \frac{\Delta\varphi - \langle \bar{b}(x), \varphi_x \rangle + f(T, x)}{\varphi(x)} - c(T, x), \end{aligned} \quad (41)$$

где  $\gamma(x)$  – произвольная функция из  $L_\infty^+(\Omega)$ , а  $u(t, x) \equiv u(t, x; \gamma)$  – решение прямой задачи (1), (2) с данным коэффициентом  $\gamma(x)$  в уравнении (1). Тогда соотношение (40) переписывается в виде

$$\gamma = \mathcal{B}(\gamma). \quad (42)$$

**Замечание 2.** В силу предположений (A)–(F) и оценки (25) оператор  $\mathcal{B}$  определен корректно и действует из  $L_\infty^+(\Omega)$  в  $L_\infty(\Omega)$ .

**Лемма 1.** Пусть выполнены условия (A)–(G). Тогда операторное уравнение (42) эквивалентно обратной задаче (1)–(3) в следующем смысле. Если пара  $\{u(t, x), \gamma(x)\}$  является решением обратной задачи (1)–(3), то  $\gamma(x)$  удовлетворяет уравнению (42). Обратно, если  $\hat{\gamma}(x) \in L_\infty^+(\Omega)$  является решением операторного уравнения (42), а  $\hat{u}(t, x)$  – решение прямой задачи (1), (2) с данной  $\hat{\gamma}(x)$  в уравнении (1), то пара  $\{\hat{u}(x), \hat{\gamma}(x)\}$  является обобщенным решением обратной задачи (1)–(3).

**Доказательство.** Необходимость доказана выше при выводе соотношения (40).

Докажем достаточность. Пусть  $\hat{\gamma}(x) \in L_\infty^+(\Omega)$  является решением уравнения (42). Рассмотрим функцию  $\hat{u}(t, x)$  как единственное обобщенное решение прямой задачи (1), (2) с данным коэффициентом  $\hat{\gamma}(x)$  в уравнении (1). Положим  $\hat{\varphi}(x) = \hat{u}(T, x)$ . Тогда, как было доказано в предыдущем разделе,  $\hat{\varphi}(x) \in W_2^2(\Omega)$ . Кроме того, в силу построения  $\hat{u}(T, x)$  справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \rho(T, x)\hat{u}_t(T, x) - \Delta\hat{\varphi} + \langle \bar{b}(x), \hat{\varphi}_x \rangle + \\ + c(T, x)\hat{\varphi} + \hat{\gamma}(x)\hat{\varphi} = f(T, x). \end{aligned} \quad (43)$$

С другой стороны,  $\hat{\gamma}(x)$  является решением уравнения (42), поэтому в силу определения оператора  $\mathcal{B}$  в (41) имеем

$$\begin{aligned} \rho(T, x)\hat{u}_t(T, x) - \Delta\varphi + \langle \bar{b}(x), \varphi_x \rangle + \\ + c(T, x)\varphi + \hat{\gamma}(x)\varphi = f(T, x). \end{aligned} \quad (44)$$

Учитывая определение  $\hat{\varphi}(x)$  и условие согласования (G), имеем

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(x)|_{\partial\Omega} = \hat{u}(T, x)|_{\partial\Omega} = \\ = \Psi(T, x)|_{\partial\Omega} = \varphi(x)|_{\partial\Omega}. \end{aligned} \quad (45)$$

Положим  $\chi(x) = \varphi(x) - \hat{\varphi}(x)$ . Вычитая (44) из (43) и учитывая (45), получаем, что  $\chi(x) \in W_2^2(\Omega)$  является обобщенным решением задачи

$$\begin{aligned} -\Delta\chi + \langle \bar{b}(x), \chi_x \rangle + c(T, x)\chi + \hat{\gamma}(x)\chi = 0, \\ x \in \Omega, \quad \chi|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned}$$

Поскольку  $\hat{\gamma}(x) \geq 0$ , а в силу условия (C) и  $c(T, x) \geq 0$ , то получаем, что  $\chi(x) \equiv 0$  в  $\bar{\Omega}$  (см. [10, с. 225]).

Таким образом,  $\varphi(x) = \hat{\varphi}(x)$  в  $\bar{\Omega}$ , а следовательно, пара  $\{\hat{u}(T, x), \hat{\gamma}(x)\}$  является обобщенным решением обратной задачи (1)–(3).

Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** Пусть выполнены условия (A)–(G). Предположим, что выполнено неравенство

$$\varphi_1^* + f_1 \geq \rho_6 m_2 + K_{c,2} \varphi_2, \quad (46)$$

где константа  $m_2$  определена в (25). Тогда для всех  $\gamma(x) \in L_\infty^+(\Omega)$   $\mathcal{B}(\gamma)(x) \geq 0$ .

**Доказательство.** Из (46) с учетом оценки (25) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \Delta\varphi - \langle \bar{b}(x), \varphi_x \rangle + f(T, x) \geq \\ \geq \rho(T, x)u_t(T, x) + c(T, x)\varphi(x), \end{aligned}$$

из которого в силу определения оператора  $\mathcal{B}$  в (41) следует утверждение леммы.

**Лемма 3.** Пусть выполнены условия (A) – (G) и неравенство (46). Тогда для всех  $\gamma(x) \in L_\infty^+(\Omega)$  справедлива оценка

$$\|\mathcal{B}(\gamma)\|_{L_\infty(\Omega)} \leq K_\gamma, \quad (47)$$

где 
$$K_\gamma = \frac{\rho_6}{\varphi_1} m_2 + \frac{\varphi_2^* + f_2}{\varphi_1}. \quad (48)$$

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ  
В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ПРИ УСЛОВИИ ФИНАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ

*Доказательство.* Оценка (47) есть непосредственное следствие определения оператора  $\mathbf{B}$  в (41), условий (A)–(F) и оценки (25).

**Замечание 3.** Если выполнено неравенство (46), то  $\varphi_1^* + f_1 \geq 0$ . Но тогда и  $\varphi_2^* + f_2 \geq 0$ , а следовательно, в (48)  $K_\gamma \geq 0$ .

**Лемма 4.** Пусть выполнены условия (A)–(G). Тогда оператор  $\mathbf{B}$  непрерывен на множестве  $L_\infty^+(\Omega)$ .

*Доказательство.* Пусть  $\gamma^{(1)}(x), \gamma^{(2)}(x) \in L_\infty^+(\Omega)$ , а  $u^{(1)}(t, x), u^{(2)}(t, x)$  – соответствующие решения прямой задачи (1), (2). Положим  $y(t, x) = u^{(1)}(t, x) - u^{(2)}(t, x)$ ,  $\sigma(x) = \gamma^{(1)}(x) - \gamma^{(2)}(x)$ ,  $p(t, x) = y_t(t, x)$ . Тогда справедливы соотношения (29), (30), а также (32), (33). Из (29), (30) вытекает оценка

$$|y(t, x)| \leq m_1 \left( e^{\mu d} - 1 \right) e^{K_{c,1} T / \rho_1} \|\sigma\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad (49)$$

где  $m_1$  определена в (7); тогда из (32), (33) получаем оценку

$$\begin{aligned} |p(T, x)| &\leq \left[ m_2 \|\sigma\|_{L_\infty(\Omega)} + \right. \\ &+ K_c^* m_1 \left( e^{\mu d} - 1 \right) e^{K_{c,1} T / \rho_1} \|\sigma\|_{L_\infty(\Omega)} \left. \right] \times \\ &\times \left( e^{\mu d} - 1 \right) e^{(K_{c,1} + K_{p,1}) T / \rho_1}. \end{aligned} \quad (50)$$

В силу определения оператора  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\gamma^{(1)})(x) - \mathbf{B}(\gamma^{(2)})(x) &= \\ = -\frac{\rho(T, x)}{\varphi(x)} \left( u_t^{(1)}(T, x) - u_t^{(2)}(T, x) \right) &\equiv \\ \equiv -\frac{\rho(T, x)}{\varphi(x)} p(T, x), \end{aligned}$$

и непрерывность  $\mathbf{B}(\gamma)$  теперь вытекает из неравенства (50).

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (A)–(G), неравенство (46), а константа  $K_\gamma$  определена в (48). Дополнительно предположим, что при некоторых  $\alpha \in (0, 1)$  и  $\varepsilon \in (0, T)$  функция  $\Psi_t(t, x) \in C^{0,\alpha}(Q(\varepsilon, T))$ . Тогда существует обобщенное решение  $\{u(t, x), \gamma(x)\}$  обратной задачи (1)–(3), причем для  $\gamma(x)$  справедлива оценка

$$0 \leq \gamma(x) \leq K_\gamma, \quad (51)$$

а для  $u(t, x)$  справедлива оценка (8).

*Доказательство.* Как было доказано в предыдущем разделе, функция  $u_t(t, x)$  является решением задачи (11), (12) с ограниченными коэффициентами и ограниченной правой частью. Кроме

того, поскольку  $\Psi_t(t, x) \in C^{0,\alpha}(Q(\varepsilon, T))$ , то, в силу [12, гл. 4],  $u_t(T, x) \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ .

Согласно леммам 2 и 3 оператор  $\mathbf{B}$  переводит выпуклое замкнутое множество  $B_{K_\gamma}^+$  в себя. А в силу компактности вложения пространства  $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$  в  $C(\bar{\Omega})$  и леммы 4 оператор  $\mathbf{B}$  является вполне непрерывным. Поэтому, в силу теоремы Шаудера о неподвижной точке (см., например, [15, гл. 5, § 3]), существует решение  $\gamma(x)$  уравнения (42), причем, в силу лемм 2 и 3, справедлива оценка (51).

В соответствии с леммой 1 имеем тогда, что обратная задача (1)–(3) имеет решение  $\{u(t, x), \gamma(x)\}$ , причем для  $u(t, x)$  справедлива оценка (8). Теорема доказана.

Приведем другой вариант условий, достаточный для однозначной разрешимости обратной задачи (1)–(3).

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия (A)–(G) и неравенство (46). Предположим, что выполнено еще неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\rho_6}{\varphi_1} \left[ m_2 + K_c^* m_1 \left( e^{\mu d} - 1 \right) e^{K_{c,1} T / \rho_1} \right] \times \\ \times \left( e^{\mu d} - 1 \right) e^{(K_{c,1} + K_{p,1}) T / \rho_1} < 1, \end{aligned} \quad (52)$$

где константа  $m_1$  определена в (7), а константа  $m_2$  определена в (25). Тогда в  $Q$  существует и единственно обобщенное решение  $\{u(t, x), \gamma(x)\}$  обратной задачи (1)–(3), причем для него справедливы оценки (51) и (8).

*Доказательство.* В силу лемм 2 и 3 оператор  $\mathbf{B}$  переводит множество  $B_{K_\gamma}^+$  в себя. Покажем, что оператор  $\mathbf{B}$  является сжимающим на  $B_{K_\gamma}^+$ .

Пусть  $\gamma^{(1)}(x), \gamma^{(2)}(x) \in L_\infty^+(\Omega)$ , а  $u^{(1)}(t, x), u^{(2)}(t, x)$  – соответствующие решения прямой задачи (1), (2). Положим  $y(t, x) = u^{(1)}(t, x) - u^{(2)}(t, x)$ ,  $\sigma(x) = \gamma^{(1)}(x) - \gamma^{(2)}(x)$ ,  $p(t, x) = y_t(t, x)$ . Как и в доказательстве леммы 4 получаем, что для  $y(t, x)$  справедлива оценка (49), а для  $p(t, x)$  – оценка (50). Но тогда, в силу (50), получаем неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}(\gamma^{(1)}) - \mathbf{B}(\gamma^{(2)})\|_{L_\infty(\Omega)} &\leq \frac{\rho_6}{\varphi_1} \|p(T, \cdot)\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \\ &\leq \frac{\rho_6}{\varphi_1} \left[ m_2 + K_c^* m_1 \left( e^{\mu d} - 1 \right) e^{K_{c,1} T / \rho_1} \right] \times \\ &\times \left( e^{\mu d} - 1 \right) e^{(K_{c,1} + K_{p,1}) T / \rho_1} \times \|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{L_\infty(\Omega)}, \end{aligned}$$

из которого согласно условия (52) вытекает сжимаемость оператора  $\mathbf{B}$  на множестве  $B_{K_\gamma}^+$ .

Следовательно, операторное уравнение (42) имеет единственное решение  $\gamma(x)$ , лежащее в  $B_{K_\gamma}^+$ , так что справедлива оценка (51). Тогда из леммы 1 следует, что обратная задача (1)–(3) также имеет решение и притом единственное. Кроме того, справедлива оценка (8). Теорема 3 доказана.

**ПРИМЕР**

Приведем пример обратной задачи, для которой применимы доказанные в предыдущем разделе теоремы существования и единственности.

**Пример.** Пусть  $\Omega = \{x : |x| \leq l\}$  –  $n$ -мерный шар,  $Q = [0, T] \times \bar{\Omega}$ . Рассмотрим в  $Q$  обратную задачу

$$\left(2 + \frac{|x|t}{lT}\right)u_t - \Delta u - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{T} u_{x_i} + \frac{|x|t}{lT^\theta} u + \gamma(x)u = \beta, \quad (53)$$

$$u(t, x)|_{\Gamma} = t^\nu, \quad (54)$$

$$u(T, x) = \frac{T^\nu |x|^2}{2l^2} + \frac{T^\nu}{2}. \quad (55)$$

Здесь  $\beta = \text{const} \geq 0$ ,  $\theta = \text{const} > 1$ ,  $\nu = \text{const} > 3/2$  либо  $\nu = 1$ .

В обозначениях задачи (1)–(3) имеем

$$\begin{aligned} \rho(t, x) &= 2 + \frac{|x|t}{lT}, \quad \bar{b}(x) = -\frac{x}{T}, \\ c(t, x) &= \frac{|x|t}{lT^\theta}, \quad f(t, x) = \beta, \quad \Psi(t, x) = t^\nu, \\ \varphi(x) &= \frac{T^\nu |x|^2}{2l^2} + \frac{T^\nu}{2}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что условия (A) – (G) для (53)–(55) выполнены, причем функция  $\Psi(t, x)$  удовлетворяет в  $Q$  условию Гельдера. При этом константы, входящие в условия (A) – (F), могут быть выбраны следующими:

$$\begin{aligned} \rho_1 = \rho_3 = \rho_4 = \rho_5 = 2, \quad \rho_2 = \rho_6 = 3, \\ K_{\rho,1} = 0, \quad K_{\rho,2} = \frac{1}{T}, \quad b^* = \frac{l}{T}, \quad K_b = \frac{l}{T}, \quad \mu = \frac{l}{T} + 1, \\ K_{c,1} = 0, \quad K_{c,2} = \frac{1}{T^{\theta-1}}, \\ K_c^* = \frac{1}{T^\theta}, \quad f_1 = f_2 = K_f = \beta, \quad K_f^* = 0, \\ M_1 = T^\nu, \quad M_2 = \nu T^{\nu-1}, \end{aligned}$$

$$\Phi_1 = \frac{T^\nu}{2}, \quad \Phi_2 = T^\nu, \quad \Phi_1^* = \frac{nT^\nu}{l^2}, \quad \Phi_2^* = \frac{nT^\nu}{l^2} + T^\nu.$$

Кроме того,  $d = 2l$ , константа  $m_1$  из (7) равна  $m_1 = T^\nu + \beta(e^{2\mu l} - 1)$ , константа  $m_2$  из условия (25) равна  $m_2 = \left[ M_3 + \frac{T^\nu + \beta(e^{2\mu l} - 1)}{T^\theta} (e^{2\mu l} - 1) \right]$ , где

$M_3 = \max\{\beta/2, \nu T^{\nu-1}\}$  константы  $\lambda^*$  и  $\lambda_0$  из условий (26) и (27) равны, соответственно,

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \max\left\{0, \frac{l^2}{2T^2} - \frac{1}{4\kappa^2}\right\}, \\ \lambda_0 &= \max\left\{0, \frac{1}{2T} + \frac{l^2}{2T^2} - \frac{1}{4\kappa^2}\right\}. \end{aligned}$$

Тогда условие (28) из теоремы 1 запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{144}{T^{2\nu-1}} e^{\lambda^* T} \kappa^2 \left\{ \left[ M_3 + \frac{1}{T^{\theta-\nu}} (e^{2\mu l} - 1) + \frac{\beta(e^{2\mu l} - 1)^2}{T^\theta} \right]^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{T^{2\theta}} e^{\lambda_0 T} \left[ T^\nu + \beta(e^{2\mu l} - 1) \right]^2 \kappa^2 T \right\} < 1, \quad (56) \end{aligned}$$

условие (46) из леммы 2 (и теоремы 2) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{nT^\nu}{l^2} + \beta \geq 3 \left[ M_3 + \frac{1}{2T^{\theta-\nu}} (e^{2\mu l} - 1) + \frac{\beta(e^{2\mu l} - 1)^2}{2T^\theta} \right] + \frac{1}{T^{\theta-\nu-1}}, \quad (57) \end{aligned}$$

а условие (52) из теоремы 3 – в виде

$$\begin{aligned} \frac{6}{T^\nu} \left\{ \left[ M_3 + \frac{1}{T^{\theta-\nu}} (e^{2\mu l} - 1) + \frac{\beta(e^{2\mu l} - 1)^2}{T^\theta} \right] + \right. \\ \left. + \left[ \frac{1}{T^{\theta-\nu}} (e^{2\mu l} - 1) + \frac{\beta}{T^\theta} (e^{2\mu l} - 1)^2 \right] \right\} \times \\ \times (e^{2\mu l} - 1) < 1. \quad (58) \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что с учетом выбора  $\theta$  и  $\nu$ , а также оценки (6), условия (56)–(58) будут заведомо выполнены либо при достаточно большом  $T$  (и фиксированном радиусе  $l$  шара  $\Omega$ , либо, если радиус  $l$  шара  $\Omega$  мал (а  $T$  фиксировано). В обоих этих случаях выполнены условия теорем 1, 2 и 3 соответственно.

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ  
В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ПРИ УСЛОВИИ ФИНАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ

Таким образом, если:

- 1) выполнено условие (56), то решение задачи (53)–(55) будет единственным;
- 2) выполнено условие (57), то решение задачи (53)–(55) существует;
- 3) выполнены условия (57) и (58), то решение задачи (53)–(55) существует и единственно.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке Программы Приоритет-2030 НИЯУ МИФИ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прилепко А.И., Соловьев В.В. О разрешимости обратных краевых задач определения коэффициента перед младшей производной в параболическом уравнении // Дифференциальные уравнения, 1987. Т. 23. № 1. С. 136–143.
2. Isakov V. Inverse parabolic problems with the final overdetermination // Communications Pure and Applied Mathematics. 1991. V. 44. P. 185–209.
3. Прилепко А.И., Тихонов И.В. Принцип позитивности решения в линейной обратной задаче и его применение к коэффициентной задаче теплопроводности // Доклады РАН. 1999. Т. 364. № 1. С. 21–23.
4. Прилепко А.И., Костин А.Б. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Математический сборник. 1992. Т. 183. № 4. С. 49–68.
5. Прилепко А.И., Костин А.Б. Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом

уравнении. I // Сибирский математический журнал. 1992. Т. 33. № 3. С. 146–155.

6. Прилепко А.И., Костин А.Б. Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. II // Сибирский математический журнал. 1992. Т. 34. № 5. С. 147–162.

7. Костин А.Б. Обратная задача определения коэффициента при  $u$  в параболическом уравнении по условию нелокального наблюдения // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 5. С. 596–610.

8. Камынин В.Л. Об однозначной разрешимости обратной задачи для параболических уравнений с условием финального переопределения // Математические заметки. 2003. Т. 79. № 2. С. 217–227.

9. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

10. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.

11. Arena O. Sopra una classe di equazioni paraboliche // Bolletino Unione Matematica Italiana (4). 1969. V. 2. № 1. P. 9–24.

12. Крылов Н.В. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. М.: Наука, 1985. 376 с.

13. Фридман А. Уравнения с частыми производными параболического типа. М.: Мир, 1968, 428 с.

14. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970, 288 с.

15. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982, 270 с.

---

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 5, pp. 329–339

---

ON INVERSE PROBLEM OF DETERMINING THE ABSORPTION COEFFICIENT  
IN THE PARABOLIC EQUATION UNDER THE CONDITION OF FINAL OBSERVATION

V.L. Kamynin

National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, 115409, Russia  
e-mail: [vlkamynin2008@yandex.ru](mailto:vlkamynin2008@yandex.ru)

Received September 18, 2024; revised September 18, 2024; September 24, 2024

We consider the nonlinear inverse problem of determining the  $\alpha$ -dependent lower coefficient in a uniformly parabolic equation with many spatial variables. The coefficients of the equation can depend on both the time and spatial variables and are assumed to be bounded, but generally speaking, discontinuous. However (in contrast to the papers of other authors), there are no restrictions on the signs of the lower coefficients of the equation and its right-hand side. As an additional condition, we put the condition of the final (at the final moment of time) observation. The solution of the inverse problem is understood in a generalized sense and is sought in Sobolev classes. We establish two types of sufficient conditions under which a generalized solution of the inverse problem exists and is unique. We also give the example of the inverse problem for which the results proved in the work are valid. It is

noted that the solution of the specified problem exists and is unique either if the time interval on which the problem is considered is sufficiently large (and the domain of spatial variables is fixed) or if the domain of spatial variables is sufficiently small (and the time period is fixed).

*Keywords:* inverse problems of determining the lower coefficient, parabolic equations, final observation.

#### REFERENCES

1. *Prilepko A.I., Solov'ev V.V.* O razreshimosti obratnykh kraevykh zadach opredeleniya koefficienta pered mladshei proizvodnoi v parabolicheskom uravnenii [On the solvability of inverse boundary value problems of determining the coefficient before the lowest derivative in a parabolic equation]. *Differentsial'nye uravneniya*. 1987. Vol. 23. No. 1. Pp. 136–143 (in Russian).
2. *Isakov V.* Inverse parabolic problems with the final overdetermination. *Communications Pure and Applied Mathematics*. 1991. Vol. 44. Pp. 185–209.
3. *Prilepko A.I., Tikhonov I.V.* Princip pozitivnosti v lineinoi obratnoi zadache i egoprinenenie k koefficientnoi zadache teploprovodnosti [The principle of positivity of the solution in the linear inverse problem and its application to the coefficient problem of heat conduction]. *Doklady RAN*, 1999. Vol. 364. No. 1. Pp. 21–23 (in Russian).
4. *Prilepko A.I., Kostin A.B.* O nekotorykh obratnykh zadachah dlya parabolicheskikh uravnenii s final'nym i integral'nym nablyudeniem [On some inverse problems for parabolic equations with final and integral observation]. *Matematicheskii sbornik*, 1992. Vol. 183. No. 4. Pp. 49–68 (in Russian).
5. *Prilepko A.I., Kostin A.B.* Ob obratnykh zadachah opredeleniya koefficienta v parabolicheskom uravnenii. I. [On inverse problems of determining the coefficient in a parabolic equation. I]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal*, 1992. Vol. 33. No. 3. Pp. 146–155 (in Russian).
6. *Prilepko A.I., Kostin A.B.* Ob obratnykh zadachah opredeleniya koefficienta v parabolicheskom uravnenii. II. [On inverse problems of determining the coefficient in a parabolic equation. II]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal*, 1992. Vol. 34. No. 5. Pp. 147–162 (in Russian).
7. *Kostin A.B.* Obratnaya zadacha opredeleniya koefficienta pri  $u$  v parabolicheskom uravnenii po usloviyu nelokal'nogo nablyudeniya. [Inverse problem of determining the coefficient before in a parabolic equation under the condition of non-local observation]. *Differentsial'nye uravneniya*, 2015. Vol. 51. No. 5. Pp. 596–610 (in Russian).
8. *Kamynin V.L.* Ob odnoznachnoi razreshimosti obratnoi zadachi dlya parabolicheskikh uravnenii s usloviem final'nogo pereopredeleniya. [On the unique solvability of the inverse problem for parabolic equations with the condition of final overdetermination]. *Matematicheskie zametki*, 2003. Vol. 79. No. 2. Pp. 217–227 (in Russian).
9. *Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N.* Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa. [Linear and quasilinear parabolic equations of parabolic type]. Moscow, Nauka Publ. 1967. 736 p. (in Russian).
10. *Gilbarg D., Trudinger N.* Ellipticheskie differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka. [Elliptic partial differential equations of second order]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 464 p. (in Russian).
11. *Arena O.* Sopra una classe di equazioni paraboliche. *Bolletino Unione Matematica Italiana* (4), 1969. Vol. 2, No. 1. Pp. 9–24.
12. *Krylov N.V.* Nelineinye ellipticheskie i parabolicheskie uravneniya vtorogo poryadka [Nonlinear second order elliptic and parabolic equations]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 376 p. (in Russian).
13. *Friedman A.* Uravneniya s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa. [Partial differential equations of parabolic type]. Moscow Mir Publ., 1968. 428 p. (in Russian).
14. *Ladyzhenskaya O.A.* Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoi neszhimaemoi zhidkosti [Mathematical problems in the dynamics of a viscous incompressible fluid] Moscow, Nauka Publ, 1970. 288 p. (in Russian).
15. *Lyusternik L.A., Sobolev V.I.* Kratkii kurs funkcional'nogo analiza. [Brief course of functional analysis]. Moscow Vysshaya shkola Publ., 1982, 270 p. (in Russian).

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.9

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ:  
ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ, РЕДУКЦИИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

А.Д. Полянин<sup>1,\*</sup>, Н.А. Кудряшов<sup>2,\*\*</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

<sup>2</sup>Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

\*e-mail: [polyanin@ipmnet.ru](mailto:polyanin@ipmnet.ru)

\*\*e-mail: [nakudr@gmail.com](mailto:nakudr@gmail.com)

Поступила в редакцию: 26.09.2024

После доработки: 27.09.2024

Принята к публикации: 30.09.2024

Рассматриваются уравнения Шредингера с кубическими и более сложными нелинейностями, содержащими искомымую функцию с запаздывающим аргументом. Высказаны физические соображения о возможных причинах появления запаздывания в подобных нелинейных уравнениях и моделях. Описаны одномерные редукции, приводящие исследуемые уравнения в частных производных с запаздыванием к более простым обыкновенным дифференциальным уравнениям или обыкновенным дифференциальным уравнениям с запаздыванием. Найдены точные решения нелинейного уравнения Шредингера общего вида с запаздыванием, которые выражаются в квадратурах. Особое внимание уделено трем уравнениям специального вида с кубической нелинейностью, которые допускают простые решения в элементарных функциях, а также более сложные точные решения с обобщенным разделением переменных. Помимо нелинейных уравнений Шредингера с постоянным запаздыванием исследуются также некоторые более сложные уравнения с переменным запаздыванием общего вида. Полученные результаты могут быть полезны для тестирования математических моделей, описываемых нелинейными уравнениями Шредингера с запаздыванием и родственными уравнениями математической физики.

*Ключевые слова:* нелинейное уравнение Шредингера с запаздыванием, уравнения в частных производных с запаздыванием, точные решения, решения в квадратурах, решения с обобщенным разделением переменных.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.5.6

EDN PALOUN

ВВЕДЕНИЕ

**Нелинейное уравнение Шредингера.** В ряде разделов теоретической физики, включая нелинейную оптику, сверхпроводимость и физику плазмы, используется нелинейное уравнение Шредингера [1–6]:

$$iu_t + ku_{xx} + f(|u|)u = 0, \quad (1)$$

где  $u(x,t)$  – комплекснозначная функция действительных аргументов, квадрат модуля которой соответствует интенсивности света,  $t$  – время,  $x$  – пространственная переменная,  $f(|u|)$  – функция потенциала,  $k$  – параметр уравнения,  $i^2 = -1$ .

Классическое нелинейное уравнение Шредингера с кубической нелинейностью, которая определяется функцией

$$f(|u|) = b|u|^2, \quad (2)$$

хорошо известно в научной периодике. Оно используется для характеристики огибающей волнового пакета и описывает математические модели при распространении волн по существу во всех разделах физики, где рассматриваются волновые процессы. Однако особенно популярным это уравнение стало после теоретического и экспериментального обоснования применения нелинейного уравнения Шредингера в нелинейной оптике [7–10]. При описании распространения импульсов в оптическом волокне выражение со второй производной отвечает за дисперсию импульса, функция  $f(|u|)$  характеризует взаимодействие светового импульса с материалом волокна и определяет нелинейную зависимость коэффициента преломления света в нели-

нейной среде. Для классического нелинейного уравнения Шредингера функция (2) соответствует квадратичной зависимости коэффициента преломления и называется керровской нелинейностью. Уникальность уравнения (1)–(2) объясняется не только тем, что оно является базовым уравнением для описания процессов передачи информации в оптической среде, но и тем, что относится к классу интегрируемых уравнений в частных производных. Уравнение имеет бесконечное число законов сохранения, преобразования Бэклунда и проходит тест Пенлеве. Задача Коши для уравнения (1)–(2) с начальным условием общего вида решается методом обратной задачи рассеяния [4, 5].

Отметим, что точные решения нелинейного уравнения Шредингера (1) для произвольной функции приведены в [11, 12].

Родственные и более сложные уравнения типа Шредингера, которые встречаются в литературе, можно найти, например, в [11, 13–24].

**Дифференциальные уравнения с запаздыванием.** Для математического моделирования многих явлений и процессов, проявляющих свойства наследственности (или последствия), когда скорость изменения искомой величины зависит не только от ее текущего значения, но и от некоторого значения (или нескольких значений) в прошлом, используются дифференциальные уравнения с запаздыванием. В биологии и биомеханике запаздывание связано с ограниченной скоростью передачи нервных и мышечных реакций в живых тканях. В медицине – в задачах о распространении инфекционных заболеваний – время запаздывания определяется инкубационным периодом (промежуток времени от момента заражения до появления первых признаков заболевания). В динамике популяций запаздывание связано с тем, что особи участвуют в размножении не сразу, а только после достижения репродуктивного возраста. В теории управления запаздывание возникает из-за ограниченных скоростей распространения сигнала и ограниченных скоростей технологических процессов. Наиболее распространенные уравнения в частных производных с запаздыванием, методы их решения и некоторые приложения описаны, например, в книгах [25, 26].

Для формулировки простейших задач с последствием используются обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), зависящие от времени  $t$ , которые, помимо искомой

функции  $u(t)$ , содержат также функцию  $\bar{u} = u(t - \tau)$ , где  $\tau > 0$  – постоянное время запаздывания. Для описания родственных, более сложных, пространственно неоднородных задач с запаздыванием чаще всего используются уравнения с частными производными реакционно-диффузионного типа [25, 26]:

$$u_t = ku_{xx} + F(u, \bar{u}), \quad \bar{u} = u(x, t - \tau), \quad (3)$$

где  $k > 0$  – коэффициент переноса (диффузии);  $x$  – пространственная переменная;  $F(u, \bar{u})$  – кинетическая функция, а  $\tau > 0$  – постоянное время запаздывания. Уравнение с запаздыванием (3) является естественным обобщением обычного нелинейного реакционно-диффузионного уравнения без запаздыванием с функцией  $F(u, \bar{u}) = f(u)$ . Специальный частный случай уравнения (3) при  $F(u, \bar{u}) = f(\bar{u})$  допускает простую физическую интерпретацию: перенос вещества в локально-неравновесной среде проявляет инерционные свойства, т.е. система реагирует на воздействие не мгновенно, как в классическом локально-равновесном случае, а на время запаздывания  $\tau$  позже.

Отметим, что в литературе встречаются также более сложные функционально-дифференциальные уравнения с пропорциональным запаздыванием  $\tau = qt$  ( $0 < q < 1$ ) и переменным запаздыванием более сложного вида  $\tau = \tau(t)$  или  $\tau = \tau(x)$  (см., например, [26–28]).

Много точных решений реакционно-диффузионных уравнений с постоянным запаздыванием вида (3) и родственных нелинейных уравнений параболического типа с запаздыванием можно найти в [12, 26, 29–32]. В [12, 26–28] описаны некоторые точные решения более сложных реакционно-диффузионных уравнений с переменным запаздыванием различного типа. Точные решения нелинейных волновых уравнений с постоянным и переменным запаздыванием, которые формально получаются из (3) заменой первой производной по времени  $u_t$  на вторую производную  $u_{tt}$ , приведены в [12, 26, 33, 34].

Похожие аргументы можно высказать и для многочисленных математических моделей, описываемых обобщенными нелинейными уравнениями Шредингера, несмотря на то, что процессы в нелинейной оптике непосредственно связаны с передачей оптических солитонов различного типа. Известно, что квадрат модуля оптического солитона характеризует интенсивность светового импульса. Хотя скорость рас-

пространения электромагнитной волны по оптическому волокну имеет огромную скорость, реакция материала оптического волокна обладает некоторой инерцией, которая может приводить к запаздыванию. Такая инерция особенно проявляется при распространения ультракоротких оптических солитонов для фемтосекундных импульсов меньших 1 пс. В этом случае приходится учитывать как производные старших порядков, отвечающие за дисперсию высокого порядка, так и вынужденное комбинационное рассеяние, экспериментально подтвержденное в 1985 г.

Как отмечено в [1], учет вынужденного комбинационного рассеяния при описании ультракоротких импульсов в оптическом волокне, привел к открытию нового явления, получившего название «самосдвига частоты» солитона, которое непосредственно связано с инерцией рассеяния и было объяснено его возникновением. Установлено, что это явление порождает непрерывный сдвиг несущей частоты оптического солитона, при котором его спектр становится столь широким, что высокочастотные компоненты начинают передавать свою энергию низкочастотным компонентам. Как показано в [1], данный процесс продолжается при передаче информации по световоду, возрастает линейно с течением времени и может стать достаточно значительным для ультракоротких импульсов.

Сказанное выше приводит к целесообразности учета запаздывания в выражениях для потенциала при различных обобщениях и дальнейших модификациях нелинейных уравнений Шредингера.

**Точные решения (терминология).** В данной статье под «точными решениями нелинейных уравнений в частных производных с постоянным или переменным запаздыванием» понимаются решения [26], которые выражаются:

*a)* через элементарные функции;

*b)* в квадратурах, т.е. через элементарные функции, функции, входящие в уравнение (это необходимо, если уравнение содержит произвольные или специальные функции) и неопределенные интегралы;

*c)* через решения обыкновенных дифференциальных уравнений или систем таких уравнений;

*d)* через решения обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием (постоянным или переменным) или систем таких уравнений.

Допускаются также различные комбинации решений, описанных в пп. *a)–d)*. В случаях *a)* и *b)* точные решение могут быть представлены в явной, неявной или параметрической форме.

Важно отметить, что наличие запаздывания в уравнениях математической физики существенно усложняет анализ таких уравнений и соответствующих начально-краевых задач [25, 26]. В частности, уравнения с частными производными при постоянном запаздывании не допускают автомодельных решений [26], которые часто имеют родственные более простые уравнения без запаздывания.

## НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

**Одномерное нелинейное уравнение Шредингера с запаздыванием.** Будем рассматривать одномерное нелинейное уравнение Шредингера весьма общего вида с запаздыванием

$$\begin{aligned} iu_t + ku_{xx} + F(|u|, |\bar{u}|)u &= 0, \\ \bar{u} &= u(x, t - \tau), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $u = u(x, t)$  – искомая комплекснозначная функция действительных аргументов,  $k > 0$  – свободный параметр,  $i^2 = -1$ ,  $F(z_1, z_2)$  – заданная действительная функция двух аргументов;  $\tau > 0$  – время запаздывания, которое считается постоянным. Нелинейное уравнение Шредингера с запаздыванием (4) является естественным обобщением обычного нелинейного уравнения Шредингера без запаздывания (1), которое соответствует функции  $F(|u|, |\bar{u}|) = f(|u|)$ .

Отметим три специальные функции

$$\begin{aligned} F(|u|, |\bar{u}|) &= b|\bar{u}|^2, \quad F(|u|, |\bar{u}|) = b|u||\bar{u}|, \\ F(|u|, |\bar{u}|) &= b_1|u|^2 + b_2|\bar{u}|^2, \end{aligned} \quad (5)$$

определяющие потенциалы уравнений вида (4) с кубической нелинейностью, которые при отсутствии запаздывания (т.е. при  $\tau = 0$ ) приводят к классическому нелинейному уравнению Шредингера (1)–(2).

*Замечание 1.* В работе [35] изучались свойства решений начально-краевых задач для пространственного обобщения уравнения (4) с потенциалом

$$F(|u|, |\bar{u}|) = -|u|^p - f(|\bar{u}|)u, \quad p \geq 0.$$

### Преобразования нелинейного уравнения Шредингера с запаздыванием

1°. Преобразование

$$\begin{aligned} x &= C_1 X + C_2, \quad t = C_3 T + C_4, \\ u &= U(X, T) \exp \left[ i(C_5 T + C_6) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где  $C_1, \dots, C_6$  – произвольные действительные постоянные ( $C_1, C_3 \neq 0$ ), приводит уравнение (4) к уравнению аналогичного вида:

$$\begin{aligned} iU_T + kC_3 C_1^{-2} U_{XX} + \\ + [C_3 F(|U|, |\bar{U}|) - C_5] U = 0, \\ \bar{U} = U(X, T - \tau_*), \quad \tau_* = \tau / C_3. \end{aligned} \quad (7)$$

2°. Представим искомую функцию в показательной форме

$$u = r e^{i\varphi}, \quad r = |u|, \quad (8)$$

где  $r = r(x, t) \geq 0$  и  $\varphi = \varphi(x, t)$  – действительные функции.

Дифференцируя (8), находим производные:

$$\begin{aligned} u_t &= (r_t + i r \varphi_t) e^{i\varphi}, \\ u_x &= (r_x + i r \varphi_x) e^{i\varphi}, \\ u_{xx} &= [r_{xx} - r \varphi_x^2 + i(2r_x \varphi_x + r \varphi_{xx})] e^{i\varphi}. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставим (9) в (4) и сократим все члены на  $e^{i\varphi}$ . Приравняв далее к нулю действительную и мнимую части полученного соотношения, приходим к следующей системе двух действительных уравнений в частных производных с запаздыванием:

$$\begin{aligned} -r \varphi_t + k r_{xx} - k r \varphi_x^2 + F(r, \bar{r}) r = 0, \\ r_t + 2k r_x \varphi_x + k r \varphi_{xx} = 0, \quad \bar{r} = r(x, t - \tau). \end{aligned} \quad (10)$$

Система (10) вместе с выражением (8) будут использованы далее для построения точных решений нелинейного уравнения Шредингера с запаздыванием (4).

**Точные решения в случае потенциала общего вида с запаздыванием.** Ниже описаны точные решения нелинейного уравнения Шредингера с запаздыванием (4) в случае произвольного потенциала, который задается функцией двух переменных  $F(|u|, |\bar{u}|)$ . Для построения решений используются методы обобщенного разделения переменных (см., например, [11, 26, 36]).

1°. Система (10) имеет простое точное решение:

$$\begin{aligned} r &= C_1, \quad \varphi = C_2 x + C_3 + Bt, \\ B &= F(C_1, C_1) - k C_2^2, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $C_1, C_2, C_3$  – произвольные действительные постоянные. Подставив (11) в (8), получим решение типа бегущей волны рассматриваемого нелинейного уравнения (4):

$$u = C_1 e^{i(C_2 x + C_3 + Bt)}, \quad B = F(C_1, C_1) - k C_2^2,$$

которое не зависит от времени запаздывания  $\tau$ .

2°. Система (10) допускает более сложное нестационарное, не зависящее от времени запаздывания  $\tau$  точное решение вида

$$r = r(x), \quad \varphi = C_1 t + \theta(x), \quad (12)$$

где  $C_1$  – произвольная постоянная, а функции  $r = r(x)$  и  $\theta = \theta(x)$  описываются системой ОДУ

$$\begin{aligned} k r_{xx}'' - k r (\theta_x')^2 - C_1 r + F(r, r) r = 0, \\ 2r_x' \theta_x' + r \theta_{xx}'' = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Интегрируя дважды второе уравнение (13), последовательно находим

$$\theta_x' = C_2 r^{-2}, \quad \theta = C_2 \int r^{-2} dx + C_3, \quad (14)$$

где  $C_2, C_3$  – произвольные постоянные. Подставив (14) в первое уравнение (13), получим нелинейное ОДУ второго порядка автономного вида

$$k r_{xx}'' - k C_2^2 r^{-3} - C_1 r + F(r, r) r = 0, \quad (15)$$

общее решение которого можно представить в неявной форме

$$\int \left[ \frac{C_1}{k} r^2 - C_2^2 r^{-2} - \frac{2}{k} \int r F(r, r) dr + C_4 \right]^{1/2} dr = C_5 \pm x, \quad (16)$$

где  $C_4, C_5$  – произвольные постоянные. Таким образом показано, что система (10) допускает точное решение (12), которое можно выразить в квадратурах.

Отметим, что для уравнений Шредингера с кубическими потенциалами, которые определяются функциями (5), левую часть решения (16) можно выразить через эллиптические интегралы.

*Замечание 2.* Более сложное нелинейное уравнение Шредингера (4) с переменным запаз-

дыванием, в котором  $\tau = \tau(x, t) > 0$  – произвольная непрерывная функция, также допускает решение вида (8), (12), где функция  $r = r(x)$  описывается ОДУ (15), а функция  $\theta = \theta(x)$  находится с помощью второго соотношения (14). Отметим, что точные решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с переменным запаздыванием разного типа рассматривались в работах [12, 26–28].

3°. Покажем, что система (10) допускает точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$r = r(t), \quad \varphi = a(t)x^2 + b(t)x + c(t). \quad (17)$$

Для этого подставим (17) в (10). В результате первое уравнение системы приводится к квадратному уравнению относительно  $x$ , коэффициенты которого зависят от времени. Приравнявая нулю функциональные коэффициенты этого квадратного уравнения и добавляя второе уравнение системы, которое в данном случае зависит только от  $t$ , получим следующую систему ОДУ:

$$\begin{aligned} a'_t &= -4ka^2, \quad b'_t = -4kab, \\ c'_t &= -kb^2 + F(r, \bar{r}), \quad r'_t = -2kar. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь первые три уравнения были сокращены на  $r$  и введено обозначение  $\bar{r} = r(t - \tau)$ .

Сначала проинтегрируем первое уравнение системы (18), затем второе и четвертое, а в конце – третье. В итоге имеем

$$\begin{aligned} r &= \frac{C_3}{\sqrt{t+C_1}}, \quad a = \frac{1}{4k(t+C_1)}, \\ b &= \frac{C_2}{2k(t+C_1)}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$c = \frac{C_2^2}{4k(t+C_1)} + \int F\left(\frac{C_3}{\sqrt{t+C_1}}, \frac{C_3}{\sqrt{t-\tau+C_1}}\right) dt + C_4,$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – произвольные постоянные. Подставив выражения (19) в (17), получим

$$\begin{aligned} r &= \frac{C_3}{\sqrt{t+C_1}}, \quad \varphi = \frac{(x+C_2)^2}{4k(t+C_1)} + \\ &+ \int F\left(\frac{C_3}{\sqrt{t+C_1}}, \frac{C_3}{\sqrt{t-\tau+C_1}}\right) dt + C_4. \end{aligned} \quad (20)$$

Отметим, что для уравнений Шредингера с кубическими потенциалами, которые определяются функциями (5), интеграл в правой части второго выражения (20) выражается через эле-

ментарные функции. В частности, для первой функции (5) решения (20) принимают вид

$$\begin{aligned} r &= \frac{C_3}{\sqrt{t+C_1}}, \\ \varphi &= \frac{(x+C_2)^2}{4k(t+C_1)} + bC_3^2 \ln(t-\tau+C_1) + C_4. \end{aligned}$$

*Замечание 3.* Более сложное нелинейное уравнение Шредингера (4) с переменным запаздыванием, где  $\tau = \tau(t) > 0$  – произвольная непрерывная функция, также допускает решение вида (8), (12), в котором функции  $r = r(t)$  и  $\theta = \theta(x, t)$  находятся с помощью формул (20) при  $\tau = \tau(t)$ .

4°. Система (10) допускает точное решение вида

$$r = r(z), \quad \varphi = C_1 t + C_2 x + \theta(z), \quad z = x + \lambda t, \quad (21)$$

где  $C_1, C_2, \lambda$  – произвольные постоянные, которое обобщает решение (12). Частному случаю  $C_1 = C_2 = 0$  в (21) соответствует решение типа бегущей волны.

Подставив (21) в (10), получим смешанную нелинейную систему, состоящую из ОДУ с запаздыванием и ОДУ без запаздывания:

$$\begin{aligned} -r(C_1 + \lambda\theta'_z) + kr''_{zz} - kr(C_2 + \theta'_z)^2 + F(r, \bar{r})r &= 0, \\ \lambda r'_z + 2kr'_z(C_2 + \theta'_z) + kr\theta''_{zz} &= 0, \\ \bar{r} &= r(z - \lambda\tau), \end{aligned} \quad (22)$$

*Специальный случай.* В частном случае  $\theta(z) = C_3, \lambda = -2kC_2$  при  $C_2 < 0$  система (22) сводится к одному ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием:

$$\begin{aligned} kr''_{zz} - (C_1 + C_2^2 k)r + F(r, \bar{r})r &= 0, \\ \bar{r} &= r(z - \tau_1), \quad \tau_1 = -2kC_2\tau. \end{aligned} \quad (23)$$

Для нелинейного уравнения Шредингера с запаздыванием (4) и потенциалом специального вида

$$F(|u|, |\bar{u}|) = f(|u|^2 + |\bar{u}|^2),$$

где  $f(z)$  – произвольная функция, в соответствующем ОДУ с запаздыванием (23) следует положить  $F(r, \bar{r}) = f(r^2 + \bar{r}^2)$ . В этом случае уравнение (23) допускает точные периодические решения:

$$r(z) = \beta_n |\sin(\sigma_n z + C_4)|, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ:  
ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ, РЕДУКЦИИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Здесь  $C_4$  – произвольная постоянная, параметры  $\beta_n$  находятся из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$f(\beta_n^2) = k\sigma_n^2 + C_1 + C_2^2 k,$$

а константы  $\sigma_n$  определяются по формулам

$$\sigma_n = \frac{\pi}{2\tau_1}(1+2n) = \frac{\pi}{2\lambda\tau}(1+2n), \quad (25)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

В частности, уравнение Шредингера с запаздыванием (4) и кубической нелинейностью, которая задается потенциалом

$$F(|u|, |\bar{u}|) = b(|u|^2 + |\bar{u}|^2), \quad b = \text{const},$$

имеет точные решения вида (21), где  $\theta(z) = C_3$ ,  $\lambda = -2kC_2$  (при  $C_2 < 0$ ), функция  $r(z)$  приведена в (24), а константы  $\beta_n$  и  $\sigma_n$  находятся по формулам

$$\beta_n = \sqrt{\frac{k\sigma_n^2 + C_1 + C_2^2 k}{b}},$$

$$\sigma_n = \frac{\pi}{2\tau_1}(1+2n) = \frac{\pi}{2\lambda\tau}(1+2n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**Решения с обобщенным разделением переменных уравнений Шредингера с кубической нелинейностью.** Нелинейные уравнения Шредингера с постоянным запаздыванием (4) и кубическими нелинейностями, которые определяются зависимостями (5), допускают точные решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u(x, t) = (ax + c) \exp[i(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)], \quad (26)$$

где пять определяющих функций –  $a = a(t)$ ,  $c = c(t)$ ,  $\alpha = \alpha(t)$ ,  $\beta = \beta(t)$ ,  $\gamma = \gamma(t)$  – описываются смешанными системами уравнений, содержащими ОДУ без запаздывания и ОДУ с запаздыванием.

В переменных (8) решение (26) сводится к системе (10), в которой следует положить

$$r = ax + c, \quad \varphi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma. \quad (27)$$

Подставим функции (27) в (10). Используя зависимости (5) и разделяя переменные в полученных уравнениях, приходим к системам для определяющих функций. Эти системы для всех трех зависимостей (5) приведены ниже.

1°. При  $F(|u|, |\bar{u}|) = b|\bar{u}|^2$  система для определяющих функций записывается так:

$$\begin{aligned} a'_t &= -6ka\alpha, & c'_t &= -2ka\beta - 2kc\alpha, \\ \alpha'_t &= -4k\alpha^2 + b\bar{a}^2, & \beta'_t &= -4k\alpha\beta + 2b\bar{a}\bar{c}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\gamma'_t = -k\beta^2 + b\bar{c}^2,$$

где  $\bar{a} = a(t - \tau)$ ,  $\bar{c} = c(t - \tau)$ .

2°. При  $F(|u|, |\bar{u}|) = bu|\bar{u}|$  система для определяющих функций имеет вид

$$\begin{aligned} a'_t &= -6ka\alpha, & c'_t &= -2ka\beta - 2kc\alpha, \\ \alpha'_t &= -4k\alpha^2 + ba\bar{a}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\beta'_t = -4k\alpha\beta + b(a\bar{c} + \bar{a}c), \quad \gamma'_t = -k\beta^2 + b\bar{c}\bar{c}.$$

3°. При  $F(|u|, |\bar{u}|) = b_1|u|^2 + b_2|\bar{u}|^2$  система для определяющих функций записывается так:

$$\begin{aligned} a'_t &= -6ka\alpha, & c'_t &= -2ka\beta - 2kc\alpha, \\ \alpha'_t &= -4k\alpha^2 + b_1a^2 + b_2\bar{a}^2, \\ \beta'_t &= -4k\alpha\beta + 2b_1ac + 2b_2\bar{a}\bar{c}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\gamma'_t = -k\beta^2 + b_1c^2 + b_2\bar{c}^2.$$

Смешанные системы (28)–(30), состоящие из обыкновенных дифференциальных уравнений и обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием, существенно проще рассматриваемых нелинейных уравнений Шредингера с запаздыванием (4)–(5). Эти системы могут быть, например, проинтегрированы численными методами, описанными в [26].

Отметим, что описанные в данном разделе решения нелинейных уравнений Шредингера с запаздыванием (4) и кубическими нелинейностями, которые определяются зависимостями (5), обобщаются на случай переменного запаздывания общего вида (в этих уравнениях и решениях  $\tau = \text{const}$  надо просто заменить на  $\tau = \tau(t)$ ).

*Замечание 4.* В [37] исследовалось линейное уравнение Шредингера специального вида, в котором постоянное запаздывание входило в пространственные производные.

*Замечание 5.* В [25, 38–40] рассматривались нелинейные уравнения Шредингера с распределенным запаздыванием, содержащие интегральные слагаемые.

## КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Исследуются нелинейные уравнения Шредингера, потенциал которых зависит от искомой функции с запаздывающим аргументом. описа-

ны одномерные редукции, приводящие рассматриваемые уравнения к обыкновенным дифференциальным уравнениям или обыкновенным дифференциальным уравнениям с запаздыванием. Найдены точные решения нелинейных уравнений Шредингера с запаздыванием, которые выражаются в квадратурах или элементарных функциях. Полученные результаты могут использоваться в качестве тестовых задач для численных методов интегрирования уравнений математической физики с запаздыванием.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена по темам государственного задания (№№ госрегистрации 124012500440-9 и FSWU-2023-0031).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агравал Г.* Нелинейная волоконная оптика. М: Мир, 1996.
2. *Квишарь Ю.С., Агравал Г.* Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам. М: Физматлит, 2005.
3. *Kodama Y., Hasegawa A.* Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide // *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 1987. V. 23. № 5. P. 510–524.
4. *Drazin P.G., Johnson R.S.* Solitons: An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
5. *Ablowitz M.J., Clarkson P.A.* Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
6. *Kivshar Yu.S., Malomed B.A.* Dynamics of solitons in nearly integrable systems // *Rev. Mod. Phys.*, 1989. V. 63. P. 763–915.
7. *Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В.* Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде // *Успехи физических наук*, 1967. Т. 93. № 1. С. 19–70.
8. *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion // *Applied Physics Letters*, 1973. V. 23. № 3. P. 142–144.
9. *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion // *Applied Physics Letters*, 1973. V. 23. № 4. P. 171–172.
10. *Tai K., Hasegawa A., Tomita A.* Observation of modulational instability in optical fibers // *Physical Review Letters*, 1986. V. 56. № 2. P. 135–138.
11. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.
12. *Polyanin A.D.* Handbook of Exact Solutions to Mathematical Equations. Boca Raton: CRC Press – Chapman & Hall, 2025.
13. *Kudryashov N.A.* A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber // *Optik*, 2019. V. 189. № 42, 52.
14. *Kudryashov N.A.* Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber // *Optik*, 2019. V. 194. 163060.
15. *Kudryashov N.A.* Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities // *Optik*, 2020. V. 212. 164750.
16. *Kudryashov N.A.* Solitary waves of the non-local Schrödinger equation with arbitrary refractive index // *Optik*, 2021. V. 231. 166443.
17. *Kudryashov N.A.* Stationary solitons of the generalized nonlinear Schrödinger equation with nonlinear dispersion and arbitrary refractive index // *Applied Mathematics Letters*, 2022, V. 128. 107888.
18. *Kudryashov N.A.* Almost general solution of the reduced higher-order nonlinear Schrödinger equation // *Optik*, 2021. V. 230. 66347.
19. *Yildirim Y.* Optical solitons to Schrödinger-Hirota equation in DWDM system with modified simple equation integration architecture // *Optik*, 2019. V. 182. P. 694–701.
20. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Biswas A., Eki-ci M., Alshomrani A.S., Khan S., Zhou Q., Belic M.R.* Dispersive solitons in optical fibers and DWDM networks with Schrödinger–Hirota equation // *Optik*, 2019. V. 199. 163214.
21. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Alngar M.E.M., Biswas A., Moraru L., Khan S., Yildirim Y., Alshehri H.M., Belic M.R.* Dispersive optical solitons with Schrödinger-Hirota model having multiplicative white noise via Ito Calculus // *Physics Letters, Sect. A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2022. V. 445. 128268.
22. *Wang G., Kara A.H., Biswas A., Guggilla P., Al-zahrani A.K., Belic M.R.* Highly dispersive optical solitons in polarization-preserving fibers with Kerr law nonlinearity by Lie symmetry // *Physics Letters, Sect. A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2022. V. 421. 127768.
23. *Biswas A., Hubert M.B., Justin M., Betchewe G., Doka S.Y., Crepin K.T., Eki-ci M., Zhou Q., Moshokoa S.P., Belic M.* Chirped dispersive bright and singular optical solitons with Schrödinger-Hirota equation // *Optik*, 2018. V. 168. P. 192–195.
24. *Zhou Q., Xu M., Sun Y., Zhong Y., Mirzazadeh M.* Generation and transformation of dark solitons, anti-dark solitons and dark double-hump solitons // *Nonlinear Dynamics*, 2022. V. 110. № 2. P. 1747–1752.
25. *Wu J.* Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1996.
26. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I.* Delay Ordinary and Partial Differential Equations. CRC Press: Boca Raton–London, 2024.
27. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Nonlinear pantograph-type diffusion PDEs: Exact solutions and the principle of analogy // *Mathematics*, 2021. V. 9. № 5. 511.

28. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Exact solutions of reaction-diffusion PDEs with anisotropic time delay // *Mathematics*, 2023. V. 11. № 14. 3111.
29. *Meleshko S.V., Moyo S.* On the complete group classification of the reaction diffusion equation with a delay // *J. Math. Anal. Appl.*, 2008. V. 338. P. 448–466.
30. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014. V. 19. № 3. P. 417–430.
31. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction-diffusion equations // *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014. V. 59. P. 16–22.
32. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Construction of exact solutions to nonlinear PDEs with delay using solutions of simpler PDEs without delay // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2021. V. 95. 105634.
33. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Generalized and functional separable solutions to nonlinear delay Klein–Gordon equations // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014. V. 19. № 8. P. 2676–2689.
34. *Long F.-S., Meleshko S.V.* On the complete group classification of the one dimensional nonlinear Klein–Gordon equation with a delay // *Math. Methods Appl. Sciences*, 2016. V. 39. № 12. P. 3255–3270.
35. *Sakbaev V.Z., Shiryayeva A.D.* Nonlinear Schrödinger equation with delay and its regularization // *Lo-bachevskii J. Mathematics*, 2023. V. 44. № 3. P. 936–949.
36. *Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.
37. *Agirseven D.* On the stability of the Schrödinger equation with time delay // *Filomat*, 2018. Vol. 32. № 3. P. 759–766.
38. *Hale J.K., Lunel S.M.V.* Introduction to Functional Differential Equations. New York: Springer, 1993.
39. *Zhao Z., Ge W.* Traveling wave solutions for Schrödinger equation with distributed delay // *Applied Mathematical Modelling*, 2011. V. 35. P. 675–687.
40. *Chen C.-F., Luo B.* The freeze of intrapulse Raman scattering effect of ultrashort solitons in optical fiber // *Optik*, 2007. V. 118. № 1. P. 1–4.

---

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 5, pp. 340–349

---

## NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATIONS WITH DELAY: EXACT SOLUTIONS, REDUCTIONS, AND TRANSFORMATIONS

*A.D. Polyanin<sup>1</sup>, N.A. Kudryashov<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526, Russia*

<sup>2</sup> *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute),  
Moscow, 115409, Russia*

\* *e-mail: polyanin@ipmnet.ru*

\*\* *e-mail: nakudr@gmail.com*

Received September 26, 2024; revised September 27, 2024; accepted September 30, 2024

Schrödinger equations with cubic and more complex nonlinearities containing the desired function with a delayed argument are considered. The physical considerations that can lead to the appearance of a delay in such nonlinear equations and models are expressed. One-dimensional reductions are described that lead the studied partial differential equations with delay to simpler ordinary differential equations or ordinary differential equations with delay. Exact solutions of the nonlinear Schrödinger equation of general form with delay, which are expressed in quadratures, are found. Special attention is paid to three equations with cubic nonlinearity, which allow simple solutions in elementary functions, as well as more complex exact solutions with generalized separation of variables. In addition to nonlinear Schrödinger equations with constant delay, some more complex equations with variable delay of general form are also studied. The results obtained can be useful for testing mathematical models described by the nonlinear Schrödinger equation with delay.

*Keywords:* nonlinear Schrödinger equation with delay, partial differential equations with delay, exact solutions, solutions in quadratures, generalized separable solutions.

REFERENCES

1. *Agrawal G.P.* Nonlinear Fiber Optics, 4th ed. New York: Academic Press, 2007.
2. *Kivshar Yu.S., Agrawal G.P.* Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals. San Diego: Academic Press, 2003.
3. *Kodama Y., Hasegawa A.* Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide. IEEE Journal of Quantum Electronics, 1987. Vol. 23. No.5. Pp. 510-524.
4. *Drazin P.G., Johnson R.S.* Solitons: An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
5. *Ablowitz M.J., Clarkson P.A.* Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
6. *Kivshar Yu.S., Malomed B.A.* Dynamics of solitons in nearly integrable systems. Rev. Mod. Phys., 1989. Vol. 63. Pp. 763–915.
7. *Akhmanov S.A., Sukhorukov A.P., Khokhlov R.V.* Self-focusing and diffraction of light in a nonlinear medium. Soviet Physics Uspekhi, 1968. Vol. 10. No. 5. Pp. 609–636.
8. *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion. Applied Physics Letters, 1973. Vol. 23. No. 3. Pp. 142–144.
9. *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion. Applied Physics Letters, 1973. Vol. 23. No. 4. Pp. 171–172.
10. *Tai K., Hasegawa A., Tomita A.* Observation of modulational instability in optical fibers. Physical Review Letters, 1986. Vol. 56. No. 2. Pp. 135–138.
11. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.
12. *Polyanin A.D.* Handbook of Exact Solutions to Mathematical Equations. Boca Raton: CRC Press–Chapman & Hall, 2025.
13. *Kudryashov N.A.* A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber. Optik, 2019. Vol. 189. No. 42, 52.
14. *Kudryashov N.A.* Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber. Optik, 2019. Vol. 194. 163060.
15. *Kudryashov N.A.* Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities. Optik, 2020. Vol. 212. 164750.
16. *Kudryashov N.A.* Solitary waves of the non-local Schrödinger equation with arbitrary refractive index. Optik, 2021. Vol. 231. 166443.
17. *Kudryashov N.A.* Stationary solitons of the generalized nonlinear Schrödinger equation with nonlinear dispersion and arbitrary refractive index. Applied Mathematics Letters, 2022, Vol. 128. 107888.
18. *Kudryashov N.A.* Almost general solution of the reduced higher-order nonlinear Schrödinger equation. Optik, 2021. Vol. 230. 66347.
19. *Yildirim Y.* Optical solitons to Schrödinger-Hirota equation in DWDM system with modified simple equation integration architecture. Optik, 2019. Vol. 182. Pp. 694–701.
20. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Biswas A., Eki-ci M., Alshomrani A.S., Khan S., Zhou Q., Belic M.R.* Dispersive solitons in optical fibers and DWDM networks with Schrödinger–Hirota equation. Optik, 2019. Vol. 199. 163214.
21. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Alngar M.E.M., Biswas A., Moraru L., Khan S., Yildirim Y., Alshehri H.M., Belic M.R.* Dispersive optical solitons with Schrödinger-Hirota model having multiplicative white noise via Ito Calculus, Physics Letters, Sect. A: General, Atomic and Solid State Physics, 2022. Vol. 445. 128268.
22. *Wang G., Kara A.H., Biswas A., Guggilla P., Alzahrani A.K., Belic M.R.* Highly dispersive optical solitons in polarization-preserving fibers with Kerr law nonlinearity by Lie symmetry. Physics Letters, Sect. A: General, Atomic and Solid State Physics, 2022. Vol. 421. 127768.
23. *Biswas A., Hubert M.B., Justin M., Betchewe G., Doka S.Y., Crepin K.T., Ekici M., Zhou Q., Moshokoa S.P., Belic M.* Chirped dispersive bright and singular optical solitons with Schrödinger-Hirota equation. Optik, 2018. Vol. 168. Pp. 192–195.
24. *Zhou Q., Xu M., Sun Y., Zhong Y., Mirzazadeh M.* Generation and transformation of dark solitons, anti-dark solitons and dark double-hump solitons. Nonlinear Dynamics, 2022. Vol. 110. No. 2. Pp. 1747–1752.
25. *Wu J.* Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1996.
26. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I.* Delay Ordinary and Partial Differential Equations. CRC Press: Boca Raton–London, 2024.
27. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Nonlinear pantograph-type diffusion PDEs: Exact solutions and the principle of analogy. Mathematics, 2021. Vol. 9. No 5. 511.
28. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Exact solutions of reaction-diffusion PDEs with anisotropic time delay. Mathematics, 2023. Vol. 11. No. 14. 3111.
29. *Meleshko S.V., Moyo S.* On the complete group classification of the reaction diffusion equation with a delay. J. Math. Anal. Appl., 2008. Vol. 338. Pp. 448–466.
30. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2014. Vol. 19. No. 3. Pp. 417–430.
31. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction-diffusion equations. Int. J. Non-Linear Mech., 2014. Vol. 59. Pp. 16–22.
32. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Construction of exact solutions to nonlinear PDEs with delay using solutions of simpler PDEs without delay. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2021. Vol. 95, 105634.
33. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Generalized and functional separable solutions to nonlinear delay Klein–Gordon equations. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2014. Vol. 19. No. 8. Pp. 2676–2689.

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ:  
ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ, РЕДУКЦИИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

34. Long F.-S., Meleshko S.V. On the complete group classification of the one dimensional nonlinear Klein–Gordon equation with a delay. *Math. Methods Appl. Sciences*, 2016. Vol. 39. No. 12. Pp. 3255–3270.

35. Sakbaev V.Z., Shiryaeva A.D. Nonlinear Schrödinger equation with delay and its regularization. *Lobachevskii J. Mathematics*, 2023. Vol. 44. No. 3. Pp. 936–949.

36. Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.

37. Agirseven D. On the stability of the Schrödinger equation with time delay. *Filomat*, 2018. Vol. 32. No. 3. Pp. 759–766.

38. Hale J.K., Lunel S.M.V. Introduction to Functional Differential Equations. New York: Springer, 1993.

39. Zhao Z., Ge W. Traveling wave solutions for Schrödinger equation with distributed delay. *Applied Mathematical Modelling*, 2011. Vol. 35. Pp. 675–687.

40. Chen C.-F., Luo B. The freeze of intrapulse Raman scattering effect of ultrashort solitons in optical fiber. *Optik*, 2007. Vol. 118. No. 1. Pp. 1–4.

УДК 004.658.2

## МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ БАЗЫ ДАННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БОЛЬШИХ ЯЗЫКОВЫХ МОДЕЛЕЙ

*А.Р. Матвеева\**, *Е.В. Антонов*

*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия*

*\*e-mail: [armatveeva@gmail.com](mailto:armatveeva@gmail.com)*

Поступила в редакцию: 05.07.2024

После доработки: 21.08.2024

Принята к публикации: 10.09.2024

Атомная энергетика играет важную роль в обеспечении безопасности многих стран мира. При проектировании и эксплуатации таких сложных технологических объектов (СТО), как атомные электростанции (АЭС), критически важно учитывать их характеристики для обеспечения безопасной работы. Актуальность темы исследования заключается в необходимости разработки методик, позволяющей ускорить процесс выявления целевой информации, содержащейся в научных публикациях, для предприятий атомной отрасли. Отсутствие научных работ, описывающих применение языковых моделей для анализа и выделения характеристик из сложных технологических объектов, подчеркивает необходимость проведения исследования. В работе в качестве примера такого объекта выбрана АЭС. Для проведения ряда экспериментов по выделению технических характеристик СТО составлен перечень параметров профиля атомной электростанции (35 параметров) и сформирован набор данных по атомным электростанциям (60 научных публикаций, содержащих сведения об АЭС Линьяо). Разработана программа, которая позволяет обрабатывать содержащиеся в научных публикациях данные путем загрузки статей в языковую модель, написания запросов и получения ответов для последующего составления профиля сложного технологического объекта. Результаты работы показали, что предложенная методика позволяет программно обрабатывать научные публикации для составления профиля АЭС.

*Ключевые слова:* большие языковые модели, атомная электростанция, научные публикации, автоматизированная обработка данных.

**DOI:** 10.26583/vestnik.2024.5.7

**EDN** PJFXNC

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время большой объем данных о сложных технологических объектах содержится в научных публикациях, но поиск и извлечение необходимых параметров из текстов статей представляет собой трудоемкий процесс [1]. С развитием технологий искусственного интеллекта появилась возможность использования больших языковых моделей для автоматизированного сбора и обработки больших массивов данных.

В современном контексте научно-технического прогресса активно развиваются большие языковые модели, представляющие собой нейросетевые архитектуры для анализа большого объема информации, основная масса которого представляет собой неструктурированные

данные [2, 3]. С увеличением объема тестовых данных наблюдаются перманентное усовершенствование и расширение существующих алгоритмов. С течением времени становится возможной оценка их внедрения в актуальные научные задачи. Учитывая рост объема информации в интернете в геометрической прогрессии, первоочередной задачей многих исследователей становится качество обработки данных, включая их структурирование [4].

В рамках представленного исследования рассматриваются несколько больших языковых моделей таких, как модели GPT (Generative Pre-trained Transformers), являющихся мощными и продвинутыми нейросетевыми архитектурами, обученными на огромных массивах текстовых источников [5–9]. GPT демонстрируют возможность для повышения производительности за счет автоматизации таких трудоемких задач,

как создание контента (написание сценариев или художественных произведений), составление документов (исковые заявления в юридических компаниях или сопроводительные письма для отправки резюме в компаниях), составление плана обучения, оказание технической помощи в чатах поддержки, оказание помощи в написании кода для программистов [10, 11]. Ряд исследований демонстрирует применимость GPT для извлечения данных из научных публикаций, например, в работе «Pre-trained Language Models in Biomedical Domain: A Systematic Survey» авторы представляют обзор применения языковых моделей для извлечения информации из научных публикаций в области биомедицины [12]. В статье обсуждается применимость моделей машинного обучения для решения комплекса задач в области биомедицины, например, информационный поиск, классификация текстов или извлечение сущностей.

В статье «Challenges and Advances in Information Extraction from Scientific Literature: a Review» рассматриваются проблемы и перспективы автоматизированного извлечения информации из научных публикаций в области материаловедения [13]. Отмечается, что именно в научных статьях, справочниках и лабораторных журналах содержится большой объем экспериментальных данных, однако извлечение такого рода информации вручную из массива публикаций трудоемко. Авторы подробно рассматривают основные препятствия, лежащие в основе практического применения технологий информационного поиска к научным публикациям: формат файлов, дефицит или отсутствие структурированности данных, нарушение целостности представления полезной информации, а также сложность адаптации языковых моделей к научному стилю речи. Извлечение информации представляет собой важный шаг к использованию моделей машинного обучения для содействия научным и инженерным исследованиям. Решение проблем, которые в настоящее время препятствуют возможности извлекать информацию из документов, свидетельствует о перспективах дальнейшей разработки и совершенствования методик автоматизированного анализа данных искусственным интеллектом в материаловедении и инженерии.

В работе «Classifying social determinants of health from unstructured electronic health records using deep learning-based natural language processing» подчеркивается, что социальные детерминанты здоровья редко доступны в

структурированных электронных медицинских картах, чаще упоминаются в неструктурированных клинических записях. Однако извлечение подобной информации ручным способом является трудоемким и затратным по времени процессом [14]. Авторы статьи предлагают использовать для этой цели современные методы обработки естественного языка. Статья демонстрирует применимость языковых моделей на основе глубокого обучения для анализа научных текстов и извлечения необходимых характеристик, в данном случае – факторов, влияющих на здоровье людей.

В статье «Natural Language Processing for Swedish Nuclear Power Plants» описывается исследование, в котором рассмотрены возможности использования методов обработки естественного языка для анализа текстовых данных и извлечения из них пользы в шведской атомной промышленности [15]. Исследование сосредоточено на интервью с представителями шведских и международных компаний в сфере ядерной энергетики для определения текущих потребностей, проблем и возможностей использования обработки естественного языка для обслуживания АЭС.

В исследовании с целью разработки методики формирования базы данных характеристик сложного технологического объекта с использованием программных средств в качестве примера СТО выбрана атомная электростанция. Языковые модели, в частности, адаптированные к предметной области, могли бы внести важный вклад в понимание и оптимизацию рабочих процессов в ядерной энергетике за счет автоматизации анализа больших массивов данных.

Обзор литературы позволяет сделать вывод, что в представленных источниках не обнаружено удовлетворительного ответа на поставленный вопрос, касающийся возможности применения языковой модели для выделения характеристик атомной электростанции. Была показана применимость моделей в таких сферах, как атомная энергетика, биомедицина и материаловедение. Отсутствие научных работ, описывающих применение языковых моделей для анализа и выделения характеристик атомных электростанций, подчеркивает необходимость проведения исследования.

## МЕТОДИКА

В рамках исследования была разработана методика формирования базы данных характе-

ристик атомных электростанций, основанная на применении анализа текстовых данных с использованием языковых моделей (Рис. 1).

Этапы предложенной методики направлены на анализ текстовых данных и формирование информационных профилей сложного технологического объекта, обогащая тем самым процесс принятия решений с учетом более полной и точной информации.

Рассмотрим каждый этап предложенной методики формирования базы данных характеристик сложного технологического объекта.

На первом этапе осуществляется подбор исходных материалов. В качестве входных дан-

ных рассматриваются документы различных форматов, например, PDF, HTML, TXT и др., которые охватывают спектр информации о научных исследованиях, технической документации, отчетах и других источниках, содержащих значимую информацию о функционировании исследуемого объекта. Рассматриваемый этап направлен на обеспечение многостороннего охвата научно-технического контекста, необходимого для последующего детального анализа. В результате отбора формируется набор входных данных, предоставляющих базу для детального исследования характеристик.



Рис. 1. Методика формирования профиля сложного технологического объекта

В рамках предложенной методики на втором этапе осуществляется выделение текстовых данных или загрузка полного текста научной публикации. Рассматриваемый процесс охватывает разделение отобранных текстов на такие разделы, как введение, эксперимент, заключение и приложения. Выделение частей научных публикаций позволяет извлечь технические параметры сложных технологических объектов. Второй этап важен, поскольку не только обеспечивает структурирование данных для дальнейшего анализа, но и выделяет ключевые компоненты текста, на которые будет сфокусирован последующий интеллектуальный поиск, способствуя детальному исследованию характери-

стик и особенностей функционирования атомных электростанций. Также на данном этапе происходит разделение текста на блоки в соответствии с параметрами языковой модели. Рассматриваемый процесс необходим, поскольку языковые модели имеют ограничения на объем текста, который может быть принят для реализации последующей работы. Разделение текста на смысловые блоки позволяет управлять ограничениями по объему текста, предоставляя возможность детального и точного анализа каждого сегмента информации. Разбираемый подход обеспечивает не только соответствие требованиям моделей, но и сохранение семантической целостности каждого выделенного блока, что

## МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ БАЗЫ ДАННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БОЛЬШИХ ЯЗЫКОВЫХ МОДЕЛЕЙ

является ключевым моментом при последующем интеллектуальном анализе.

На третьем этапе методики происходит разработка запросов (промтов), направленных на извлечение характеристик СТО. В рамках предварительно составленного перечня интересующих характеристик создаются запросы, направленные на извлечение соответствующей информации из текстовых блоков научных публикаций. Этап требует анализа и определения технических параметров, которые важны для формирования информационного профиля сложного технологического объекта. Созданные запросы, которые основаны на понимании предметной области, становятся инструментом для выделения релевантных характеристик, предоставляя возможность целенаправленного анализа научных статей.

На следующем этапе методики осуществляется внедрение созданных запросов в языковую модель. Рассматриваемый этап предполагает фактическую реализацию разработанных запросов, направленных на выделение интересующих характеристик атомной электростанции с использованием выбранной языковой модели. Этап является ключевым в анализе, так как именно здесь происходит взаимодействие с технологическими возможностями модели, способной выделить и интерпретировать содержание текста в соответствии с предложенными запросами.

На пятом этапе методики происходит обработка полученных результатов, представленных языковой моделью. Основная задача этого этапа – провести анализ выделенных данных с целью извлечения информации о характеристиках атомной электростанции.

Важным аспектом для рассмотрения становится вопрос о том, как отличить действительные данные от возможных галлюцинаций, которые могут возникнуть в результате особенностей работы модели. Для решения возникшей проблемы предлагаются определенные пути решения:

- использование статистики, ориентированной на характеристики сложного технологического объекта, с установлением пороговых значений для количества рассматриваемых научных публикаций;

- использование экспертного мнения, позволяющего провести проверку данных и выявить возможные галлюцинации большой языковой модели. Эксперт, опираясь на свой профессиональный опыт, может дать оценку досто-

верности информации, что повышает уровень доверия к результатам анализа;

- использование таких реферированных исходных данных, как рецензируемые научные публикации, официальные отчеты, подготовленные экспертами в соответствующей предметной области, поскольку эти источники подвергаются тщательной экспертной оценке и строгому рецензированию, что гарантирует высокий уровень валидности представленной информации;

- помимо вышеописанных способов решения проблемы, связанной с галлюцинациями, необходимо упомянуть о надстройке (корректировка параметров большой языковой модели для оптимизации ее работы) нейросетевой архитектуры согласно относящейся к ней документации.

Таким образом, обработка результатов запросов представляет этап, который предоставляет механизмы для выявления и фильтрации галлюцинаций в отношении характеристик сложного технологического объекта.

На заключительном этапе методики выполняется процесс загрузки обработанных данных в базу данных. Основываясь на результатах анализа и обработки запросов языковой моделью, формируется итоговый профиль атомной электростанции. Рассматриваемый профиль включает в себя разнообразные элементы, среди которых название сложного технологического объекта, его технические характеристики, результаты выделения ключевых характеристик атомных электростанций, а также научные публикации, связанные с выбранным сложным технологическим объектом.

База данных служит центральным хранилищем для практичного хранения полученных данных, обеспечивая доступ к информации для последующего использования. Профиль сложного технологического объекта представляет собой набор данных, обогащенный аналитической информацией, что позволяет представить характеристики и особенности рассматриваемой электростанции.

В рамках апробации предложенной методики проведены:

- 1) сравнительный анализ доступных больших языковых моделей;

- 2) автоматическое выделение характеристик атомной электростанции из научных публикаций с использованием языковых моделей для выбора нейросетевой архитектуры, которая будет развернута локально;

3) автоматическое выделение характеристик атомной электростанции из полного текста научных публикаций с поочередной загрузкой и последующей обработкой каждого файла по очереди с использованием языковой модели (ход эксперимента: загрузка одной научной публикации, написание запросов для получения 35 характеристик, получение ответов на запросы, удаление рассматриваемой статьи, загрузка следующего файла и т.д.);

4) автоматическое выделение характеристик атомной электростанции из полного текста научных публикаций с одновременной загрузкой и последующей одновременной обработкой всех файлов с использованием языковой модели (ход эксперимента: загрузка 60 научных публикаций, написание запросов для получения 35 характеристик, получение ответов на запрос, удаление всех файлов);

5) автоматическое выделение характеристик атомной электростанции из полного текста научных публикаций с поочередной загрузкой файлов и обработкой каждого из них пять раз подряд с использованием языковой модели (ход эксперимента: загрузка 60 научных публикаций, написание запросов пять раз подряд для получения 35 характеристик, получение ответов на запрос, удаление всех файлов).

Проведенные эксперименты с целью определения наилучшего подхода для автоматического выделения характеристик сложного технологического объекта из научных публикаций позволили оценить различные методы обработки данных. Выделенные характеристики применены для тестового наполнения базы данных, что предоставило возможность оценить предложенную методику формирования базы данных характеристик сложного технологического объекта.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Для выделения характеристик атомной электростанции из научных публикаций на основе критериев (доступность, языки обучения, работа с текстовыми файлами, объем принимаемого текста, количество запросов в диалоге, наличие API, opensource) выбраны такие языковые модели, как Mistral 7B (PrivateGPT), ChatGPT и Claude.

Последующий эксперимент заключался в автоматическом выделении характеристик атомной электростанции из научных публикаций с использованием языковых моделей, последние продемонстрировали способность извлекать

фактическую информацию из статей, но также выявили некоторые области для улучшения [2]. В итоге для создания и апробации методики выбрана Mistral 7B (PrivateGPT), которая для проведения исследования была развернута локально, на кафедре № 65 «Анализ конкурентных систем» ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ». Для применения искусственного интеллекта необходимы такие технические характеристики компьютера, как:

- операционная система Microsoft Windows 10 Pro;
- процессор Intel(R) Core(TM) i7-6850K CPU @ 3.60GHz, 3601 МГц, ядер – 6, логических процессоров – 12;
- установленная оперативная память (RAM) 64,0 ГБ.

Рассматриваемые характеристики демонстрируют, что компьютер оснащен достаточной вычислительной мощностью и объемом оперативной памяти для работы с языковыми моделями.

Проведенные эксперименты, направленные на выделение характеристик сложных технологических объектов из текстовых массивов данных, для последующего тестового наполнения базы данных продемонстрировали [3–5]:

- в результате первого эксперимента составлен профиль атомной электростанции Линьбао, состоящий из 25 извлеченных языковой модели характеристик, время выполнения эксперимента составило 22 часа;
- в результате второго эксперимента получен профиль атомной электростанции Линьбао, состоящий из 18 характеристик, время выполнения эксперимента составило два часа;
- в результате третьего эксперимента получен профиль атомной электростанции Линьбао, состоящий из 10 характеристик, время выполнения эксперимента составило три часа.

Таким образом, автоматическое выделение характеристик атомной электростанции из полного текста научных публикаций с загрузкой и последующей обработкой файлов по очереди с использованием языковой модели Mistral 7B (PrivateGPT) показало наилучшие результаты в сравнении с другими проведенными экспериментами (извлечены 25 из 35 запрашиваемых характеристик) без галлюцинаций благодаря ранее проведенной настройке большой языковой модели. Для повышения качества работы модели и получения полноценного информационного профиля СТО необходимо расширение

ее знаний в соответствующей области, проведение настройки алгоритмов, внедрение дополнительных механизмов проверки извлеченных данных, а также увеличение объема рассматриваемых данных.

Для проверки корректности вышеописанных действий выполнено тестовое наполнение базы данных, полученной в результате проведения второго эксперимента, информацией (60 научных публикаций, 35 характеристик, 36 запросов, 2160 ответов).

Результаты апробации подтвердили корректность работы разработанной методики и ее готовность к использованию с большим массивом информации. Применение искусственного интеллекта позволяет извлекать необходимые данные из большого количества научных статей, в частности, характеристики атомных электростанций. Для практического использования полученных результатов можно рекомендовать применение больших языковых моделей в информационных системах предприятий атомной отрасли для ускорения обработки и анализа больших массивов информации.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленном исследовании разработана и апробирована методика формирования базы данных характеристик сложного технологического объекта на примере атомной электростанции. Методика основана на применении больших языковых моделей для автоматизированного извлечения необходимой информации из научных публикаций.

Проведенные эксперименты продемонстрировали способность языковых моделей выделять характеристики сложных технологических объектов из текстовых массивов данных. Наилучшие результаты достигнуты при обработке публикаций по очереди с использованием языковой модели Mistral 7B (PrivateGPT), что позволило извлечь 25 из 35 запрашиваемых характеристик из 60 научных публикаций.

Разработанная методика включает этапы сбора входных данных, выделения и разделения текста на блоки, составления запросов к языковой модели, обработки результатов и загрузки данных в базу. В рамках апробации подтверждена работоспособность предложенного подхода.

Применение искусственного интеллекта и больших языковых моделей открывает возможности для ускорения процесса выявления целе-

вой информации, содержащейся в научных публикациях. Предложенная методика может быть использована в информационных системах предприятий для обработки больших массивов данных.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает искреннюю благодарность и признательность за неоценимую поддержку и профессиональное руководство коллективу кафедры № 65 «Анализ конкурентных систем» ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Polak M.P., Morgan D. Extracting accurate materials data from research papers with conversational language models and prompt engineering // *Nature Communications*, 2024. V. 15(1), 1569.
2. Yao Y., Duan J., Xu K., Cai Y., Sun Z., Zhang Y. A survey on large language model (LLM) security and privacy: The good, the bad, and the ugly // *High-Confidence Computing*, 2024. 100211.
3. Sui Y., Zhou M., Zhou M., Han S., Zhang D. Table meets LLM: Can large language models understand structured table data? A benchmark and empirical study // *Proceedings of the 17th ACM International Conference on Web Search and Data Mining*, 2024. P. 645–654.
4. Федорова А.А. Необходимые правила потребления информации для снижения негативного влияния информационного общества // *Скиф. Вопросы студенческой науки*, 2020. № 5–1. С. 157–162.
5. Jiang A.Q., Sablayrolles A., Mensch A., Bamford C., Chaplot D.S., etc. Mistral 7B. arXiv preprint arXiv:2310.06825.
6. Ali A.H., Alajanbi M., Yaseen M.G., Abed S.A. Chatgpt4, DALL·E, Bard, Claude, BERT: Open Possibilities // *Babylonian Journal of Machine Learning*, 2023. P. 17–18.
7. Dubois Y., Li C.X., Taori R., Zhang T., Gulrajani I., Ba J., etc. AlpacaFarm: A simulation framework for methods that learn from human feedback // *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2024. V. 1. URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.14387>
8. Chaka C. Detecting AI content in responses generated by ChatGPT, YouChat, and Chatsonic: The case of five AI content detection tools // *Journal of Applied Learning and Teaching*, 2023. V. 6(2). P. 1–11.
9. Кумратова А.М., Морозова Н.В., Василенко А.И., Козгай И.Е. Анализ возможностей нейронной сети на основе языковой модели GPT-3 и способы ее применения на производстве // *Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки*, 2023. Вып. 1 (316). С. 80–85.

10. Zhan T., Shi C., Shi Y., Li H., Lin Y. Optimization Techniques for Sentiment Analysis Based on LLM (GPT-3) // *Applied and Computational Engineering*, 2024. V.67(1). P.41-47.

11. Yenduri G., Ramalingam M., Selvi G.C., Supriya Y., Srivastava G., etc. GPT (generative pre-trained transformer) – a comprehensive review on enabling technologies, potential applications, emerging challenges, and future directions // *IEEE Access*, 2023. DOI: 10.1109/ACCESS.2024.3389497

12. Wang B., Xie Q., Pei J., Chen Z., Tiwari P., Li Z., Fu J. Pre-trained language models in biomedical domain: A systematic survey // *ACM Computing Surveys*, 2023. V. 56(3), P. 1–52.

13. Hong Z., Ward, L., Chard, K., Blaiszik, B., Foster I. Challenges and advances in information extraction

from scientific literature: a review // *JOM*, 2021. V. 73(11), P. 3383–3400.

14. Han S., Zhang R.F., Shi L., Richie R., Li, H., Tseng A., etc. Classifying social determinants of health from unstructured electronic health records using deep learning-based natural language processing // *Journal of biomedical informatics*, 2022. V. 127. 103984.

15. Kåhrström, F. Natural Language Processing for Swedish Nuclear Power Plants: A study of the challenges of applying Natural language processing in Operations and Maintenance and how BERT can be used in this industry. Visby: Uppsala Universitet, 2022.

URL: <http://uu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1678697/FULLTEXT01.pdf>

---

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 5, pp. 350–357

---

## METHODOLOGY FOR FORMING A DATABASE OF CHARACTERISTICS OF A COMPLEX TECHNOLOGICAL OBJECT USING LARGE LANGUAGE MODELS

A.R. Matveeva\*, E.V. Antonov

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409, Russia

\*e-mail: [armatveeva@gmail.com](mailto:armatveeva@gmail.com)

Received July 05, 2024; revised August 21, 2024; accepted September 10, 2024

Nuclear energy plays an important role in ensuring the safety of many countries in the world. When designing and operating complex technological objects (CTO) such as nuclear power plants (NPP), it is critical to take into account their characteristics to ensure safe operation. The relevance of the research topic lies in the need to develop a methodology that can speed up the process of identifying target information contained in scientific publications for nuclear industry enterprises. The lack of scientific papers describing the use of language models for analyzing and extracting characteristics from complex technological objects emphasizes the need for research. In this paper, a NPP is chosen as an example of such an object. To conduct a series of experiments to identify the technical characteristics of the CTO, a list of parameters of the nuclear power plant profile (35 parameters) was compiled and a data set on nuclear power plants was formed (60 scientific publications containing information about the Ling Ao NPP). A program was developed that allows processing the data contained in scientific publications by loading articles into a language model, writing queries and receiving responses for subsequent compilation of a profile of a complex technological object. The results of the work showed that the proposed technique allows programmatic processing of scientific publications to compile a profile of a NPP.

*Keywords:* large language models, nuclear power plant, scientific publications, automated data processing.

### REFERENCES

1. Polak M.P., Morgan D. Extracting accurate materials data from research papers with conversational language models and prompt engineering. *Nature Communications*, 2024. Vol. 15(1), 1569.

2. Yao Y., Duan J., Xu K., Cai Y., Sun Z., Zhang Y. A survey on large language model (LLM) security and privacy: The good, the bad, and the ugly. *High-Confidence Computing*, 2024. 100211.

3. Sui Y., Zhou M., Zhou M., Han S., Zhang D. Table meets LLM: Can large language models understand

structured table data? A benchmark and empirical study. *Proceedings of the 17th ACM International Conference on Web Search and Data Mining*, 2024. Pp. 645–654.

4. Fedorova A.A. Neobhodimye pravila potrebleniya informacii dlya snizheniya negativnogo vliyaniya informacionnogo obshchestva [Necessary rules for information consumption to reduce the negative impact of the information society]. *Skif. Voprosy studentcheskoj nauki*, 2020. No. 5–1. Pp. 157–162 (in Russian).

5. Jiang A.Q., Sablayrolles A., Mensch A., Bamford C., Chaplot D.S., etc. Mistral 7B. arXiv preprint arXiv:2310.06825.

6. Ali A.H., Alajanbi M., Yaseen M.G., Abed S.A. Chatgpt4, DALL·E, Bard, Claude, BERT: Open Possibilities. *Babylonian Journal of Machine Learning*, 2023. Pp. 17–18.
7. Dubois Y., Li C.X., Taori R., Zhang T., Gulrajani I., Ba J., etc. AlpacaFarm: A simulation framework for methods that learn from human feedback. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2024. V. 1. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.14387>
8. Chaka C. Detecting AI content in responses generated by ChatGPT, YouChat, and Chatsonic: The case of five AI content detection tools. *Journal of Applied Learning and Teaching*, 2023. Vol. 6(2). Pp. 1–11.
9. Kumratova A.M., Morozova N.V., Vasilenko A.I., Kogaj I.E. Analiz vozmozhnostej nejronnoj seti na osnove yazykovoj modeli GPT-3 i sposoby ee primeneniya na proizvodstve [Analysis of the capabilities of a neural network based on the GPT-3 language model and methods of its application in production]. *Vestnik Adygejskogo gosudarstvennogo universiteta. S.4: Estestvenno-matematicheskie i tekhnicheskie nauki*, 2023. Iss. 1 (316). Pp. 80–85 (in Russian).
10. Zhan T., Shi C., Shi Y., Li H., Lin Y. Optimization Techniques for Sentiment Analysis Based on LLM (GPT-3). *Applied and Computational Engineering*, 2024. Vol. 67(1). Pp. 41–47.
11. Yenduri G., Ramalingam M., Selvi G.C., Supriya Y., Srivastava G., etc. GPT (generative pre-trained transformer) – a comprehensive review on enabling technologies, potential applications, emerging challenges, and future directions. *IEEE Access*, 2023. DOI:10.1109/ACCESS.2024.3389497
12. Wang B., Xie Q., Pei J., Chen Z., Tiwari P., Li Z., Fu J. Pre-trained language models in biomedical domain: A systematic survey. *ACM Computing Surveys*, 2023. Vol. 56(3). Pp. 1–52.
13. Hong Z., Ward, L., Chard, K., Blaiszik, B., Foster I. Challenges and advances in information extraction from scientific literature: a review. *JOM*, 2021. Vol. 73(11), Pp. 3383–3400.
14. Han, S., Zhang R. F., Shi L., Richie R., Li, H., Tseng A., etc. Classifying social determinants of health from unstructured electronic health records using deep learning-based natural language processing. *Journal of biomedical informatics*, 2022. Vol. 127. 103984.
15. Kährström F. Natural Language Processing for Swedish Nuclear Power Plants: A study of the challenges of applying Natural language processing in Operations and Maintenance and how BERT can be used in this industry. Visby. Uppsala Universitet, 2022. URL: <http://uu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1678697/FULLTEXT01.pdf>

УДК 004.93'12

## АВТОМАТИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО КОНТРОЛЯ МОДУЛЕЙ ИНДИКАЦИИ ДАТЧИКОВ ДАВЛЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ СИСТЕМЫ МАШИННОГО ЗРЕНИЯ

*И.В. Днепровский*

*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия  
e-mail: tomnylow2@gmail.com*

Поступила в редакцию: 15.07.2024

После доработки: 15.07.2024

Принята к публикации: 24.09. 2024

В статье рассматривается применение различных алгоритмов машинного зрения для автоматизации функционального контроля ЖК-дисплеев датчиков давления. Анализируются нейронные сети и классические алгоритмы, а также разработанный автором алгоритм. Цель исследования – найти алгоритм, который может быть использован при разработке системы автоматического контроля дисплеев. Алгоритм должен обладать высокой точностью и минимизировать количество ложноотрицательных результатов, чтобы избежать пропуск бракованных изделий. Также он должен быть способен выявлять дефекты подсветки, отсутствие свечения сегментов, неожиданное свечение сегментов, пятна и механические повреждения на дисплее. В статье описаны этапы разработки алгоритма, включая предобработку изображений, бинаризацию, анализ и поиск дефектов. Представленные результаты тестирования алгоритма на тестовой выборке подтверждают его высокую точность и полноту. В ходе работы установлено, что ни один стандартный алгоритм не подходит для функционального контроля модулей индикации, в то время как разработанный автором алгоритм полностью удовлетворяет всем требованиям. Разработанный алгоритм использован для создания системы автоматического контроля ЖК-дисплеев, в настоящий момент применяемой в производстве датчиков давления.

*Ключевые слова:* машинное зрение, контроль качества, распознавание образов, жидкокристаллический дисплей.

**DOI: 10.26583/vestnik.2024.5.8**

**EDN VPCWIG**

### ВВЕДЕНИЕ

Первые программные системы обработки изображений начали появляться в 1960-е гг. Тогда же начались прикладные исследования в области распознавания печатных символов [1]. Однако промышленное внедрение комплексов машинного зрения стало возможным лишь в 1980-е гг. благодаря расширению технических возможностей вычислительных систем. В качестве примера можно привести аппарат технического зрения Autovision II, представленный в 1983 г. [2], в котором использовался алгоритм поиска блобов – сгущений одноцветных пикселей для диагностики выпускаемой продукции.

С середины 1990-х гг. подход к обработке изображений основывается на модульной парадигме – обработка изображений должна происходить на различных последовательных уровнях информации: от представления объектов в виде растрового изображения к их символическому представлению. Эти принципы заложены

в современные алгоритмы машинного зрения [3].

Современные технологии машинного зрения включают в себя нейронные сети, методы распознавания образов и объектов на изображениях, что делает возможным создание автономных систем, способных воспринимать и анализировать информацию в реальном времени [4]. Развитие алгоритмов машинного зрения и эволюция вычислительной техники делают данную технологию широкодоступной [5].

Используемый до настоящего времени метод контроля модулей индикации оператором, предполагающий выполнение по существующим методикам значительного числа ручных операций, не позволяет снизить число ошибок человека, неизбежно возникающих из-за общего монотонного характера многократно повторяемых им типовых операций.

Таким образом, цель настоящей работы – нахождение оптимального алгоритма машинно-

го зрения для автоматического контроля качества ЖКИ (жидкокристаллический индикатор).

Объект исследования – алгоритмы машинного зрения.

Предмет исследования – качество распознавания дефектов ЖКИ данными алгоритмами.

### Изучение существующих технологий

Системы машинного зрения, применяемые на промышленном производстве, обычно называют *системами технического зрения*. Как правило, они создаются под нужды конкретного заказчика [6], в связи с чем единый подход к их разработке отсутствует, что затрудняет непосредственное сравнение существующих решений между собой. Вместе с тем все системы технического зрения имеют схожую аппаратную и алгоритмическую структуру.

Примерами успешной реализации такого рода оборудования является продукция компании Mallenom Systems, которая поставляется заказчику в готовом для использования виде. Несмотря на то, что конкретные аппаратно-технические решения, применяемые данными компаниями, являются коммерческой тайной [7], они, как и большинство коммерческих систем, имеют между собой много общего.

Классическое устройство для создания системы технического зрения включает в себя несколько основных компонентов [7]:

- одна или несколько камер (монохромные или цветные);
- процессор;
- программное обеспечение для компьютерного зрения;
- устройства ввода/вывода или каналы связи для отображения полученных результатов, взаимодействия с автоматическими системами.

В целом преимуществами систем технического зрения являются:

- высокая производительность, обусловленная программной обработкой данных и принятием решений;
- точность и надежность благодаря отсутствию оператора, которому свойственны усталость и ошибки;
- применимость в сложных условиях, где человеческое восприятие ограничено или невозможно.

Среди недостатков систем технического зрения стоит отметить:

- высокие финансовые затраты на их внедрение, особенно на начальном этапе;
- сложность настройки, требующая привлечения (обучения) квалифицированных специалистов для их калибровки;
- ограничения в восприятии информации по сравнению с человеком, и, как следствие этого, возникновение ошибок в работе<sup>1</sup>.

Непосредственным аналогом разрабатываемой системы является система роботизированного контроля качества электронных плат от компании Остек. Система представляет собой роботизированный комплекс, способный осуществлять контроль расположения компонентов, качество пайки, нанесение покрытий, наличие механических дефектов на компонентах<sup>2</sup>.

Данная система может быть дообучена распознаванию пользовательских дефектов на печатных платах, т.е. возможно ее применение для функционального контроля модулей ЖКИ. Исходя из этого, можно сделать вывод о том, что система использует предобученные сверточные нейронные сети.

### Исходная система функционального контроля

Функциональный контроль модулей ЖКИ представляет собой процесс проверки работоспособности всех символов на дисплее, равномерность его засветки, яркость подсветки, отсутствие механических повреждений, работоспособность кнопок и микропереключателей (рис. 1).

Функциональный контроль заключается в проверке контрастности включенных символов, отсутствии свечения выключенных, равномерности подсветки дисплея<sup>3</sup>.

Такой подход имеет ряд недостатков:

- низкая производительность – для проверки одного ЖКИ нужно более 30 с;

<sup>1</sup> Как работает машинное зрение: алгоритмы и задачи // Блог компании Siderus: [Электронный ресурс]. URL: <https://siderus.ru/blog/tehnologii/kak-rabotaet-mashinnoe-zrenie-algoritmy-i-zadachi/> (дата обращения: 04.01.2024).

<sup>2</sup> Opisanie robotizirovannoj sistemy' opticheskogo kontrolya FLEX: Robotoinspekciya [Description of the robotic optical inspection system FLEX: Robotic inspection] // Ostec company blog: [website]. Available at: <https://ostec-flex.ru/solutions/robotizirovannaya-sistema> (access date: 04.01.2024).

<sup>3</sup> Инструкция по функциональному контролю ТЖИУ.687281.273И14 / М.: ФГУП «ВНИИА им. Н.Л. Духова», 2010. 28 с.

– человеческий фактор – оператор может не заметить неравномерность подсветки или дефекты контрастности сегментов.

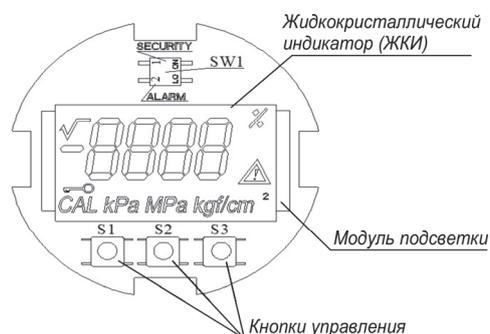


Рис. 1. Общий вид модуля ЖКИ

Проверка ЖКИ оператором занимает от 30 до 35 секунд (от 1.5 до 1.8 секунды на один символ), при должной квалификации оператора. Время проверки может увеличиваться ввиду усталости, также из-за этого оператор может пропускать некоторые шаги проверки.

Таким образом, имеющаяся система является морально устаревшей и не позволяет обеспечивать релевантный уровень производительности современного производства. Требуется ее замена системой, минимизирующей влияние человеческого фактора, для чего требуется найти алгоритм машинного зрения, способный к обнаружению всех вышеуказанных возможных дефектов.

## 1. АНАЛИЗ СУЩЕСТВУЮЩИХ АЛГОРИТМОВ МАШИННОГО ЗРЕНИЯ

### 1.1. Общий подход к анализу изображений

Подготовка изображений для применения в обучении любого алгоритма представляет собой этап, который напрямую влияет на эффективность и точность обучения модели [8]. Для достижения оптимального качества обучающего набора данных применяются различные техники.

Сжатие изображений представляет собой процесс уменьшения их размеров путем объединения соседних пикселей в один. Это позволяет уменьшить объем данных, необходимых для обучения, и сократить вычислительные затраты.

Бинаризация изображений включает преобразование многоканального формата изображения (например, RGB) в одноканальный бинарный формат, где каждый пиксель представлен

Примеры некачественно проверенных модулей приведены на рис. 2.



Рис. 2. Модули, прошедшие некачественный контроль

значением 0 или 1 в зависимости от установленного порогового значения. Пороговое значение – величина, определяющая границу яркости пикселя, выше которой он будет переведен в 1 – белый пиксель, ниже – в 0, т.е. черный пиксель. Пороговое значение может быть единым для всего изображения, определяемым заранее, или иметь различную величину в разных частях изображения, адаптируясь так, чтобы выделять контрастные детали.

В рамках решения задачи по поиску дефектов на дисплеях имеет значение обрезка изображений вдоль контура дисплея. Для достижения данной цели требуется применение алгоритмов поиска границ.

Алгоритмы поиска границ используются для выявления контуров объектов на изображении, что позволяет определить область интереса. Морфологические замыкания позволяют устранить небольшие пробелы или дефекты в контуре, обеспечивая более точное выделение границы. В работе используется алгоритм Кенни, поскольку он является наиболее распространенным и универсальным [8].

Аугментация изображений включает в себя создание дополнительных вариаций обучающих изображений путем применения различных преобразований: поворот, сдвиг, изменения масштаба и добавление шума. Этот процесс увеличивает разнообразие обучающих данных, что, в свою очередь, помогает повысить обобщающую способность модели и уменьшить риск переобучения [9]. Аугментация является неотъемлемой частью процесса обучения сверточных нейронных сетей, поскольку для их обучения требуется большой объем обучающих данных, который часто недоступен в реальных условиях.

Важно отметить, что предобработка изображений на этапе обучения должна полностью совпадать с предобработкой, применяемой к уже обученной нейросети в реальных условиях эксплуатации. Это гарантирует правильное функционирование и обеспечивает согласованность между предсказаниями модели, полученными в процессе обучения, и ее реальным поведением на практике.

## 1.2. Метрики качества

Для оценки эффективности предсказаний алгоритма используется тестовый набор данных, который представляет собой подмножество обучающего набора, которое не было использовано в процессе обучения. Этот набор позволяет оценить обобщающую способность на данных, которые не были известны во время обучения [9].

Matrix of confusion, также известная как матрица ошибок, является инструментом для визуализации производительности бинарной классификационной модели – модели, имеющей два ответа – 0 и 1, которые могут быть интерпретированы как принадлежность или непринадлежность к классу. Обычно считается, что класс 1 представлен меньшим числом экземпляров. Существует аналог матрицы ошибок для задачи классификации с большим числом классов.

Матрица состоит из четырех основных компонентов: true positives (TP), false positives (FP), true negatives (TN) и false negatives (FN).

Выбор между такими различными показателями оценки, как точность, полнота и прецизионность, может зависеть от конкретной задачи [8]. Точность (accuracy) измеряет общую способность модели делать правильные прогнозы для всех классов, однако неинформативна при существенно различном числе элементов в классах. Точность – отношение числа правильных прогнозов ко всем прогнозам. Если ложноположительные результаты (false positives) являются более критичными, чем ложноотрицательные (false negatives), то прецизионность (precision) можно считать более важным показателем. Если важно минимизировать количество ложно-отрицательных результатов, то полнота (recall) становится более значимой метрикой. F-мера объединяет в себе полноту и прецизионность и является универсальной, однако может не подходить для специфических задач (рис. 3).

	<i>Actual</i>	0	1	
<i>Predict</i>				
0		TN	FN	$Precision = \frac{TP}{TP + FP}$
1		FP	TP	$Recall = \frac{TP}{TP + FN}$
				$F1\ Score = \frac{2 * Precision * Recall}{Precision + Recall}$
				$Accuracy = \frac{TP+TN}{TP+TN+FP+FN}$

Рис. 3. Матрица ошибок и метрики качества

При поиске дефектов ЖКИ критична минимизация числа ложноотрицательных результатов, т.е. пропуска брака в дальнейшее производство. Исходя из этого, ключевая характеристика – полнота.

При этом алгоритм не должен допускать значительного количества ложноположительных срабатываний, поскольку в таком случае потребуется частое вмешательство оператора в процесс контроля. При объеме проверки около 300 дисплеев в день и дополнительных затратах времени на повторный контроль человеком в 20 с, допустимый уровень прецизионности должен быть не ниже 0.95. Это дает дополнительные 5 мин работы оператора в день.

## 1.3. Тестирование качества распознавания дефектов алгоритмами

### 1.3.1. Сверточная нейросеть

Для создания сверточных нейронных сетей использовалась библиотека Tensorflow для языка программирования Python.

Так как при создании любой нейросети заранее неизвестно, какая структура покажет лучшие результаты [8], было проведено исследование качества распознавания фото неисправных и работоспособных дисплеев.

В ходе экспериментов использовались различные структуры нейронных сетей: AlexNet, MobileNet, сеть собственной структуры.

AlexNet – сверточная нейронная сеть, которая стала прорывом в области компьютерного зрения и глубокого обучения, когда была представлена в 2012 г. [8]. Структура сети приведена на рис. 4.

MobileNet – легковесная нейронная сеть, созданная Google, специально оптимизированная для использования на мобильных устройствах и встроенных системах с ограниченными ресурсами [9]. Использование легковесной сети было предпочтительно ввиду ограниченных вычис-

лительных возможностей технологических ПК производства. Структура сети приведена на рис. 5.

Для сравнения с готовыми нейросетями была написана простая сеть, состоящая из трех свер-

точных слоев, трех слоев пуллинга, слоя преобразования в одномерный массив и двух слоев полносвязной сети (рис. 6).

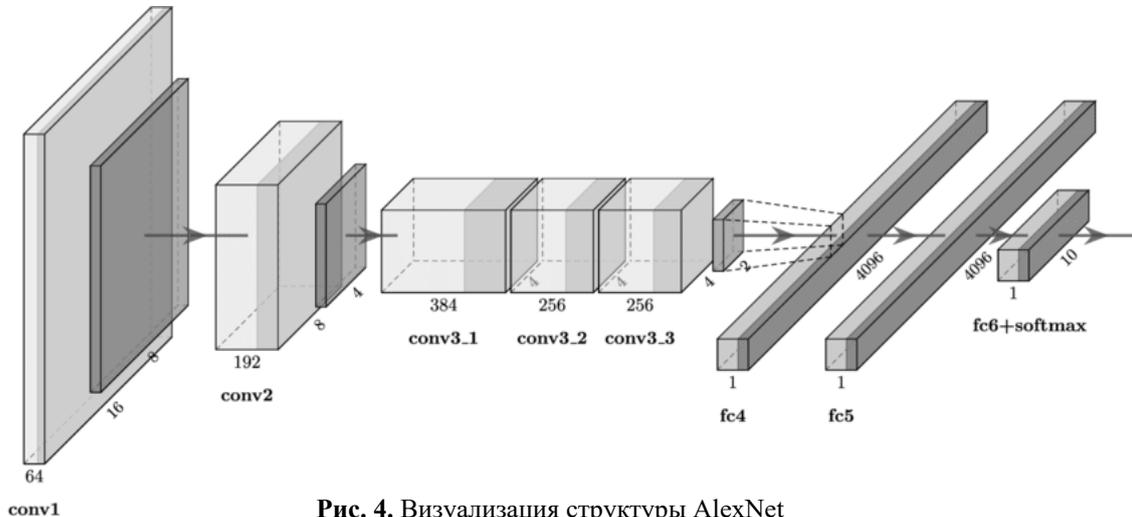


Рис. 4. Визуализация структуры AlexNet

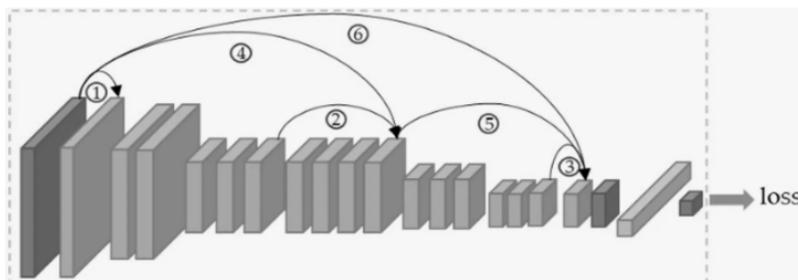


Рис. 5. Визуализация MobileNet

```

model = Sequential([
    # Сверточный слой с 32 фильтрами размером 3x3, активация ReLU, входной размер
    # изображения 200x300, 1 канал цвета
    Conv2D(32, (3, 3), activation='relu', input_shape=(200, 300, 1)),
    # Слой пуллинга с окном размером 2x2 для уменьшения размерности
    MaxPooling2D((2, 2)),
    Conv2D(64, (3, 3), activation='relu'),
    MaxPooling2D((2, 2)),
    Conv2D(128, (3, 3), activation='relu'),
    MaxPooling2D((2, 2)),
    # Выравнивающий слой для подготовки данных к подаче на полносвязный слой
    Flatten(),
    # Полносвязный слой с 128 нейронами и активацией ReLU
    Dense(128, activation='relu'),
    # Выходной слой с 20 нейронами для классификации на 20 классов и активацией
    softmax
    Dense(20, activation='softmax')
])
    
```

Рис. 6. Структура разработанной сети на языке Python

Также в процессе разработки было неясно, стоит ли выносить каждый символ в отдельный класс и решать задачу мультиклассовой классификации или объединить изображения рабо-

тоспособных символов в один класс, а всех неисправных – в другой, и решать более простую задачу бинарной классификации.

Была подготовлена обучающая выборка фотографий дисплея, с помощью алгоритма аугментации каждой исходной фотографии было поставлено в соответствие 10 фото с добавлением шума, размытия и поворота. Таким образом, обучающая выборка составила около 130 тысяч изображений.

**Бинарная классификация.** При разделении выборки на два класса – исправные и неисправные, наблюдается дисбаланс количества изображений. Это вызвано изначально небольшим количеством фото неисправных дисплеев ввиду числа доступных для имитации неисправностей. Всего в выборке было представлено около 30 видов неисправностей, что после аугментации составляет около 40 тысяч, т.е. около трети всей выборки. Чтобы избежать проблем, связанных с дисбалансом, количество изображений исправных дисплеев было уменьшено примерно до 40 тысяч. Вся выборка делилась на обучающую и тестовую с использованием инструментов Tensorflow, что позволяет сохранить исходное соотношение элементов в классах. Объем тестовой выборки – 20 %, обучающей – 80 %.

На рис. 7–9 представлены матрицы ошибок нейросетей, в табл. 1 приведены метрики качества.

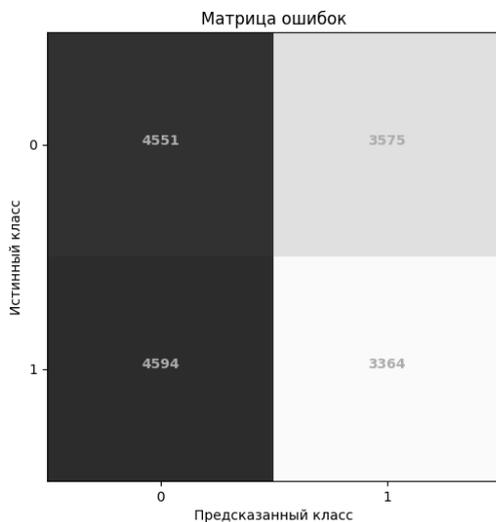


Рис. 7. Матрица ошибок AlexNet

Таблица 1. Метрики точности нейросетей при бинарной классификации

Показатель качества, ед.	AlexNet	MobileNet	Разработанная сеть
Точность	0.49	0.57	0.57
Прецизионность	0.48	0.58	0.57
Полнота	0.42	0.51	0.56

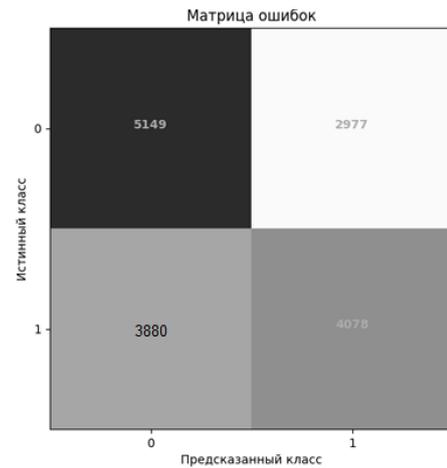


Рис. 8. Матрица ошибок MobileNet

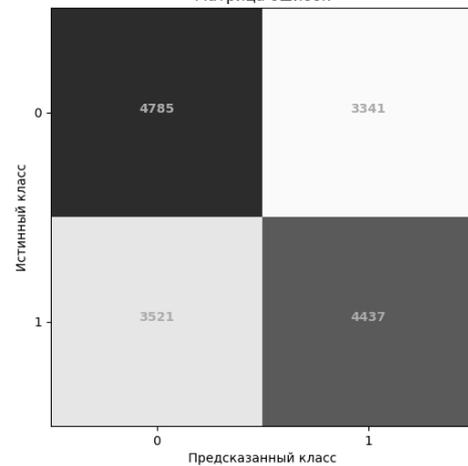


Рис. 9. Матрица ошибок разработанной сети

Из матриц точности и таблицы видно, что AlexNet дает результат, сопоставимый с простым угадыванием. Возможно, это связано со слишком сложной структурой сети, которая не смогла корректно обучиться. MobileNet также показывает неудовлетворительные результаты, однако лучшие чем AlexNet. Результаты разработанной сети схожи с MobileNet и также немногим отличаются от угадывания.

Использование бинарной классификации показало результаты на уровне случайного угадывания, нейросеть при различной внутренней структуре не могла найти общие признаки у различных рабочих символов и отличить их от нерабочих.

**Многоклассовая классификация.** Так как использование бинарной классификации показало неудовлетворительный результат, было решено выделить каждый исправный символ в свой класс, а все неисправные объединить в один. Таким образом, было получено 19 классов

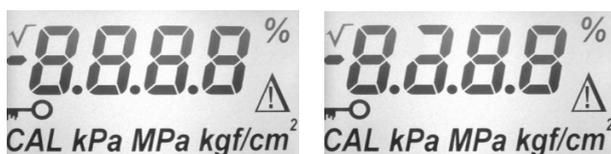
исправных символов, т.е. примерно по 7 тысяч изображений на класс. Результаты работы сетей приведены в табл. 2, матрицы ошибок для большого числа классов теряют наглядность и поэтому не приведены. Используется макроусреднение, так как оно лучше отображает качество распознавания классов, в которых содержится значительно меньше элементов, чем в других.

**Таблица 2.** Метрики точности нейросетей при многоклассовой классификации

Показатель качества, ед.	Alex-Net	Mobile-Net	Разработанная сеть
Точность	0.961	0.985	0.972
Прецизионность (макроусреднение)	0.935	0.945	0.939
Полнота (макроусреднение)	0.923	0.931	0.912

Выделение каждого символа в свой класс позволило обучить нейросети различать рабочие символы между собой с точностью более 99.5 %, но при этом ни одна из них не могла с вероятностью выше 80 % отличить сломанный символ от такого же рабочего, чем и обусловлено снижение полноты и прецизионности.

Выяснить причину, по которой ни одна из сетей не смогла уверенно распознавать неисправные символы, не удалось. Возможно, это вызвано тем, что все нерабочие сегменты в символе всегда выглядят по-разному, но при этом лишь немного отличны от рабочих. Исправный и неисправный символы приведены на рис. 10.



**Рис. 10.** Пример нерабочего сегмента в символе: слева – включены все символы, дисплей исправен; справа – включены все символы, один сегмент отсутствует

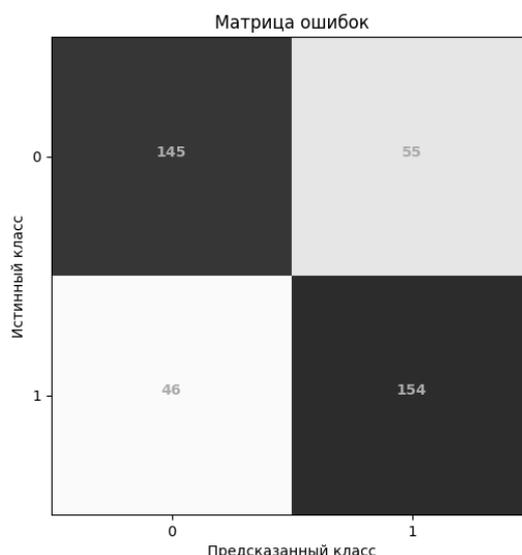
Таким образом, от использования нейросети пришлось отказаться, поскольку не удалось добиться удовлетворительного качества распознавания.

### 2.3.2. Классические классификаторы

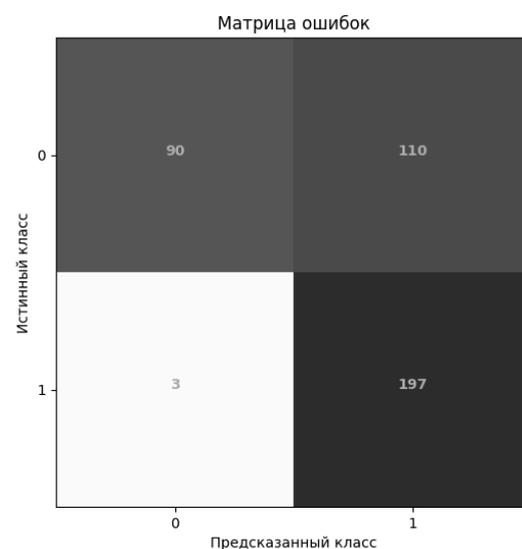
При использовании классических классификаторов входное изображение преобразуется в

одномерный вектор длиной, равной произведению ширины на высоту изображения. Данный метод очень прост, но обладает существенным недостатком – теряется информация о взаимном расположении пикселей в соседних строках и столбцах. Для тестирования качества распознавания дефектов использовались алгоритмы kNN, SVM, LOF. Все указанные алгоритмы реализованы в библиотеке SciKit для Python. Тестирование качества распознавания проводилось аналогично задаче бинарной классификации для нейросетей.

Поскольку данные классификаторы требуют намного меньшего количества исходных данных для обучения, размер обучающей выборки составил 800 фотографий исправных и неисправных дисплеев, тестовой – 200. Результаты приведены на рис. 11–13 и в табл. 3.



**Рис. 11.** Матрица ошибок для SVM



**Рис. 12.** Матрица ошибок для LOF

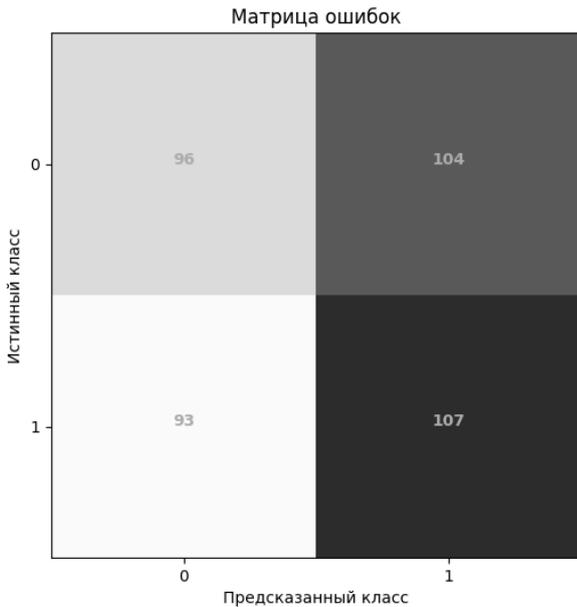


Рис. 13. Матрица ошибок для kNN

Таблица 3. Метрики качества классических классификаторов

Метрики качества, ед.	SVM	LOF	kNN
Точность	0.75	0.72	0.51
Прецизионность	0.74	0.64	0.51
Полнота	0.77	0.98	0.54

Из матриц ошибок и таблицы видно, что SVM показывает результаты лучшие, чем любая нейросеть. LOF имеет наибольшую полноту – количество ложноотрицательных результатов минимально, однако невысокая прецизионность говорит о большом количестве ложноположительных результатов, число которых выходит за рамки допустимого. kNN имеет метрики качества на уровне случайного угадывания. Также в процессе тестирования была выявлена сильная зависимость результатов от изначального качества фото – незначительные изменения угла наклона камеры приводят к сильно отличному результату работы алгоритма. Таким образом, ни один классификатор не может быть использован в разрабатываемой системе.

### 2.3.3. Разработанный алгоритм

Так как использование других алгоритмов показало неудовлетворительные результаты, было решено создать более простой алгоритм, не имеющий возможности интерпретации дефектов в широком диапазоне, но при этом не требующий обучения. Идея алгоритма вдохнов-

лена одной из первых систем машинного зрения – Autovision II [2].

– Работа алгоритма состоит из следующих шагов:

- фотографирование дисплея;
- обрезка фотографии по контуру дисплея и коррекция искажений перспективы;
- сжатие изображения для упрощения анализа;
- бинаризация изображения по заранее установленному порогу;
- поиск черных пикселей внутри заранее размеченных областей;
- анализ заполнения области черными пикселями;
- вынесение вердикта на основании числа черных пикселей в областях.

**Обрезка изображения.** Для коррекции искажений перспективы и поворота при различной установке камеры относительно проверяемого дисплея применяется программная обрезка изображения по контуру дисплея. Обрезка позволяет минимизировать влияние искажений перспективы и наклона камеры.

Процесс начинается с преобразования изначального изображения в бинарный формат, затем применяется операция морфологического замыкания контуров для устранения небольших пробелов. Далее применяется алгоритм Кенни для обнаружения и аппроксимации контуров с использованием многоугольников. Для поиска контура дисплея используется аппроксимация многоугольника четырехугольником.

Алгоритм аппроксимации стремится соединить наиболее удаленные точки таким образом, чтобы ни одна из промежуточных точек не выходила за пределы «коридора» (рис. 14)<sup>1</sup>.

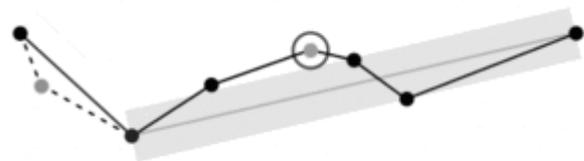


Рис. 14. Визуализация аппроксимации

При аппроксимации четырехугольником настраивается генерация четырех точек с определенным порядком – начиная с правого верх-

<sup>1</sup> Canny Edge Detection [Электронный ресурс]. URL: [https://docs.opencv.org/4.x/da/d22/tutorial\\_py\\_canny.html](https://docs.opencv.org/4.x/da/d22/tutorial_py_canny.html) (дата обращения: 04.01.2024).

него угла против часовой стрелки. Это обеспечивает одинаковую ориентацию изображений на каждой итерации.

В случае неудачной попытки аппроксимации программа сообщает об ошибке пользователю. Ошибка чаще всего вызвана неправильной установкой камеры на плату или проблемами с подсветкой. После успешной аппроксимации программа находит контур с наибольшей площадью, предполагая, что этот контур является краем дисплея. Затем происходит обрезка изображения по найденному контуру с возможностью ручной настройки отступов от края. Это сделано для повышения универсальности алгоритма при использовании различных камер. Далее на рис. 15–18 представлены основные шаги обрезки изображения.

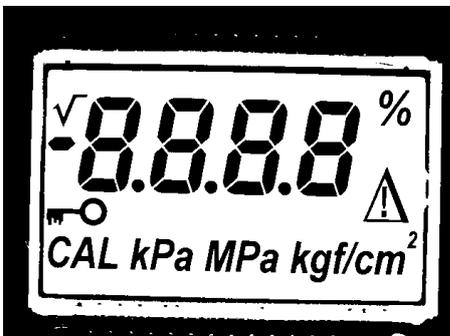


Рис. 15. Бинаризованное изображение до морфологического замыкания

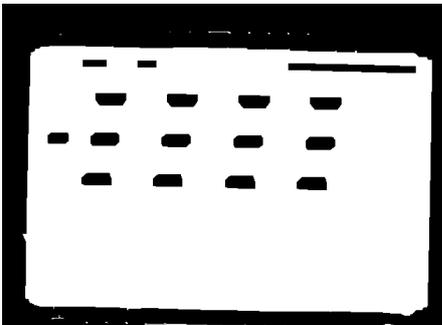


Рис. 16. Бинаризованное изображение после морфологического замыкания



Рис. 17. Фото с найденным контуром, показанным жирным прямоугольником



Рис. 18. Фото после обрезки с учетом пользовательских отступов

Можно видеть, что обрезка позволила исправить искажение поворота и выделить для дальнейшего исследования лишь значимую часть дисплея.

**Предобработка изображения.** После обрезки изображение представляет собой цветную фотографию дисплея. Для улучшения процесса анализа изображения применяются методы сжатия и бинаризации.

Имеется опасность потери деталей изображения при слишком сильном сжатии, например тонких линий в некоторых сегментах. С другой стороны, недостаточное сжатие приведет к замедлению процесса анализа изображения. Экспериментально было установлено, что оптимальным является размер 300 на 200 пикселей для сжатого изображения. После этапа сжатия происходит бинаризация изображения. Применение бинаризации после сжатия, а не до него, позволяет получить более четкие границы сегментов.

Бинаризация основана на использовании фиксированного порога, который был определен экспериментально и составил 130 относительных единиц из 255. Установленное значение порога обеспечивает надежное преобразование фона в белые пиксели, в случае если подсветка функционирует корректно; в противном случае часть с нерабочей подсветкой будет преобразована в черные пиксели (рис. 19).

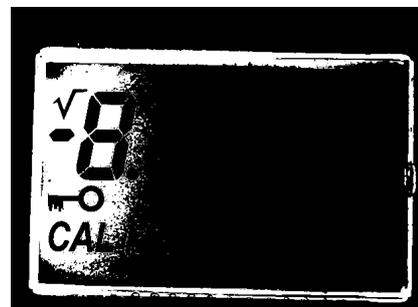


Рис. 19. Пример фото после бинаризации при нерабочем правом светодиоде подсветки

Работоспособные сегменты, обладающие необходимой контрастностью, преобразуются в черные пиксели. Если сегмент имеет низкую

контрастность, то он будет преобразован в белые пиксели в соответствии с этим порогом. Все это позволяет находить дефекты на этапе анализа.

**Анализ.** Для анализа применяются заранее определенные области, представленные в виде прямоугольников. Положение и размеры прямоугольников определяются двумя парами координат: левым верхним и правым нижним углами. Эти координаты сохранены в формате JSON файла в виде словаря, ключами которого являются краткие имена символов, а значениями – кортеж кортежей. Вложенные кортежи хранят информацию о координатах прямоугольников. Дополнительный кортеж требуется для обработки некоторых символов, состоящих из нескольких сегментов. Для проверки таких символов несколько прямоугольников должны проверяться за одну итерацию.

В процессе анализа и во многих других частях программы используется библиотека `numpy`, реализующая широкий спектр математических операций. Сам процесс анализа представляет собой поиск черных пикселей в `numpy` массиве, представляющем сжатое изображение. Использование массива `numpy` и методов поиска ненулевых элементов в нем позволяет увеличить скорость распознавания одного изображения более чем в 4 раза по сравнению с использованием стандартных контейнеров Python.

Если процент черных пикселей внутри области меньше, чем пороговое значение, то область считается пустой, в противном случае – окрашенной. Пороговое значение процента черных пикселей подобрано так, чтобы исключить шум, который мог быть ошибочно принят за черные пиксели там, где их на самом деле нет.

Алгоритм анализирует все области и делает положительное заключение, если все области, где изначально не ожидалось наличие черных пикселей на данном этапе, оказываются пустыми, а все области, где ожидалось их наличие, – окрашенными (рис. 20).

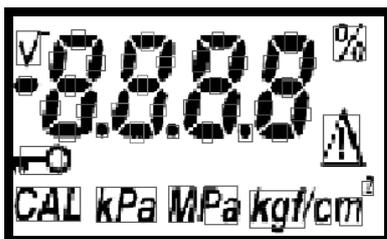


Рис. 20. Визуализация проверяемых областей на сжатой и бинаризованной фотографии

Таким образом, алгоритм позволяет обнаруживать дефекты подсветки, отсутствие свечения сегментов, неожиданное свечение сегментов, пятна и механические повреждения на дисплее (см. рис. 21).

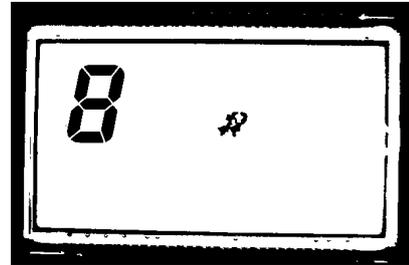


Рис. 21. Пример найденного механического повреждения на этапе проверки отдельных символов

В случае, аналогичном рис. 21, повреждения будут найдены на этапе проверки отдельных символов, если повреждение находится в области одного из символов, либо же на финальной проверке пустого дисплея. Анализ одного изображения занимает менее 0.05 с, однако ввиду инертности ЖКИ для стабилизации работы используется задержка 0.3 с, что дает время полной проверки ЖКИ приблизительно 5.5 с.

Таким образом, использование разработанного алгоритма сокращает время проверки ЖКИ более чем в пять раз.

**Качество поиска дефектов.** Для определения метрик качества разработанной системы было проведено тестирование 100 фотографий дисплея с различной контрастностью. Приемлемый уровень падения контрастности определяется визуально так, чтобы все сегменты сохраняли читаемость при различных углах обзора и внешнем освещении. На основе субъективного предварительного разделения фотографий на две равные группы: с несоответствиями и без них, было проведено тестирование. На рис. 22 приведен пример бинаризованного изображения и исходной фотографии, с отмеченной неисправной областью.

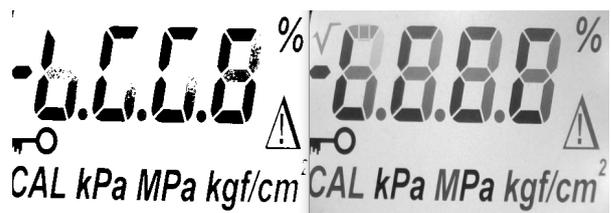
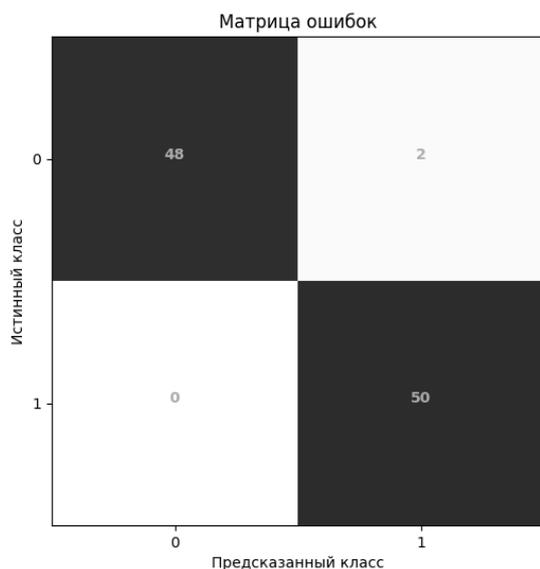


Рис. 22. Пример дисплея с низкой контрастностью символов

При этом можно видеть, что пиксели областей пониженной контрастности, например символы «CAL», «M», «kgf/cm», корректно переводятся в черные, хотя и имеют не максимальную контрастность. На рис. 23 приведена матрица ошибок для разработанной системы, а в табл. 4 – ее метрики качества.



**Рис. 23.** Матрица ошибок для разработанной системы

**Таблица 4.** Метрики качества разработанной системы

Точность, ед.	0.98
Прецизионность, ед.	0.96
Полнота, ед.	1.00

Можно видеть, что полнота равна единице, т.е. система для тестовой выборки всегда обнаруживает платы с дефектами при правильной предварительной настройке, следовательно не имеет ошибки второго рода. Но при этом возможны ошибки первого рода, т.е. признание исправной платы браком. С целью недопущения признания исправного ЖКИ браком в программу, разработанную на основе данного алгоритма должно быть добавлено окно подтверждения, позволяющее оператору убедиться, что непрошедшая автоматический контроль плата действительно имеет несоответствия. Достижение точности распознавания дефектов в 100 % возможно благодаря предварительной настройке рабочего места, в ходе которой настраивается порог бинаризации. Это позволяет в дальнейшем копировать уровень восприятия контрастности человеком. Однако из-за естествен-

ного дрейфа характеристик оборудования, входящего в систему, данный порог может смещаться, что в дальнейшем может приводить к неверной бинаризации. Для того чтобы избежать этого, система должна проходить периодический контроль и настройку.

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ЗНАЧЕНИЕ

В ходе исследования было определено, что ни одна из использовавшихся сверточных нейронных сетей, а также ни один классический классификатор не имели требуемого уровня полноты или прецизионности (см. табл. 1–3).

Разработанный алгоритм напротив, полностью удовлетворяет требованиям (см. табл. 4). Исходя из этого, данный алгоритм был положен в основу создания системы автоматизированного функционального контроля модулей индикации. Разработанное на его основе приложение позволяет управлять устройством проверки и камерой, что, в свою очередь, увеличивает скорость проверки одного дисплея более чем в пять раз по сравнению с проверкой человеком.

Прототип системы проверки, разработанной на основе данного алгоритма, был передан на участок функционального контроля для проверки тестовой партии плат модулей индикации. По результатам тестирования алгоритм показал полную пригодность для решения данной задачи.

По итогам лабораторных испытаний, а также по результатам тестов в производственном отделе планируется внедрение данной системы на участок функционального контроля.

Полученные результаты могут быть не вполне ожидаемыми, так как в последние годы нейросети получили широкое распространение. Однако, как говорится в [10], они не являются оптимальным решением для всех случаев.

Полученные результаты подтверждают то, что классические алгоритмы машинного зрения все еще могут находить применение в решении реальных задач.

При необходимости разработанный алгоритм допускает изменение для контроля других ЖКИ, что может быть использовано для проверки модулей индикации последующих поколений датчиков давления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. David E.E., Selfridge O.G. 1962. Eyes and Ears for Computers // Proceedings of the IRE, 1962, V. 50, Iss. 5. P. 1093–1101. <https://doi.org/10.1109/JRPROC.1962.288011>.

2. Theodore L. Warren, Kenneth R. Whelan, Arnold G. Reinhold. Vision system (Patent No. US4577344A). United States, 1983. Assignee: Acuity Imaging.

3. Емельянов С.Г. Методы и средства обработки изображений // Приборостроение. 2009. Т. 52. № 2. С. 11–12.

4. Vinokurov I.V. Using a convolutional neural network to recognize text elements in poor quality scanned images // Program systems: theory and applications, 2022. V. 13. № 3 (54). P. 45–59.

5. Rokunuzzaman, Jayasuriya, H.P. Development of a low cost machine vision system for sorting of tomatoes // Agricultural Engineering International: The CIGR Journal, 2013. V. 15. P. 173–180.

6. Царева Е. Машинное зрение для контроля качества упаковки выпускаемой продукции // Тара и упаковка, 2019. № 2. С. 10–12. URL: [https://www.mallenom.ru/Docs/Machine\\_vision\\_article\\_may2019.pdf](https://www.mallenom.ru/Docs/Machine_vision_article_may2019.pdf) (дата обращения: 19.04.2024).

7. Раков Н.С., Пальмов С.В. Машинное зрение // Форум молодых ученых. 2018. № 4 (20). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/mashinnoe-zrenie> (дата обращения: 19.04.2024).

8. Гудфеллоу Я., Бенджио И. Глубокое обучение. М.: ДМК Пресс, 2018. 652 с.

9. Мюллер А., Гвидо С. Введение в машинное обучение с помощью Python. М.: Гевиста, 2017.

10. Ferguson Max K, Ronay A., Lee Y-T.T, Law K.H. Detection and Segmentation of Manufacturing Defects with Convolutional Neural Networks and Transfer Learning // Smart Sustain. Manuf. Syst., 2018, V. 2(1), P. 137–164. <http://doi.org/10.1520/SSMS20180033>.

---

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 5, pp. 358–370

---

**AUTOMATION OF FUNCTIONAL CONTROL  
OF PRESSURE SENSOR DISPLAY MODULES USING MACHINE VISION SYSTEMS**

**I.V. Dneprovskii**

National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, 115409, Russia  
e-mail: [tomnylow2@gmail.com](mailto:tomnylow2@gmail.com)

Received July 15, 2024; revised July 15, 2024; accepted September 24, 2024

The article considers the application of various machine vision algorithms for automation of functional testing of LCD displays of pressure sensors. Neural networks and classical algorithms, as well as the algorithm developed by the author, are analyzed. The purpose of the study is to find an algorithm that can be used in the development of an automatic display testing system. The algorithm should be highly accurate and minimize the number of false negative results in order to avoid missing defective products. It should also be able to detect backlight defects, lack of segment glow, unexpected segment glow, spots and mechanical damage on the display. The article describes the stages of algorithm development, including image preprocessing, binarization, analysis and defect search. The presented results of testing the algorithm on a test sample confirm its high accuracy and completeness. In the course of the work, it was found that no standard algorithm is suitable for the functional testing of display modules, while the algorithm developed by the author fully meets all the requirements. The developed algorithm is used to create an automatic LCD display testing system, currently used in the production of pressure sensors.

*Keywords:* machine vision, quality control, pattern recognition, liquid crystal display.

REFERENCES

1. David E.E., Selfridge O.G. 1962. Eyes and Ears for Computers. Proceedings of the IRE, 50, 1093-1101. <https://doi.org/10.1109/JRPROC.1962.288011>.

2. Theodore L. Warren, Kenneth R. Whelan, Arnold G. Reinhold. Vision system (Patent No. US4577344A). United States, 1983. Assignee: Acuity Imaging.

3. Emelyanov S.G. Metody i sredstva obrabotki izobrazhenij [Methods and means of image processing].

Priborostroenie, 2009. Vol. 52, No. 2. Pp. 11–12 (in Russian).

4. *Vinokurov I.V.* Using a convolutional neural network to recognize text elements in poor quality scanned images. Program systems: theory and applications. 2022. Vol. 13, no. 3 (54). Pp. 45–59.

5. *Rokunuzzaman, Jayasuriya, H.P.* Development of a low cost machine vision system for sorting of tomatoes. Agricultural Engineering International: The CIGR Journal, 2013. Vol. 15. Pp. 173–180.

6. *Tsareva E.* Mashinnoe zrenie dlya kontrolya kachestva upakovki vypuskaemoj produkcii [Machine vision for quality control of product packaging]. Tara i upakovka, 2019. No. 2. Pp. 10–12 (in Russian). Available at: [https://www.mallenom.ru/Docs/Machine\\_vision\\_article\\_may2019.pdf](https://www.mallenom.ru/Docs/Machine_vision_article_may2019.pdf) (accessed: 19.04.2024).

7. *Rakov N.S., Palmov S.V.* Mashinnoe zrenie [Machine vision] // Forum molody'x ucheny'x [Forum of young scientists]. 2018. No. 4 (20). Available at: <https://cyberleninka.ru/article/n/mashinnoe-zrenie> (accessed: 19.04.2024).

8. *Goodfellow Y., Bengio I.* Glubokoe obuchenie [Deep learning]. Moscow, DMK Press Publ., 2018. 652 p.

9. *Muller A.* Vvedenie v mashinnoe obuchenie s pomoshch'yu Python [Introduction to Machine Learning with Python]. Moscow, Gevissta Publ., 2017.

10. *Ferguson Max K., Ronay A., Lee Y-T.T, Law K.H.* Detection and Segmentation of Manufacturing Defects with Convolutional Neural Networks and Transfer Learning. Smart Sustain. Manuf. Syst., 2018, Vol. 2(1), Pp. 137–164. <http://doi.org/10.1520/SSMS20180033>.