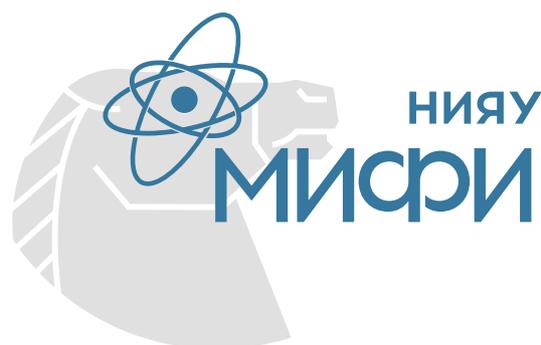


<https://vestnikmephi.elpub.ru>

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ»



ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ»

Том 13 № 8 2024

Основан в июле 2012 г.

Выходит 6 раз в год

ISSN: 2304-487X

ПИ № ФС 77 - 41948

Главный редактор

М.Н. Стриханов

Редакционная коллегия:

А.В. Аксёнов, Pavel Bedrikovetsky,
С.Г. Гаранин, Vladimir S. Gerjikov, Н.Н. Евтихийев,
Yalchin Efendiev, Alexei I. Zhurov, Н.П. Калашников, Н.И. Каргин, С.А. Кащенко,
Н.А. Кудряшов (*заместитель главного редактора*),
Raytcho Lazarov, О.В. Нагорнов, А.Д. Полянин,
В.В. Цегельник, Б.Н. Четверушкин,
М.А. Чмыхов (*ответственный секретарь*), William E. Schiesser

Выпускающий редактор: Н.В. Ермолаева

Адрес редакции: 115409, Москва, Каширское ш., 31,

Вестник НИЯУ МИФИ

Интернет: <https://vestnikmephi.elpub.ru>

Электронная почта: vestnik@mephi.ru

**Москва
НИЯУ МИФИ**

СОДЕРЖАНИЕ

Том 13, № 6, 2024

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

- Нелинейная динамика цилиндрических волн в изотермической плазме**
А. Р. Каримов, Г. О. Буянов 373
-

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

- Законы сохранения, первые интегралы и консервативные плотности обобщенного нелинейного уравнения Герджикова–Иванова**
Д. Р. Нифонтов, Н. А. Кудряшов 380
- Нелинейное уравнение Шредингера с дисперсией и потенциалом общего вида: точные решения и редукции**
А. Д. Полянин, Н. А. Кудряшов 394
- Симметрии и инвариантные решения обобщенных модифицированных уравнений Линя – Рейсснера – Тзяна**
А. И. Землянухин, А. В. Бочкарев 403
-

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

- Анализ факторов успеха и действий в проектах DevOps с использованием теории нечетких множеств**
Е. И. Левадный, Р. М. Романов 411
-

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

- Исследование твердотельной поры в мембране из нитрида кремния средствами численного моделирования**
О. В. Замятина, Е. М. Еганова 422
- Диагностика злокачественных новообразований грудной клетки с помощью нейронных сетей**
А. Г. Зимица 430
- Анализ бизнес-процессов контрольных процедур приемки объектов капитального строительства для цифровизации производства**
А. С. Серова, А. А. Трибелев 436
-

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

- Портал АИП ИКП (FusionSpace.ru) для информационного взаимодействия участников исследований в области управляемого термоядерного синтеза**
Е. В. Семенов, А. С. Вишня, А. В. Лебедева, Д. М. Гусев, О. И. Семенов, Е. Ю. Миронова, С. С. Портоне 449

CONTENTS

Volume 13, Number 6, 2024

THEORETICAL AND EXPERIMENTAL PHYSICS

- Nonlinear dynamics of cylindrical waves in an isothermal plasma**
A. R. Karimov, G. O. Buyanov 373
-

MATHEMATICAL MODELS AND NUMERICAL METHODS

- Conservation laws, first integrals and conservative densities of the generalized nonlinear Gerdjikov–Ivanov equation**
D.R. Nifontov, N.A. Kudryashov 380
- Nonlinear Schrödinger equation with dispersion and potential of the general form: exact solutions and reductions**
A. D. Polyinin, N. A. Kudryashov 394
- Symmetries and invariant solutions of generalized modified Lin – Reissner – Tsien equations**
A. I. Zemlyanukhin, A. V. Bochkarev 403
-

APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

- Analysis of success factors and actions in DevOps projects using fuzzy set theories**
E. I. Levadnyy, R. M. Romanov 411
-

COMPUTER SIMULATION OF PHYSICAL AND TECHNOLOGICAL PROCESSES

- Study of solid-state pore in silicon nitride membrane by means of numerical modeling**
O. V. Zamiatina, E. M. Eganova 422
- Diagnosis of malignant neoplasms of the chest using neural network**
A. G. Zimina 430
- Business process analysis of control procedures for capital construction projects acceptance procedures to digitalize production**
A. S. Serova, A. A. Tribelev 436
-

BRIEF MESSAGES

- Information portal (FusionSpace.ru) for researchers in the field of controlled thermonuclear fusion**
E. V. Semenov, A. S. Vishnya, A. V. Lebedeva, D. M. Gusev, O. I. Semenov, E. Yu. Mironova, S. S. Portone 449

УДК 533.7

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛН В ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

А. Р. Каримов^{1,2,*}, Г. О. Буянов¹

¹Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, 115409, Россия

²Объединенный институт высоких температур Российской академии наук, Москва, 127412, Россия

*e-mail: frontlines.07@gmail.com

Поступила в редакцию: 27.09.2024

После доработки: 30.11.2024

Принята к публикации: 03.12.2024

В рамках гидродинамического описания исследуется динамика нелинейных цилиндрических ленгмюровских волн в изотермической плазме, где ионы образуют неподвижный фон. Задача рассматривается в электростатической постановке для двухмерной геометрии. Используя частное, точное аналитическое решение уравнений гидродинамики, получена система дифференциальных уравнений, описывающая динамику электронов с учетом конечной температуры электронов. В настоящих расчетах использовался параболический по радиусу, вогнутый температурный профиль, связанный с меняющейся только по времени электронной плотностью. В рамках данной модели обсуждается влияние начальных условий и тепловых эффектов на регулярную динамику возбуждаемых волн и развитие гидродинамических сингулярностей в электронном потоке. Получены оценки, задающие допустимый диапазон параметров плазмы, при которых реализуется либо регулярное поведение волны, либо происходит опрокидывание электронной волны. Показано, что развитие сингулярного поведения за счет собственной нелинейности можно избежать при учете тепловых эффектов и начального вращения электронного потока. Данные результаты могут быть полезны для установления механизмов неравновесного переноса энергии/импульса в плазменных средах с конечной температурой электронов и ионов.

Ключевые слова: цилиндрические волны, нелинейная динамика, идеальный газ, коллапс плотности, адиабата Пуассона.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.6.1
EDN BGZIAA

ВВЕДЕНИЕ

Динамика плазменных волн конечной амплитуды интенсивно изучается в течение последних нескольких десятилетий, что связано как с исследованием естественных явлений (например, зарождение вихрей, перенос энергии/импульса в неравновесных потоках [1–7]), так и с многочисленными техническими приложениями (например, ускорение заряженных частиц, создание источников излучения [8–11]). При этом следует иметь в виду, что некоторые физически и технически интересные задачи требуют математического рассмотрения в полной нелинейной постановке уравнений гидродинамики и электродинамики [1, 2, 6]. К сожалению, в настоящее время общего подхода к аналитическому описанию подобных задач нет [4, 12, 13], а именно к такому типу отно-

сится задача о динамике нелинейных двухмерных волн, возбуждаемых в плазме.

Чтобы в этом случае выявить некоторые физические свойства исследуемой системы, избежав математических трудностей, можно рассмотреть наиболее простую динамику системы в условиях, где они будут проявляться наиболее наглядным образом. Например, в [14–16] была установлена возможность аккумуляции энергии/импульса в одной из макроскопических степеней свободы вращающегося потока холодной плазмы. Этот процесс принципиально отличается от обычного механизма рассеяния энергии при развитии любой неустойчивости, переводящего энергию в тепловую форму (см., например, [4, 6, 7]). Данная особенность связана с взаимодействием нелинейных радиальных и аксиальных плазменных колебаний, происходящих при локальном

нарушении квазинейтральности, обусловленной вращением потока. В результате этого процесса может происходить ускорение потока в аксиальном или азимутальном направлении.

Однако полученные результаты относятся к потокам холодной плазмы [14–16]. В этой связи возникает естественный вопрос, как учет конечной энергии ионов и электронов будет влиять на данный механизм перераспределения энергии/импульса. Чтобы подойти к решению данного вопроса, мы рассмотрим в рамках гидродинамического описания влияние электронного давления и собственного электростатического поля плазмы на электронную динамику, оставляя ионы холодными и неподвижными.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в начальный момент задан плазменный цилиндр радиусом R_0 и высотой d , ограниченный вакуумом (рис. 1), в котором холодные ионы создают неподвижный фон постоянной плотности n_0 , а подвижные электроны имеют конечную температуру T_e . При этом мы будем трактовать электронную составляющую как идеальный газ, удовлетворяющий уравнению состояния $p_e = T_e n_e$, где p_e и n_e – давление и плотность электронов. С другой стороны, в отсутствие диссипативных процессов в системе давление также описывается адиабатой Пуассона:

$$p_e n_e^{-\gamma} = \text{const}, \quad (1)$$

где γ – показатель адиабаты.

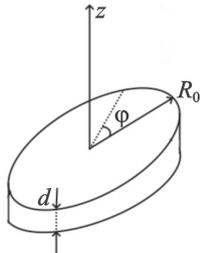


Рис. 1. Цилиндрический плазменный слой

Тогда основные уравнения, описывающие динамику электронов, есть

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{v}_e) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + (\vec{v}_e \cdot \nabla) \vec{v}_e = -\frac{1}{m_e n} \nabla (n_e T_e) - \frac{e}{m_e} \vec{E}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi e (n_0 - n_e), \quad (4)$$

где \vec{v}_e – скорость электронов; m_e и e – масса и заряд электрона; \vec{E} – электростатическое поле.

Используя уравнение состояния идеального газа и уравнение непрерывности (2), перепишем уравнение адиабатичности (1) в дифференциальной форме, как

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} + (\vec{v}_e \cdot \nabla) T_e = -(\gamma - 1) \nabla \cdot \vec{v}_e.$$

В настоящей работе обсуждается только изотермический предел ($\gamma = 1$), когда данное соотношение сводится к

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} + (\vec{v}_e \cdot \nabla) T_e = 0. \quad (5)$$

Ограничиваясь пределом $d \ll R_0$ в аксиально-симметричной геометрии ($\partial_\phi = \partial_z = 0$), далее рассмотрим динамику цилиндрической волны в плоскости $r\theta\phi$.

Чтобы выделить управляющие параметры данной задачи, введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{r}{R_0}, & \bar{t} &= \omega_{pe} t, & \bar{n} &= \frac{n_e}{n_0}, & \bar{E} &= \frac{E_r}{E_*}, \\ \bar{v}_r &= \frac{v_{er}}{v_*}, & \bar{v}_\phi &= \frac{v_{e\phi}}{v_*}, & \bar{T} &= \frac{T}{T_0}, \end{aligned} \quad (6)$$

здесь $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi n_0 e^2 / m_e}$, $v_* = \omega_{pe} R_0$ и $E_* = 4\pi e n_0 R_0$, а T_0 – характерная температура электронов. В новых переменных, опуская знак математического акцента над безразмерными переменными, перепишем уравнения (2)–(5) в скалярном виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rnv_r)}{\partial r} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\phi^2}{r} = -\beta_T^2 \frac{1}{n} \frac{\partial (nT)}{\partial r} - E, \quad (8)$$

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_r v_\phi}{r} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rE)}{\partial r} = 1 - n, \quad (10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad (11)$$

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛН В ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

где β_T – управляющий параметр

$$\beta^2 = \frac{T_0}{m_e \omega_{pe}^2 R_0^2} = \frac{a^2}{v_*^2}, \quad (12)$$

представляет собой квадрат отношения тепловой скорости $a_T = \sqrt{T_0/m_e}$ к характерной скорости $v_* = R_0 \omega_{pe}$.

Уравнения (7)–(11) с начальными условиями

$$\begin{aligned} n(t=0, r) = T(t=0, r) = 1, \quad E(t=0, r) = 0, \\ v_r(t=0, r) = v_{r0}(r), \quad v_\varphi(t=0, r) = v_{\varphi0}(r), \end{aligned} \quad (13)$$

где $v_{r0}(r)$ и $v_{\varphi0}(r)$ – гладкие, ограниченные функции, задающие начальное распределение поля электронных скоростей, составляют основу для исследования динамики цилиндрических волн в рассматриваемой системе.

2. ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ

Частное решение (7)–(11) можно построить с помощью подстановки

$$n = n(t), \quad (14)$$

$$\vec{v} = rA(t)\vec{e}_r + rB(t)\vec{e}_\varphi, \quad (15)$$

$$T = 1 \pm nr^2, \quad (16)$$

$$E = \frac{\varepsilon(t)}{2}r, \quad (17)$$

которая обращает уравнения в частных производных (7)–(11) в тождества, если пока что неизвестные функции $n(t)$, $A(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая получается при подстановке (14)–(17) в (7)–(11).

Подставив (14) и (15) в (7), получим

$$\frac{dn}{dt} = -2An. \quad (18)$$

Заметим, что подстановка (16) и (15) в (11) приводит к этому же уравнению (18). Из (10) с учетом (14) и (17) следует

$$\varepsilon = 1 - n. \quad (19)$$

Аналогичным образом из (9) с помощью (15) находим

$$\frac{dB}{dt} = -2AB. \quad (20)$$

Наконец, воспользовавшись (15), (16), (17) и (19) в (8), получим

$$\frac{dA}{dt} = -A^2 + B^2 \mp 2\beta_T^2 n + \frac{n-1}{2}. \quad (21)$$

Таким образом, соотношения (14)–(17), в которых временная зависимость задается уравнениями (18), (20) и (21) являются частными, точными решениями исходной начальной задачи (2)–(5) и (13) при соответствующем выборе начальных значений

$$\begin{aligned} n(t=0) = 1, \quad \varepsilon(t=0) = 0, \\ A(t=0) = A_0, \quad B(t=0) = B_0. \end{aligned}$$

Эти уравнения определяют динамику электронов и будут положены в основу дальнейшего анализа.

3. ДИНАМИКА ЭЛЕКТРОНОВ

Рассмотрим динамику электронов в случае вогнутого параболического профиля температуры (16), что соответствует знаку минус перед третьим членом в правой части уравнения (21). Для этого из (18) и (20) находим

$$\begin{aligned} n = \exp(-2\theta), \\ B = B_0 \exp(-2\theta), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\theta = \int_0^t A(x) dx. \quad (23)$$

Как видно из (22) и (23), динамика плотности и азимутальной скорости электронов полностью определяется временной эволюцией радиальной составляющей скорости через нелокальную зависимость (23). Причем интегральная зависимость (23) показывает, что значительные колебания в радиальной составляющей могут относительно слабо влиять на азимутальную составляющую скорости и плотность. Поэтому далее можно ограничиться анализом радиальной составляющей $A(t)$.

Подставив (22) в (21) и воспользовавшись со-

отношением $A = \frac{d\theta}{dt}$, получим

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = [D + B_0^2 e^{-2\theta}] e^{-2\theta} - \frac{1}{2}, \quad (24)$$

где параметр

$$D_T = \frac{1 - 4\beta_T^2}{2} \quad (25)$$

отражает влияние тепловых эффектов.

Чтобы упростить (24), введем подстановку

$$W = \exp(\theta), \quad (26)$$

которая сводит данное уравнение к

$$\frac{d^2W}{dt^2} = \frac{D_T}{W} + \frac{B_0^2}{W^3} - \frac{W}{2}. \quad (27)$$

Умножив (27) на $y = \frac{dW}{dt}$, получим первый

интеграл (27) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dW}{dt} \right)^2 - A_0^2 \right] &= D_T \ln W - \\ &- \frac{B_0^2}{2} \left(\frac{1}{W^2} - 1 \right) - \frac{1}{4} (W^2 - 1), \end{aligned} \quad (28)$$

где согласно (23) и (26) использовались $y(t=0) = A_0$ и $W(t=0) = 1$.

Соотношение (28) удобно переписать в более наглядной форме, как

$$\begin{aligned} \left(\frac{dW}{dt} \right)^2 + \frac{B_0^2}{W^2} + \frac{1}{2} W^2 &= \\ = A_0^2 + B_0^2 + \frac{1}{2} + 2D_T \ln W. \end{aligned} \quad (29)$$

Поскольку левая часть (29) всегда положительна, то это накладывает определенные ограничения на D_T . Так, при $W < 1$, что реализуется для $A < 0$, необходимо, чтобы $D_T < 0$, т.е.

$$4\beta_T^2 > 1. \quad (30)$$

При $W > 1$, что отвечает $A(t) > 0$, будет $D_T > 0$, а значит, выполняется противоположное (30) условие. При $D_T = 0$, когда $4\beta_T^2 = 1$, как и для $\beta_T = 0$, влияния теплового эффекта нет.

В качестве иллюстрации влияния тепловых эффектов на развитие цилиндрических электронных волн рассмотрим волновую динамику для наиболее характерных случаев β_T .

На рис. 2 представлены зависимости радиальной A и азимутальной B составляющих скорости электронов вместе с плотностью n при отсутствии начального возмущения в поле скоростей, но при ненулевом значении теплового параметра β_T . Как видно из приведенных графиков, в этом случае радиальная скорость и электронная плотность испытывают почти гармонические колебания ленгмюровского типа из-за действия β_T и возникающего электрического поля ϵ , тогда как азимутальная составляющая скорости остается невозмущенной.

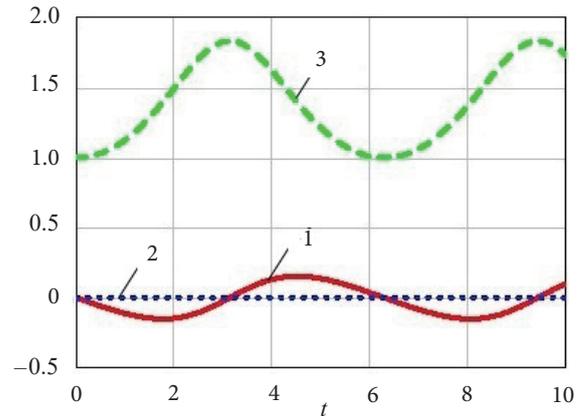


Рис. 2. Зависимости величин A, B, n от времени при $\beta_T = 0.25; A_0 = 0; B_0 = 0; n(0) = 1$, где 1 – зависимость $A(t)$; 2 – зависимость $B(t)$; 3 – зависимость $n(t)$

Совершенно другая картина реализуется (рис. 3), когда имеется начальное возмущение в радиальной скорости. Для выбранного β_T раскачиваются сильно нелинейные колебания в радиальной скорости A , за конечное время профиль волны опрокидывается, что приводит к коллапсу плотности. Следовательно, конечное давление в данном случае не препятствует развитию сингулярности, но при этом азимутальная скорость не меняется.

Теперь посмотрим, что будет происходить при увеличении β_T с наличием начального вращения и радиального движения (рис. 4). В этом случае возникающие нелинейные радиальные колебания скорости не приводят возникновению коллапса плотности из-за действия тепловых эффектов, препятствующих развитию сингулярности. Как и следует из уравнений (18) и (20), профили азимутальной скорости и плотности для выбранных начальных условий совпадают.

Несколько иная картина наблюдается при наличии начального вращения и невозмущенном радиальном профиле скоростей (рис. 5), когда все величины испытывают почти гармонические колебания. Данные примеры показывают, что

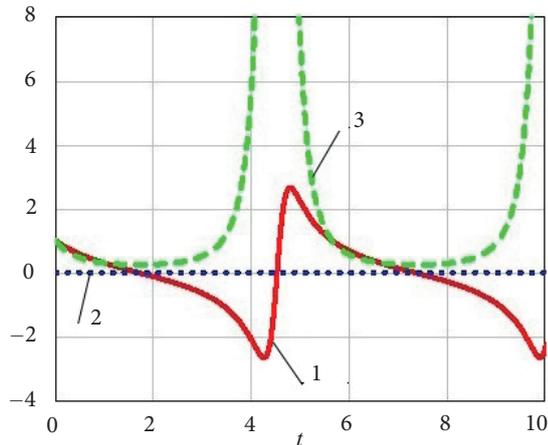


Рис. 3. Зависимости величин A, B, n от времени при $\beta_T=0.25; A_0=1; B_0=0; n(0)=1$, где 1 – зависимость $A(t)$; 2 – зависимость $B(t)$; 3 – зависимость $n(t)$

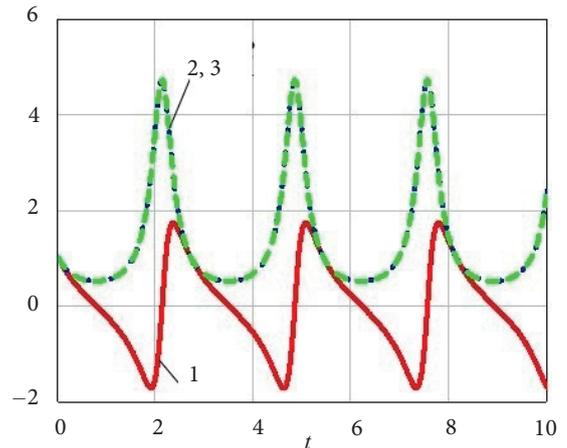


Рис. 4. Зависимости величин A, B, n от времени при $\beta_T=1; A_0=1; B_0=1; n(0)=1$, где 1 – зависимость $A(t)$; 2 – зависимость $B(t)$; 3 – зависимость $n(t)$

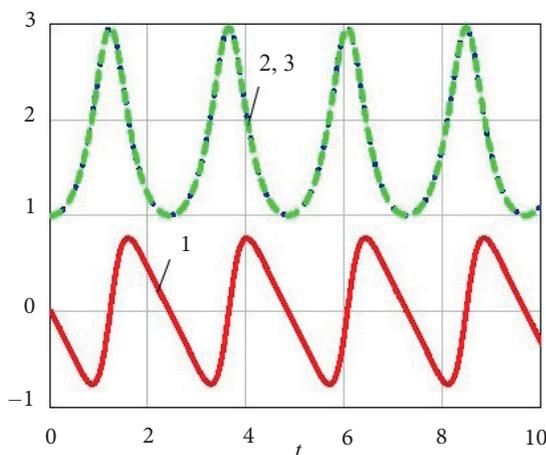


Рис. 5. Зависимости величин A, B, n от времени при $\beta_T=1; A_0=0; B_0=1; n(0)=1$, где 1 – зависимость $A(t)$; 2 – зависимость $B(t)$; 3 – зависимость $n(t)$

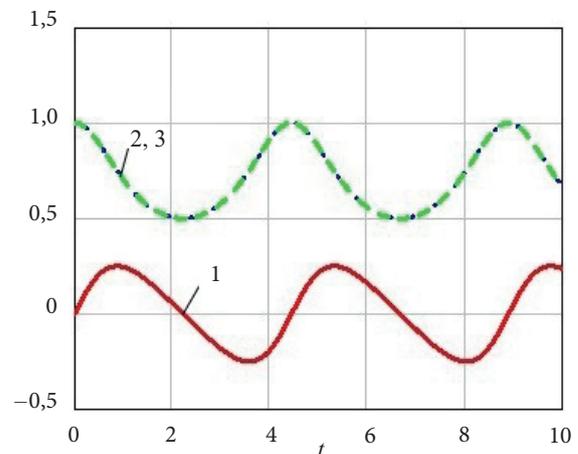


Рис. 6. Зависимости величин A, B, n от времени при $\beta_T=0.5; A_0=0; B_0=1; n(0)=1$, где 1 – зависимость $A(t)$; 2 – зависимость $B(t)$; 3 – зависимость $n(t)$

в рассматриваемой модели за развитие сингулярностей отвечают колебания в радиальной скорости.

В заключение рассмотрим особый случай $\beta_T=0.5$, в котором полностью должно отсутствовать влияние конечной температуры электронов. Зависимости, представленные на рис. 6, качественно близки кривым на рис. 2, где не было проявления ни собственной нелинейности, как на рис. 3, ни дисперсии, связанной с тепловым движением плазмы, как в случае рис. 4, что подтверждает ранее сделанные выводы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе в рамках гидродинамического описания рассматривалась нелинейная динамика цилиндрических волн с конечным электронным давлением и неподвижными холодными ионами в двухмерной геометрии. Считая

систему адиабатической, давление электронов описывалось формулой Пуассона (1) или в дифференциальной форме соотношением (5) в изотермическом пределе $\gamma=1$. Такая постановка задачи позволила использовать подстановку (14)–(17), которая превращает уравнения гидродинамики в систему обыкновенных уравнений (18), (20) и (21). При этом стоит отметить, что уравнения (5) и (7) порождают одно и то же эволюционное уравнение (18). Таким образом, точное частное решение (14)–(17) при определенных начальных условиях описывает начальную стадию развития нелинейных электронных волн до тех пор, пока ионы можно считать неподвижными, электроны – изотермическими.

Введенный безразмерный параметр β_T отражает проявление теплового эффекта и начальных характеристик в динамике рассматриваемой системы [см. уравнение (21)]. Этот управляющий

параметр в принципе позволяет выделить область значений, где будет проявляться тепловой эффект в динамике электронных нелинейных волн, исключая развитие гидродинамических сингулярностей. Приведенное рассмотрение показывает, что развитие сингулярного поведения за счет собственной нелинейности можно избежать при учете тепловых эффектов и начального вращения электронного потока, т.е. регулярная динамика отвечает не только определенным значениям β_T , но также следует учитывать величину B_0 .

Следует подчеркнуть, что решение с неподвижными ионами является ограниченным и описывает только начальную стадию развития нелинейных плазменных волн. Данная задача только позволяет выделить диапазон параметров системы, при которых возможна реализация регулярного поведения. На более больших интервалах времени следует учитывать движение ионной компоненты, как это было сделано в [14–16], а также выйти за пределы изотермического приближения. Настоящая постановка допускает такое обобщение, что позволит подойти к решению ряда технических и естественных задач.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение о предоставлении из федерального бюджета гранта на проведение крупных научных проектов по приоритетным направлениям научно-технологического развития № 075-15-2021-1361 от 7 октября 2021 г.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Davidson R.C. *Methods in Nonlinear Plasma Theory*. New York: Academic Press, 1972. 384 p.

2. Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В. и др. *Электродинамика плазмы*. М.: Наука, 1974. 719 с.

3. Infeld E., Rowlands G. *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos*. Cambridge: Cambridge university press, 2000. 412 p.

4. Pécseli H. L. *Waves and Oscillations in Plasmas*. London: Taylor and Francis, 2012. 575 p.

5. Tsytovich V. N. *Nonlinear Effects in Plasma*. New York: Plenum, 1970. 332 p.

6. Stenflo L. Kinetic theory of three-wave interaction in a magnetized plasma // *Journal of Plasma Physics*, 1970. V. 4. № 3. P. 585–593.

7. Kadanoff L. P. *From Order to Chaos II Essays: Critical Chaotic and Otherwise*. Hong Kong: World Scientific, 1999. 768 p.

8. Anand M., Gibbon P. and Krishnamurthy M. Laser absorption in microdroplet plasmas // *Europhysics Letters*, 2007. V. 80. № 2. P. 25002.

9. Panwar J., Sharma S. C. Modeling the emission of high power terahertz radiation using Langmuir wave as a wiggler // *Physics of Plasmas*, 2017. V. 24. № 8. P. 083101.

10. Modena A., Najmudin Z, Dangor A., et al. Electron acceleration from the breaking of relativistic plasma waves // *Nature*, 1995. V. 377. № 6550. P. 606–608.

11. Faure J., Rechatin C., Norlin A., et al. Controlled injection and acceleration of electrons in plasma wakefields by colliding laser pulses // *Nature*, 2006. V. 444. № 7120. P. 737–739.

12. Кудряшов Н.А. *Методы нелинейной математической физики*. М.: МИФИ, 2008. 352 с.

13. Табор М. *Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике*. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 318 с.

14. Karimov A.R. Nonlinear waves in twirling plasmas // *Journal of Plasma Physics*, 2009. V. 75. № 6. P. 817–828.

15. Karimov A.R., Stenflo L. and Yu M. Coupled azimuthal and radial flows and oscillations in a rotating plasma // *Physics of Plasmas*, 2009. V. 16. № 6. P. 062313.

16. Karimov A.R., Stenflo L. and Yu M. Coupled flows and oscillations in asymmetric rotating plasmas // *Physics of Plasmas*, 2009. V. 16. № 10. P. 102303.

NONLINEAR DYNAMICS OF CYLINDRICAL WAVES IN AN ISOTHERMAL PLASMA

A. R. Karimov^{1,2,}, G. O. Buyanov¹*

¹ National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, 115409, Russia

² Joint Institute of High Temperatures, Russian Academy of Sciences, Moscow, 127412, Russia

*e-mail: frontlines.07@gmail.com

Received September 27, 2024; revised November 30, 2024; accepted December 3, 2024

Within the framework of hydrodynamic description, the dynamics of nonlinear cylindrical Langmuir waves has been studied for an isothermal plasma where ions form a stationary background. The problem is considered in the electrostatic formulation for two-dimensional geometry. Using a partial, exact solution for the equations of hydrodynamics, a system of differential equations describing the dynamics of electrons with the finite temperature is obtained. In these calculations, a parabolic on radius, concave temperature profile associated with an electron density changing only in time was used. In the framework of this model, the influence of initial conditions and thermal effects on the regular dynamics of excited waves and the development of hydrodynamic singularities in the electron beam is discussed. Estimates are obtained that specify the permissible range of plasma parameters at which either regular wave behavior is realized or the electron wave breaks down. It is shown that the development of singular behavior due to the intrinsic nonlinearity can be avoided by taking into account the thermal effects and the initial rotation of electron beam. These results may be useful for establishing the mechanisms of nonequilibrium energy/momentum transfer in plasma media with finite electron and ion temperatures. Estimations specifying the admissible range of plasma parameters are derived.

Keywords: cylindrical waves, nonlinear dynamics, ideal gas, density collapse, Poisson adiabatic equation.

REFERENCES

1. Davidson R.C. *Methods in Nonlinear Plasma Theory*. New York, Academic Press, 1972. 384 p.
2. Akhiezer A.I., Akhiezer I.A., Polovin R.V. et al. *Plasma Electrodynamics*. Oxford, Pergamon, 1975. Vol. 1. 428 p.
3. Infeld E., Rowlands G. *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos*. Cambridge, Cambridge university press, 2000. 412 p.
4. Pécseli H.L. *Waves and Oscillations in Plasmas*. London, Taylor and Francis, 2012. 575 p.
5. Tsytovich V.N. *Nonlinear Effects in Plasma*. New York, Plenum, 1970. 332 p.
6. Stenflo L. Kinetic theory of three-wave interaction in a magnetied plasma. *Journal of Plasma Physics*, 1970. Vol. 4. No. 3. Pp. 585–593.
7. Kadanoff L.P. *From Order to Chaos II Essays: Critical Chaotic and Otherwise*. Hong Kong, World Scientific, 1999. 768 p.
8. Anand M., Gibbon P. and Krishnamurthy M. Laser absorption in microdroplet plasmas. *Europhysics Letters*, 2007. Vol. 80. No. 2. P. 25002.
9. Panwar J., Sharma S.C. Modeling the emission of high power terahertz radiation using Langmuir wave as a wiggler. *Physics of Plasmas*, 2017. Vol. 24. No. 8. Pp. 083101.
10. Modena A., Najmudin Z, Dangor A., et al. Electron acceleration from the breaking of relativistic plasma waves. *Nature*, 1995. Vol. 377. No. 6550. Pp. 606–608.
11. Faure J., Rechatin C., Norlin A., et al. Controlled injection and acceleration of electrons in plasma wakefields by colliding laser pulses. *Nature*, 2006. Vol. 444. No. 7120. Pp. 737–739.
12. Kudryashov N. A. *Methods of nonlinear mathematical physics*. Moscow, MEPhI Publ., 2008. 352 p. (in Russian).
13. Tabor M. *Chaos and integrability in nonlinear dynamics*. New York, Wiley, Cop., 1989. 364 p.
14. Karimov A.R. Nonlinear waves in twirling plasmas. *Journal of Plasma Physics*, 2009. Vol. 75. No. 6. Pp. 817–828.
15. Karimov A.R., Stenflo L. and Yu M. Coupled azimuthal and radial flows and oscillations in a rotating plasma. *Physics of Plasmas*, 2009. Vol. 16. No. 6. Pp. 062313.
16. Karimov A.R., Stenflo L. and Yu M. Coupled flows and oscillations in asymmetric rotating plasmas. *Physics of Plasmas*, 2009. Vol. 16. No. 10. Pp. 102303.

УДК 517.9

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ, ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И КОНСЕРВАТИВНЫЕ ПЛОТНОСТИ ОБОБЩЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕРДЖИКОВА – ИВАНОВА

Д. Р. Нифонтов*, Н. А. Кудряшов**

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

*e-mail: drnifontov@mephi.ru

**e-mail: nakudryashov@mephi.ru

Поступила в редакцию 25.10.2024

После доработки: 08.11.2024

Принята к публикации: 12.11.2024

Рассматривается обобщенное уравнение Герджикова–Иванова. В последние годы это уравнение интенсивно изучается, поскольку оно используется для описания распространения импульсов в оптическом волокне. В отличие от классического уравнения Герджикова–Иванова, исследуемое уравнение не проходит тест Пенлеве, и задача Коши для этого уравнения не решается методом обратной задачи рассеяния. Этот вариант уравнения Герджикова–Иванова имеет лишь ограниченное число законов сохранения. С помощью множителей и прямых вычислений в работе построены законы сохранения рассматриваемого уравнения и найдены два закона сохранения без ограничений на параметры уравнения. Еще один дополнительный закон сохранения найден при дополнительном ограничении на параметры уравнения. В работе также получены первые интегралы для обыкновенных дифференциальных уравнений в результате редукции законов сохранения к переменным бегущей волны в обобщенном уравнении Герджикова–Иванова. Найдены аналитические решения рассматриваемого уравнения. Точные решения обобщенного уравнения Герджикова–Иванова представлены в форме оптических солитонов, а также через эллиптические функции Якоби. Используя вспомогательные интегралы, вычислены сохраняющиеся величины для оптического солитона. Консервативные плотности соответствуют физическим величинам: мощности, момента и энергии. Полученные сохраняющиеся величины имеют практическую пользу при численном и нейросетевом моделировании процессов распространения импульсов в оптическом волокне.

Ключевые слова: уравнение Герджикова–Иванова, законы сохранения, первые интегралы, точные решения, оптические солитоны, консервативные плотности.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.6.2

EDN LANWMF

ВВЕДЕНИЕ

В связи с необходимостью решения задач передачи информации на большие расстояния в последние десятилетия появился большой интерес к исследованию математических моделей распространения импульсов в нелинейно-оптических средах [1–3]. Основным уравнением, используемым для математической модели описания оптических солитонов [4–6], является нелинейное уравнение Шредингера

$$iq_t + aq_{xx} + b|q|^2q = 0, \quad (1)$$

где $q(x, t)$ – комплекснозначная функция; $t^2 = -1$; x и t – пространственная и временная координаты, соответственно; a и b – действительные параметры

математической модели. Уравнение описывает огибающую волнового пакета в среде с дисперсией и кубической нелинейностью. Известно, что нелинейное уравнение Шредингера принадлежит классу интегрируемых уравнений, для него найдены пара Лакса, преобразования Бэклунда и многосолитонные решения [7, 8]. Также оно имеет бесконечное количество законов сохранения.

Однако классического нелинейного уравнения Шредингера оказалось недостаточно для описания процессов распространения импульса в оптическом волокне. В последние годы для описания оптических импульсов на большие расстояния предложен ряд новых математических моделей, учитывающих такие физические процессы, как влияние дисперсии

высокого порядка, сложных зависимостей коэффициентов преломления и ряда других факторов [9–12]. Все эти уравнения не относятся к классу уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния и, как правило, имеют три или менее законов сохранения. Законы сохранения некоторых математических моделей, описывающих распространение импульсов в оптических средах, можно найти в работах [13–17].

В данной работе изучается возмущенное уравнение Герджикова–Иванова [18]

$$iq_t + aq_{xx} + b|q|^4 q + icq^2 q_x^* = i[\alpha q_x + \lambda(|q|^{2m} q)_x + \mu(|q|^{2m})_x q], \quad (2)$$

где $q(x, t)$ – комплекснозначная функция; x и t – пространственная и временная координаты соответственно; $i^2 = -1$, $a, b, c, \alpha, \lambda, \mu$ – действительные параметры математической модели.

Уравнение (2) является одним из широко известных нелинейных уравнений в частных производных, используемых при описании оптических солитонов в оптоволокне. Уравнение не проходит тест Пенлеве, задача Коши для этого уравнения не решается методом обратной задачи рассеяния в общем случае. Лишь только при значениях параметров $\alpha = \lambda = \mu = 0$ уравнение (2) является интегрируемым, что показано в работах [19–21].

Цель данной работы – исследование обобщенного уравнения Герджикова–Иванова (2).

В данной работе применительно к уравнению (2) поставлены следующие задачи:

- 1) найти законы сохранения прямыми вычислениями для исследуемого уравнения;
- 2) построить первые интегралы для обобщенного уравнения, используя законы сохранения;
- 3) получить точные решения рассматриваемого уравнения;
- 4) вычислить сохраняющиеся величины для соответствующих решений.

Результаты работы представлены в следующем порядке. В разд. 1 показан алгоритм построения законов сохранения, и найдены три закона сохранения для обобщенного уравнения Герджикова–Иванова. В разд. 3, используя найденные для уравнения законы сохранения, получены первые интегралы уравнения в переменных бегущей волны. В разд. 3 представлены некоторые точные решения для обобщенного уравнения Герджикова–Иванова. В разд. 4 вычислены сохраняющиеся величины оптического солитона исследуемого уравнения.

1. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГЕРДЖИКОВА–ИВАНОВА

Законы сохранения являются одной из важнейших характеристик нелинейных эволюционных уравнений [22–25]. Они позволяют оценить некоторые сохраняющиеся характеристики математических моделей [26–29]. Также известно, что законы сохранения отражают свойство интегрируемости нелинейных уравнений в частных производных [30–32]. Так, уравнения в частных производных, интегрируемые методом обратной задачи рассеяния, такие как, например, уравнение Кортевега-де Вриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (3)$$

и классическое нелинейное уравнение Шредингера (1) имеют бесконечное число законов сохранения.

Существует несколько подходов к нахождению законов сохранения нелинейных уравнений в частных производных. В статье [33] был применен гамильтонов формализм для нелинейных уравнений Шредингера второго и четвертого порядков с использованием формализма Дирака–Бергмана для построения Гамильтониана. Однако законы сохранения для обобщенных нелинейных уравнений Шредингера можно искать, используя прямые преобразования уравнений, что показано в работах [34–37]. Данный раздел посвящен построению законов сохранения с помощью множителей и прямых вычислений.

Остановимся на общем определении законов сохранения.

Говорят, что уравнение в частных производных

$$E(u, u_x, u_t, \dots, x, t) = 0 \quad (4)$$

имеет n законов сохранения, если оно представлено в виде

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + \frac{\partial X_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

где T_i – плотность; X_i – поток; причем T_i и X_i зависят от функции u и ее производных по x и t .

В предположении, что при $x \rightarrow \pm\infty$ имеем, что интегрируя (5) по x от $-\infty$ до $+\infty$ выражение (5), получим, полагая потоки $X_i = 0$, на бесконечности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial T_i}{\partial t} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial X_i}{\partial x} dx = \frac{d}{dt} \int T_i dx + X_i \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0 \quad (6)$$

отсюда

$$I_i = \int_{-\infty}^{+\infty} T_i dx = \text{const}. \quad (7)$$

Величина (7) называется *консервативной плотностью*. Она не зависит от времени и является сохраняющейся величиной.

В данном разделе построим три закона сохранения для обобщенного уравнения Герджикова–Иванова используя множители и прямые вычисления. Для получения законов сохранения уравнение запишем в виде системы, состоящей из двух уравнений, а именно уравнения (2)

$$\begin{aligned} i q_t + a q_{xx} + b |q|^4 q + i c q^2 q_x^* = \\ = i [\alpha q_x + \lambda (|q|^{2m} q)_x + \mu (|q|^{2m})_x q] \end{aligned} \quad (8)$$

и комплексно-сопряженного к нему в виде

$$\begin{aligned} -i q_t^* + a q_{xx}^* + b |q|^4 q^* - i c q^{*2} q_x = \\ = -i [\alpha q_x^* + \lambda (|q|^{2m} q^*)_x + \mu (|q|^{2m})_x q^*]. \end{aligned} \quad (9)$$

Построим первый закон сохранения для уравнения (8). Для этого умножаем уравнение (8) на q^* , уравнение (9) на $-q$, а затем сложим полученные уравнения. Результат преобразуем к следующему выражению

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{\partial X_1}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

где T_1 и X_1 имеют вид

$$\begin{aligned} T_1 = |q|^2, \\ X_1 = -ia(q^* q_x - q q_x^*) + \frac{c}{2} |q|^4 - \alpha |q|^2 - \\ - \lambda \left(2 - \frac{1}{m+1} \right) |q|^{2(m+1)} - 2\mu \frac{m}{m+1} |q|^{2(m+1)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для построения второго закона сохранения воспользуемся следующим подходом. Умножим уравнение (8) на q_x^* , а уравнение (9) на q_x и затем также сложим их. Получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (q^* q_x - q q_x^*) + \frac{\partial X_2^{(1)}}{\partial x} + 2c |q|^2 (q q_x^* - q^* q_{xx}) = \\ = 2(\lambda + \mu) [|q|^{2m} (q q_x^* - q^* q_{xx})]. \end{aligned} \quad (12)$$

где $X_2^{(1)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} X_2^{(1)} = (q q_t^* - q^* q_t) + 2ia |q_x|^2 + \frac{2}{3} ib |q|^6 - \\ - 2c |q|^2 (q q_x^* - q^* q_x) + \\ + 2(\lambda + \mu) |q|^{2m} (q q_x^* - q^* q_x). \end{aligned} \quad (13)$$

Данный вид не соответствует закону сохранения, однако его можно преобразовать к закону сохранения. Для этого рассмотрим еще одно выражение. Умножим уравнение (8) на $q^* |q|^{2k}$ и сложим с уравнением (9), умноженным на $-q |q|^{2k}$, где $k \in \mathbb{N}$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{i}{k+1} \frac{\partial}{\partial t} (|q|^{2k+2}) + \frac{\partial X_2^{(2)}}{\partial x} + \\ + a |q|^{2k} (q^* q_{xx} - q q_{xx}^*) = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где $X_2^{(2)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} X_2^{(2)} = i \frac{c}{k+2} |q|^{2(k+2)} - i \frac{\alpha}{k+1} |q|^{2(k+1)} - \\ - i \lambda \frac{2m+1}{k+m+1} |q|^{2(k+m+1)} - \\ - 2i \mu \frac{m}{k+m+1} |q|^{2(k+m+1)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Затем сложим уравнение (12) с уравнением (14) при $k=1$ и уравнением (14) при $k=m$. Результат разделим на i и тогда получим второй закон сохранения

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{\partial X_2}{\partial x} = 0, \quad (16)$$

где T_2 и X_2 определяются как

$$\begin{aligned} T_2 = -ia(q^* q_x - q q_x^*) + c |q|^4 - \frac{2(\lambda + \mu)}{m+1} |q|^{2m+2}, \\ X_2 = -ia X_2^{(1)} - 2ic X_2^{(2)}|_{k=1} + 2i(\lambda + \mu) X_2^{(2)}|_{k=m}. \end{aligned} \quad (17)$$

Покажем как для исследуемого уравнения получить третий закон сохранения прямыми вычислениями. Сначала умножим уравнение (8) на q_t^* , уравнение (9) на q_t и сложим. Получим

$$\begin{aligned} a(q_{xx} q_t^* + q_{xx}^* q_t) + b |q|^4 (q q_t^* + q^* q_t) + \\ + ic (q^2 q_x^* q_t^* - q^{*2} q_x q_t) = \\ = i [\alpha (q_x q_t^* - q_x^* q_t) + \lambda (|q|^{2m} q)_x q_t^* - \\ - (|q|^{2m} q^*)_x q_t] + \mu (|q|^{2m})_x (q q_t^* - q^* q_t). \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим случай $\mu = -\lambda$ Тогда (18) принимает форму

$$\begin{aligned} & a(q_{xx}q_t^* + q_{xx}^*q_t) + b|q|^4(qq_t^* + q^*q_t) + \\ & \quad + ic(q^2q_xq_t^* - q^{*2}q_xq_t) = \\ & = i[\alpha(q_xq_t^* - q_x^*q_t) + \lambda|q|^{2m}(q_xq_t^* - q_x^*q_t)]. \end{aligned} \quad (19)$$

На следующем шаге уравнение (19) запишем в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}(a(q_xq_t^* + q_x^*q_t)) - \frac{\partial}{\partial t}(a|q_x|^2) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{b|q|^6}{3}\right) + \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ic}{2}(q^2q^*q_t^* - q^{*2}qq_t)\right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{ic}{2}(q^2q^*q_x^* - q^{*2}qq_x)\right) + ic|q|^2(q^*q_{xt} - qq_{xt}^*) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{i\alpha}{2}(qq_t^* - q^*q_t)\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i\alpha}{2}(q_xq_t^* - q_x^*q_t)\right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{i\lambda}{2(m+1)^2}(q^{m+1}((q^*)^{m+1})_t - (q^*)^{m+1}(q^{m+1})_t)\right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i\lambda}{2(m+1)^2}((q^{m+1})_x(q^*)^{m+1} - ((q^*)^{m+1})_xq^{m+1})\right). \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнение (20) можно представить в виде

$$\frac{\partial T_3^{(1)}}{\partial t} + ic|q|^2(q^*q_{xt} - qq_{xt}^*) + \frac{\partial X_3^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad (21)$$

где $T_3^{(1)}$ и $X_3^{(1)}$

$$\begin{aligned} T_3^{(1)} &= \frac{b|q|^6}{3} - a|q_x|^2 - \frac{ic|q|^2}{2}(q^*q_x - qq_x^*) - \\ & - \frac{i\alpha}{2}(q^*q_x - qq_x^*) - \frac{i\lambda|q|^{2m}}{2(m+1)}(q^*q_x - qq_x^*), \\ X_3^{(1)} &= a(q_xq_t^* + q_x^*q_t) + \frac{ic|q|^2}{2}(qq_t^* - q^*q_t) - \\ & - \frac{i\alpha}{2}(qq_t^* - q^*q_t) - \frac{i\lambda|q|^{2m}}{2(m+1)}(qq_t^* - q^*q_t). \end{aligned} \quad (22)$$

Далее дифференцируем уравнения (8) и (9) по переменной x , затем умножаем первое получившееся выражение на $c|q|^2q^*$, а второе на $c|q|^2q$. Получим

$$\begin{aligned} & ic|q|^2(q^*q_{xt} - qq_{xt}^*) + ac|q|^2(q^*q_{3,x} + qq_{3,x}^*) + \\ & + \frac{5}{4}bc\frac{\partial}{\partial x}(|q|^8) + ic^2|q|^4\frac{\partial}{\partial x}(qq_x^* - q^*q_x) = \\ & = i\alpha c|q|^2\frac{\partial}{\partial x}(q^*q_x - qq_x^*) + \\ & + \frac{i\lambda c|q|^{2(m+1)}}{m+1}\frac{\partial}{\partial x}(q^*q_x - qq_x^*) + \\ & + \frac{i\lambda cm}{m+1}\frac{\partial}{\partial x}(|q|^{2(m+1)}(q^*q_x - qq_x^*)). \end{aligned} \quad (23)$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} & ac|q|^2(q^*q_{3,x} + qq_{3,x}^*) = \\ & = ac|q|^2\frac{\partial}{\partial x}(q^*q_{xx} + qq_{xx}^* - q_xq_x^*) = \\ & = ac|q|^2\frac{\partial}{\partial x}(q^*q_{xx} + qq_{xx}^* + 2q_xq_x^* - 3q_xq_x^*) = \\ & = ac|q|^2\frac{\partial^3}{\partial x^3}(|q|^2) - 3ac|q|^2\frac{\partial}{\partial x}(q_xq_x^*) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x}(ac|q|^2(|q|^2)_{xx}) - ac(|q|^2)_x(|q|^2)_{xx} - \\ & \quad - 3ac|q|^2\frac{\partial}{\partial x}(q_xq_x^*) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x}(ac|q|^2(|q|^2)_{xx}) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ac}{2}((|q|^2)_x)^2\right) - \\ & \quad - 3ac|q|^2\frac{\partial}{\partial x}(q_xq_x^*). \end{aligned} \quad (24)$$

Преобразуем уравнение (23), используя (14) при значениях $k=1$, $k=2$ и $k=m+1$ а также полученное выражение (24):

$$\begin{aligned} & ic|q|^2(q^*q_{xt} - qq_{xt}^*) = \\ & = -\frac{\partial}{\partial x}(ac|q|^2(|q|^2)_{xx}) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{ac}{2}((|q|^2)_x)^2\right] + \\ & + 3ac|q|^2\frac{\partial}{\partial x}(q_xq_x^*) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{5}{4}bc|q|^8\right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c^2}{3a}|q|^6\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ic^2}{a}X_2^{(2)}\right)\Big|_{k=2} + \\ & + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\alpha c}{2a}|q|^4\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{i\alpha c}{a}X_2^{(2)}\right)\Big|_{k=1} + \\ & + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\lambda c}{a(m+1)(m+2)}|q|^{2(m+2)}\right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{i\lambda c}{a(m+1)}X_2^{(2)}\right)\Big|_{k=m+1} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{i\lambda cm}{m+1}|q|^{2(m+1)}(q^*q_x - qq_x^*)\right). \end{aligned} \quad (25)$$

Следующим шагом умножим уравнение (8) на $3c|q|^2q^*$, а уравнение (9) на $3c|q|^2q$, сложив их, получим

$$3ic|q|^2(q_t q_x^* - q_x q_t^*) + 3ac|q|^2 \frac{\partial}{\partial x}(q_x q_x^*) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3}{4} bc|q|^8 \right) + \frac{3}{2} ic^2 |q|^4 \frac{\partial}{\partial x}(q^* q_x - qq_x^*) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3ic^2}{2} |q|^4 (q^* q_x - qq_x^*) \right) = 0. \quad (26)$$

Преобразуем (26), используя выражение (14) при $k=2$:

$$3ac|q|^2 \frac{\partial}{\partial x}(q_x q_x^*) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{4} ic|q|^2 (q^* q_x - qq_x^*) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3}{4} ic|q|^2 (qq_t^* - q^* q_t) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3}{4} bc|q|^8 \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{c^2}{2a} |q|^6 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3ic^2}{2a} X_2^{(2)} \right) \Big|_{k=2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3ic^2}{2} |q|^4 (q^* q_x - qq_x^*) \right). \quad (27)$$

Подставляя (27) в (25) получаем

$$ic|q|^2 (q^* q_{xt} - qq_{xt}^*) = \frac{\partial T_3^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial X_3^{(2)}}{\partial x}, \quad (28)$$

где $T_3^{(2)}$ и $X_3^{(2)}$ определяются как

$$T_3^{(2)} = -\frac{c^2}{6a} |q|^6 + \frac{\alpha c}{2a} |q|^4 + \frac{\lambda c}{a(m+1)(m+2)} |q|^{2(m+2)} + \frac{3}{4} ic|q|^2 (q^* q_x - qq_x^*), \\ X_3^{(2)} = -ac|q|^2 (|q|^2)_{xx} + \frac{ac}{2} ((|q|^2)_x)^2 - 2bc|q|^8 + \frac{1}{2} \frac{ic^2}{a} X_2^{(2)} \Big|_{k=2} - \frac{i\alpha c}{a} X_2^{(2)} \Big|_{k=1} - \frac{i\lambda c}{a(m+1)} X_2^{(2)} \Big|_{k=m+1} + \frac{i\lambda cm}{m+1} |q|^{2(m+1)} (q^* q_x - qq_x^*) + \frac{3}{4} ic|q|^2 (q_t^* - q^* q_t) + \frac{3ic^2}{2} |q|^4 (q^* q_x - qq_x^*). \quad (29)$$

Затем подставляем (28) в (21) и после домножения на a получаем третий закон сохранения при $\mu = -\lambda$ в форме

$$\frac{\partial T_3}{\partial t} + \frac{\partial X_3}{\partial x} = 0, \quad (30)$$

где T_3 и X_3 имеют вид

$$T_3 = -\frac{c^2}{6} |q|^6 + \frac{\alpha c}{2} |q|^4 + \frac{\lambda c}{(m+1)(m+2)} |q|^{2(m+2)} + \frac{1}{4} iac|q|^2 (q^* q_x - qq_x^*) + \frac{ab|q|^6}{3} - a^2 |q_x|^2 - \frac{ia\alpha}{2} (q^* q_x - qq_x^*) - \frac{ia\lambda |q|^{2m}}{2(m+1)} (q^* q_x - qq_x^*), \\ X_3 = aX_3^{(1)} + aX_3^{(2)}. \quad (31)$$

В результате при построении второго и третьего законов сохранения требуется большее количество шагов, чем для многих других обобщенных уравнений Шредингера, поскольку в процессе построения законов сохранения возникают некоторые слагаемые, имеющие нетривиальный вид.

2. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ОБОБЩЕННОМУ УРАВНЕНИЮ ГЕРДЖИКОВА – ИВАНОВА

В этом разделе покажем, что, используя законы сохранения обобщенных нелинейных уравнений Шредингера, можно построить первые интегралы для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующей уравнениям в частных производных [38]. Суть метода заключается в следующем.

Рассмотрим нелинейное уравнение в частных производных

$$E(q, q_t, q_x, q_{xx}, \dots) = 0. \quad (32)$$

Если нам известны несколько законов сохранения для уравнения (32), представленные в виде

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + \frac{\partial X_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (33)$$

где T_i – плотность, а X_i – поток, а также уравнение (32) инвариантно относительно группы преобразований сдвига по x и по t , то в (33) делается переход к переменным бегущей волны

$$z = x - C_0 t, \quad (34)$$

где C_0 – скорость волны.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ, ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И КОНСЕРВАТИВНЫЕ ПЛОТНОСТИ
ОБОБЩЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕРДЖИКОВА – ИВАНОВА

Подставляя (34) в уравнение (33), после интегрирования получаем следующее выражение

$$I_i = X_i(q, q_z, \dots) - C_0 T_i(q, q_z, \dots), \quad (35)$$

где I_i – произвольная постоянная.

Подставляя комплекснозначную функцию уравнения (32) в показательной форме

$$q(x, t) = y(z) e^{i\psi(z)} \quad (36)$$

в уравнение (35), и учитывая соотношения

$$|q|^2 = y^2, \quad (37)$$

$$i(q^* q_x - q q_x^*) = -2y^2 \psi_z, \quad (38)$$

$$i(q^* q_t - q q_t^*) = 2C_0 y^2 \psi_z \quad (39)$$

и

$$|q_x|^2 = y_z^2 + y^2 \psi_z^2, \quad (40)$$

находим первые интегралы системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений.

В результате получим первые интегралы для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на функции $y(z)$ и $\psi(z)$

$$X_i(y, \psi, y_z, \psi_z, \dots) - C_0 T_i(y, \psi, y_z, \psi_z, \dots) = C_i, \quad (41)$$

где C_i – произвольная постоянная.

Построим первые интегралы для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученной из обобщенного уравнения Герджикова – Иванова (2). Для построения первых интегралов в законах сохранения (10) и (16) делаем переход к переменным бегущей волны (34).

Подставляем (11) в (41), учитывая (36) и (34). Получаем первый интеграл в виде

$$2ay^2 \psi_z + \frac{c}{2} y^4 - \alpha y^2 - \lambda \left(2 - \frac{1}{m+1} \right) - 2\mu \frac{m}{m+1} y^{2(m+1)} - C_0 y^2 = \tilde{C}_1, \quad (42)$$

где \tilde{C}_1 – произвольная постоянная.

Подставляя (17) в (41), и учитывая (36) и (34), получаем первый интеграл вида

$$\begin{aligned} & -2a^2 y_z^2 - 2a^2 y^2 \psi_z^2 - 4acy^4 \psi_z + \\ & + 4(\lambda + \mu) ay^{2m+2} \psi_z + c(\alpha + C_0) y^4 - \\ & - \frac{2}{3} (ab + c^2) y^6 - 2 \frac{(\alpha + C_0)(\lambda + \mu)}{m+1} y^{2m+2} + \\ & + 2c \frac{\lambda(2m+2) + \mu(2m+1)}{m+2} y^{2m+4} - \\ & - 2(\lambda + \mu) \left(\lambda + \mu \frac{2m}{2m+1} \right) y^{4m+2} = \tilde{C}_2, \end{aligned} \quad (43)$$

где \tilde{C}_2 – произвольная постоянная.

Выражая ψ_z из (42) и сделав замену $C_1 = \frac{\tilde{C}_1}{2}$, имеем

$$\begin{aligned} \psi_z = & \frac{C_0 + \alpha}{2a} - \frac{c}{4a} y^2 + \\ & + \left(\frac{(2m+1)\lambda + 2m\mu}{2a(m+1)} \right) y^{2m} + \frac{C_1}{ay^2}. \end{aligned} \quad (44)$$

Подставляя ψ_z из (44) в (43) и принимая во внимание замену

$$C_2 = - \left(\frac{C_1(C_0 + \alpha)}{2a} + \frac{\tilde{C}_2}{4a} \right),$$

получим

$$\begin{aligned} & \frac{a}{2} y_z^2 + \left(\frac{\alpha^2}{8a} + \frac{C_0^2}{8a} + \frac{3cC_1}{4a} + \frac{C_0\alpha}{4a} \right) y^2 + \\ & + \left(\frac{c\alpha}{8a} + \frac{C_0c}{8a} \right) y^4 + \frac{C_1^2}{2ay^2} + \left(\frac{b}{6} - \frac{5c^2}{96a} \right) y^6 - \\ & - \left(\frac{\lambda C_1 + 2\mu C_1}{2(1+m)a} \right) y^{2m} + \left(\frac{c(5m\lambda + 6\mu m + 2\lambda)}{8a(1+m)(2+m)} \right) y^{4+2m} + \\ & + \left(\frac{\lambda C_0 + \lambda\alpha}{4a(1+m)} \right) y^{2+2m} - \\ & - \left(\frac{4\mu^2 m^2 + 4\lambda\mu m^2 - 2\lambda^2 m - \lambda^2}{8a(1+m)^2(1+2m)} \right) y^{2+4m} - C_2 = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Решение уравнения (45) найти затруднительно и по-видимому оно не имеет общего решения, однако можно найти некоторые точные решения при ограничениях на параметры уравнения.

3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГЕРДЖИКОВА – ИВАНОВА

В этом разделе проиллюстрируем построение некоторых точных решений для обобщенного уравнения Герджикова – Иванова (2). Для этого используем первый интеграл (45).

Рассмотрим случай $m=1$. Запишем первый интеграл (45) при $m=1$ в следующей форме

$$\begin{aligned} & \frac{a}{2}y_z^2 + \left(\frac{b}{6} - \frac{5c^2}{96a} - \frac{\lambda\mu}{24a} - \frac{\mu^2}{24a} + \frac{\lambda^2}{32a} + \frac{7\lambda c}{48a} + \frac{c\mu}{8a} \right) y^6 + \\ & + \left(\frac{C_0 c}{8a} + \frac{c\alpha}{8a} + \frac{\lambda C_0}{8a} + \frac{\lambda\alpha}{8a} \right) y^4 + \left(\frac{3cC_1}{4a} + \frac{C_0^2}{8a} + \right. \\ & \left. + \frac{C_0\alpha}{4a} + \frac{\alpha^2}{8a} - \frac{\lambda C_1}{4a} - \frac{C_1\mu}{2a} \right) y^2 + \frac{C_1^2}{2ay^2} - C_2 = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Используя замену

$$y(z) = \sqrt{V(z)}, \quad (47)$$

в уравнении (46), имеем уравнение

$$V_z^2 + A_1 V^4 + B_1 V^3 - E_1 V^2 - \frac{8C_2}{a} V + \frac{4C_1^2}{a^2} = 0, \quad (48)$$

где A_1 , B_1 и E_1 определяются следующим выражением

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{4b}{3a} - \frac{5c^2}{12a^2} - \frac{\mu^2}{3^2} + \frac{\lambda^2}{4a^2} - \frac{\lambda\mu}{3a^2} + \frac{7\lambda c}{6a^2} + \frac{c\mu}{a^2}, \\ B_1 &= \frac{C_0 c}{a^2} + \frac{c\alpha}{a^2} + \frac{\lambda C_0}{a^2} + \frac{\lambda\alpha}{a^2}, \\ E_1 &= -\frac{C_0^2}{a^2} - \frac{2C_0\alpha}{a^2} - \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{2\lambda C_1}{a^2} + \frac{4\mu C_1}{a^2} - \frac{6cC_1}{a^2}. \end{aligned} \quad (49)$$

Полагая $C_1=0$ и $C_2=0$ решение уравнения (46) имеет вид уединенной волны

$$V(z) = \frac{4E_1 e^{\sqrt{E_1}(z-z_0)}}{4A_1 E_1 + (B_1 + e^{\sqrt{E_1}(z-z_0)})^2}, \quad (50)$$

где z_0 – произвольная постоянная.

Тогда решение $y_1(z)$ записывается как

$$y_1(z) = \left[\frac{4E_1 e^{\sqrt{E_1}(z-z_0)}}{4A_1 E_1 + (B_1 + e^{\sqrt{E_1}(z-z_0)})^2} \right]^{1/2}. \quad (51)$$

Оптический солитон $q_1(x,t)$ для обобщенного уравнения Герджикова–Иванова (2) в таком случае имеет вид

$$q_1(x,t) = \left[\frac{4E_1 e^{\sqrt{E_1}(x-C_0 t-z_0)}}{4A_1 E_1 + (B_1 + e^{\sqrt{E_1}(x-C_0 t-z_0)})^2} \right]^{1/2} \times e^{i\psi(x-C_0 t)}. \quad (52)$$

Функцию $\psi(z)$ можно выразить в явном виде. Она имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_1(z) &= \frac{2\mu + 3\lambda - c}{2a\sqrt{A_1}} \left\{ \frac{e^{\sqrt{E_1}(z-z_0)} + B_1}{2\sqrt{A_1 E_1}} \right\} + \\ &+ \left(\frac{C_0 + \alpha}{2a} \right) z. \end{aligned} \quad (53)$$

График решения (51) демонстрируется на рис. 1 при значениях $z_0=3.0$, $A_1=1.0$, $B_1=2.0$ и $E_1=5.0$.

Общее решение уравнения (46) можно выразить через эллиптические функции Якоби. Известно, что решение уравнения (46) можно представить через эллиптический синус или через функцию Вейерштрасса. Запишем общее решение при $C_1 \neq 0$ и $C_2 \neq 0$ уравнения (46) в виде

$$y_2(z) = \left[\frac{V_1(V_4 - V_2) \operatorname{sn}^2 \{S_1(z - z_0); k_1\} + V_4(V_2 - V_1)}{(V_4 - V_2) \operatorname{sn}^2 \{S_1(z - z_0); k_1\} + V_2 - V_1} \right]^{1/2}, \quad (54)$$

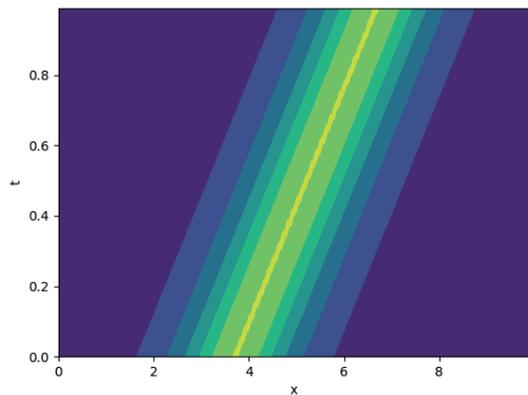
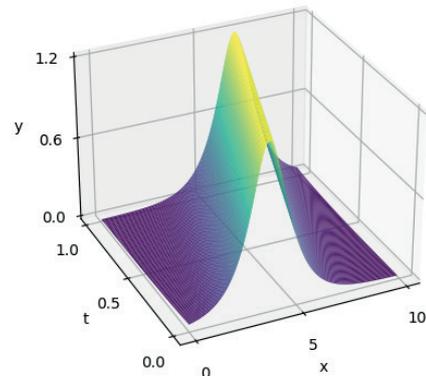


Рис. 1. Решение $y_1(x,t)$ при $z_0=3.0$, $A_1=1.0$, $B_1=2.0$ и $E_1=5.0$

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ, ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И КОНСЕРВАТИВНЫЕ ПЛОТНОСТИ
ОБОБЩЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕРДЖИКОВА–ИВАНОВА

где z_0 – произвольная постоянная, V_1, V_2, V_3 и V_4 корни следующего уравнения

$$A_1V^4 + B_1V^3 - E_1V^2 - \frac{8C_2}{a}V + \frac{4C_1^2}{a^2} = 0, \quad (55)$$

$$= A_1(V - V_1)(V - V_2)(V - V_3)(V - V_4) = 0,$$

S_1 и k_1 определяются как

$$S_1 = \frac{1}{2} \sqrt{A_1(V_4 - V_3)(V_2 - V_1)}, \quad (56)$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{(V_3 - V_1)(V_4 - V_2)}{(V_4 - V_3)(V_2 - V_1)}}. \quad (57)$$

Периодическое решение $q_2(x, t)$ для обобщенного уравнения Герджикова–Иванова (2) при $m=1$ находится по формуле (36), используя (54).

Решение (54) представлено на рисунке 2 при $z_0=1.0, A_1=1.0, V_1=1.0, V_2=3.0, V_3=2.0$ и $V_4=4.0$.

Далее рассмотрим случай $m=2$.

Уравнение (45) при $m=2$ принимает форму

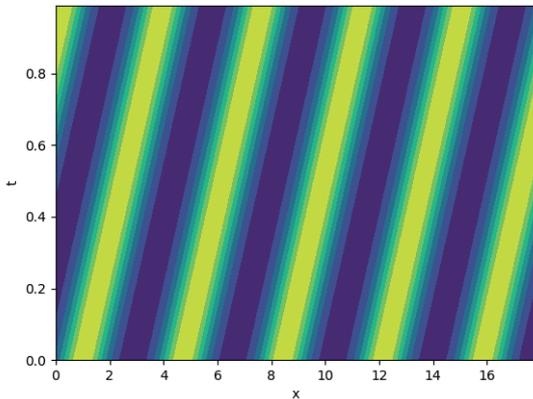
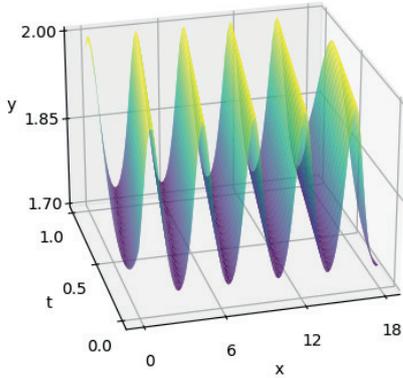


Рис. 2. Решение при $z_0=1.0, A_1=1.0, V_1=1.0, V_2=3.0, V_3=2.0$ и $V_4=4.0$

$$\begin{aligned} & \frac{a}{2}y_z^2 - C_2 + \frac{C_1^2}{2ay^2} + \\ & + \left(\frac{3cC_1}{4a} + \frac{\alpha^2}{8a} + \frac{C_0\alpha}{4a} + \frac{C_0^2}{8a} \right) y^2 + \\ & + \left(\frac{C_0c}{8a} + \frac{c\alpha}{8a} - \frac{C_1\mu}{3a} - \frac{\lambda C_1}{6a} \right) y^4 + \\ & + \left(\frac{b}{6} - \frac{5c^2}{96a} + \frac{\lambda\alpha}{12a} + \frac{\lambda C_0}{12a} \right) y^6 + \\ & + \left(\frac{c\lambda}{8a} + \frac{c\mu}{8a} \right) y^8 + \\ & + \left(\frac{\lambda^2}{72a} - \frac{2\lambda\mu}{45a} - \frac{2\mu^2}{45a} \right) y^{10} = 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Рассмотрим уравнение (58) при выполнении следующих условий

$$C_2 = 0, \quad \mu = -\lambda, \quad C_0 = -\alpha - \frac{4\lambda C_1}{3c} \quad (59)$$

и после этого сделаем в нем замену

$$y = W(z)^{1/4}, \quad (60)$$

тогда получим

$$\begin{aligned} & W^2 + \frac{16C_1^2}{a^2}W + \left(\frac{24cC_1}{a^2} + \frac{64\lambda^2 C_1^2}{9a^2c^2} \right) W^2 + \\ & + \left(\frac{16b}{3a} - \frac{5c^2}{3a^2} - \frac{32\lambda^2 C_1}{9a^2c} \right) W^3 + \frac{4\lambda^2}{9a^2} W^4 = 0. \end{aligned} \quad (61)$$

Запишем уравнение (61) в форме

$$W_z^2 + \frac{16C_1^2}{a^2}W - RW^2 + NW^3 + \frac{4\lambda^2}{9a^2}W^4 = 0, \quad (62)$$

где

$$R = - \left(\frac{24cC_1}{a^2} + \frac{64\lambda^2 C_1^2}{9a^2c^2} \right), \quad (63)$$

$$N = \left(\frac{16b}{3a} - \frac{5c^2}{3a^2} - \frac{32\lambda^2 C_1}{9a^2c} \right). \quad (64)$$

Общее решение уравнения (62) можно представить через эллиптический синус в виде

$$W(z) = \frac{W_3 W_1}{(W_3 - W_1) \operatorname{sn}^2 \{ S_2(z - z_0); k_2 \} + W_1}, \quad (65)$$

где W_1, W_2, W_3 корни уравнения

$$\frac{16C_1^2}{a^2} - RW + NW^2 + \frac{4}{9a^2}W^3 = 0, \quad (66)$$

а параметры S_2 и k_2 имеют вид

$$S_2 = \frac{\lambda}{3a} \sqrt{(W_3 - W_2)W_1}, \quad (67)$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{(W_3 - W_1)W_2}{(W_3 - W_2)W_1}}. \quad (68)$$

Тогда решение для (58) при условиях (59) запишется в виде

$$y_3(z) = \left[\frac{W_3 W_1}{(W_3 - W_1) \operatorname{sn}^2 \{S_2(z - z_0); k_2\} + W_2} \right]^{1/4}. \quad (69)$$

Решение (69) показано на рис. 3 при значениях $z_0 = 1.0$; $a = 1.0$; $\lambda = 3.0$; $W_1 = 3.0$; $W_2 = 2.0$ и $W_3 = 4.0$.

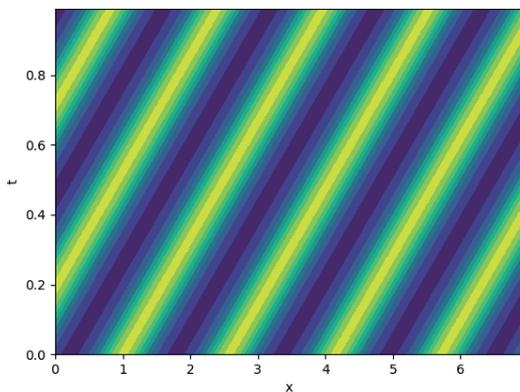
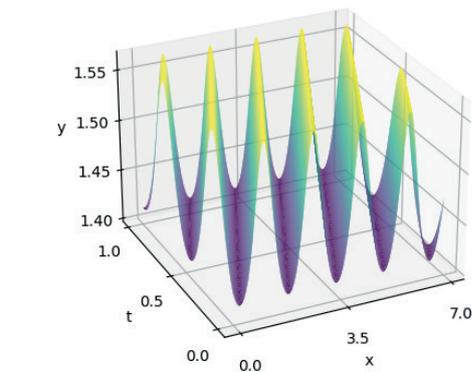


Рис. 3. Решение $y_3(x, t)$ при $z_0 = 1.0$; $a = 1.0$; $\lambda = 3.0$; $W_1 = 3.0$; $W_2 = 2.0$ и $W_3 = 4.0$

Если положить $C_1 = 0$ то получим уединенную волну для (61) вида

$$W(z) = \frac{36Ra^2 e^{\sqrt{R}(z_0 - z)}}{144\lambda^2 Ra^2 + (9Na^2 + e^{\sqrt{R}(z_0 - z)})^2}. \quad (70)$$

Выразим решение уравнения (58), которое будет иметь вид

$$y_4(z) = \left[\frac{36Ra^2 e^{\sqrt{R}(z_0 - z)}}{144\lambda^2 Ra^2 + (9Na^2 + e^{\sqrt{R}(z_0 - z)})^2} \right]^{1/4}. \quad (71)$$

Оптический солитон для уравнения (2) ищется, используя (71) и (36).

Решение (71) представлено на рис. 4 при $z_0 = 20.0$; $a = 2.0$; $\lambda = 4.0$; $R = 1.0$ и $N = 2.0$.

Также существуют некоторые частные решения в случае произвольного m для обобщенного уравнения Герджикова–Иванова. Они представлены в работе [18].

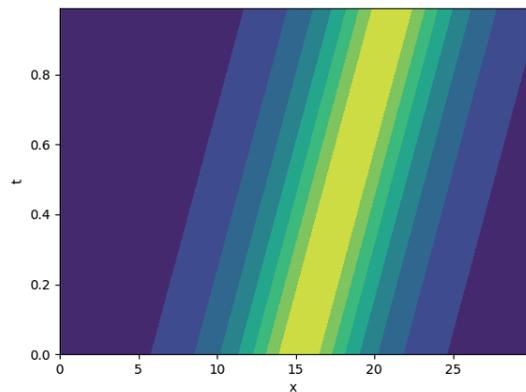
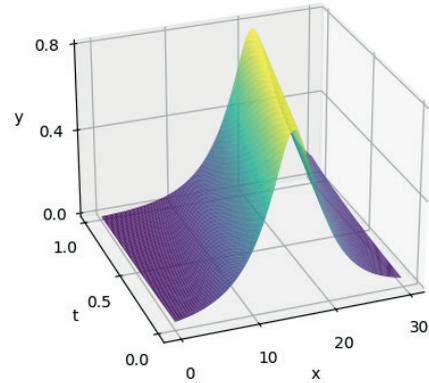


Рис. 4. Решение $y_4(x, t)$ при $z_0 = 20.0$; $a = 2.0$; $\lambda = 4.0$; $R = 1.0$ и $N = 2.0$

4. КОНСЕРВАТИВНЫЕ ПЛОТНОСТИ
ОПТИЧЕСКОГО СОЛИТОНА
ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ
ГЕРДЖИКОВА – ИВАНОВА

Найдем сохраняющиеся величины для обобщенного уравнения Герджикова – Иванова.

Рассмотрим решение (52) и найдем консервативные плотности для него. Для этого разберем следующие вспомогательные интегралы:

$$L_1 = \int_{-\infty}^{\infty} y_1^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4E_1 e^{\sqrt{E_1}(x-C_0 t-z_0)}}{4A_1 E_1 + (B_1 + e^{\sqrt{E_1}(x-C_0 t-z_0)})^2} dx = \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \gamma\right), \quad (72)$$

$$L_2 = \int_{-\infty}^{\infty} y_1^4 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{4E_1 e^{\sqrt{E_1}(x-C_0 t-z_0)}}{4A_1 E_1 + (B_1 + e^{\sqrt{E_1}(x-C_0 t-z_0)})^2} \right)^2 dx = \frac{\sqrt{E_1}}{A_1} (-\pi\gamma + 2\gamma \arctg \gamma + 2), \quad (73)$$

$$L_3 = \int_{-\infty}^{\infty} y_1^6 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{4E_1 e^{\sqrt{E_1}(x-C_0 t-z_0)}}{4A_1 E_1 + (B_1 + e^{\sqrt{E_1}(x-C_0 t-z_0)})^2} \right)^3 dx = \frac{E_1}{2A_1 \sqrt{A_1}} (-2(3\gamma^2 + 1) \arctg \gamma + 3\gamma(\pi\gamma - 2) + \pi), \quad (74)$$

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} y_{1x}^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_1^2 e^{\sqrt{E_1}(x-C_0 t-z_0)}}{4A_1 E_1 + (B_1 + e^{\sqrt{E_1}(x-C_0 t-z_0)})^2} \times \left(1 - \frac{2(B_1 e^{\sqrt{E_1}(x-C_0 t-z_0)} + e^{2\sqrt{E_1}(x-C_0 t-z_0)})}{4A_1 E_1 + (B_1 + e^{\sqrt{E_1}(x-C_0 t-z_0)})^2} \right)^2 dx = \frac{1}{32A_1 \sqrt{A_1}} (-2(\gamma^2 + 1) \arctg \gamma + \gamma(\pi\gamma - 2) + \pi), \quad (75)$$

где $\gamma = \frac{B_1}{2\sqrt{A_1 E_1}}$.

Из плотности T_1 получаем первую сохраняющуюся величину для решения (52) в виде

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} T_1 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |q_1|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} y_1^2 dx = L_1. \quad (76)$$

Интегрирование плотности T_2 с подставленным решением (52) и имеющимся ψ_z дает следующее выражение:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} T_2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (-ia(q_1^* q_{1x} - q_1 q_{1x}^*) + c|q_1|^4 - (\lambda + \mu)|q_1|^4) dx = 2a \int_{-\infty}^{\infty} y_1^2 \psi_x dx + (c - \lambda - \mu) \int_{-\infty}^{\infty} y_1^4 dx = (C_0 + \alpha) \int_{-\infty}^{\infty} y_1^2 dx + \frac{c + \lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} y_1^4 dx = (C_0 + \alpha)L_1 + \frac{c + \lambda}{2} L_2. \quad (77)$$

Интегрирование плотности T_3 с учетом решения (52) и выражения для ψ_z дает следующее выражение:

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} T_3 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{c^2}{6}|q_1|^6 + \frac{\alpha c}{2}|q_1|^4 + \frac{\lambda c}{6}|q_1|^6 + \frac{iac}{4}|q_1|^2 (q_1^* q_{1x} - q_1 q_{1x}^*) + \frac{ba|q_1|^6}{3} - a^2|q_{1x}|^2 - \frac{i\alpha a}{2}(q_1^* q_{1x} - q_1 q_{1x}^*) - \frac{i\lambda a}{4}|q_1|^2 (q_1^* q_{1x} - q_1 q_{1x}^*) \right) dx = \left(\frac{\alpha^2 - C_0^2}{4} \right) \int_{-\infty}^{\infty} y_1^2 dx + \left(\frac{\alpha(\lambda + c)}{4} - \frac{C_0(\lambda + \mu)}{2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} y_1^4 dx + \left(\frac{\lambda c}{24} + \frac{ba}{3} - \frac{3\lambda^2}{16} - \frac{\mu\lambda}{2} - \frac{\mu^2}{4} - \frac{5c^2}{48} \right) \int_{-\infty}^{\infty} y_1^6 dx - a^2 \int_{-\infty}^{\infty} y_{1x}^2 dx = \left(\frac{\alpha^2 - C_0^2}{4} \right) L_1 + \left(\frac{\alpha(\lambda + c)}{4} - \frac{C_0(\lambda + \mu)}{2} \right) L_2 + \left(\frac{\lambda c}{24} + \frac{ba}{3} - \frac{3\lambda^2}{16} - \frac{\mu\lambda}{2} - \frac{\mu^2}{4} - \frac{5c^2}{48} \right) L_3 - a^2 L. \quad (78)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследовано обобщенное уравнение Герджикова–Иванова. Представлен алгоритм построения законов сохранения методом прямых вычислений. Найдено два закона сохранения для исследуемого уравнения без ограничений на параметры, а также третий закон с одним ограничением на параметры уравнения. Построены первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующей обобщенному уравнению Герджикова–Иванова. Найдены решения рассматриваемого уравнения в форме оптических солитонов, а также через эллиптические функции Якоби. Для оптического солитона рассчитаны сохраняющиеся величины. Полученные законы сохранения и консервативные плотности можно использовать для численного и нейросетевого моделирования. Помимо этого сохраняющиеся величины имеют практическую пользу при оценке некоторых характеристик, измеряемых при распространении импульсов в оптических волокнах.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00141, <https://rscf.ru/project/22-11-00141/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kivshar Y.S., Agrawal G.P. Optical Solitons. From Fibers to Photonic Crystals. Academic Press, 2003.
2. Kivshar Yu.S. and Malomed B.A. Dynamics of solitons in nearly integrable systems // *Rev. Mod. Phys.*, 1989. V. 63. P.763–915.
3. Kivshar Yu.S., Pelinovsky D. E. Self – focusing and transverse instabilities of solitary waves // *Phys. Reports*, 2000. V. 331(4). P. 117–195.
4. Hasegawa A., Tappert F. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion // *Applied Physics Letters*, 1973. V. 23. P. 142–144. DOI: 10.1063/1.1654836.
5. Hasegawa A., Tappert F. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion // *Applied Physics Letters*, 1973. V. 23. P. 171–172. DOI: 10.1063/1.1654847.
6. Tai K., Hasegawa A., Tomita A. Observation of modulational instability in optical fibers // *Physical Review Letters*, 1986. V. 56. Iss.2. P. 135–138. DOI: 10.1103/PhysRevLett.56.135.
7. Zakharov V.E., Shabat A.B. Exact theory of two-dimensional self-focussing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media // *Soviet Physics JETP*, 1972. V. 34. № 1. P. 62–67.
8. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I // *Функциональный анализ и его приложения*, 1974. Т. 8. № 3. С. 43–53.
9. Kudryashov N.A. A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber // *Optik*, 2019. V. 189. P. 42–52.
10. Кутуков А.А., Кудряшов Н.А. Оптические солитоны системы дифференциальных уравнений типа нелинейного уравнения Шредингера с нелинейностью третьей, пятой и седьмой степени // *Вестник НИЯУ МИФИ*, 2020. Т. 9. № 5. С. 438–441. DOI: 10.1134/S2304487X20050090
11. Лаврова С.Ф., Кудряшов Н.А. Нелинейные динамические процессы, описываемые системой уравнений Радхакришна–Кунду–Лаксманана // *Вестник НИЯУ МИФИ*, 2020. Т. 9. № 1. С. 45–49. DOI: 10.1134/S2304487X20010058
12. Сафонова Д.В., Кудряшов Н.А. Точные решения дифференциального уравнения четвертого порядка для описания оптических импульсов // *Вестник НИЯУ МИФИ*, 2020. Т. 9. № 5. С. 412–419. DOI: 10.1134/S2304487X20050120.
13. Biswas A., Sonmezoglu A., Ekici M., Kara A.H., Alzahrani A.K., Belic M.R. CubicQuartic Optical Solitons and Conservation Laws with Kudryashovs Law of Refractive Index by Extended Trial Function // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2021. V. 61. № 12. P. 1995–2003.
14. Yildirim Y., Biswas A., Kara A.H., Ekici M., Zayed E.M.E., Alzahrani A.K., Belic M.R. Optical solitons and conservation law with Kudryashovs form of arbitrary refractive index // *Journal of Optics (India)*, 2021. V. 50. № 4. P. 542–547.
15. Kudryashov N.A., Nifontov D.R. Conservation laws and Hamiltonians of the mathematical model with unrestricted dispersion and polynomial nonlinearity // *Chaos, Solitons & Fractals*, 2023. V. 175. 114076.
16. Kudryashov N., Lavrova S. Nifontov D. Analytical solutions and conservation laws of the generalized model for propagation pulses with four powers of nonlinearity // *Opt. Quant. Electron.*, 2024. V.56. 1110. DOI: 10.1007/s11082-024-06598-y.
17. Kudryashov N.A., Kutukov A.A. Nifontov D.R. Analytical solutions and conservation laws of the generalized nonlinear Schrödinger equation with anti-cubic and cubic-quintic-septic nonlinearities // *Opt. Quant. Electron.*, 2024. V.56. 1157. DOI: 10.1007/s11082-024-07092-1.
18. Kudryashov N. Traveling wave solutions of the generalized Gerdjikov-Ivanov equation // *Optik*, 2020. V. 219. 165193.
19. Gerdjikov V.S., Ivanov M.I. Expansions over the squared solutions and inhomogeneous nonlinear schrodinger equation // *Inverse Problems*, 1992. V. 8 (6). P. 831–847.
20. Zahran Emad H.M., Bekir A. New unexpected explicit optical soliton solutions to the perturbed Gerdjikov-Ivanov

equation // Journal of Optics (India), 2023. V. 52. № 3. P. 1142–1147.

21. *Onder I., Secer A., Ozisik M., Bayram M.* Investigation of optical soliton solutions for the perturbed Gerdjikov-Ivanov equation with full-nonlinearity // *Heliyon*, 2023. V. 9. Iss.2. e13519. DOI: 10.1016/j.heliyon.2023.e13519.

22. *Olver P.J.* Applications of Lie groups to differential equations. Springer-Verlag, New York inc, 1986.

23. *Malomed B.A.* Inelastic collisions of polarized solitons in a birefringent optical fiber // Journal of the Optical Society of America B: Optical Physics, 1992. V. 9 (11). P. 2075–2082.

24. *Dmitriev S.V., Kevrekidis P.G., Malomed B.A., Frantzeskakis D.J.* Two-soliton collisions in a near-integrable lattice system // *Physical Review E – Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, 2003. V. 68. Iss.5. 056603. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.056603

25. *Biswas A.* Chirp-free bright optical solitons and conservation laws for complex Ginzburg-Landau equation with three nonlinear forms // *Optik*, 2018. V. 174, P. 207–215.

26. *Biswas A., Kara A.H., Zhou Q., Alzahrani A.K., Belic M.R.* Conservation Laws for Highly Dispersive Optical Solitons in Birefringent Fibers // *Regular and Chaotic Dynamics*, 2020. V. 25. Iss. 2. P. 166–177.

27. *Kudryashov N.A., Biswas A., Kara A.H., Yildirim Y.* Cubicquartic optical solitons and conservation laws having cubicquinticsepticonic self-phase modulation // *Optik*, 2022. V. 269. 169834.

28. *Alshehri A.M., Alshehri H.M., Alshreef A.N., Kara A.H., Biswas A., Yildirim Y.* Conservation laws for dispersive optical solitons with Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan model having quadrupled power-law of self-phase modulation // *Optik*, 2022. V. 267. 169715.

29. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Alngar M.E.M., Biswas A., Kara A.H., Dakova A., Khan S., Alshehri H.M., Belic M.R.* Solitons and conservation laws in magneto-optic waveguides with generalized Kudryashov’s equation by the unified auxiliary equation approach // *Optik*, 2021. V. 245. 167694.

30. *Drazin P.G., Johnson R.S.* Soliton: an introduction. Cambridge University press, 1989.

31. *Ablowitz M.J., Clarkson P.A.* Solitons, Nonlinear Equations and Inverse Scattering. Cambridge University press, 1991.

32. *Ablowitz M.J., Segur H.* Solitons and the Inverse Scattering Transform, SIAM Philadelphia, 1981.

33. *Pazarci A., Turhan U.C., Ghazanfari N., Gahramanov I.* Hamiltonian formalism for nonlinear Schrödinger equations // *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2023. V.121. 107191. DOI: 10.1016/j.cnsns.2023.107191

34. *Kudryashov N.A.* Conservation laws and Hamiltonian of the nonlinear Schrödinger equation of the fourth order with arbitrary refractive index // *Optik*, 2023. V.286. 170993. DOI: 10.1016/j.ijleo.2023.170993.

35. *Kudryashov N.A.* Hamiltonians of the Generalized Nonlinear Schrödinger Equations // *Mathematics*, 2023. V.11 (10). 2304. DOI: 10.3390/math11102304

36. *Kudryashov N.A.* Conservation laws of the complex Ginzburg-Landau equation // *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2023. V. 481. 128994.

37. *Kudryashov N.A., Nifontov D.R.* Exact solutions and conservation laws of the fourth-order nonlinear Schrödinger equation for the embedded solitons // *Optik*, 2024. V. 303. 171752.

38. *Kudryashov N.A., Nifontov D.R.* From conservation laws of generalized Schrödinger equations to exact solutions // *Journal of Optics*, 2024. <https://doi.org/10.1007/s12596-024-01965-0>

CONSERVATION LAWS, FIRST INTEGRALS AND CONSERVATIVE DENSITIES OF THE GENERALIZED NONLINEAR GERDJIKOV–IVANOV EQUATION

*D. R. Nifontov**, *N. A. Kudryashov***

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

**e-mail: drnifontov@mephi.ru*

***e-mail: nakudryashov@mephi.ru*

Received October 25, 2024; revised November 8, 2024; accepted November 12, 2024

The generalized Gerdjikov–Ivanov equation is considered. In recent years, this equation has been intensively studied, since this equation is used to describe pulse propagation in optical fiber. Unlike the classical Gerdjikov–Ivanov equation, the equation under study does not pass the Painlevé test and the Cauchy problem for this equation cannot be solved by the inverse scattering method. This version of the Gerdjikov–Ivanov equation has only a limited number of conservation laws. Using multipliers and direct calculations, conservation laws for the equation under consideration are constructed in this paper and two conservation laws are found without restrictions on the parameters of the equation. One more additional conservation law is found under an additional restriction on the parameters of the equation. In this paper, first integrals for ordinary differential equations are also obtained by reducing the conservation laws to the variables of a traveling wave in the generalized Gerdjikov–Ivanov equation. Analytical solutions of the equation under consideration are found. Exact solutions of the generalized Gerdjikov–Ivanov equation are presented in the form of optical solitons, as well as through the Jacobi elliptic functions. Using auxiliary integrals, conserved quantities for an optical soliton are calculated. Conservative densities correspond to physical quantities: power, momentum, and energy. The obtained conserved quantities are of practical use in numerical and neural network modeling of pulse propagation processes in optical fiber.

Keywords: Gerdjikov–Ivanov equation, conservation laws, first integrals, exact solutions, optical solitons, conservative densities.

REFERENCES

1. Kivshar Y.S., Agrawal G.P. Optical Solitons. From Fibers to Photonic Crystals. Academic Press, 2003.
2. Kivshar Yu.S. and Malomed B.A. Dynamics of solitons in nearly integrable systems. Rev. Mod. Phys., 1989. Vol. 63. Pp. 763–915.
3. Kivshar Yu.S., Pelinovsky D. E. Self – focusing and transverse instabilities of solitary waves. Phys. Reports, 2000. Vol. 331(4). Pp. 117–195.
4. Hasegawa A., Tappert F. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion. Applied Physics Letters, 1973. Vol. 23. Pp. 142–144. DOI: 10.1063/1.1654836.
5. Hasegawa A., Tappert F. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion. Applied Physics Letters, 1973. Vol. 23. Pp. 171–172. DOI: 10.1063/1.1654847.
6. Tai K., Hasegawa A., Tomita A. Observation of modulational instability in optical fibers. Physical Review Letters, 1986. Vol. 56. Iss. 2. Pp. 135–138. DOI: 10.1103/PhysRevLett.56.135.
7. Zakharov V.E., Shabat A.B. Exact theory of two-dimensional self-focussing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. Soviet Physics JETP, 1972. Vol. 34. No. 1. Pp. 62–67.
8. Zakharov, V.E., Shabat, A.B. A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. I. Funct. Anal. Its Appl., 1974. Vol. 8. Pp. 226–235. DOI: 10.1007/BF01075696.
9. Kudryashov N.A. A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber. Optik, 2019. Vol. 189. Pp. 42–52.
10. Kutukov A.A., Kudryashov N.A. Opticheskie solitony sistemy differencial'nyh uravnenij tipa nelinejnogo uravneniya SHryodingera s nelinejnost'yu tret'ej, pyatoj i sed'moj stepeni [Solitary Wave Solutions of the Coupled Nonlinear Schrödinger Equation with Cubic–Quintic–Septic Nonlinearity]. Vestnik NIYaU MIFI, 2020. Vol. 9. No. 5. Pp. 438–441 (in Russian). DOI: 10.1134/S2304487X20050090.
11. Lavrova S.F., Kudryashov N.A. Nelinejnye dinamičeskie processy, opisyyvaemye sistemoy uravnenij Radh akrishnana–Kundu–Laksmanana. [Nonlinear Dynamic Processes Described by the Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan Equations]. Vestnik NIYaU MIFI, 2020. Vol. 9. No. 1. Pp. 45–49 (in Russian). DOI: 10.1134/S2304487X20010058.

12. *Safonova D.V., Kudryashov N.A.* Tochnye resheniya differentsial'nogo uravneniya chetvertogo poryadka dlya opisaniya opticheskikh impul'sov [Exact Solution of Fourth Order Differential Equations for Description of Optical Pulses]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2020. Vol. 9. No. 5. Pp. 412–419 (in Russian). DOI: 10.1134/S2304487X20050120.
13. *Biswas A., Sonmezoglu. A., Ekici M., Kara A.H., Alzahrani A.K., Belic M.R.* Cubic-Quartic Optical Solitons and Conservation Laws with Kudryashovs Law of Refractive Index by Extended Trial Function. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2021. Vol. 61. No. 12. Pp. 1995 – 2003.
14. *Yildirim Y., Biswas A., Kara A.H., Ekici M., Zayed E.M.E., Alzahrani A.K., Belic M.R.* Optical solitons and conservation law with Kudryashovs form of arbitrary refractive index. *Journal of Optics (India)*, 2021. Vol. 50. No. 4. Pp. 542–547.
15. *Kudryashov N.A., Nifontov D.R.* Conservation laws and Hamiltonians of the mathematical model with unrestricted dispersion and polynomial nonlinearity. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2023, Vol. 175, 114076.
16. *Kudryashov N., Lavrova S. Nifontov D.* Analytical solutions and conservation laws of the generalized model for propagation pulses with four powers of nonlinearity. *Opt. Quant. Electron*, 2024. Vol. 56, 1110. DIO: 10.1007/s11082-024-06598-y.
17. *Kudryashov N.A., Kutukov A.A. Nifontov D.R.* Analytical solutions and conservation laws of the generalized nonlinear Schrödinger equation with anti-cubic and cubic-quintic-septic nonlinearities. *Opt. Quant. Electron.*, 2024. Vol. 56, 1157. DOI: 10.1007/s11082-024-07092-1.
18. *Kudryashov N.* Traveling wave solutions of the generalized Gerdjikov-Ivanov equation. *Optik*, 2020. Vol. 219, 165193.
19. *Gerdjikov V.S., Ivanov M.I.* Expansions over the squared solutions and inhomogeneous nonlinear schrodinger equation. *Inverse Problems*, 1992. Vol. 8 (6) Pp. 831–847.
20. *Zahran Emad H.M., Bekir A.* New unexpected explicit optical soliton solutions to the perturbed Gerdjikov-Ivanov equation. *Journal of Optics (India)*, 2023. Vol. 52. No. 3. Pp. 1142–1147.
21. *Onder I., Secer A., Ozisik M., Bayram M.* Investigation of optical soliton solutions for the perturbed Gerdjikov-Ivanov equation with full-nonlinearity. *Heliyon*, 2023. Vol. 9. Iss.2, e13519. DOI: 10.1016/j.heliyon.2023.e13519.
22. *Olver P.J.* Applications of Lie groups to differential equations. Springer-Verlag, New York inc., 1986.
23. *Malomed B.A.* Inelastic collisions of polarized solitons in a birefringent optical fiber. *Journal of the Optical Society of America B: Optical Physics*, 1992. Vol. 9 (11). Pp. 2075–2082.
24. *Dmitriev S.V., Kevrekidis P.G., Malomed B.A., Frantzeskakis D.J.* Two-soliton collisions in a near-integrable lattice system. *Physical Review E – Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, 2003. Vol. 68. Iss. 5, 056603. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.056603.
25. *Biswas A.* Chirp-free bright optical solitons and conservation laws for complex Ginzburg-Landau equation with three nonlinear forms. *Optik*, 2018. Vol. 174. Pp. 207–215.
26. *Biswas A., Kara A.H., Zhou Q., Alzahrani A.K., Belic M.R.* Conservation Laws for Highly Dispersive Optical Solitons in Birefringent Fibers. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2020. Vol. 25. Iss. 2. Pp. 166–177.
27. *Kudryashov N.A., Biswas A., Kara A.H., Yildirim Y.* Cubicquartic optical solitons and conservation laws having cubicquinticsepticnonic self-phase modulation. *Optik*, 2022. Vol. 269, 169834.
28. *Alshehri A.M., Alshehri H.M., Alshreef A.N., Kara A.H., Biswas A., Yildirim Y.* Conservation laws for dispersive optical solitons with Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan model having quadrupled power-law of self-phase modulation. *Optik*, 2022, Vol. 267, 169715.
29. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Alngar M.E.M., Biswas A., Kara A.H., Dakova A., Khan S., Alshehri H.M., Belic M.R.* Solitons and conservation laws in magneto-optic waveguides with generalized Kudryashov's equation by the unified auxiliary equation approach. *Optik*, 2021. Vol. 245, 167694.
30. *Drazin P. G., Johnson R. S.* Soliton: an introduction. Cambridge University press, 1989.
31. *Ablowitz M.J., Clarkson P.A.* Solitons, Nonlinear Equations and Inverse Scattering. Cambridge University press, 1991.
32. *Ablowitz M.J., Segur H.* Solitons and the Inverse Scattering Transform. SIAM Philadelphia, 1981.
33. *Pazarci A., Turhan U.C., Ghazanfari N., Gahramanov I.* Hamiltonian formalism for nonlinear Schrger equations. *Commun Nonlinear Sci. Numer Simul.*, 2023. Vol. 121, 107191. DOI: 10.1016/j.cnsns.2023.107191
34. *Kudryashov N.A.* Conservation laws and Hamiltonian of the nonlinear Schrodinger equation of the fourth order with arbitrary refractive index. *Optik*, 2023. Vol. 286, 170993. DOI: 10.1016/j.ijleo.2023.170993.
35. *Kudryashov N.A.* Hamiltonians of the Generalized Nonlinear Schrodinger Equations. *Mathematics*, 2023. Vol. 11 (10), 2304. DOI: 10.3390/math11102304.
36. *Kudryashov N.A.* Conservation laws of the complex Ginzburg–Landau equation. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2023. Vol. 481, 128994.
37. *Kudryashov N.A., Nifontov D.R.* Exact solutions and conservation laws of the fourth-order nonlinear Schrödinger equation for the embedded solitons. *Optik*, 2024. Vol. 303, 171752.
38. *Kudryashov N.A., Nifontov D.R.* From conservation laws of generalized Schrödinger equations to exact solutions. *Journal of Optics*, 2024. <https://doi.org/10.1007/s12596-024-01965-0>.

УДК 517.9

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА С ДИСПЕРСИЕЙ И ПОТЕНЦИАЛОМ ОБЩЕГО ВИДА: ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И РЕДУКЦИИ

А. Д. Полянин^{1,*}, Н. А. Кудряшов^{2,**}

¹ Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

² Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

*e-mail: polyanin@ipmnet.ru

**e-mail: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию: 17.10.2024

После доработки: 30.10.2024

Принята к публикации: 12.11.2024

Исследуется нелинейное уравнение Шредингера общего вида, в котором дисперсия и потенциал задаются двумя произвольными функциями. Рассматриваемое уравнение является естественным обобщением широкого класса родственных нелинейных уравнений, которые часто встречаются в различных разделах теоретической физики, включая нелинейную оптику, сверхпроводимость и физику плазмы. Найдены точные решения нелинейного уравнения Шредингера общего вида, которые выражаются в квадратурах. Описаны одномерные несимметричные редукции, приводящие исследуемое уравнение в частных производных к более простым обыкновенным дифференциальным уравнениям или системам таких уравнений. Особое внимание уделено уравнениям, дисперсия которых задается степенной функцией. Полученные в данной работе точные решения могут использоваться в качестве тестовых задач, предназначенных для оценки точности численных методов интегрирования нелинейных уравнений математической физики.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, нелинейные УрЧП общего вида, нелинейная оптика, точные решения, решения в квадратурах, решения с обобщенным разделением переменных, несимметричные редукции.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.6.3

EDN OEBIJV

ВВЕДЕНИЕ

Классическое нелинейное уравнение Шредингера. Во многих разделах теоретической физики встречается классическое нелинейное уравнение Шредингера с кубической нелинейностью [1–6]:

$$iu_t + u_{xx} + k|u|^2u = 0, \quad (1)$$

где $u(x, t)$ – искомая комплекснозначная функция действительных аргументов; t – время; x – пространственная переменная; k – параметр уравнения; $i^2 = -1$.

Уравнение (1) применяется для математического моделирования распространения волн практически во всех разделах физики, где рассматриваются нелинейные волновые процессы. Теоретическое и экспериментальное обоснование использования нелинейного уравнения

Шредингера в нелинейной оптике дано в [7–10]. При описании распространения импульсов в оптическом волокне выражение со второй производной отвечает за дисперсию импульса, квадратичный множитель $k|u|^2$, называемый керровской нелинейностью, характеризует взаимодействие светового импульса с материалом волокна и определяет зависимость коэффициента преломления света в нелинейной среде. Уникальность уравнения (1) объясняется не только тем, что это уравнение является базовым уравнением для описания процессов передачи информации в оптической среде, но и тем, что оно относится к классу интегрируемых уравнений в частных производных (УрЧП) [5]. Уравнение (1) имеет бесконечное число законов сохранения, преобразования Бэклунда, и проходит тест Пенлеве [4, 5, 11–13]. Задача Коши для уравнения (1) с начальным условием общего вида решается методом обратной задачи рассеяния [4, 5]. Точ-

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА С ДИСПЕРСИЕЙ И ПОТЕНЦИАЛОМ ОБЩЕГО ВИДА:
ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И РЕДУКЦИИ

ные решения нелинейного уравнения Шредингера (1) приведены в [14–16].

Родственные нелинейные уравнения с частными производными вида

$$iu_t + u_{xx} + g(|u|)u = 0, \quad (2)$$

и более сложные нелинейные уравнения типа Шредингера, которые встречаются в литературе, можно найти, например, в [14–29] (см. также разд. 1 этой статьи). В нелинейной оптике потенциал $g(|u|)$ в уравнении (2) определяет закон взаимодействия светового импульса с материалом волокна.

Точные решения уравнения (2) в случае степенной зависимости $g(|u|) = k|u|^n$ рассматривались, например, в [14–16]. В теории плазмы и лазерной физике встречается уравнение (2) с $g(|u|) = k(1 - e^{a|u|})$ (см., например, [30]). Точные решения нелинейного уравнения Шредингера (2) для произвольной функции $g(|u|)$ приведены в [14, 16].

Точные решения нелинейных уравнений в частных производных (терминология). В данной статье под точными решениями уравнений в частных производных понимаются следующие решения [31]:

a) решения, которые выражаются через элементарные функции;

b) решения, которые выражаются в квадратурах, т.е. через элементарные функции, функции, входящие в уравнение (это необходимо, если уравнение содержит произвольные или специальные функции) и неопределенные интегралы;

c) решения, которые выражаются через решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или систем таких уравнений.

Допускаются также различные комбинации решений, описанных в пп. a–c. В случаях a и b точное решение может быть представлено в явной, неявной или параметрической форме.

Важно отметить, что точные решения являются математическими эталонами, которые часто используются в качестве тестовых задач для проверки адекватности и оценки точности численных методов интегрирования нелинейных уравнений в частных производных. Наиболее предпочтительными для этих целей являются простые решения из пп. a и b. Несколько таких и более сложных точных решений описано далее в данной статье.

1. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА ОБЩЕГО ВИДА. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ К СИСТЕМЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ УрЧП

Нелинейное уравнение Шредингера общего вида. В данной работе будем исследовать нелинейное уравнение Шредингера общего вида

$$iu_t + [f(|u|)u]_{xx} + g(|u|)u = 0, \quad (3)$$

где $u = u(x, t)$ – искомая комплекснозначная функция действительных аргументов; $f(z)$ и $g(z)$ – произвольные действительные функции (f должна быть дважды непрерывно дифференцируемой; g – непрерывной); $i^2 = -1$. Уравнение (3) с нелинейной дисперсией, которая задается функцией $f(z)$, является существенным обобщением уравнения (2), соответствующего частному случаю $f(z) = \text{const}$.

В случае степенных функций

$$f(z) = az^k, \quad g(z) = bz^m + cz^n \quad (4)$$

нелинейное уравнение Шредингера (3) рассматривалось в работе [21], где были описаны его решения типа стационарных солитонов вида $u = r(x)e^{i\varphi}$. При произвольной функции $f(|u|)$ и $g(|u|) \equiv 0$ некоторые точные решения уравнения (3) приведены в [14].

Свойство уравнения (3). Если $u(x, t)$ – решение уравнения (3), то функции

$$\bar{u} = e^{iC_1} u(\pm x + C_2, t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные действительные постоянные, также являются решениями данного уравнения. Из этого свойства следует, что уравнение (3) допускает точные решения типа бегущей волны вида $u = U(z)$, $z = x - \lambda t$, где λ – произвольная постоянная (более сложные решения, включающие решения типа бегущей волны, будут рассмотрены в конце разд. 2).

Преобразование уравнения Шредингера к системе действительных УрЧП. Представим искомую функцию в показательной форме

$$u = re^{i\varphi}, \quad r = |u|, \quad (5)$$

где $r = r(x, t) \geq 0$ и $\varphi = \varphi(x, t)$ – действительные функции.

Дифференцируя (5), находим производные:

$$\begin{aligned} u_t &= (r_t + ir\varphi_t)e^{i\varphi}, \\ [f(|u|)u]_x &= (h_x + ih\varphi_x)e^{i\varphi}, \quad h = rf(r), \\ [f(|u|)u]_{xx} &= [h_{xx} - h\varphi_x^2 + i(2h_x\varphi_x + h\varphi_{xx})]e^{i\varphi}, \\ h &= rf(r). \end{aligned} \quad (6)$$

Подставим (6) в (3) и сократим все члены на $e^{i\varphi}$. Приравняв далее к нулю действительную и мнимую части полученного соотношения, приходим к следующей системе двух действительных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} -r\varphi_t + h_{xx} - h\varphi_x^2 + rg(r) &= 0, \\ r_t + 2h_x\varphi_x + h\varphi_{xx} &= 0, \quad h = rf(r). \end{aligned} \quad (7)$$

Система (7) вместе с выражением (5) будут использованы далее для построения точных решений нелинейного уравнения Шредингера (3).

Из каких соображений ищутся точные решения. Поиск точных решений уравнения (3) затруднен тем, что оно содержит две произвольные функции $f(z)$ и $g(z)$. Для построения точных решений этого уравнения наложим на аргумент произвольных функций одно из трех дополнительных соотношений

$$|u| = \text{const}, \quad (8)$$

$$|u| = p(x), \quad (9)$$

$$|u| = g(t), \quad (10)$$

где $p(x)$ и $g(t)$ – некоторые функции одного аргумента. При выполнении любого из соотношений (8)–(10) уравнение (3) «линеаризуется», что позволяет далее использовать стандартную процедуру разделения переменных, применяемую для линейных УрЧП [32] (или метод обобщенного разделения переменных, применяемый для нелинейных УрЧП [14, 31]). Аналогичный прием, основанный на привлечении дополнительных соотношений типа (8)–(10) и называемый методом функциональных связей, позволил найти много точных решений нелинейных УрЧП с запаздыванием [33–35].

После перехода от комплексного уравнения (3) к системе действительных УрЧП (7) при построении точных решений следует использовать соотношения (8)–(10), положив в них $|u|=r$ (это следует из представления (5)).

2. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ОБЩЕГО ВИДА

Ниже описаны точные решения нелинейного уравнения Шредингера общего вида (3), которое содержит две произвольные функции $f(z)$ и $g(z)$. Для построения этих решений, как отмечено выше, используются дополнительные соотношения (8)–(10) и методы разделения переменных.

Решения типа бегущей волны с постоянной амплитудой. Используем простейшее дополнительное соотношение (8), положив $|u|=r=C_1$. В этом случае система (7) имеет простое точное решение

$$\begin{aligned} r &= C_1, \quad \varphi = C_2x + C_3 + Bt, \\ B &= g(C_1) - C_2^2 f(C_1), \end{aligned} \quad (11)$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные действительные постоянные ($C_1 > 0$). Подставив (11) в (5), получим решение типа бегущей волны рассматриваемого нелинейного уравнения (3):

$$u = C_1 e^{i(C_2x + C_3 + Bt)}, \quad B = g(C_1) - C_2^2 f(C_1). \quad (12)$$

Это решение – периодическое по пространству и времени с постоянной амплитудой C_1 .

В случае степенных функций (4) решение (12) принимает вид

$$u = C_1 e^{i(C_2x + C_3 + Bt)}, \quad B = bC_1^m + cC_1^n - aC_1^k C_2^2.$$

Периодические по времени решения с амплитудой, зависящей от пространственной переменной. Используя дополнительное соотношение (9), можно показать, что система (7) допускает более сложное, чем (11), периодическое по времени t точное решение

$$r = r(x), \quad \varphi = C_1 t + \theta(x), \quad (13)$$

где C_1 – произвольная постоянная, а функции $r = r(x)$ и $\theta = \theta(x)$ описываются системой ОДУ

$$\begin{aligned} h_{xx} - h(\theta'_x)^2 - C_1 r + rg(r) &= 0, \quad h = rf(r), \\ 2h'_x \theta'_x + h\theta''_{xx} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Частному случаю $\theta(x) \equiv \text{const}$ в (13) соответствуют решения (5) типа стационарных солитонов, у которых фаза φ не зависит от пространственной координаты. При $\theta(x) \equiv \text{const}$ второе уравнение (14) удовлетворяется тождественно, и остается только одно первое ОДУ, в котором надо положить $\theta'_x = 0$.

В общем случае, интегрируя дважды второе уравнение (14), последовательно находим

$$\begin{aligned} \theta'_x &= C_2 h^{-2}, \\ \theta &= C_2 \int h^{-2} dx + C_3 = C_2 \int [rf(r)]^{-2} dx + C_3, \end{aligned} \quad (15)$$

где C_2, C_3 – произвольные постоянные. Подста-

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА С ДИСПЕРСИЕЙ И ПОТЕНЦИАЛОМ ОБЩЕГО ВИДА:
ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И РЕДУКЦИИ

вив (15) в первое уравнение (14), получим нелинейное ОДУ второго порядка автономного вида

$$h_{xx}'' - C_2^2 h^{-3} - C_1 r + r g(r) = 0, \quad h = r f(r). \quad (16)$$

Общее решение уравнения (16) можно представить в неявной форме (подробные пояснения даны в разд. 5):

$$\begin{aligned} \int [-C_2^2 h^{-2} + 2 \int [C_1 r - r g(r)] dh + C_4]^{-1/2} dh = \\ = C_5 \pm x, \quad (17) \\ h = r f(r), \quad dh = [f(r) + r f_r'(r)] dr, \end{aligned}$$

где C_4, C_5 – произвольные постоянные. Таким образом показано, что система (7) допускает точное решение (13), которое можно выразить в квадратурах.

В частном случае, который соответствует $\theta \equiv \text{const}$, в формулах (15) и (17) следует положить $C_2 = 0$.

Отметим, что для уравнения со степенной дисперсией $f(r) = ar^k$ функция $r = r(x)$, входящая в решение (13) системы (7), задается неявно:

$$\begin{aligned} a(k+1) \int \left[-C_2^2 a^{-2} r^{-2(k+1)} + \frac{2C_1 a(k+1)}{k+2} r^{k+2} - \right. \\ \left. - 2a(k+1) \int r^{k+1} g(r) dr + C_4 \right]^{-1/2} r^k dr = C_5 \pm x, \end{aligned}$$

а функция $\theta = \theta(r)$ определяется с помощью второго соотношения (15).

Решения с обобщенным разделением переменных, амплитуда которых зависит от времени. Используя дополнительное соотношение (10), покажем, что система (7) допускает точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$r = r(t), \quad \varphi = a(t)x^2 + b(t)x + c(t). \quad (18)$$

Для этого подставим (18) в (7). В результате первое уравнение системы приводится к квадратному уравнению относительно x , коэффициенты которого зависят от времени. Приравняв нулю функциональные коэффициенты этого квадратного уравнения и добавляя второе уравнение системы, которое в данном случае зависит только от t , получим следующую систему, состоящую из четырех ОДУ:

$$\begin{aligned} a_t' &= -4a^2 f(r), \\ b_t' &= -4abf(r), \\ c_t' &= -b^2 f(r) + g(r), \\ r_t' &= -2arf(r). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь первые три уравнения были сокращены на r .

Из первого, второго и четвертого уравнения системы (19) можно получить два интеграла

$$a = C_1 r^2, \quad b = C_2 r^2, \quad (20)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Подставим первое выражение (20) в первое уравнение (19). Интегрируя полученное ОДУ, находим зависимость $r = r(t)$ в неявной форме

$$\int \frac{dr}{r^3 f(r)} = -2C_1 t - C_3, \quad (21)$$

где C_3 – произвольная постоянная. Интегрируя третье уравнение системы (19), получим

$$c = -C_2^2 \int r^4 f(r) dt + \int g(r) dt + C_4. \quad (22)$$

Для простоты полагая в (20) и (22) $C_2 = 0$ и подставляя полученные выражения в (18), находим функции, определяющие решение (5):

$$r = r(t), \quad \varphi = C_1 r^2 (x + A)^2 + \int g(r) dt + C_4, \quad (23)$$

где функция $r = r(t)$ задана неявно выражением (21). Отметим, что во вторую формулу добавлена произвольная постоянная A , поскольку система (7) инвариантна относительно произвольного постоянного сдвига по пространственной переменной.

Для уравнения (3) со степенной дисперсией $f(r) = ar^k$ в решении (23) надо положить

$$r(t) = \left[a(k+2)(2C_1 t + C_3) \right]^{-\frac{1}{k+2}}.$$

Эта формула получена из (21).

Решения, представляющие собой нелинейные суперпозиции бегущих волн. Система (7) допускает точные решения вида

$$r = r(z), \quad \varphi = C_1 t + C_2 x + \theta(z), \quad z = x - \lambda t, \quad (24)$$

где C_1, C_2, λ – произвольные постоянные, которое обобщает решение (13). Частному случаю

$C_1 = C_2 = 0$ в (24) соответствует решение типа бегущей волны.

Подставив (24) в (7), получим смешанную нелинейную систему, состоящую из двух ОДУ:

$$\begin{aligned} -r(C_1 - \lambda\theta'_z) + h''_{zz} - h(C_2 + \theta'_z)^2 + g(r)r &= 0, \\ -\lambda r'_z + 2h'_z(C_2 + \theta'_z) + h\theta''_{zz} &= 0, \quad h = rf(r). \end{aligned} \quad (25)$$

Подстановка $\xi = \theta'_z$ позволяет понизить порядок этой системы на единицу.

Замечание. Решение (24) можно получить, например, используя следующие соображения. Сначала заметим, что одну из двух произвольных постоянных C_1 или C_2 в (24) без ограничения общности можно положить равной нулю (это соответствует переопределению функции θ). После этого в уравнении (3) или системе (7) переходим от переменных x, t к новым независимым переменным z, t , где $z = x - \lambda t$. Затем по аналогии с (9) введем дополнительное соотношение $|u| = p(z)$. Далее используется процедура разделения переменных.

Опишем также другой более простой способ получения решения (24). Сначала в уравнении (3) делается замена $u = e^{i(C_1 t + C_2 x)} w$, где C_1 и C_2 – произвольные действительные постоянные. Затем ищется решение типа бегущей волны преобразованного уравнения, т. е. полагается $w = W(z)$, где $z = x - \lambda t$.

3. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Ниже описывается структура точных решений более общих, чем (3), родственных нелинейных уравнений, которые явно зависят от одной из независимых переменных.

1. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\begin{aligned} iu_t + [f(|u|)u]_{xx} + (n-1)x^{-1}[f(|u|)u]_x + \\ + g(|u|)u = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

которое описывает радиально-симметричные решения n -мерного уравнения Шредингера общего

вида, где $x = \left(\sum_{m=1}^n x_m^2\right)^{1/2}$ – радиальная координата;

x_m – пространственные переменные. При $n = 1$ уравнение (26) переходит в одномерное уравнение (3), плоским и пространственным задачам соответствуют значения $n = 2$ и $n = 3$.

Уравнение (26) имеет решения с обобщенным разделением переменных

$$U = r(x) \exp[iC_1 t + i\theta(x)], \quad (27)$$

где C_1 – произвольная действительная постоянная, а действительные функции $r(x)$ и $\theta(x)$ описываются соответствующей системой ОДУ, которая здесь опускается. Частному случаю $\theta(x) \equiv 0$ в (27) соответствуют стационарные солитоны.

2. Рассмотрим теперь более общее, чем (3), одномерное нелинейное уравнение Шредингера, зависящее явно от пространственной переменной x , вида

$$iu_t + [f(x, |u|)u]_{xx} + g(x, |u|)u = 0,$$

где $f(x, z)$ и $g(x, z)$ – произвольные функции двух аргументов. Это уравнение также допускает решения вида (27), где функции $r = r(x)$ и $\theta = \theta(x)$ описываются системой ОДУ, которую можно получить из (14), формально заменив в ней функции $f(r)$ и $g(r)$ на $f(x, r)$ и $g(x, r)$.

3. Приведем также другое более общее, чем (3), одномерное нелинейное уравнение Шредингера, зависящее явно от времени t , вида

$$iu_t + [f(t, |u|)u]_{xx} + g(t, |u|)u = 0,$$

где $f(t, z)$ и $g(t, z)$ – произвольные функции двух аргументов. Можно показать, что это уравнение допускает решения с обобщенным разделением переменных

$$u = r(t) \exp\left\{i\left[a(t)x^2 + b(t)x + c(t)\right]\right\},$$

где функции $r = r(t)$, $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ описываются системой ОДУ, которую можно получить из (19), формально заменив в ней функции $f(r)$ и $g(r)$ на $f(t, r)$ и $g(t, r)$.

4. РЕШЕНИЕ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Рассмотрим класс автономных ОДУ второго порядка специального вида

$$h''_{xx} = \Phi(h) + \Psi(r), \quad h = \Theta(r), \quad (28)$$

где $\Phi(h)$, $\Psi(r)$, $\Theta(r)$ – заданные функции. ОДУ (16) является частным случаем уравнения (28) при

$$\begin{aligned} \Phi(h) = C_2^2 h^{-3}, \quad \Psi(r) = C_1 r - rg(r), \\ \Theta(r) = rf(r), \end{aligned} \quad (29)$$

При $\Psi(r) \equiv 0$ общее решение ОДУ (28) можно

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА С ДИСПЕРСИЕЙ И ПОТЕНЦИАЛОМ ОБЩЕГО ВИДА: ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И РЕДУКЦИИ

представить в неявной форме [36]:

$$\int \left[2 \int \Phi(h) dh + A_1 \right]^{-1/2} dh = A_2 \pm x, \quad (30)$$

$$h = \Theta(r),$$

где A_1 и A_2 – произвольные постоянные. В общем случае во втором слагаемом правой части уравнения (28) перейдем от переменной r к переменной h , положив $\Psi_1(h) = \Psi(r)$, где $h = \Theta(r)$. Имеем

$$h''_{xx} = \Phi(h) + \Psi_1(h). \quad (31)$$

Общее решение этого уравнения определяется формулой (30), в которой $\Phi(h)$ надо заменить на $\Phi(h) + \Psi_1(h)$, или

$$\int \left[2 \int \Phi(h) dh + 2 \int \Psi_1(h) dh + A_1 \right]^{-1/2} dh = A_2 \pm x, \quad (32)$$

$$h = \Theta(r),$$

Первый внутренний интеграл в (32) не меняем, а во втором внутреннем интеграле вернемся от переменной h к переменной r . Учитывая соотношения $\Psi_1(h) = \Psi(r)$ и $dh = \Theta'_r(r) dr$, в итоге получим

$$\int \left[2 \int \Phi(h) dh + 2 \int \Psi(r) \Theta'_r(r) dr + A_1 \right]^{-1/2} dh = A_2 \pm x, \quad (33)$$

$$h = \Theta(r).$$

Подставив в (33) выражения (29), находим общее решение уравнения (16):

$$\int \left[-C_2^2 h^{-2} + 2 \int [C_1 r - r g(r)] dh + A_1 \right]^{-1/2} dh = A_2 \pm x,$$

$$h = r f(r), \quad dh = [f(r) + r f'_r(r)] dr.$$

5. КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Исследуется нелинейное уравнение Шредингера общего вида, дисперсия и потенциал которых задаются двумя произвольными функциями. Найдены точные решения этого уравнения, которые выражаются в квадратурах или элементарных функциях. Описаны одномерные редукции, приводящие рассматриваемое нелинейное УрЧП к более простым системам ОДУ. Полученные решения могут использоваться в качестве тестовых задач для численных методов интегрирования нелинейных уравнений математической физики.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена по темам государственного задания (№№ госрегистрации 124012500440-9 и FSWU-2023-0031).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агравал Г.* Нелинейная волоконная оптика. М: Мир, 1996.
2. *Квишарь Ю.С., Агравал Г.* Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам. М: Физматлит, 2005.
3. *Kodama Y., Hasegawa A.* Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide // IEEE Journal of Quantum Electronics, 1987. V. 23. № 5. P. 510–524.
4. *Drazin P.G., Johnson R.S.* Solitons: An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
5. *Ablovitz M.J., Clarkson P.A.* Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
6. *Kivshar Yu.S., Malomed B.A.* Dynamics of solitons in nearly integrable systems // Rev. Mod. Phys., 1989. V. 63. P. 763–915.
7. *Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов П.В.* Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде // Успехи физических наук, 1967. Т. 93. № 1. С. 19–70.
8. *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion // Applied Physics Letters, 1973. V. 23. № 3. P. 142–144.
9. *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion // Applied Physics Letters, 1973. V. 23. № 4. P. 171–172.
10. *Tai K., Hasegawa A., Tomita A.* Observation of modulational instability in optical fibers // Physical Review Letters, 1986. V. 56. № 2. P. 135–138.
11. *Weiss J., Tabor M., Carnevale G.* The Painleve property for partial differential equations // J. Math. Phys., 1982. V. 24. № 3. P. 522–526.
12. *Kudryashov N.A.* Painlevé analysis of the resonant third-order nonlinear Schrödinger equation // Appl. Math. Letters, 2024. V. 158. 109232.
13. *Kudryashov N.A.* Painlevé analysis of the Sasa-Satsuma equation // Phys. Letters A, 2024. V. 525. 129900.
14. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.
15. *Al Khawaja U., Al Sakkaf L.* Handbook of Exact Solutions to the Nonlinear Schrödinger Equations. Bristol: Institute of Physics Publ., 2019.
16. *Polyanin A.D.* Handbook of Exact Solutions to Mathematical Equations. Boca Raton: CRC Press–Chapman & Hall, 2025.

17. Kudryashov N.A. A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber // *Optik*, 2019. V. 189. № 42. 52.
18. Kudryashov N.A. Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber // *Optik*, 2019. V. 194. 163060.
19. Kudryashov N.A. Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities // *Optik*, 2020. V. 212. 164750.
20. Kudryashov N.A. Solitary waves of the non-local Schrödinger equation with arbitrary refractive index // *Optik*, 2021. V. 231. 166443.
21. Kudryashov N.A. Stationary solitons of the generalized nonlinear Schrödinger equation with nonlinear dispersion and arbitrary refractive index. *Applied Mathematics Letters*, 2022, Vol. 128. 107888.
22. Kudryashov N.A. Almost general solution of the reduced higher-order nonlinear Schrödinger equation // *Optik*, 2021. V. 230. 66347.
23. Yildirim Y. Optical solitons to Schrodinger–Hirota equation in DWDM system with modified simple equation integration architecture // *Optik*, 2019. V. 182. P. 694–701.
24. Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Biswas A., Ekici M., Alshomrani A.S., Khan S., Zhou Q., Belic M.R. Dispersive solitons in optical fibers and DWDM networks with Schrodinger–Hirota equation // *Optik*, 2019. V. 199. 163214.
25. Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Alngar M.E.M., Biswas A., Moraru L., Khan S., Yildirim Y., Alshehri H.M., Belic M.R. Dispersive optical solitons with Schrodinger–Hirota model having multiplicative white noise via Ito Calculus // *Physics Letters A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2022. V. 445. 128268.
26. Wang G., Kara A.H., Biswas A., Guggilla P., Alzahrani A.K., Belic M.R. Highly dispersive optical solitons in polarization-preserving fibers with Kerr law nonlinearity by Lie symmetry // *Physics Letters A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2022. V. 421. 127768.
27. Biswas A., Hubert M.B., Justin M., Betchewe G., Doka S.Y., Crepin K.T., Ekici M., Zhou Q., Moshokoa S., Belic M. Chirped dispersive bright and singular optical solitons with Schrodinger–Hirota equation // *Optik*, 2018. V. 168. P. 192–195.
28. Zhou Q., Xu M., Sun Y., Zhong Y., Mirzazadeh M. Generation and transformation of dark solitons, anti-dark solitons and dark double-hump solitons // *Nonlinear Dynamics*, 2022. V. 110. № 2. P. 1747–1752.
29. Полянин А.Д., Кудряшов Н.А. Нелинейные уравнения Шредингера с запаздыванием: Точные решения, редукции и преобразования // *Вестник НИЯУ МИФИ*, 2024. Т. 13. № 5. С. 340–349.
30. Bullough R.K. Solitons // *Physics Bulletin*, 1978. V. 29. № 2. P. 78–82.
31. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. Boca Raton–London: CRC Press, 2022.
32. Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd ed. Boca Raton–London: CRC Press, 2016.
33. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014. V. 19. № 3. P. 417–430.
34. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients // *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014. V. 67. P. 267–277.
35. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I. Delay Ordinary and Partial Differential Equations. Boca Raton–London: CRC Press, 2024.
36. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. Boca Raton–London: CRC Press, 2018.

NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION WITH DISPERSION AND POTENTIAL OF THE GENERAL FORM: EXACT SOLUTIONS AND REDUCTIONS

A. D. Polyani^{1,*}, N. A. Kudryashov^{2,**}

¹Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526, Russia

²National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409, Russia

*e-mail: polyanin@ipmnet.ru

**e-mail: nakudr@gmail.com

Received October 17, 2024; revised October 30, 2024; accepted November 12, 2024

The nonlinear Schrödinger equation of a general form is investigated, in which the chromatic dispersion and the potential are given by two arbitrary functions. The equation under consideration is a natural generalization of a wide class of related nonlinear equations that are often encountered in various sections of theoretical physics, including nonlinear optics, superconductivity, and plasma physics. Exact solutions of the nonlinear Schrödinger equation of general form are found, which are expressed in quadratures. One-dimensional non-symmetry reductions are described, which reduce the studied partial differential equation to simpler ordinary differential equations or systems of such equations. Special attention is paid to equations whose dispersion is given by a power function. The exact solutions obtained in this work can be used as test problems intended to assess the accuracy of numerical methods for integrating nonlinear equations of mathematical physics.

Keywords: nonlinear Schrödinger equation, general nonlinear PDEs, nonlinear optics, exact solutions, solutions in quadratures, generalized separable solutions, non-symmetry reductions.

REFERENCES

1. Agrawal G.P. Nonlinear Fiber Optics, 4th ed. New York: Academic Press, 2007.
2. Kivshar Yu.S., Agrawal G.P. Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals. San Diego: Academic Press, 2003.
3. Kodama Y., Hasegawa A. Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide. IEEE Journal of Quantum Electronics, 1987. Vol. 23. No. 5. Pp. 510–524.
4. Drazin P.G., Johnson R.S. Solitons: An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
5. Ablowitz M.J., Clarkson P.A. Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
6. Kivshar Yu.S., Malomed B.A. Dynamics of solitons in nearly integrable systems. Rev. Mod. Phys., 1989. Vol. 63. Pp. 763–915.
7. Akhmanov S.A., Sukhorukov A.P., Khokhlov R.V. Self-focusing and diffraction of light in a nonlinear medium. Soviet Physics Uspekhi, 1968. Vol. 10. No. 5. Pp. 609–636.
8. Hasegawa A., Tappert F. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion. Applied Physics Letters, 1973. Vol. 23. No. 3. Pp. 142–144.
9. Hasegawa A., Tappert F. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion. Applied Physics Letters, 1973. Vol. 23. No. 4. Pp. 171–172.
10. Tai K., Hasegawa A., Tomita A. Observation of modulational instability in optical fibers. Physical Review Letters, 1986. Vol. 56. No. 2. Pp. 135–138.
11. Weiss J., Tabor M., Carnevale G. The Painleve property for partial differential equations. J. Math. Phys., 1982. Vol. 24. No. 3. Pp. 522–526.
12. Kudryashov N.A. Painlevé analysis of the resonant third-order nonlinear Schrödinger equation. Appl. Math. Letters, 2024. Vol. 158. 109232.
13. Kudryashov N.A. Painlevé analysis of the Sasa–Satsuma equation. Phys. Letters A, 2024. Vol. 525. 129900.
14. Polyani A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.
15. Al Khawaja U., Al Sakkaf L. Handbook of Exact Solutions to the Nonlinear Schrödinger Equations. Bristol: Institute of Physics Publ., 2019.
16. Polyani A.D. Handbook of Exact Solutions to Mathematical Equations. Boca Raton: CRC Press–Chapman & Hall, 2025.

17. *Kudryashov N.A.* A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber. *Optik*, 2019. Vol. 189. No. 42. 52.
18. *Kudryashov N.A.* Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber. *Optik*, 2019. Vol. 194. 163060.
19. *Kudryashov N.A.* Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities. *Optik*, 2020. Vol. 212. 164750.
20. *Kudryashov N.A.* Solitary waves of the non-local Schrödinger equation with arbitrary refractive index. *Optik*, 2021. Vol. 231. 166443.
21. *Kudryashov N.A.* Stationary solitons of the generalized nonlinear Schrödinger equation with nonlinear dispersion and arbitrary refractive index. *Applied Mathematics Letters*, 2022. Vol. 128. 107888.
22. *Kudryashov N.A.* Almost general solution of the reduced higher-order nonlinear Schrödinger equation. *Optik*, 2021. Vol. 230. 66347.
23. *Yildirim Y.* Optical solitons to Schrodinger–Hirota equation in DWDM system with modified simple equation integration architecture. *Optik*, 2019. Vol. 182. Pp. 694–701.
24. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Biswas A., Ekici M., Alshomrani A.S., Khan S., Zhou Q., Belic M.R.* Dispersive solitons in optical fibers and DWDM networks with Schrodinger–Hirota equation. *Optik*, 2019. Vol. 199. 163214.
25. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Alngar M.E.M., Biswas A., Moraru L., Khan S., Yildirim Y., Alshehri H.M., Belic M.R.* Dispersive optical solitons with Schrodinger–Hirota model having multiplicative white noise via Ito Calculus. *Physics Letters A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2022. Vol. 445. 128268.
26. *Wang G., Kara A.H., Biswas A., Guggilla P., Alzahrani A.K., Belic M.R.* Highly dispersive optical solitons in polarization-preserving fibers with Kerr law nonlinearity by Lie symmetry. *Physics Letters A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2022. Vol. 421. 127768.
27. *Biswas A., Hubert M.B., Justin M., Betchewe G., Doka S.Y., Crepin K.T., Ekici M., Zhou Q., Moshokoa S., Belic M.* Chirped dispersive bright and singular optical solitons with Schrodinger–Hirota equation. *Optik*, 2018. Vol. 168. Pp. 192–195.
28. *Zhou Q., Xu M., Sun Y., Zhong Y., Mirzazadeh M.* Generation and transformation of dark solitons, anti-dark solitons and dark double-hump solitons. *Nonlinear Dynamics*, 2022. Vol. 110. No. 2. Pp. 1747–1752.
29. *Polyanin A.D., Kudryashov N.A.* Nelineynyye uravneniya Shredingera s zapazdyvaniyem: Tochnyye resheniya, reduktsii i preobrazovaniya [Nonlinear Schrödinger equations with delay: Exact solutions, reductions, and transformations]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2024. Vol. 13. No. 5. Pp. 340–349 (in Russian).
30. *Bullough R.K.* Solitons, *Physics Bulletin*, 1978. Vol. 29. No. 2. Pp. 78–82.
31. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. Boca Raton–London: CRC Press, 2022.
32. *Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd ed. Boca Raton–London: CRC Press, 2016.
33. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014. Vol. 19. No. 3. Pp. 417–430.
34. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014. Vol. 67. Pp. 267–277.
35. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I.* Delay Ordinary and Partial Differential Equations. Boca Raton–London: CRC Press, 2024.
36. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. Boca Raton–London: CRC Press, 2018.

УДК 517.95, 534.1

СИММЕТРИИ И ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ МОДИФИЦИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ЛИНЯ – РЕЙССНЕРА – ТЗЯНА

А. И. Землянухин^{1,*}, А. В. Бочкарев^{1,**}

¹Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Саратов, 410054, Россия

*e-mail: azemlyanukhin@mail.ru

**e-mail: ab2009sar@list.ru

Поступила в редакцию: 29.11.2024

После доработки: 7.12.2024

Принята к публикации: 10.12.2024

В статье проведен групповой анализ нелинейных уравнений в частных производных второго порядка, моделирующих распространение сдвиговых волн в нелинейно-упругой цилиндрической оболочке, взаимодействующей с внешней упругой средой. Уравнения содержат кубическую нелинейность и обобщают известные модели Линя – Рейсснера – Тзяна и Хохлова – Заболотской. Найдены их классические симметрии с использованием универсального алгоритма коммутативной алгебры, состоящего в построении базиса Гребнера системы определяющих уравнений для нахождения явного вида производящей функции группы симметрий. Для построения решений, инвариантных относительно группы сдвигов в пространстве независимых переменных, использован метод годографа, позволивший перейти от нелинейного уравнения в частных производных к системе линейных уравнений с переменными коэффициентами. Для автоматического режима, инвариантного относительно растяжений, получено нелинейное уравнение, линейная часть которого точно решена в терминах функций Бесселя и тригонометрических функций. Установлены условия, необходимые для физической реализуемости точных решений.

Ключевые слова: нелинейные волны, групповой анализ, базис Гребнера, инвариантные решения.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.6.4

EDN ORVJUJ

ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Линя – Рейсснера – Тзяна (ЛРТ), описывающее нестационарное околосвуковое течение газа и известное более 75 лет [1], имеет вид

$$u_{xt} + u_x u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad (1)$$

Групповые свойства этого уравнения подробно изучены [2], широкий класс точных решений приведен в [3]. Для функции $w = -\partial u / \partial x$ уравнение ЛРТ сводится к уравнению Хохлова – Заболотской [4]

$$w_{xt} - w w_{xx} - w_x^2 - w_{yy} = 0. \quad (2)$$

которое можно трактовать как бездисперсионный вариант уравнения Кадомцева – Петвиашвили.

Уравнения типа ЛРТ нередко возникают в задачах нелинейной волновой динамики деформируемых систем. Так, в [5] при моделировании распространения пучка сдвиговых волн вдоль образующей нелинейно-упругой цилиндрической оболочки, для окружной компоненты смещения было получено модифицированное уравнение ЛРТ

$$u_{xt} + u_x^2 u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (3)$$

Знак перед кубически нелинейным слагаемым в (3) определяется типом физической нелинейности материала, из которого изготовлена оболочка: случаю «мягкой» нелинейности соответствует минус, а «жесткой» – плюс. По аналогии с (2), для функции $w = -\partial u / \partial x$ уравнение можно называть бездисперсионным модифицированным уравнением Кадомцева – Петвиашвили.

При качественном анализе уравнений типа (3) используется экспериментально установленный для кубически нелинейных сред факт существенного преобладания эффекта самовоздействия волны над эффектом генерации высших гармоник [6]. Это позволяет представить решение в виде одной гармоники с медленно меняющейся комплексной амплитудой и получить для этой амплитуды нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) или его обобщения [7, 8]. Возможность развития модуляционной неустойчивости, приводящей к разбиению малых периодических волн на уединенные волновые пакеты, также определяется типом физической нелинейности. Мягкая нелинейность приводит к дефокусирующей версии НУШ [7], запрещающей развитие модуляционной неустойчивости, в то время как жесткая нелинейность допускает возможность устойчивого распространения солитоноподобных волновых пакетов.

При изучении нелинейной динамики реальных физических систем часто возникает необходимость учета взаимодействия деформируемой системы с внешней упругой (нелинейно-упругой) средой. Если нелинейно-упругая цилиндрическая оболочка окружена внешней упругой средой типа Винклера – Фусса [9, 10], то в уравнении (3) появляется дополнительное линейное дисперсионное слагаемое, характеризующее взаимодействие оболочки со средой:

$$u_{xt} + u_x^2 u_{xx} + u_{yy} + \delta u = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) можно называть бездисперсионным модифицированным уравнением Кадамцева – Петвиашвили – Островского [11] или пространственно-двумерным редуцированным уравнением Островского [12, 13]. Доминирующим фактором в (4) является кубическая нелинейность, поэтому здесь также уместен переход к НУШ. Однако, сценарии, описываемые НУШ, не единственно реализуемы, и более полный анализ волнового процесса возможен на основе использования групповых свойств уравнений (3), (4). В данной работе будут найдены группы симметрий этих уравнений и обсуждены некоторые редукции.

СИММЕТРИИ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ЛИНЯ – РЕЙССНЕРА – ТЗЯНА

Для нахождения групп симметрий нелинейных уравнений в частных производных можно использовать классический и неклассический методы [14–16], комбинацию неклассического метода с методом дифференциальных бази-

сов Гребнера [17] или прямой метод Кларксона и Крускала [18]. Применительно к уравнениям (3), (4) классический метод состоит в использовании инфинитезимального критерия инвариантности [2, 15]. Нужно подействовать на уравнение дважды продолженным оператором группы симметрии и, сгруппировав члены при одинаковых степенях зависимой переменной, потребовать их одновременного обращения в нуль. В результате получим «определяющую» систему – переопределенную систему линейных уравнений в частных производных для коэффициентов искомого векторного поля. В неклассическом методе исходное уравнение в частных производных дополняется условием инвариантной поверхности, и «определяющая» система состоит из нелинейных УЧП, число которых меньше, чем в классическом случае, следовательно, множество решений в общем случае больше. Мы будем применять комбинированный подход в духе [19, 20] с использованием дифференциальных базисов Гребнера [17], представляющих собой универсальный алгоритм коммутативной алгебры.

Введем в рассмотрение дополнительный параметр ε и запишем условие на классические симметрии в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned} u_{tx} + u_{xx} u_x^2 + u_{yy} + \delta u &= 0, \\ u_\varepsilon - F(t, x, y, u, u_t, u_x, u_y) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где F – производящая функция группы симметрий [19, 20]. Далее получим соотношения на производящую функцию, а затем, построив базис Гребнера для определяющих уравнений, получим явный вид производящей функции группы симметрий. В (5) жирным выделены лидирующие производные для лексико-графического упорядочения $\varepsilon \succ t \succ x \succ y$. Для второго уравнения системы введем полные производные от F :

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= F_t + F_u u_t + F_{u_t} u_{tt} + F_{u_x} u_{tx} + F_{u_y} u_{ty}, \\ \frac{dF}{dx} &= F_x + F_u u_x + F_{u_t} u_{tx} + F_{u_x} u_{xx} + F_{u_y} u_{xy}, \\ \frac{dF}{dy} &= F_y + F_u u_y + F_{u_t} u_{ty} + F_{u_x} u_{xy} + F_{u_y} u_{yy}. \end{aligned} \quad (6)$$

Условие интегрируемости (совместности) данной системы можно записать через S -полином в соответствии с выбранным лексикографическим упорядочением:

$$\left(u_{tx} + u_{xx}u_x^2 + u_{yy} + \delta u \right)_\varepsilon - u_{\varepsilon x} + \frac{d^2}{dtdx} F = 0. \quad (7)$$

В (7), в силу правила дифференцирования Лейбница, производная по ε входит в условие интегрируемости линейно.

$$2u_{xx}u_{\varepsilon x}u_x + u_{\varepsilon xx}u_x^2 + u_{\varepsilon yy} + \delta u_\varepsilon + \frac{d^2}{dtdx} F = 0. \quad (8)$$

С учетом (6), заменим u_ε на F , используя выражения для полных производных от F :

$$2u_{xx}u_x \frac{d}{dx} F + u_x^2 \frac{d^2}{dx^2} F + \frac{d^2}{dy^2} F + \delta F + \frac{d^2}{dtdx} F = 0. \quad (9)$$

Применяя соотношения для полных производных (6), получим

$$\begin{aligned} & F\delta + F_{u_t}u_{tx} + F_{u_x}u_{xx} + F_{u_y}u_{xy} + F_{u_x}u_x + F_{tx} + \\ & + F_{u_t}u_{tt} + F_{u_t}u_{tx}^2 + F_{u_t}u_{ty}^2 + F_{u_t}u_{tt}u_{xx} + \\ & F_{u_t}u_{tx}^2 + 2F_{u_t}u_{tx}u_{xx}u_x^2 + 2F_{u_t}u_{ty}u_{xy} + \\ & + F_{u_t}u_{ty}u_{xy} + F_{u_t}u_{tx}u_{ty} + 2F_{u_t}u_{tx}u_{xy}u_x^2 + \\ & + 2F_{u_t}u_{ty}u_{yy} + F_{u_t}u_{tt} + 2F_{u_t}u_{tx}u_x^2 + 2F_{u_t}u_{ty} + \\ & + F_{u_t}u_{tx} + F_{u_t}u_{tx}u_x^2 + 2F_{u_t}u_{tx}u_{xx}u_x + F_{u_t}u_{ty} + \\ & + F_{u_t}u_{tx}u_{xx} + F_{u_t}u_{xx}u_x^2 + F_{u_t}u_{xy}^2 + F_{u_t}u_{tx}u_{xy} + \\ & + F_{u_t}u_{ty}u_{xx} + 2F_{u_t}u_{xx}u_{xy}u_x^2 + 2F_{u_t}u_{xy}u_{yy} + F_{u_t}u_{tx} + \\ & + 2F_{u_t}u_{xx}u_x^2 + 2F_{u_t}u_{xy} + F_{u_t}u_{tx} + F_{u_t}u_{xxx}u_x^2 + \\ & + 2F_{u_t}u_{xx}u_x + F_{u_t}u_{xy} + F_{u_t}u_{xy}u_x^2 + F_{u_t}u_{xy}^2 + \\ & + F_{u_t}u_{xy}u_{yy} + F_{u_t}u_{xy}u_x^2 + 2F_{u_t}u_{xy}u_{yy} + F_{u_t}u_{tx} + \\ & + F_{u_t}u_{xy}u_x^2 + 2F_{u_t}u_{xy}u_{xy}u_x + F_{u_t}u_{yyy} + F_{u_t}u_{tx} + \\ & + F_{u_t}u_xu_{tt} + 2F_{u_t}u_xu_{tx}u_x^2 + 2F_{u_t}u_yu_{ty} + F_{u_t}u_xu_{xx} + \\ & + F_{u_t}u_xu_{tx} + 2F_{u_t}u_xu_{xx}u_x^2 + 2F_{u_t}u_yu_{xy} + F_{u_t}u_{xy} + \\ & + F_{u_t}u_xu_{ty} + 2F_{u_t}u_xu_{xy}u_x^2 + 2F_{u_t}u_yu_{yy} + F_{u_t}u_{tx} + \\ & + F_{u_t}u_x^2u_x^2 + F_{u_t}u_y^2 + F_{u_t}u_{tx} + 2F_{u_t}u_xu_x^2 + 2F_{u_t}u_y + \\ & + 2F_{u_t}u_xu_{xx}u_x + F_{u_t}u_{tx} + F_{u_t}u_{xx}u_x^2 + F_{u_t}u_{yy} + F_{u_t}u_x^2 + \\ & + 2F_{u_t}u_{xx}u_x + F_{u_t}u_{yy} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая, согласно (4),

$$\begin{aligned} u_{tx} &= -u_{xx}u_x - u_{yy} - \delta u, \\ u_{tx} &= -u_{xx}u_x - u_{xx}(-u_{xx}u_x - u_{yy}) - u_{yy} - \delta u, \\ u_{tx} &= -u_{xxx}u_x - u_{xxx}u_{xx} - u_{xyy} - \delta u_x, \\ u_{tx} &= -u_{xxy}u_x - u_{xxy}u_{xy} - u_{yyy} - \delta u_y, \\ & \dots \end{aligned} \quad (11)$$

и то, что F не зависит от производных выше первого порядка, получаем систему линейных уравнений для F :

$$\begin{aligned} & F\delta - F_{u_t}\delta u + F_{u_x}u_x + F_{tx} + F_{u_t}u_t\delta^2u_x^2 + F_{u_t}u_x\delta^2u^2 - \\ & - 2F_{u_t}u_x\delta u_x^2 - F_{u_t}\delta u_t - F_{u_x}u_x\delta u - F_{u_x}\delta u_x - F_{u_y}\delta u_y - \\ & - F_{u_t}\delta u_{tt} - 2F_{u_t}\delta u_{tx}^3 - F_{u_t}\delta u_{tx} + F_{u_t}u_tu_x + \\ & + F_{u_t}u_x^4 + F_{u_t}u_y^2 + F_{u_t}u_{tx} + 2F_{u_t}u_x^3 + \\ & + 2F_{u_t}u_y - F_{u_t}\delta u + F_{u_t}u_x^2 + F_{u_t}u_{yy} = 0, \\ & -F_{u_t}u_y\delta u + 2F_{u_t}u_y + F_{u_t}u_x + 2F_{u_t}u_y + F_{u_t}u_x = 0, \\ & F_{u_t}u_t = 0, \\ & -F_{u_t}u_x^2 + F_{u_t}u_x + 2F_{u_t}u_t\delta u_x^4 - 2F_{u_t}u_x^4 - F_{u_t}u_x\delta u + \\ & + F_{u_t}u_x^2 - F_{u_t}u_tu_x^2 - 2F_{u_t}u_x^5 + F_{u_t}u_t + F_{u_t}u_x^3 + \\ & + 2F_{u_t}u_x^2 + 2F_{u_t}u_x = 0, \\ & -F_{u_t}u_y^2 + F_{u_t}u_{xy} = 0, \\ & F_{u_t}u_t^6 - F_{u_t}u_x^4 = 0, \\ & -F_{u_t}u_t + 2F_{u_t}u_t\delta u_x^2 + 2F_{u_t}u_x\delta u - 2F_{u_t}u_x^2 - F_{u_t}u_x + \\ & + 2F_{u_t}u_y - F_{u_t}u_t - 2F_{u_t}u_x^3 - F_{u_t}u_x + 2F_{u_t}u_y = 0, \\ & F_{u_t}u_t = 0, \\ & 2F_{u_t}u_t^4 - F_{u_t}u_x = 0, \\ & F_{u_t}u_t^2 + F_{u_t}u_x + F_{u_t}u_y = 0, \\ & F_{u_t}u_y - 2F_{u_t}u_t\delta u_x^2 - F_{u_t}u_x\delta u + 2F_{u_t}u_x + 2F_{u_t}u_x^2 + \\ & + 2F_{u_t}u_y + F_{u_t}u_t + 2F_{u_t}u_x^3 = 0, \\ & 2F_{u_t}u_x + F_{u_t}u_y = 0, \\ & -2F_{u_t}u_x^4 + F_{u_t}u_y^2 = 0, \\ & -2F_{u_t}u_y^2 + F_{u_t}u_x = 0, \\ & F_{u_t}u_x + F_{u_t}u_y^2 = 0, \\ & -F_{u_t}u_t\delta u + F_{u_t}u_x + F_{u_t}u_x = 0, \\ & -F_{u_t}u_t^2 + F_{u_t}u_x = 0, \\ & -F_{u_t}u_t = 0, \quad F_{u_t}u_y = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Случай $\delta=0$ (взаимодействие с внешней средой отсутствует)

Для системы построим базис Гребнера в лексико-графическом упорядочении с порядком переменных $t \succ x \succ y \succ u \succ u_t \succ u_x \succ u_y$:

$$\begin{aligned} u_x F_{yu_y} - 2F_x - u_x F_u &= 0, \\ 2F_{yu_x} + F_{u_y} &= 0, \\ F_{yu_t} = F_{yu} = F_{yy} = F_{xu_y} = F_{xu_x} &= 0, \\ u_x F_{xu_x} - F_x &= 0, \\ F_{xu_t} = F_{xu} = F_{xy} = F_{xx} = F_{u_x} &= 0, \\ -u_x F_{u_t} + 3F_x + 2u_x F_u &= 0, \\ F_{uu} = F_{yu_y} = F_{ix} = F_{uu_y} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Из построенного базиса Гребнера (13) видно, что F линейно зависит от u , u_t , u_x , u_y , т.е

$$F = A(t, x, y)u_t + B(t, x, y)u_x + C(t, x, y)u_y + D(t, x, y)u + E(t, x, y). \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13) и собирая слагаемые при u , u_t , u_x , u_y , получим систему на функции A , B , C , D , E :

$$\begin{aligned} 2E_x = 2D_x = 2C_x &= 0, \\ 2B_x - C_y + D &= 0, \\ 2A_x &= 0, \\ 2B_y + C_t &= 0, \\ A_y = D_y = E_{yy} = D_{yy} = C_{yy} = B_{yy} = A_{yy} &= 0, \\ C_x = -E_x = -D_x = -C_x = -A_x = A_x = D_x &= 0, \\ E_{xy} = D_{xy} = C_{xy} = B_{xy} = A_{xy} = E_{xx} = D_{xx} &= \\ = C_{xx} = B_{xx} = A_{xx} = B_t &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Для системы (15) снова строим базис Гребнера:

$$\begin{aligned} A_y = A_x &= 0, \\ -2A_t + 3C_y + D &= 0, \\ B_{yy} &= 0, \\ 2B_x - C_y + D &= 0, \\ B_t = C_{yy} = C_x &= 0, \\ C_t + 2B_y &= 0, \\ D_y = D_x = D_t = E_{yy} = E_x &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (16) определяем функции A , B , C , D , E и получаем явный вид F :

$$\begin{aligned} F = A_0 u_t + B_0 u_x - 2B_3 t u_y + B_3 u_x y + C_0 u_y + \\ + \frac{3C_2 t u_t}{2} + \frac{C_2 u_x x}{2} + C_2 u_y y + \frac{D_0 t u_t}{2} + \\ + D_0 u - \frac{D_0 u_x x}{2} + y E_0(t) + E_0(t), \end{aligned} \quad (17)$$

где $A_0, B_0, B_3, C_0, C_2, D_0$ – произвольные постоянные, $E_0(t)$ – произвольная функция времени.

Из вида F в (17) можно записать базис алгебры Ли соответствующей группы преобразований:

$$\begin{aligned} X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_4 = -2t \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_5 = \frac{3t}{2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_6 = \frac{t}{2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial x} - u \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_7 = (y E_0(t) + E_0(t)) \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (18)$$

Случай $\delta \neq 0$ (учитывается взаимодействие с внешней средой)

Проводя аналогичные рассуждения и вычисления, получим группу преобразований:

$$\begin{aligned} X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_4 = t \frac{\partial}{\partial y} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_5 = \frac{t}{2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial x} - u \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_6 = E(t, y) \frac{\partial}{\partial u}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $E(t, y)$ – функция, удовлетворяющая обыкновенному дифференциальному уравнению 2 порядка $E_{yy} + \delta E = 0$.

Сравнение групп симметрий уравнений (3) и (4) позволяет сделать вывод, что учет взаимодействия с внешней упругой средой ($\delta \neq 0$) уменьшает «автомодельность» рассматриваемой системы. Так, в (18) имеются два оператора растяжений X_5, X_6 , в то время как в (19) – единственный оператор X_5 , совпадающий с X_6 из

(18). Видно, что разность $X_5 - X_6$ в (18) имеет вид $t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + u \frac{\partial}{\partial u}$ и характеризует подгруппу одинаковых растяжений всех независимых и зависимой переменной. Дополнительное слагаемое с коэффициентом $\delta \neq 0$ в (4) запрещает растяжение независимой переменной y . Сдвиги по независимым переменным, допустимые в обоих случаях, позволяют отыскивать инвариантные решения в виде бегущих волн.

НЕКОТОРЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ

Во введении упоминалось о том, что уравнение (3) было выведено в [5] при моделировании распространения пучка сдвиговых волн вдоль образующей цилиндрической оболочки. В этом случае для физической состоятельности искомым компонент смещений требуются их ограниченность по обеим пространственным координатам и периодичность по окружной координате. Поскольку (3) допускает сдвиги по всем трем независимым переменным, а возмущение распространяется вдоль оси x , медленно изменяясь во времени t и по окружной координате y , введем в рассмотрение новую независимую переменную $z = x + t$ и перепишем (3) в виде

$$u_{zz} + u_z^2 u_{zz} = u_{yy}. \quad (20)$$

Обозначая $u_z = V$, можно представить (20) в виде равносильной системы уравнений первого порядка

$$\begin{cases} (1 + V^2) V_z = W_y, \\ V_y = W_z. \end{cases} \quad (21)$$

Применим к (21) преобразование годографа, т.е. поменяем местами независимые и зависимые переменные: $z = z(V, W)$, $y = y(V, W)$. В результате вместо (21) имеем систему линейных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} z_V = (1 + v^2) y_W, \\ z_W = y_V, \end{cases} \quad (22)$$

из которой получаются линейные уравнения гиперболического типа с переменными коэффициентами

$$\begin{cases} y_{WW} = \frac{1}{1 + V^2} y_{VV}, \\ z_{WW} = \frac{1}{1 + V^2} z_{VV} - \frac{2V}{(1 + V^2)^2} z_V. \end{cases} \quad (23)$$

Выбирая какое-либо частное решение $y = y_1(V, W)$ первого уравнения системы (23) и подставляя его в (22), определяем функцию $z = z_1(V, W)$, соответствующую этому частному решению. Исключая из системы равенств $y = y_1(V, W)$, $z = z_1(V, W)$ параметр W , получим решение уравнения (20) в неявной форме: $F(z, y, V) = 0$, где $V = u_z$. Например, для частного решения

$$y_1 = a_1 V W + a_2 V + a_3 W + a_4, \quad (24)$$

содержащего произвольные постоянные $a_1 - a_4$, получаем

$$z_1 = \frac{a_1}{4} V^4 + \frac{a_3}{3} V^3 + \frac{a_1}{2} (V^2 + W^2) + a_3 V + a_2 W + C, \quad (25)$$

и решение уравнения принимает вид

$$\frac{a_1}{4} V^4 + \frac{a_3}{3} V^3 + \frac{a_1}{2} V^2 + a_3 V + \frac{a_1 (a_2 V + a_4 - y)^2}{2(a_1 V + a_3)^2} - \frac{a_2 (a_2 V + a_4 - y)}{a_1 V + a_3} + C - z = 0. \quad (26)$$

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Уравнение (4), учитывающее взаимодействие цилиндрической оболочки с упругой средой, инвариантно относительно группы преобразований (19). Попробуем построить автомодельные решения (4), т.е. решения, инвариантные относительно действия оператора

$$X_5 = \frac{t}{2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial x} - u \frac{\partial}{\partial u}, \text{ и обсудить условия их}$$

физической реализуемости. Принимая в качестве инвариантов

$$\xi = x t, \quad v = x^2 u, \quad (27)$$

преобразуем (4) к уравнению с двумя независимыми переменными – автомодельной переменной ξ и окружной пространственной координатой y :

$$\begin{aligned} & (\xi^4 v_\xi^2 + 4\xi^3 v v_\xi + 4\xi^2 v^2 + \xi) v_{\xi\xi} + v_{yy} + 4\xi^3 v_\xi^3 + \\ & + 18\xi^2 v v_\xi^2 + (24\xi v^2 + 3) v_\xi + 8v^3 + \delta v = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Учитывая малость компонент смещений срединной поверхности цилиндрической оболочки, ограничимся линейной частью (28):

$$v_{yy} + \xi v_{\xi\xi} + 3v_\xi + \delta v = 0. \quad (29)$$

Уравнение (29) имеет точное решение с разделенными переменными вида

$$v = F_1(\xi) F_2(y) \quad (30)$$

где функции $F_1(\xi)$, $F_2(y)$ удовлетворяют уравнениям

$$\xi F_1'' = C F_1 - 3F_1', \quad F_2'' = -(\delta + C) F_2 \quad (31)$$

с общими решениями

$$F_1 = \frac{1}{\xi} \left[C_1 J_2(2\sqrt{-C\xi}) + C_2 Y_2(2\sqrt{-C\xi}) \right], \quad (32)$$

$$F_2 = C_3 \cos(\sqrt{\delta + C} y) + C_4 \sin(\sqrt{\delta + C} y),$$

где J_2 , Y_2 – функции Бесселя 1-го и 2-го рода, соответственно, C , $C_1 - C_4$ – произвольные постоянные. Для ограниченности и периодичности по y полученных решений необходимо выполнение условий:

$$C_2 = 0, \quad C < 0, \quad \delta + C > 0, \quad \xi > 0, \quad (33)$$

откуда получаем $\delta > 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При вычислении классических симметрий обобщенных модифицированных уравнений Линя – Рейсснера – Тзяна был применен подход, основанный на построении базисов Гребнера определяющих систем уравнений для нахождения явного вида производящих функций групп симметрий. Выбор этого подхода объясняется легкостью его алгоритмизации и личными предпочтениями авторов. Установлено, что наличие дополнительного линейного дисперсионного члена в уравнении, характеризующего влияние внешней упругой среды на волновой процесс, приводит к тому, что в группе симметрий остается единственный оператор растяжения. Получено точное решение, описывающее простейший

автомодельный режим, выявлены условия физической реализуемости данного решения. Для решений, инвариантных относительно группы сдвигов независимых переменных, получено уравнение, линеаризуемое методом годографа.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-29-00071, <https://rscf.ru/project/24-29-00071/>.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны профессору Ю.А. Блинову за предоставленную возможность использования разработанных им программных модулей для построения базисов Гребнера и вычисления групп симметрий, а также – за мотивирующие обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lin C.C., Reissner E., Tsien H.S. On two-dimensional non steady motion of a slender body in a compressible fluid // J. Math. and Phys., 1948. V. 27. № 3. P. 220–231.
2. Ibragimov N.H. A practical course in differential equations and mathematical modelling. Higher Education Press and World Scientific, Beijing, Singapore, 2009.
3. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of nonlinear partial differential equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.
4. Руденко О.В. К 40-летию уравнения Хохлова – Заболотской // Акустический журнал, 2010. Т. 56(4). С. 452–462.
5. Zemlyanukhin A.I., Bochkaev A.V., Artamonov N.A. Shear waves in a nonlinear elastic cylindrical shell // Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024. V. 24. Iss. 4. P. 578–586.
6. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах // Успехи физических наук, 1970. Т. 102(4). С. 549–586.
7. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. М.: Ленанд, 2017. 312 с.
8. Полянин А.Д., Кудряшов Н.А. Нелинейные уравнения Шредингера с запаздыванием: точные решения, редукции и преобразования // Вестник НИЯУ МИФИ, 2024. Т. 13(5). С. 340–349.
9. Kaplunov J., Prikazchikov D., Sultanova L. Justification and refinement of Winkler–Fuss hypothesis // Z. Angew. Math. Phys., 2018. V. 69. P. 80.
10. Dillard D.A., Mukherjee B., Karnal P., Batra R.C., Frechette J. A review of Winkler’s foundation and its profound influence on adhesion and soft matter applications // Soft Matter, 2018. V. 14. P. 3669–3683.

11. Степанянц Ю.А. Нелинейные волны во вращающемся океане (уравнение Островского, его обобщения и приложения) // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана, 2020. Т. 56(1). С. 20–42.

12. Ostrovsky L. Asymptotic perturbation theory of waves, London: Imperial College Press, 2014.

13. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Andrianov I.V., Erofeev V.I. The Schamel-Ostrovsky equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells // J. Sound Vib., 2021. V. 491. 115752.

14. Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. Springer: New York, NY, USA, 1993.

15. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики: учебное пособие. Долгопрудный: Интеллект, 2010.

16. Clarkson P.A., Mansfield E.L. Algorithms for the nonclassical method of symmetry reductions // SIAM

Journal on Applied Mathematics, 1994. V. 54. (6). P. 1693–1719.

17. Cox D., Little J., O’Shea D. Ideals, varieties, and algorithms: An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. N.Y.: Springer-Verlag, 1992.

18. Clarkson P.A., Kruskal M.D. New similarity reductions of the Boussinesq equation // Journal of Mathematical Physics, 1989. V. 30. P. 2201–2213.

19. Krasil’shchik I.S., Lychagin V.V., Vinogradov A.M. Introduction to the geometry of nonlinear differential equations, Adv. Stud. Contemp. Math. V. 1. New York: Gordon and Breach science publishers, 1986. 441 p.

20. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Под ред. А.М. Виноградова, И.С. Красильщика. М.: Факториал, 1997. 461 с.

Vestnik Natsional’nogo Issledovatel’skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 6, pp. 403–410

SYMMETRIES AND INVARIANT SOLUTIONS OF GENERALIZED MODIFIED LIN – REISSNER – TSIEN EQUATIONS

A. I. Zemlyanukhin^{1,*}, A. V. Bochkarev^{1,**}

¹Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, 410054, Russia

*e-mail: azemlyanukhin@mail.ru

**e-mail: ab2009sar@list.ru

Received November 29, 2024; revised December 7, 2024; accepted December 10, 2024

The article provides a group analysis of nonlinear second-order partial differential equations that model the propagation of shear waves in a nonlinear elastic cylindrical shell interacting with an external elastic medium. The equations contain cubic nonlinearity and generalize the well-known models of Lin – Reissner – Tsien and Khokhlov – Zabolotskaya. Their classical symmetries are found using a universal algorithm of commutative algebra, which consists of constructing a Gröbner basis of a system of defining equations to find the explicit form of the generating function of the symmetry group. To construct solutions that are invariant under a group of shifts in the space of independent variables, the hodograph method was used, which made it possible to move from a nonlinear partial differential equation to a system of linear equations with variable coefficients. For the self-similar regime, invariant under extensions, a nonlinear equation is obtained, the linear part of which is exactly solved in terms of Bessel functions and trigonometric functions. The conditions necessary for the physical realizability of exact solutions are established.

Keywords: nonlinear waves, group analysis, Gröbner basis, invariant solutions.

REFERENCES

1. Lin C.C., Reissner E., Tsien H.S. On two-dimensional non steady motion of a slender body in a compressible fluid. J. Math. and Phys. 1948. Vol. 27. No. 3. Pp. 220–231.

2. Ibragimov N.H. A practical course in differential equations and mathematical modelling. Higher Education Press and World Scientific, Beijing, Singapore, 2009.

3. Polyinin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of nonlinear partial differential equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.

4. Rudenko O.V. K 40-letiyu uravneniya Hohlova–Zabolotskoj. [The 40th anniversary of the Khokhlov – Zabolotskaya equation]. Akusticheskij zhurnal, 2010. Vol. 56. Pp. 457–466 (in Russian).

5. *Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Artamonov N.A.* Shear waves in a nonlinear elastic cylindrical shell. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024. Vol. 24. Iss. 4. Pp. 578–586.
6. *Zarembo L.K., Krasil'nikov V.A.* Nelinejnye yavleniya pri rasprostranении uprugih voln v tverdyh telah [Nonlinear phenomena in the propagation of elastic waves in solids]. *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 1971. Vol. 13. Iss. 6. Pp. 778–797 (in Russian).
7. *Ryskin N.M., Trubetskov D.I.* Nelineynye volny [Nonlinear waves]. Moscow, Lenand Publ., 2017. 312 p. (in Russian).
8. *Polyanin A.D., Kudryashov N.A.* Nelineinye uravneniya Shredingera s zapazdyvaniem: tochnyye resheniya, reductsii i transformatsii [Nonlinear Schrödinger equations with delay: exact solutions, reductions, and transformations]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2024. Vol. 13(5). Pp. 340–349 (in Russian).
9. *Kaplunov J., Prikazchikov D., Sultanova L.* Justification and refinement of Winkler–Fuss hypothesis. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2018. Vol. 69. Pp. 80.
10. *Dillard D.A., Mukherjee B., Karnal P., Batra R.C., Frechette J.* A review of Winkler's foundation and its profound influence on adhesion and soft matter applications. *Soft Matter*, 2018. Vol. 14. Pp. 3669–3683.
11. *Stepanyants Y.* Nelinejnye volny vo vrashchayushchemsya okeane (uravnenie Ostrovskogo, ego obobshcheniya i prilozheniya) [Nonlinear waves in a rotating ocean (the Ostrovsky equation and its generalizations and applications)]. *Izv. RAN. Fizika atmosfery i okeana*, 2020. Vol. 56. Pp. 16–32 (in Russian).
12. *Ostrovsky L.* Asymptotic perturbation theory of waves, London, Imperial College Press, 2014.
13. *Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Andrianov I.V., Erofeev V.I.* The Schamel-Ostrovsky equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells. *J. Sound Vib.*, 2021. Vol. 491. 115752.
14. Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. Springer, New York, NY, USA, 1993.
15. *Kudryashov N.A.* Metody nelineinoi matematicheskoi fiziki: uchebnoye posobie [Methods of nonlinear mathematical physics: tutorial]. Dolgoprudnyi, Intellekt, 2010 (in Russian).
16. *Clarkson P.A., Mansfield E.L.* Algorithms for the nonclassical method of symmetry reductions. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1994. Vol. 54(6). Pp. 1693–1719.
17. *Cox D., Little J., O'Shea D.* Ideals, varieties, and algorithms: An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. N.Y., Springer-Verlag, 1992.
18. *Clarkson P.A., Kruskal M.D.* New similarity reductions of the Boussinesq equation // *Journal of Mathematical Physics*, 1989. Vol. 30. Pp. 2201–2213.
19. *Krasil'shchik I.S., Lychagin V.V., Vinogradov A.M.* Introduction to the geometry of nonlinear differential equations, *Adv. Stud. Contemp. Math.* Vol. 1. New York, Gordon and Breach science publishers, 1986, 441 p.
20. Symmetries and conservation laws for differential equations of mathematical physics. ed. Krasil'shchik I.S., Vinogradov A.M. Providence, RI: Transl. Math. Monogr., 182, Amer. Math. Soc., 1999.

УДК 004.413

АНАЛИЗ ФАКТОРОВ УСПЕХА И ДЕЙСТВИЙ В ПРОЕКТАХ DevOps С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

*Е. И. Левадний**, *Р. М. Романов***

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

**e-mail: egorlevadny2002@gmail.com*

***e-mail: Rodion.Romanov.M@yandex.com*

Поступила в редакцию: 08.10.2024

После доработки: 09.11.2024

Принята к публикации: 12.11.2024

В быстро развивающейся области разработки программного обеспечения компании все чаще используют парадигму DevOps для повышения скорости и качества. Однако управление процессами DevOps сопряжено со значительными трудностями. Несмотря на то, что свод знаний по управлению проектами (РМВОК) предоставляет лучшие практики, не зависящие от отрасли, существует пробел в понимании практической осуществимости достижения ее факторов успеха в рамках проектов DevOps. Цель исследования – выявить ключевые факторы успеха в управлении ИТ-проектами DevOps, которые считаются важными, но не всегда реализуются на практике. Проведен анкетный опрос с использованием теории нечетких множеств и метода анализа нечеткой иерархии для решения многокритериальных задач принятия решений. В результате анализа был составлен ранжированный список действий, в котором были выделены две группы: действия, которыми пренебрегают, и действия, которым уделяется больше внимания, чем требуется. Эти результаты указывают на несоответствия между признанными факторами успеха и реальной практикой управления. Устранение этих несоответствий имеет решающее значение для повышения эффективности управления проектами DevOps, оптимизации распределения ресурсов и улучшению показателей успешности проектов. Эти выводы служат основой для разработки стратегий, которые лучше интегрируют принципы РМВОК в процессы DevOps.

Ключевые слова: DevOps, РМВОК, нечеткие множества, треугольные нечеткие множества, Fuzzy АНР, принятие многокритериальных решений.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.6.5

EDN PNXXFF

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире, характеризующемся стремительными изменениями и постоянным ростом требований, где скорость и качество разработки программного обеспечения играют решающую роль, все большее количество компаний решает перейти на парадигму DevOps. Однако эти организации сталкиваются с различными сложностями при управлении процессами DevOps [1].

Свод знаний по управлению проектами (РМВОК) – это всеобъемлющая коллекция рекомендаций и лучших практик по управлению проектами, не зависящих от отрасли. Он устанавливает общий язык и методологию управления проектами в различных отраслях [2]. Учитывая, что DevOps – основа для процессов разработки

программного обеспечения, руководители проектов могут использовать области знаний РМВОК для эффективного контроля проектов по разработке программного обеспечения, в которых применяется методология DevOps [3]. Применяя принципы РМВОК, руководители проектов могут повысить свою способность управлять инициативами по разработке программного обеспечения на основе DevOps [4].

DevOps способствует развитию культуры сотрудничества между группами разработки и эксплуатации, уделяя особое внимание таким практикам, как непрерывная интеграция и непрерывное развертывание, для оптимизации рабочих процессов [5]. Несмотря на свои преимущества, эффективное управление процессами DevOps сопряжено со значительными трудностями. Организации часто сталкиваются с такими препят-

ствиями, как культурное сопротивление изменениям, недостаточный набор навыков и сложности с интеграцией инструментов [6–8].

Ограниченное количество исследований сосредоточено на практической реализации факторов успеха РМВОК в среде DevOps, особенно в отношении необходимых действий и их последствий для ресурсов [9]. Решение этих проблем имеет решающее значение для того, чтобы организации могли в полной мере реализовать преимущества DevOps, придерживаясь при этом установленных стандартов управления проектами.

Существуют критерии (факторы успеха согласно РМВОК), которые обеспечивают успех проекта для менеджера или организации, и повышают вероятность реализации проекта. Есть исследования, например [10], которые посвящены выявлению и ранжированию данных критериев, но нет исследований, которые направлены на достижимость данных факторов с уклоном на практическую реализуемость. В действительности может оказаться, что действия, приводящие к этим факторам, являются невыполнимыми или чрезмерно ресурсозатратными. В данной работе планируется выявить несоответствие факторов успеха и реальных действий, которые люди готовы предпринимать.

Результаты данного исследования предполагается использовать в качестве основы для разработки эффективных стратегий управления процессами DevOps. Цель исследования заключается в выявлении ключевых факторов успеха в управлении IT-проектами DevOps, которые считаются важными, однако на практике методы их достижения не всегда применяются.

В ходе работы проведен опрос и получен ранжированный список действий, необходимых для реализации факторов успеха, а также выявлены две группы:

- действия, которыми пренебрегают;
- действия, которым уделяется большее внимание, чем требуется.

Статья состоит из трех разделов. В разд. 1 представлены методы исследования: теория нечетких множеств и подход к решению многокритериальных задач методом нечеткого анализа иерархий, анкетный опрос. Разд. 2 содержит результаты опроса, а именно портрет респондента и подготовленный список соответствий факторов успеха и действий, и результаты расчета весов и рангов для каждой области знаний РМВОК. В разд. 3 обсуждаются полученные результаты, а также выявленные группы несоответствия факторов успеха и действий.

1. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

1.1. Нечеткие множества

Применение метода нечеткого иерархического анализа (Fuzzy AHP) в данной статье обосновано необходимостью ранжирования действий, направленных на достижение ключевых факторов успеха в рамках управления проектами по методологии DevOps. Основное преимущество Fuzzy AHP заключается в его способности учитывать неопределенность экспертных оценок. В условиях неопределенности суждений метод позволяет обрабатывать нечеткие данные, что особенно актуально при использовании таких лингвистических переменных, как «эквивалентный» или «более важный». Это способствует более точному учету мнений экспертов и повышает достоверность получаемых выводов [11]. Однако метод Fuzzy AHP также сталкивается с ключевой проблемой всех многокритериальных подходов – субъективностью экспертных оценок. В качестве альтернативы можно было бы рассмотреть такие методы многокритериальной оптимизации, как TOPSIS или метод анализа полезности, которые также применимы для решения задач в условиях неопределенности [12]. Однако они менее приспособлены для работы с нечеткими данными и неопределенностью [13].

1.1.1. Треугольные нечеткие числа

Определение 1. Обозначим $A \in F(R)$ которое называется *нечетким числом*, если:

- существует такой $x_0 \in R$, что $\mu_A(x_0) = 1$
- для любого $a \in [0, 1]$

$$A_a = [x, \mu_A(x) \geq a]. \quad (1)$$

Нечеткое число определяется как нечеткое множество A на множестве действительных чисел R .

Определение 2. Определим нечеткое число M на множестве действительных чисел R , как треугольное нечеткое число, функция принадлежности которого $\mu_M(x): R \rightarrow [0, 1]$ определяется следующим равенством:

$$\mu_M(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x-l}{m-l} - \frac{l}{m-l}, & x \in [l, m], \\ \frac{x-l}{m-l} - \frac{l}{m-u}, & x \in [m, u], \\ 0, & \text{в другом случае} \end{array} \right\}, \quad (2)$$

где $l < m < u$, l и u означают нижнее и верхнее значение нечеткого числа (степень размытости числа) M , а m – модальное значение. Треугольное нечеткое число можно обозначить через $M(l, m, u)$. Нечеткое число состоит из элементов, когда выполняется следующее условие $\{x \in R | l < x < u\}$, но если $l = m = u$, то это условное число является четким.

Пусть даны два треугольных нечетких числа $M_1 = (l_1, m_1, u_1)$ и $M_2 = (l_2, m_2, u_2)$. Для этих чисел справедливы следующие правила:

$$(l_1, m_1, u_1) \oplus (l_2, m_2, u_2) = (l_1 + l_2, m_1 + m_2, u_1 + u_2), \quad (3)$$

$$(l_1, m_1, u_1) \odot (l_2, m_2, u_2) = (l_1 l_2, m_1 m_2, u_1 u_2), \quad (4)$$

$$(l, m, u)^{-1} = \left(\frac{1}{u}, \frac{1}{m}, \frac{1}{l} \right). \quad (5)$$

1.1.2. Оценка нечеткой степени соответствия

Процесс оценки степени соответствия сводится к нахождению наилучшего решения среди множества целей, которые могут вступать в противоречие между собой. Например, есть некоторый набор планов $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, являющийся набором целей, где $U = \{u_1, u_2\}$ может быть представлена, как u_1 – необходимая цель, а u_2 – достижимая цель. Согласно предложенному Чангом подходу необходимо произвести оценку степени соответствия каждого плана для каждой цели [14, 15]. Представим это в виде набора нечетких треугольных чисел:

$$M_{E_i}^1, M_{E_i}^2, \dots, M_{E_i}^m \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Определение 3. Пусть $M_{E_i}^1, M_{E_i}^2, \dots, M_{E_i}^m$ значения оценок степени соответствия i -го плана для m целей. Тогда значение степени соответствия i -го плана определяется как:

$$S_i = \sum_{j=1}^m M_{E_i}^j \odot \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{E_i}^j \right]^{-1}. \quad (7)$$

В формуле применяются алгебраические операции из формул (3) и (4).

1.1.3. Метод представления нечетких чисел для шкалы парных сравнений

Первым шагом является использование метода анализа нечетких иерархий – определить относительную важность каждой пары факторов в одной иерархии. Используя треугольные нечеткие числа в парных сравнениях, строится нечеткая оценочная матрица:

$$A = (a_{ij})_{n \times m}. \quad (8)$$

Например, если элемент i существенно или значительно важнее элемента j по определенному критерию, тогда $a_{ij}(l, m, u)$, где l и u представляют собой нечеткую степень высказывания. Чем больше разница $u - l$, тем более размыто высказывание; когда $u - l = 0$, высказывание можно считать четким, следовательно число не является нечетким, а равно m для данного примера. Если элемент j значительно важнее элемента i , тогда парная шкала сравнения может быть представлена нечетким числом:

$$a_{ij}^{-1} = \left(\frac{1}{u}, \frac{1}{m}, \frac{1}{l} \right). \quad (9)$$

В формуле (9) применяются операция из формулы (5).

1.1.4. Вычисление векторов приоритетов для метода нечеткого анализа иерархий

Пусть $A = (a_{ij})_{n \times m}$ будет нечеткая матрица парных сравнений, где $a_{ij} = (l_{ij}, m_{ij}, u_{ij})$, а параметры представляются в виде

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{ji}}, \quad m_{ij} = \frac{1}{m_{ji}}, \quad u_{ij} = \frac{1}{l_{ji}}. \quad (10)$$

Для получения оценки векторов весов по каждому критерию необходимо:

- определять наименьшее и наибольшее нечеткое значение из множества нечетких чисел, используя операции \min и \max ;
- определять наименьшее и наибольшее нечеткое число.

Для определения наименьшего и наибольшего треугольного нечеткого числа необходимо сравнить вероятность принадлежности каждого треугольного нечеткого числа к нечеткому множеству, основываясь на следующих выражениях:

$$P(M_1 \geq M_2) = 1, \text{ если } m_1 \geq m_2, \quad (11)$$

$$P(M_2 \geq M_1) = \frac{l_1 - u_2}{(m_2 - u_2) - (m_1 - u_1)}, \quad (12)$$

если $m_1 \geq m_2$.

Для сравнения нечетких треугольных чисел M_1 и M_2 мы должны вычислять их вероятности $P(M_1 \geq M_2)$ и $P(M_2 \geq M_1)$. Далее рассмотрим сравнение того, что степень принадлежности одного нечеткого треугольного числа будет больше, чем k других нечетких треугольных чисел $M_i (i = 1, 2, \dots, k)$, основываясь на вычислении минимума из степеней $P(M \geq M_i)$, т.е. вероятности того, что M больше, чем каждое M_i .

Теперь определим весовой вектор W' , который рассчитывается по формулам:

$$d'(A_i) = \min P(S_i \geq S_k), \quad (13)$$

$$W' = (d'(A_1), d'(A_2), \dots, d'(A_n))^T. \quad (14)$$

Следующий шаг – нормализация полученного вектора:

$$W = (d(A_1), d(A_2), \dots, d(A_n))^T. \quad (15)$$

1.2. Анкетный опрос

Для ранжирования действий, было проведено исследование с участием экспертов. Мы использовали анкетный опрос, поскольку он является эффективным способом сбора данных от целевой группы. Ниже рассматриваются этапы исследования:

- 1) экспертное составление списка действий для каждого фактора успеха. Результаты представлены в табл. 1;
- 2) проведение опроса среди группы экспертов;
- 3) анализ полученных результатов.

Таблица 1. Список соответствий фактора успеха и действия для его достижения

№	Фактор успеха	Действие
Д1.1	Координация взаимодействия между командами DevOps	Формирование культуры сотрудничества между командами
Д1.2	Четкие каналы коммуникации	Разработка эффективных способов общения в команде
Д1.3	Стратегии обмена знаниями	Назначение опытных сотрудников менторами для новичков
Д1.4	Открытость и доступность информации в команде	Регулярные встречи и обсуждения
Д2.1	Выполнение количественного анализа рисков	Регулярное проведение оценки рисков с использованием соответствующих методик и инструментов
Д2.2	Внедрение мер реагирования на риски	Разработка и обновление методов реагирования на риски, а также проведение учений и тренировок
Д2.3	Составление плана управления рисками	Создание и регулярное обновление плана управления рисками
Д3.1	Политика закупок	Ведение реестра лицензированного ПО
Д3.2	Планы и графики закупок и учета сроков службы оборудования и ПО для их своевременного обновления	Ведение учета сроков службы оборудования и ПО для их своевременного обновления
Д3.3	Надежная структура поддержки	Выстраивание процессов по долгосрочной поддержке реализуемого ПО клиентам
Д4.1	Применение правильного подхода к ЗР (люди, процессы и партнеры)	Регулярная оценка и оптимизация работы сотрудников и рабочих процессов
Д4.2	Оценивание ресурсов для деятельности	Оценка уровня адаптаций технологий в организации
Д4.3	Привлечение лучших кадров для выполнения работ	Регулярный анализ потребностей в кадрах и разработка стратегии привлечения и удержания лучших сотрудников
Д4.4	Методика распределения рабочего времени	Разработка и регулярное обновление методики оптимизации человеческих ресурсов
Д4.5	Управление распределенными по организациям DevOps командами	Разработка и регулярное обновление стратегии управления распределенными командами
Д5.1	Проектирование базовой DevOps инфраструктуры с использованием стандартных инструментов	Разработка и регулярное обновление базовой DevOps инфраструктуры

АНАЛИЗ ФАКТОРОВ УСПЕХА И ДЕЙСТВИЙ В ПРОЕКТАХ DevOps С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Продолжение табл. 1

Д5.2	Инструменты и автоматизация для дальнейшей интеграции	Разработка и регулярное обновление стратегии интеграции
Д5.3	Замыкание цикла между мониторингом и планированием	Ежемесячное проведение совещаний для анализа данных мониторинга и корректировки планов
Д5.4	Планирование потребностей ИТ-инфраструктуры	Проведение регулярной оценки потребности в инфраструктуре, а также планирование и мониторинг ее использования
Д6.1	Управление организационными и культурными изменениями	Разработка и регулярное обновление стратегии управления культурными изменениями
Д6.2	Ожидания заинтересованных сторон и пороговые значения рисков	Анализ ожиданий заинтересованных лиц и рисков неудовлетворенности продуктом
Д6.3	Контроль и управление сроками при взаимодействии с заинтересованными сторонами	Разработка и регулярное обновление стратегии контроля и управления сроками
Д6.4	Коммуникации между заинтересованными сторонами	Разработка и регулярное обновление стратегии коммуникаций
Д6.5	Стратегии управления конфликтами	Разработка и регулярное обновление стратегии управления конфликтами
Д7.1	Оценка продолжительности работ	Проведение ежемесячного анализа проделанной работы
Д7.2	Владение информацией о текущем статусе работ в реальном времени	Использование инструментов полного отслеживания действий разработчика
Д7.3	Управление непрерывным процессом DevOps	Корректировка частот интеграции проектного кода
Д8.1	Установление требований к выполняемой работе	Проведение регулярного анализа и оценки требований к выполняемой работе, а также разработка и согласование соответствующих документов
Д8.2	Определение MVP продукта	Проведение регулярного анализа и оценки потребностей клиентов и рынка, а также разработка и согласование концепции MVP продукта
Д8.3	Установление плана выполняемых работ	Разработка и регулярное обновление плана выполняемых работ
Д9.1	Разработка стандартов оценки и улучшения качества	Разработка и регулярное обновление стандартов оценки и улучшения качества
Д9.2	Планируемые мероприятия по контролю качества и управлению качеством в системе DevOps	Разработка и регулярное обновление плана контроля и управления качеством DevOps
Д9.3	Дашборд контроля качества процессов DevOps	Создание централизованного дашборда для оценки качества процессов CI/CD
Д10.1	Прогнозы затрат на процессы разработки и управления операциями	Регулярное проведение оценки рентабельности инвестиций (ROI)
Д10.2	Отслеживание и контроль бюджетов в процессах разработки и управления операциями	Регулярное отслеживание и контроль бюджетов в процессах разработки и управления операциями
Д10.3	Анализ затрат и выгод для продолжения разработки и управления операциями	Проведение регулярного анализа и оценки затрат на процессы разработки и управления операциями, а также разработка и согласование прогнозов затрат

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Результаты анкетного опроса

Был проведен анкетный опрос среди десяти экспертов в области информационных технологий и DevOps. Для составления портрета респондента мы собрали данные по организации, должности и опыту работы. Результаты представлены

на рис. 1. Размер организации классифицируется, согласно федеральному закону от 24.07.2007 N 209-ФЗ (ред. от 29.05.2024) «О развитии малого и среднего предпринимательства в Российской Федерации», а именно малое предприятие (16–100 сотрудников), среднее предприятие (101–250 сотрудников) и крупное предприятие (больше 251 сотрудника).

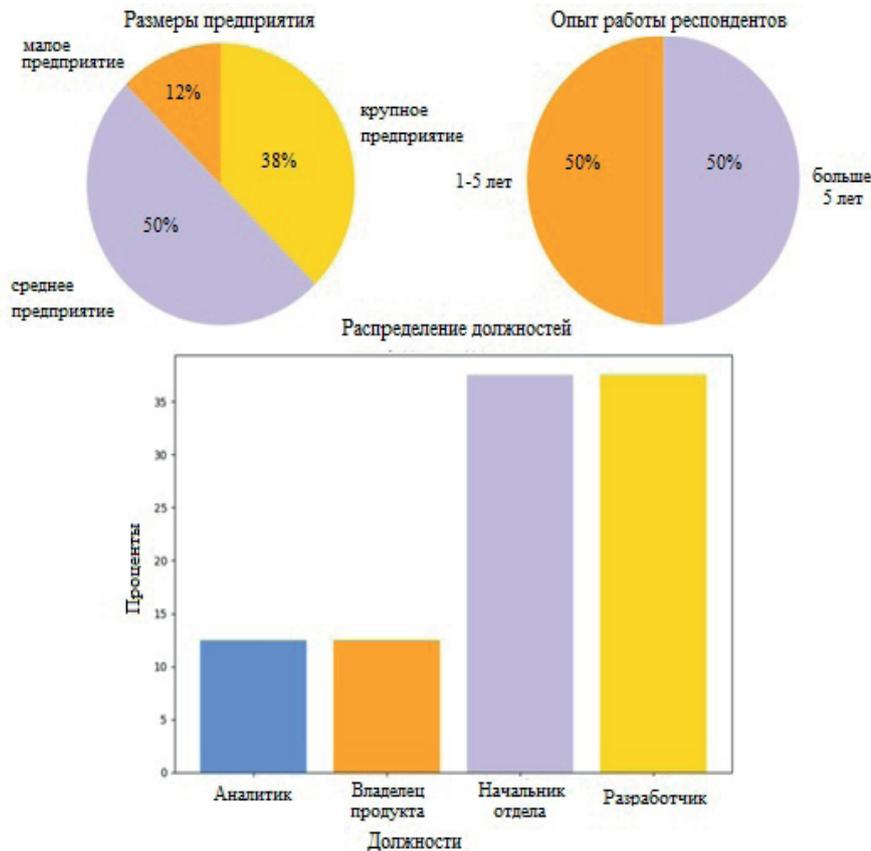


Рис. 1. Основная информация о респондентах

2.2. Результаты применения метода нечеткого иерархического анализа (Fuzzy AHP)

Для работы с нечеткими числами необходимо использовать лингвистические переменные из шкалы Ликерта, которые мы сопоставили для каждого нечеткого треугольного числа, как показано в табл. 2.

Для каждой области знаний из РМВОК мы составили матрицу попарных сравнений действий, используя формулу (8), комбинируя результаты ответов респондентов в один. Пример такой ма-

трицы для области знаний «Интеграция» представлен на табл. 3.

Для оценки степени соответствия каждого действия в области знаний, связанной с управлением проектом DevOps, мы применили формулу (7). Промежуточные результаты для области знаний «Интеграция» представлены в формулах:

$$\begin{aligned}
 S(D1.1) &= \\
 &= (4.03, 5.01, 6.17) * (1/20.44, 1/16.77, 1/13.85) = \\
 &= (0.20, 0.30, 0.45), \quad (16)
 \end{aligned}$$

Таблица 2. Шкала преобразования треугольных нечетких чисел

Лингвистическая переменная	Треугольное нечеткое число	Обратное треугольное нечеткое число
Эквивалентный	(2/3, 1, 3/2)	(2/3, 1, 3/2)
Не менее важный	(1, 1.5, 2)	(1/2, 1/1.5, 1)
Слабо важный	(1.5, 2, 2.5)	(1/2.5, 1/2, 1/1.5)
Сильно важный	(2, 2.5, 3)	(1/3, 1/2.5, 1/2)
Более важный	(2.5, 3, 3.5)	(1/3.5, 1/3, 1/2.5)
Абсолютно более важный	(3, 3.5, 4)	(1/4, 1/3.5, 1/3)

АНАЛИЗ ФАКТОРОВ УСПЕХА И ДЕЙСТВИЙ В ПРОЕКТАХ DevOps
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Таблица 3. Матрица попарных сравнений действий для области знаний «Интеграция»

Действие	Формирование культуры сотрудничества между командами	Разработка эффективных способов общения в команде	Назначение опытных сотрудников менторами для новичков	Регулярные встречи и обсуждения
Формирование культуры сотрудничества между командами	(1.0000, 1.0000, 1.0000)	(1.1042, 1.4333, 1.8125)	(1.0104, 1.3274, 1.7292)	(0.9167, 1.2458, 1.6250)
Разработка эффективных способов общения в команде	(0.5517, 0.6977, 0.9057)	(1.0000, 1.0000, 1.0000)	(1.3625, 1.6958, 2.0833)	(1.0649, 1.4167, 1.8208)
Назначение опытных сотрудников менторами для новичков	(0.5783, 0.7534, 0.9897)	(0.4800, 0.5897, 0.7339)	(1.0000, 1.0000, 1.0000)	(1.0417, 1.3708, 1.7500)
Регулярные встречи и обсуждения	(0.6154, 0.8027, 1.0909)	(0.5492, 0.7059, 0.9391)	(0.5714, 0.7295, 0.9600)	(1.0000, 1.0000, 1.0000)

$$S(D1.2) = (3.98, 4.81, 5.81) * (1/20.44, 1/16.77, 1/13.85) = (0.19, 0.29, 0.42), \quad (17)$$

$$S(D1.3) = (3.10, 3.71, 4.47) * (1/20.44, 1/16.77, 1/13.85) = (0.15, 0.22, 0.32), \quad (18)$$

$$S(D1.4) = (2.74, 3.24, 3.99) * (1/20.44, 1/16.77, 1/13.85) = (0.13, 0.19, 0.29). \quad (19)$$

Далее был расчет вероятности соответствия нечетких чисел по формулам (11) и (12). Результаты для области знаний «Интеграция» представлены на рис. 2.

Следующий шаг – определение весового вектора и его нормализация согласно формулам (13), (14) и (15). Для получения глобального веса каждого действия необходимо умножить полученный локальный вес на вес соответствующей области знаний. Итоговые результаты расчетов для всех областей знаний представлены в табл. 4.

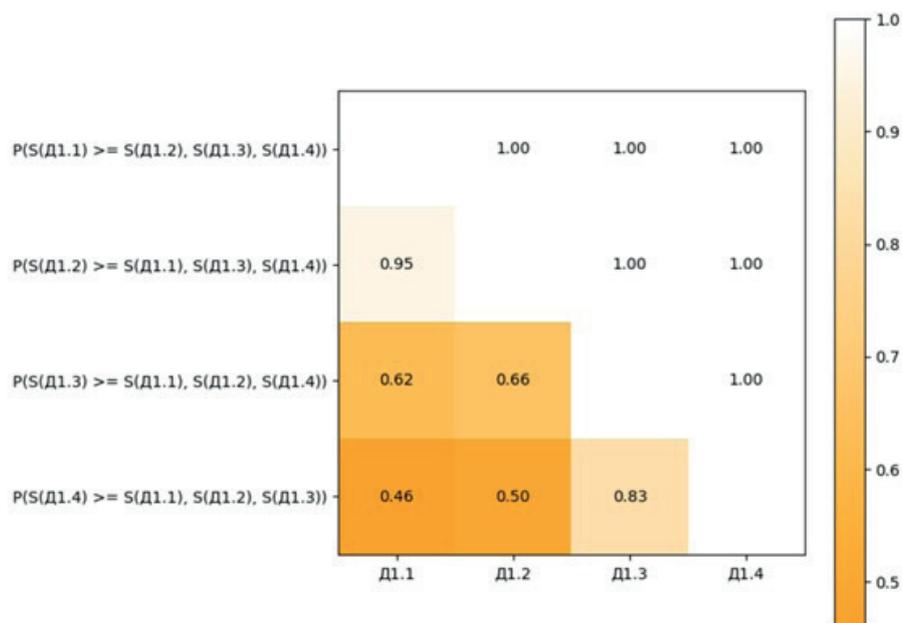


Рис. 2. Тепловая карта, отражающая матрицу вероятности соответствия нечетких чисел для области знаний «Интеграция»

Таблица 4. Результаты расчета весов и рангов для каждой области знаний РМВОК

Область знаний	Вес области знаний	Действие	Локальный вес	Локальный ранг	Глобальный вес	Глобальный ранг
Коммуникация	0.0567	Д1.1	0.3297	1	0.0187	10
		Д1.2	0.3132	2	0.0178	12
		Д1.3	0.2045	3	0.0116	27
		Д1.4	0.1527	4	0.0087	31
Риски	0.0783	Д2.1	0.4256	1	0.0333	3
		Д2.2	0.3751	2	0.0294	4
		Д2.3	0.1994	3	0.0156	17
Поставки	0.0463	Д3.1	0.2747	3	0.0127	26
		Д3.2	0.4415	1	0.0204	7
		Д3.3	0.2839	2	0.0131	23
Человеческие ресурсы	0.0512	Д4.1	0.2627	2	0.0134	22
		Д4.2	0.1637	4	0.0084	32
		Д4.3	0.269	1	0.0138	21
		Д4.4	0.1119	5	0.0057	34
		Д4.5	0.1927	3	0.0099	30
Интеграция	0.0727	Д5.1	0.3749	1	0.0272	5
		Д5.2	0.2295	2	0.0167	13
		Д5.3	0.2194	3	0.0159	16
		Д5.4	0.1762	4	0.0128	25
Заинтересованные лица	0.0518	Д6.1	0.2209	3	0.0114	28
		Д6.2	0.3207	1	0.0166	15
		Д6.3	0.2521	2	0.0131	24
		Д6.4	0.1167	4	0.006	33
		Д6.5	0.0895	5	0.0046	35
Сроки	0.0705	Д7.1	0.6933	1	0.0488	1
		Д7.2	0	3	0	36
		Д7.3	0.3067	2	0.0216	6
Содержание	0.0507	Д8.1	0.2771	3	0.014	18
		Д8.2	0.394	1	0.02	9
		Д8.3	0.3288	2	0.0167	14
Качество	0.0528	Д9.1	0.2638	3	0.0139	20
		Д9.2	0.3825	1	0.0202	8
		Д9.3	0.3537	2	0.0187	11
Стоимость	0.0615	Д10.1	0.611	1	0.0375	2
		Д10.2	0.2275	2	0.014	19
		Д10.3	0.1615	3	0.0099	29

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

После анализа полученных результатов выделено несколько групп действий. В первую очередь рассмотрены действия, которыми пренебрегают для достижения успеха проекта. Список таких действий представлен в табл. 5.

Например, в области знаний «Человеческие ресурсы» находятся два важнейших фактора

успеха с рангами 1 и 7 («Методика распределения рабочего времени» и «Применение правильного подхода к ЗР (люди, процессы и партнеры)»), а действия, которые готовы совершать для их выполнения имеют ранги 34 и 22, соответственно. Причиной этих расхождений может быть то, что на практике они требуют осознанного подхода к принятию решений, больших трудозатрат или сложно выполнимы.

**АНАЛИЗ ФАКТОРОВ УСПЕХА И ДЕЙСТВИЙ В ПРОЕКТАХ DevOps
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ**

Таблица 5. Список действий, которыми пренебрегают для достижения успеха проекта

Область знаний	Ранг фактора успеха	Фактор успеха	Действие	Ранг действия
Коммуникация	17	Открытость и доступность информации в команде	Регулярные встречи и обсуждения	31
Человеческие ресурсы	7	Применяйте правильный подход к ЗР (люди, процессы и партнеры)	Регулярная оценка и оптимизация работы сотрудников и рабочих процессов	22
	15	Оценивание ресурсов для деятельности	Оценка уровня адаптации технологий в организации	32
	1	Методика распределения рабочего времени	Разработка и регулярное обновление методики оптимизации человеческих ресурсов	34
Интеграция	10	Замыкание цикла между мониторингом и планированием	Ежемесячное проведение совещаний для анализа данных мониторинга и корректировки планов	16
Сроки	8	Владение информацией о текущем статусе работ в реальном времени	Использование инструментов полного отслеживания действий разработчика	36

Следующая группа показывает список действий, которым уделяется большее внимание, чем следует согласно исследованию [10]. Однако серым цветом в табл. 6 выделены две области знаний, которым необходимо уделять особое

внимание ввиду геополитических и культурных особенностей. Ранги остальных действий не выделяются, степень их важности примерно совпадает с соответствующим им факторам успеха.

Таблица 6. Список действий, которым уделяется большее внимание, чем требуется

Область знаний	Фактор успеха	Ранг фактора успеха	Действие	Ранг действия
Заинтересованные лица	Ожидания заинтересованных сторон и пороговые значения рисков	27	Анализ ожиданий заинтересованных лиц и рисков неудовлетворенности продуктом	15
Сроки	Управление непрерывным процессом DevOps	12	Корректировка частот интеграции проектного кода	6
Стоимость	Отслеживание и контроль бюджетов в процессах разработки и управления операциями	27	Регулярное отслеживание и контроль бюджетов в процессах разработки и управления операциями	19
Риски	Выполнение количественный анализ рисков	26	Регулярное проведение оценки рисков с использованием соответствующих методик и инструментов	3
	Внедрение мер реагирования на риски	21	Разработка и обновление методов реагирования на риски, а также проведение учений и тренировок	4
	Составление плана управления рисками	9	Создание и регулярное обновление плана управления рисками	17
Качество	Разработка стандарты оценки и улучшения качества	28	Разработка и регулярное обновление стандартов оценки и улучшения качества	20
	Планируемые мероприятия по контролю качества и управлению качеством в системе DevOps	24	Разработка и регулярное обновление плана контроля и управления качеством DevOps	8
	Дашборд контроля качества процессов DevOps	26	Создание централизованного дашборда для оценки качества процессов CI/CD	11

Устранение этих расхождений необходимо для повышения эффективности управления проектами DevOps, оптимизации распределения ресурсов и улучшению показателей успешности проектов. Эти выводы служат основой для разработки стратегий, которые лучше интегрируют принципы РМВОК в процессы DevOps.

В дальнейшем мы видим необходимость в разработке нечеткой когнитивной карты (далее – НКК). Ее использование было бы полезным дополнением к исследованию, так как она может обеспечить наглядную визуализацию взаимодействий между факторами успеха и совершаемыми действиями при управлении DevOps-проектами. Это поможет лучше понять, как действия влияют на факторы, а также предсказать возможные последствия изменений в проекте. С помощью НКК можно построить модель, которая покажет, как последствия изменений при выполнении действий в одном факторе будут влиять на другие факторы и, в конечном итоге, на успех проекта. Это особенно полезно для анализа сценариев и предсказания результатов изменений в проекте.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Liu S., Wu B., Meng Q. Critical affecting factors of IT project management // 2012 International Conference on Information Management, Innovation Management and Industrial Engineering. IEEE, 2012. V. 1. P. 494–497.
2. Guide A. Project management body of knowledge (pmbok® guide) // Project Management Institute, 2001. V. 11. № 1. P. 7–8.
3. Левадный Е.И., Романов Р.М. Исследование интеграции управления проектами devops с РМВОК с использованием теории нечетких множеств. // Современные проблемы физики и технологий: Сборник тезисов докладов XI международной молодежной научной школы-конференции, Москва, 23–25 апреля 2024 года. Москва: Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 2024. С. 322–323.
4. Banica L., Radulescu M., Rosca D., Hagi A. Is DevOps another project management methodology? // Informatica Economica, 2017. V. 21. Iss. 3. P. 39–51.
5. Moez M. Mahmood R, Asifet H. et al. Comprehensive Analysis of DevOps: Integration, Automation, Collaboration, and Continuous Delivery // Bulletin of Business and Economics (BBE), 2024. V. 13. № 1. DOI : 10.61506/01.00253.
6. Bass L., Weber I., Zhu L. DevOps: A software architect’s perspective. Addison-Wesley Professional, 2015. 425 p.
7. Erich F.M.A., Amrit C., Daneva M. A qualitative study of DevOps usage in practice // Journal of software: Evolution and Process, 2017. V. 29. Iss. 6. Article e1885. DOI: 10.1002/smr.1885.
8. Maroukian K., Gulliver S.R. Leading DevOps practice and principle adoption // arXiv preprint arXiv:2008.10515, 2020. DOI: 10.48550/arXiv.2008.10515.
9. Luz W.P., Pinto G., Bonifácio R. Adopting DevOps in the real world: A theory, a model, and a case study // Journal of Systems and Software, 2019. V. 157. P. 110384.
10. Akbar M.A. et al. DevOps project management success factors: A decision-making framework // Software: Practice and Experience, 2024. V. 54. Iss. 2. P. 257–280.
11. Dubois D., Prade H. Decision-making under fuzziness. in Gupta M.M., Pagade R.K., and Yager R.R. Advances in Fuzzy Set Theory and Applications. Elsevier/ North-Holland, 1979. P. 279–302.
12. Chen C.T. Extensions of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment // Fuzzy sets and systems, 2000. V. 114. № 1. P. 1–9.
13. Mardani A., Jusoh A., Zavadskas E.K. Fuzzy multiple criteria decision-making techniques and applications—Two decades review from 1994 to 2014 // Expert systems with Applications, 2015. V. 42. № 8. P. 4126–4148.
14. Chang D.Y. Applications of the extent analysis method on fuzzy AHP // European journal of operational research, 1996. V. 95. № 3. P. 649–655.
15. Chang D.Y. Extent analysis and synthetic decision // Optimization techniques and applications, 1992. V. 1. № 1. P. 352–355.

ANALYSIS OF SUCCESS FACTORS AND ACTIONS IN DevOps PROJECTS USING FUZZY SET THEORIES

E. I. Levadny, R. M. Romanov***

National Research Nuclear University «MEPhI», 31 Kashirskoye highway, Moscow, 115409, Russia

**e-mail: egorlevadny2002@gmail.com*

***e-mail: Rodion.Romanov.M@yandex.com*

Received October 8, 2024; revised November 9, 2024; accepted November 12, 2024

In the rapidly evolving field of software development, companies are increasingly using the DevOps paradigm to improve speed and quality. However, managing DevOps processes comes with significant challenges. Although the Project Management Body of Knowledge (PMBOK) provides industry-independent best practices, there is a gap in understanding the feasibility of achieving its success factors in DevOps projects. The purpose of the study is to identify key success factors in IT DevOps project management that are considered important but are not always realized in practice. A questionnaire survey was conducted using fuzzy set theory and fuzzy hierarchy analysis method to solve multi-criteria decision making problems. The analysis resulted in a ranked list of actions, with two groups: actions that are neglected and actions that are given more attention than required. These results indicate inconsistencies between recognized success factors and actual management practices. Addressing these mismatches is critical to improving DevOps project management efficiency, optimizing resource allocation, and improving project success rates. These findings provide a basis for developing strategies that better integrate PMBOK principles into DevOps processes.

Keywords: DevOps, PMBOK, fuzzy sets, triangular fuzzy sets, Fuzzy AHP, multi-criteria decision making.

REFERENCES

1. Liu S., Wu B., Meng Q. Critical affecting factors of IT project management. 2012 International Conference on Information Management, Innovation Management and Industrial Engineering. IEEE, 2012. Vol. 1, Pp. 494–497.
2. Guide A. Project management body of knowledge (pmbok® guide). Project Management Institute, 2001. Vol. 11. No. 1. Pp. 7–8.
3. Levadny E.I., Romanov R.M. [Study of the integration of DevOps project management with PMBOK using fuzzy set theory]. *Sovremennyye problemy fiziki i tekhnologii: Sbornik tezisov dokladov XI mezhdunarodnoy molodezhnoy nauchnoy shkoly-konferentsii, Moskva, 23–25 aprelya 2024 goda* [Proc. XI Int. Youth Scientific School-Conference «Modern Problems of Physics and Technology», Moscow, April 23–25, 2024]. Moscow: National Research Nuclear University MEPhI, 2024. Pp. 322–323 (in Russian).
4. Banica L., Radulescu M., Rosca D., Hagi A. Is DevOps another project management methodology? *Informatica Economica*, 2017. Vol. 21. Iss. 3. Pp. 39–51.
5. Moez M., Mahmood R., Asifet H. et al. Comprehensive Analysis of DevOps: Integration, Automation, Collaboration, and Continuous Delivery. *Bulletin of Business and Economics (BBE)*, 2024. Vol. 13. No. 1. DOI: 10.61506/01.00253.
6. Bass L., Weber I., Zhu L. *DevOps: A software architect's perspective*. Addison-Wesley Professional, 2015. 425 p.
7. Erich F.M.A., Amrit C., Daneva M. A qualitative study of DevOps usage in practice. *Journal of software: Evolution and Process*, 2017. Vol. 29. Iss. 6. Article e1885. DOI: 10.1002/smr.1885.
8. Maroukian K., Gulliver S.R. Leading DevOps practice and principle adoption. arXiv preprint arXiv:2008.10515, 2020. DOI: 1.48550/arXiv.2008.10515.
9. Luz W.P., Pinto G., Bonifácio R. Adopting DevOps in the real world: A theory, a model, and a case study. *Journal of Systems and Software*, 2019. Vol. 157. Pp. 110384.
10. Akbar M.A. et al. DevOps project management success factors: A decision-making framework. *Software: Practice and Experience*, 2024. Vol. 54. Iss. 2. Pp. 257–280.
11. Dubois D., Prade H. Decision-making under fuzziness. In Gupta M.M., Pagade R.K., and Yager R.R. *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*. Elsevier/North-Holland, 1979. Pp. 279–302.
12. Chen C.T. Extensions of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment. *Fuzzy sets and systems*, 2000. Vol. 114. No 1. Pp. 1–9.
13. Mardani A., Jusoh A., Zavadskas E.K. Fuzzy multiple criteria decision-making techniques and applications—Two decades review from 1994 to 2014. *Expert systems with Applications*, 2015. Vol. 42. No. 8. Pp. 4126–4148.
14. Chang D.Y. Applications of the extent analysis method on fuzzy AHP. *European journal of operational research*, 1996. Vol. 95. No. 3. Pp. 649–655.
15. Chang D.Y. Extent analysis and synthetic decision. *Optimization techniques and applications*, 1992. Vol. 1. No. 1. Pp. 352–355.

УДК 577.352.4

ИССЛЕДОВАНИЕ ТВЕРДОТЕЛЬНОЙ ПОРЫ В МЕМБРАНЕ ИЗ НИТРИДА КРЕМНИЯ СРЕДСТВАМИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

О.В. Замятина^{1,2,*}, Е.М. Еганова²

¹Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия;

²Институт нанотехнологий микроэлектроники Российской академии наук,
Дизайн-центр «Гетерогенная интеграция» Ленинский проспект, 32А, Москва, 119334 Россия

*e-mail: o.v.zamiatina@yandex.ru

Поступила в редакцию: 05.07.2024

После доработки: 19.09.2024

Принята к публикации: 08.10.2024

Перспективной системой для создания биосенсоров нового поколения является твердотельная пора, размеры которой сопоставимы с исследуемой молекулой. Суть детектирования и анализа частиц заключается в регистрации ионных токов, протекающих через пору. При этом в момент, когда в пору проникает молекула исследуемого объекта, величина тока изменяется в зависимости от размера и формы частицы. Следовательно, масштабы данных изменений могут являться признаком, позволяющим производить детектирование определенных частиц. Интерпретация результатов экспериментов по измерению вольт-амперных характеристик (ВАХ) нанопор является комплексной задачей, одним из решений которой может стать создание численной модели твердотельной нанопоры. В работе представлено создание математической модели исследуемых образцов твердотельных пор в мембране из нитрида кремния в программе COMSOL MultiPhysics®. Произведено моделирование процесса протекания ионного тока через поры различного диаметра, получены соответствующие ВАХ. Для верификации модели создана методика измерения ВАХ реальных образцов мембран, отработанная при проведении ряда экспериментов по измерению ВАХ образцов с порами диаметром 1–57 мкм и 55–140 нм. Установлено, что отклонение результатов моделирования от результатов эксперимента составляет порядка 30 % для измерений пор диаметром меньше 70 нм и не превышает 10–15 % в остальных случаях. Работа показывает отклик системы на пропускание наночастиц золота диаметром 40 нм. В России полномасштабных работ по созданию подобных математических моделей твердотельных пор и их измерению не проводится. Данная работа может служить отправной точкой для проведения серии экспериментов по измерению твердотельных нанопор.

Ключевые слова: твердотельные нанопоры, транслокация частиц, метод вариации ионного тока, обнаружение одиночных частиц, COMSOL MultiPhysics.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.6.6
EDN SGDDSR

ВВЕДЕНИЕ

Наноразмерные приборы служат перспективным интерфейсом для исследования биологических объектов, поскольку размеры многих наноструктур сопоставимы с размерами биомолекул. Нанопоровые сенсоры могут идентифицировать частицы на уровне одной молекулы, имитируя таким образом функции естественных биологических ионных каналов. Суть детектирования и анализа частиц при данном подходе заключается в регистрации ионных токов, протекающих через пору. При этом в момент, когда в пору проникает молекула исследуемого объекта, величина тока изменяется характерным образом.

Количество работ, посвященных исследованию нанопор в мембранах различного типа, увеличивается с каждым годом. Авторами изучаются преимущества и недостатки различных типов мембран [1–5], процессы формирования пор в мембранах и перспективы использования последних [6–9]. Перспективной системой для создания биосенсоров, а также секвенаторов нового поколения считается твердотельная пора, размеры которой сопоставимы с исследуемой молекулой [10]. Разрабатываются различные теоретические модели протекания ионного тока через твердотельные поры различной конфигурации [11–12], рассматриваются вопросы пропускания различных наночастиц через нанопоры [2, 13–16],

ИССЛЕДОВАНИЕ ТВЕРДОТЕЛЬНОЙ ПОРЫ В МЕМБРАНЕ ИЗ НИТРИДА КРЕМНИЯ СРЕДСТВАМИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

а также описываются примеры моделирования подобных нанопоровых систем [17–19].

Метод нанопорового детектирования с помощью твердотельных мембран обладает многими преимуществами [4], включая высокую скорость обнаружения, отсутствие амплификации, меньший расход образца и низкую стоимость. Также есть ряд недостатков, требующих доработки. Например, чувствительность твердотельных нанопор является недостаточной для того, чтобы с их помощью различать молекулы с похожими размерами, но разными биологическими характеристиками [3]. Для устранения данного и других недостатков требуется увеличение как количества необходимых экспериментов, так и сложности интерпретации полученных данных. Это, в свою очередь, требует проведения физического моделирования процессов, протекающих в поре.

В работе представлено создание математической модели исследуемых образцов твердотельных пор в мембране из нитрида кремния в программе физического моделирования COMSOL MultiPhysics®, которая описывает физические свойства самой нанопоры и электрофизические процессы, протекающие в ней. Результаты этого моделирования могут быть в дальнейшем использованы для анализа экспериментальных данных. В данной работе использовался следующий алгоритм построения математической модели: первоначальное моделирование на основе теоретических знаний о физике процесса с последующей корректировкой модели с учетом полученных экспериментальных данных.

1. ПОСТРОЕНИЕ ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ

Цель численного моделирования – создание модели системы, включающей в себя исследуемый образец твердотельной мембраны с порой и протекающий через него раствор KCl (далее по тексту – «система»). Для реализации численного моделирования был выбран программный пакет COMSOL Multiphysics®.

Разработанная геометрия системы показана на рис. 1.

Численная модель построена исходя из следующих теоретических представлений. Основываясь на приближении сплошной среды в наномасштабе [11], управляющими уравнениями для процесса протекания ионного тока через пору являются уравнения Пуассона–Нернста–Планка (ПНП) для распределения электростатического потенциала и ионного массопереноса и уравнения Навье–Стокса (НС), для описания потока жидкости.

В квазистационарном приближении, которое предполагает, что все физические поля достигают квазистационарного состояния в любой момент времени, можно пренебречь нестационарными членами из уравнений Нернста–Планка и Навье–Стокса. Таким образом, финальное выражение для нахождения ионного тока:

$$I = \iint_{A(z)} F \left(\sum_{i=1}^n z_i J_i \right) \mathbf{n} dA(z). \quad (1)$$

Когда поверхностным зарядом на частице и стенках можно пренебречь, как предполагалось в рамках моделирования в соответствии с [12],

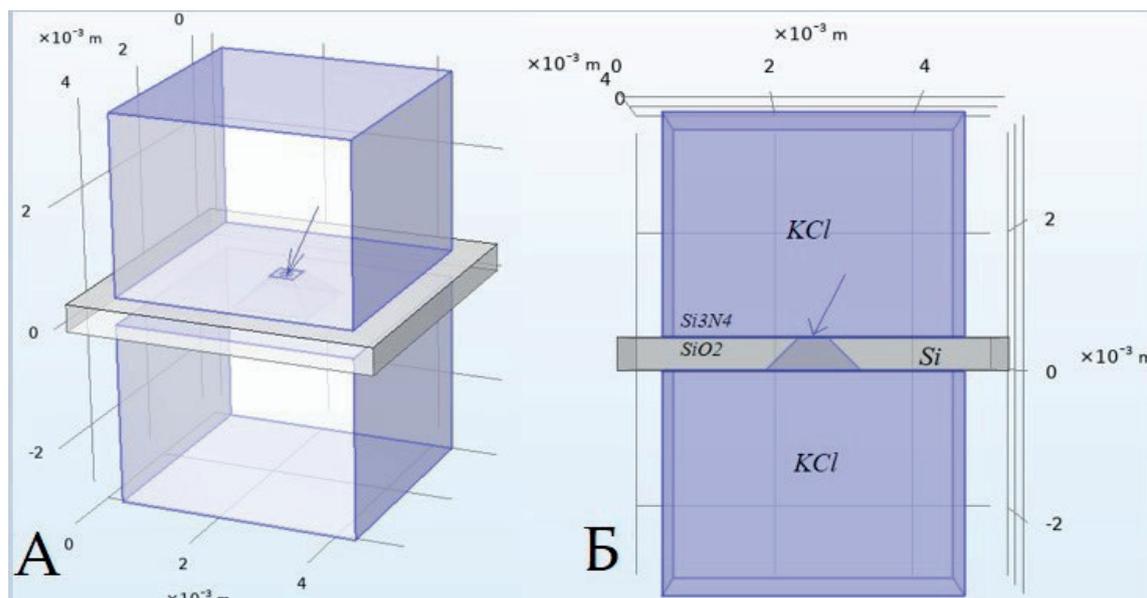


Рис. 1. Общий вид модели для исследования поры в твердотельной мембране:
а) – изометрия; б) – сечение в плоскости y – z . Синяя стрелка указывает местоположение поры

уравнение (1) может быть приведено к уравнению

$$\mathbf{J} = -\kappa \nabla \varphi, \quad (2)$$

где κ раствора в уравнении (2) выражается (в рамках нашей системы) как

$$\kappa = \frac{F}{RT} (c_K D_K + c_{Cl} D_{Cl} + c_H D_H + c_{OH} D_{OH}) \left[\frac{C_M}{M} \right], \quad (3)$$

где c_K, c_{Cl}, c_H, c_{OH} – концентрации ионов K^+, Cl^-, H^+ и OH^- соответственно, D_K, D_{Cl}, D_H, D_{OH} – коэффициенты диффузии ионов K^+, Cl^-, H^+ и OH^- соответственно. Численные значения коэффициента диффузии ионов K^+ и Cl^- были взяты из [20].

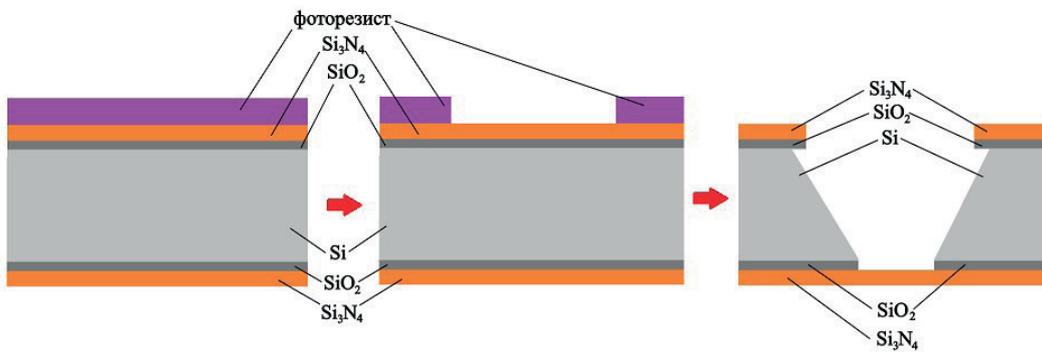


Рис. 2. Схематический маршрут изготовления образцов исследуемых кристаллов

щин, загрязнений или других механических повреждений кристалла или мембраны. Далее, с помощью двухлучевого микроскопа фирмы FEI Helios NanoLab 650 в исследуемых образцах кристаллов создавались поры. Рабочее напряжение фокусированного ионного пучка (ФИП) составляло 30 кВ, ток варьировался от 1.1 до 33 пА в зависимости от того, какой диаметр поры необходимо было получить. Диаметры пор, изготовленных на ФИП и исследуемых в ходе работы, находятся в диапазоне от 57 мкм до 55 нм.

В целях получения гидрофильной поверхности мембраны проводилась химическая обработка образцов в растворе Каро ($3(H_2SO_4): 1(H_2O_2)$) при минимальной длительности обработки в 30 мин

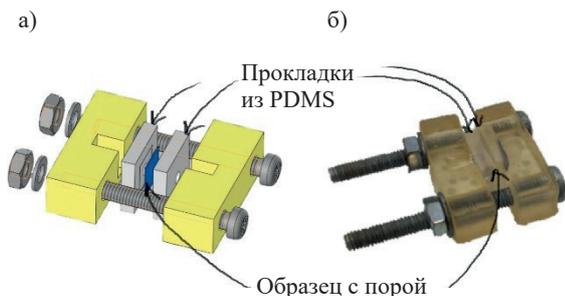


Рис. 3. Оснастка для проведения эксперимента: а) 3D-модель; б) реальный вид оснастки

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

2.1. Эксперимент по измерению ВАХ пор

Исследуемые образцы представляли собой кристаллы из кремния размерами 5.12 на 5.12 мм со слоем нитрида кремния (Si_3N_4) на поверхности. Толщина слоя нитрида составляла порядка 200 нм. Краткий технологический маршрут изготовления образцов представлен на рис. 2.

Эксперимент по измерению ВАХ твердотельных пор состоял из нескольких этапов. Входной контроль кристалла с мембраной заключался в его осмотре на оптическом микроскопе NIKON ECLIPSE L200N на предмет наличия микротре-

при температуре 90 °С. Далее образцы кристаллов промывались в деионизованной воде.

Для непосредственного измерения ВАХ образец помещался в оснастку, представленную на рис. 3. Оснастка наполнялась раствором 1 М КСl.

Схема экспериментальной установки для измерения ВАХ представлена на рис. 4. Она представляет собой помещенную внутрь зондовой станции собранную оснастку, в «ванночки» которой погружены электроды зондовой станции.

Диапазон напряжений для исследования: $[-0.2, 0.2]$ В. Измерения проводились на зондовой станции H8 Semishare. Результаты экспери-

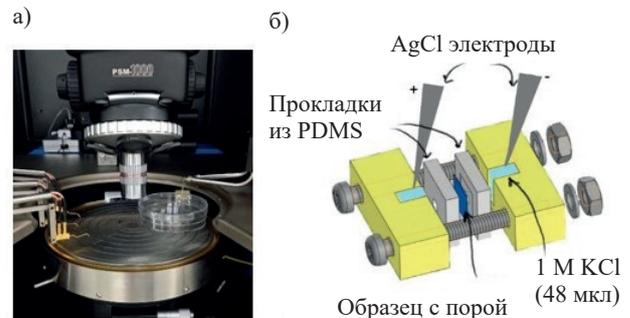


Рис. 4. Схема установки для измерения ВАХ: а) общий вид; б) схематическое изображение оснастки с помещенными внутри электродами

ИССЛЕДОВАНИЕ ТВЕРДОТЕЛЬНОЙ ПОРЫ В МЕМБРАНЕ ИЗ НИТРИДА КРЕМНИЯ СРЕДСТВАМИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

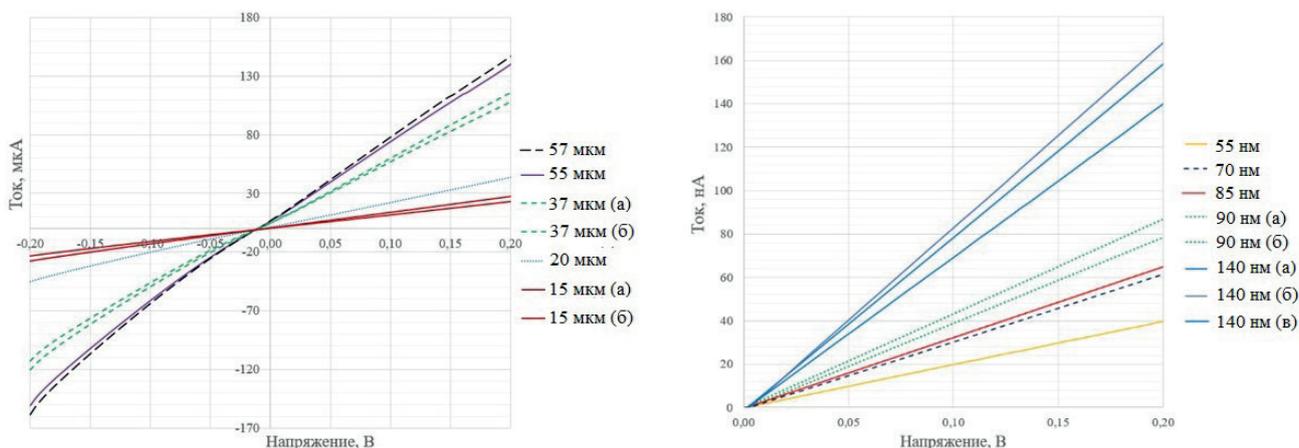


Рис. 5. ВАХ пор большого диаметра (слева) и ВАХ пор малого диаметра (справа)

мента для пор диаметрами 15, 20, 37, 55 и 57 мкм и 55, 70, 85, 90, 140 нм приведены на рис. 5. Было получено, что зависимость тока от напряжения носит линейный характер.

2.2. Постановка и проведение эксперимента по транслокации наночастиц через пору

Диаметр наночастиц, которые пропускали через нанопоры, составляет 40 ± 1.5 нм. На рис. 6,а представлена фотография исследуемой нанопоры, полученная с помощью электронного микроскопа. Фотография наночастицы золота, полученная с помощью просвечивающего электронного микроскопа, представлена на рис. 6,б. Диаметр поры, через которую пропускались наночастицы в ходе эксперимента, составлял порядка 80 нм.

Измерения проводились на цифровом патч-кламп-усилителе dPatch® Sutter Instrument при приложенном напряжении 0.025 В. Экспери-

мент носил следующий характер. После добавления в одну из камер оснастки раствора 2 мкл наночастиц коллоидного золота общий уровень ионного тока претерпевал заметное падение, связанное с изменением проводимости раствора электролита при добавлении в него раствора наночастиц. Далее в течение 5–10 мин уровень тока держался постоянным. После начинали наблюдаться характерные для метода ионной вариации падения по току. Общее время, в течение которого снималась зависимость: 40–60 мин.

На рис. 7 представлен участок графика зависимости ионного тока от времени через 5–10 мин после введения 2 мкл раствора коллоидного золота.

Величина шумов, измеренная до момента введения наночастиц, составляет порядка 20–30 пА (или 0.2 % от первоначальной величины тока). Падение общего уровня тока при добавлении раствора коллоидного золота составило 4.8 нА (изменение основной линии тока с 15.5 до 10.7 нА).

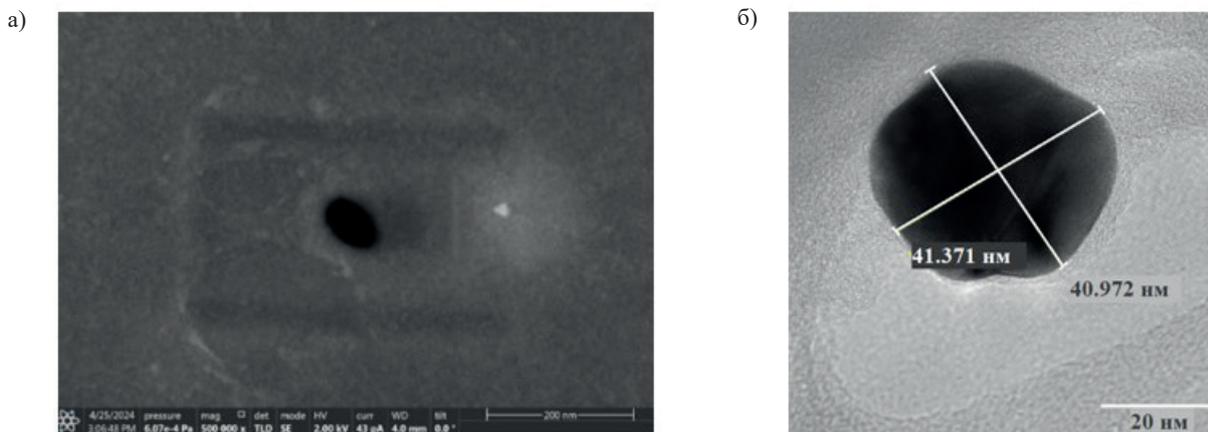


Рис. 6. Фотографии исследуемой поры и наночастиц:

- а) снимок одной из экспериментальных нанопор диаметром около 80 нм, полученный с помощью электронного микроскопа;
- б) наночастица золота

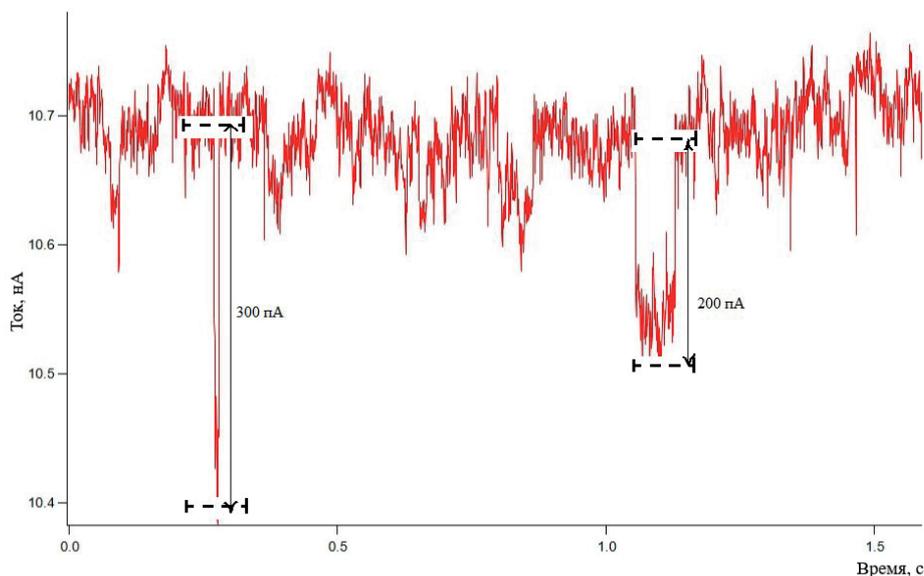


Рис. 7. График зависимости тока от времени при пропускании наночастиц золота через нанопору, соответствующую рис. 5.

Характерное падение по току составило порядка 150–300 пА

3. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ЧИСЛЕННО И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО

3.1. Сравнение результатов для эксперимента по измерению ВАХ пор

Был проведен сравнительный анализ данных, полученных с помощью моделирования и в ходе эксперимента. В табл. 1 указаны наименьшие отклонения по току (при напряжении 0.1 В) данных моделирования от данных, полученных в ходе эксперимента.

Таблица 1. Данные, полученные с помощью эксперимента и моделирования (нанопоры диаметрами 55–140 нм)

Диаметр поры, нм	Тип данных	Ток, нА	Отклонение результатов моделирования от экспериментальных данных, δ
55	эксперимент	19.98	29%
	моделирование	14.24	
70	эксперимент	30.13	27%
	моделирование	22.03	
85	эксперимент	32.22	3%
	моделирование	31.14	
90	эксперимент	38.72	11%
	моделирование	34.34	
140	эксперимент	78.17	4%
	моделирование	74.96	

Сильное расхождение данных эксперимента и моделирования для пор диаметрами 55 и 70 нм связано, скорее всего, с ошибкой первоначального определения диаметра данных пор: полученные значения, предположительно, больше реальных.

3.2. Сравнение результатов для эксперимента по транслокации частиц

Было произведено численное моделирование процесса транслокации наночастицы золота через нанопору, а также моделирование с параметрами, соответствующими условиям проведения эксперимента в работе [16] – наночастицы диаметром 100 нм, пора диаметром 240 нм, 1 М КСl, толщина мембраны 360 нм, приложенное напряжение 0.1 В.

В табл. 2 приведен сравнительный анализ результатов моделирования и результатов, полученных в ходе эксперимента.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На основе представлений о физике процесса протекания ионного тока через пору и геометрии образцов создана математическая модель исследуемого образца в программе физического моделирования COMSOL Multiphysics®. Проведено моделирование процесса протекания ионного тока через поры различного диаметра. Получена линейная зависимость тока от напряжения, что сходится с теоретическими представлениями о физике процесса.

Отработана методика измерения ВАХ мембран с порами различного диаметра, и проведены

ИССЛЕДОВАНИЕ ТВЕРДОТЕЛЬНОЙ ПОРЫ В МЕМБРАНЕ ИЗ НИТРИДА КРЕМНИЯ
СРЕДСТВАМИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Таблица 2. Данные, полученные с помощью эксперимента и моделирования (процесс транслокации)

Процесс		Основная линия тока I_0 , нА	Падение по току I , пА	$I/I_0 \cdot 100$ %	Отклонение результатов моделирования от результатов эксперимента,
1	Моделирование	6.74	300	4.4	36 %
	Эксперимент	10.70	200–300	1.8–2.8	
2	Моделирование	11.67	410	3.5	Сходится в пределах погрешности
	Эксперимент в работе [16]	14.12	370–520	2.6–3.6	

непосредственные измерения ВАХ исследуемых образцов. Показано, что построенная методами численного моделирования модель твердотельной нанопоры в мембране из нитрида кремния корректна.

Проведен эксперимент по транслокации наночастиц золота диаметром 40 нм через пору диаметром 80 нм. Среднее отношение амплитуды падения по току во время транслокации частиц к основной линии тока составило порядка 2–3 %. В рамках моделирования подобного процесса в системе COMSOL было получено отношение порядка 4 %. Таким образом, построенная модель с достаточной точностью может описывать процесс транслокации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Venkatesan B.M., Bashir R. Nanopore sensors for nucleic acid analysis // *Nature Nanotechnology*, 2011. V. 6. № 10. P. 615–624. DOI: 10.1088/0953-8984/15/32/203.
2. Heng J.B., Ho C., Kim T., Timp R., Aksimentiev A., Grinkova Y.V., Timp G. Sizing DNA using a nanometer-diameter pore // *Biophysical journal*, 2014. V. 87. № 4. P. 2905–2911. DOI: 10.1529/biophysj.104.041814.
3. Gouaux E., MacKinnon R. Principles of selective ion transport in channels and pumps // *Science*, 2005. V. 310. № 5753. P. 1461–1465. DOI: 10.2307/3843155.
4. Lan W.-J., Holden D.A., Zhang B., White H.S. Nanoparticle transport in conical-shaped nanopores // *Analytical chemistry*, 2011. V. 83. № 10. P. 3840–3847. DOI: 10.1021/ac200312n.
5. Hall A.R., Scott A., Rotem D., Mehta K.K., Bayley H., Dekker C. Hybrid pore formation by directed insertion of α -haemolysin into solid-state nanopores // *Nature Nanotechnology*, 2010. V. 5. № 12. P. 874–877. DOI: 10.1038/nnano.2010.237.
6. Meller A. Dynamics of polynucleotide transport through nanometre-scale pores // *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2003. V. 15. № 17. P. R581–R607. DOI: 10.1088/0953-8984/15/17/202.
7. Storm A.J., Storm C., Chen J., Zandbergen H., Joanny J.-F., Dekker C. Fast DNA translocation through a solid-state nanopore // *Nano letters*, 2005. V. 5. № 7. P. 1193–1197. DOI: 10.1021/nl048030d.
8. Clarke J., Wu H.C., Jayasinghe L., Patel A., Reid S., Bayley H. Continuous base identification for single-mole-

cule nanopore DNA sequencing // *Nature Nanotechnology*, 2009. V. 4. № 4. P. 265–270. DOI: 10.1038/nnano.2009.12.

9. Merstorf C., Cressiot B., Pastoriza-Gallego M., Oukhaled A., Betton J.-M., Auvray L., Pelta J. Wild type, mutant protein unfolding and phase transition detected by single-nanopore recording // *ACS Chemical Biology*, 2012. V. 7. № 4. P. 652–658. DOI: 10.1021/cb2004737.

10. Tang Z., Zhang D., Cui W., Zhang H., Pang W., Duan X. Fabrications, applications and challenges of solid-state nanopores: A mini review // *Nanomaterials and Nanotechnology*, 2016. V. 6. № 35. DOI: 10.5772/64015.

11. Wang J., Ma J., Ni Z., Zhang L., Hu G. Effects of access resistance on the resistive-pulse caused by translocating of a nanoparticle through a nanopore // *RSC Advances*, 2014. V. 4. № 15. P. 7601. DOI: 10.1039/c3ra46032k.

12. Firnkes M., Pedone D., Knezevic J., M. Doblinger, Rant U. Electrically facilitated translocations of proteins through silicon nitride nanopores: conjoint and competitive action of diffusion, electrophoresis and electroosmosis // *Nano letters*, 2010. V. 10. № 6. P. 2162–2167. DOI: 10.1021/nl100861c.

13. Goyal G., Freedman K.J., Kim M.J. Gold nanoparticle translocation dynamics and electrical detection of single particle diffusion using solid-state nanopores // *Analytical Chemistry*, 2013. V. 85. № 17. P. 8180–8187. DOI: 10.1021/ac4012045.

14. Wang Y., Kececi K., Mirkin M.V., Mani V., Sardesai N., Rusling J.F. Resistive-pulse measurements with nanopipettes: detection of au nanoparticles and nanoparticle-bound anti-peanut IgY // *Chem. Sci*, 2013. V. 4. № 2. P. 655–663. DOI: 10.1039/c2sc21502k.

15. Zhang B., Wood M., Lee H. A silica nanochannel and its applications in sensing and molecular transport. *analytical chemistry* // *Analytical Chemistry*, 2009. V.81. № 13. P. 5541–5548. DOI: 10.1021/ac9009148.

16. Petrossian L., Wilk S.J., Joshi P., Goodnick S.M., Thornton T.J. Demonstration of coulter counting through a cylindrical solid state nanopore // *Analytical Chemistry*, 2008. № 109. P. 012028. DOI: 10.1088/1742-6596/109/1/012028.

17. Das N., Ropmay G. D., Joseph A. M., RoyChaudhuri C. Modelling the effective conductance drop due to a particle in a solid state nanopore towards optimized design // *IEEE Transactions on NanoBioscience*, 2020. V. 1. № 1. DOI: 10.1109/tnb.2020.3015592.

18. Zhang Y., Liu G., Li M., Luo J., Huang C. Simulation analysis of nanopore performance in single-nanoparticle

detection // 10th IEEE International Conference on Nano/Micro Engineered and Molecular Systems, 2015. DOI: 10.1109/nems.2015.7147416.

19. Wang J., Ma J., Ni Z., Zhang L., Hu G. Effects of access resistance on the resistive-pulse caused by translocat-

ing of a nanoparticle through a nanopore // RSC Advances, 2014. V. 4. № 15. P. 7601. DOI: 10.1039/c3ra46032k.

20. Ньюмен Дж. Электрохимические системы / Пер. с англ.; Под ред. М.Ж. Чизмаджева. М.: Мир, 1977.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 6, pp. 422–429

STUDY OF SOLID-STATE PORE IN SILICON NITRIDE MEMBRANE BY MEANS OF NUMERICAL MODELING

O. V. Zamiatina^{1,2,}, E. M. Eganova²*

¹ National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, 115409, Russia

² Institute of Nanotechnology of Microelectronics of the Russian Academy of Sciences, Design Center «Heterogeneous Integration», Moscow, 119334, Russia

*e-mail: o.v.zamiatina@yandex.ru

Received July 05, 2024; revised September 19, 2024; accepted October 08, 2024

A promising system for creating new-generation biosensors is a solid-state pore whose size is comparable to the size of a molecule under study. The essence of particle detection and analysis consists in registration of ionic currents flowing through the pore. At the moment when a molecule of the investigated object penetrates the pore, the current value changes depending on the size and shape of the particle. Consequently, the scale of these changes can be a sign that allows detection of certain particles. Interpretation of the results of experiments on measuring the volt-ampere characteristics (VAC) of nanopores is a complex problem, one of the solutions of which can be the creation of a numerical model of a solid-state nanopore. The paper presents the creation of a mathematical model of the studied samples of solid-state pores in silicon nitride membrane in COMSOL MultiPhysics® program. The process of ionic current flow through pores of different diameters has been modeled and the corresponding VACs have been obtained. To verify the model, a method of measuring the VAC of real membrane samples has been created, which has been worked out during a number of experiments on measuring the VAC of samples with pores of 1–57 microns and 55–140 nm in diameter. It is found that the deviation of the modeling results from the experimental results is of the order of 30 % for measurements of pores with diameters smaller than 70 nm and does not exceed 10–15 % in other cases. The work shows the response of the system to the transmission of gold nanoparticles with a diameter of 40 nm. There are no full-scale works on creation of similar mathematical models of solid-state pores and their measurement in Russia. This work can serve as a starting point for a large series of experiments on the measurement of solid-state nanopores.

Keywords: solid-state nanopores, particle translocation, ion current variation method, single-particle detection, COMSOL MultiPhysics.

REFERENCES

1. Venkatesan B.M., Bashir R. Nanopore sensors for nucleic acid analysis. *Nature Nanotechnology*, 2011. Vol. 6. No. 10. Pp. 615–624. DOI: 10.1088/0953-8984/15/32/203.

2. Heng J.B., Ho C., Kim T., Timp R., Aksimentiev A., Grinkova Y.V., Timp G. Sizing DNA using a nanometer-diameter pore. *Biophysical journal*, 2014. Vol. 87. No. 4. Pp. 2905–2911. DOI: 10.1529/biophysj.104.041814.

3. Gouaux E., MacKinnon R. Principles of selective ion transport in channels and pumps. *Science*, 2005. Vol. 310. No. 5753. Pp. 1461–1465. DOI: 10.2307/3843155.

4. Lan W.-J., Holden D.A., Zhang B., White H.S. Nanoparticle transport in conical-shaped nanopores.

Analytical chemistry, 2011. Vol. 83. No. 10, Pp. 3840–3847. DOI: 10.1021/ac200312n.

5. Hall A.R., Scott A., Rotem D., Mehta K.K., Bayley H., Dekker C. Hybrid pore formation by directed insertion of α -haemolysin into solid-state nanopores. *Nature Nanotechnology*, 2010. Vol. 5. No. 12. Pp. 874–877. DOI: 10.1038/nnano.2010.237.

6. Meller A. Dynamics of polynucleotide transport through nanometre-scale pores. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2003. Vol. 15. No. 17. Pp. R581–R607. DOI: 10.1088/0953-8984/15/17/202.

7. Storm A.J., Storm C., Chen J., Zandbergen H., Joanny J.-F., Dekker C. Fast DNA translocation through

ИССЛЕДОВАНИЕ ТВЕРДОТЕЛЬНОЙ ПОРЫ В МЕМБРАНЕ ИЗ НИТРИДА КРЕМНИЯ
СРЕДСТВАМИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

a solid-state nanopore. *Nano letters*, 2005. Vol. 5. No. 7. Pp. 1193–1197. DOI: 10.1021/nl048030d.

8. *Clarke J., Wu H.C., Jayasinghe L., Patel A., Reid S., Bayley H.* Continuous base identification for single-molecule nanopore DNA sequencing. *Nature Nanotechnology*, 2009. Vol. 4. No. 4. Pp. 265–270. DOI: 10.1038/nnano.2009.12.

9. *Merstorf C., Cressiot B., Pastoriza-Gallego M., Oukhaled A., Betton J.-M., Auvray L., Pelta J.* Wild type, mutant protein unfolding and phase transition detected by single-nanopore recording. *ACS Chemical Biology*, 2012. Vol. 7. No. 4. Pp. 652–658. DOI: 10.1021/cb2004737.

10. *Tang Z., Zhang D., Cui W., Zhang H., Pang W., Duan X.* Fabrications, applications and challenges of solid-state nanopores: A mini review. *Nanomaterials and Nanotechnology*, 2016. Vol. 6. No. 35. DOI: 10.5772/64015.

11. *Wang J., Ma J., Ni Z., Zhang L., Hu G.* Effects of access resistance on the resistive-pulse caused by translocating of a nanoparticle through a nanopore. *RSC Advances*, 2014. Vol. 4. No. 15, Pp. 7601. DOI: 10.1039/c3ra46032k.

12. *Firnkes M., Pedone D., Knezevic J., M. Doblinger, Rant U.* Electrically facilitated translocations of proteins through silicon nitride nanopores: conjoint and competitive action of diffusion, electrophoresis and electroosmosis. *Nano letters*, 2010. Vol. 10. No. 6. Pp. 2162–2167. DOI: 10.1021/nl100861c.

13. *Goyal G., Freedman K.J., Kim M.J.* Gold nanoparticle translocation dynamics and electrical detection of single particle diffusion using solid-state nanopores. *Analytical Chemistry*, 2013. Vol. 85. No. 17. Pp. 8180–8187. DOI: 10.1021/ac4012045.

14. *Wang Y., Kececi K., Mirkin M.V., Mani V., Sardesai N., Rusling J.F.* Resistive-pulse measurements with

nanopipettes: detection of au nanoparticles and nanoparticle-bound anti-peanut IgY. *Chemical Science*, 2013. Vol. 4. No. 2. Pp. 655–663. DOI: 10.1039/c2sc21502k.

15. *Zhang B., Wood M., Lee H.* A silica nanochannel and its applications in sensing and molecular transport. *analytical chemistry*. *Analytical Chemistry*, 2009. Vol. 81. No. 13. Pp. 5541–5548. DOI: 10.1021/ac9009148.

16. *Petrossian L., Wilk S.J., Joshi P., Goodnick S.M., Thornton T.J.* Demonstration of coulter counting through a cylindrical solid state nanopore. *Analytical Chemistry*, 2008. No. 109. Pp. 012028. DOI: 10.1088/1742-6596/109/1/012028.

17. *Das N., Ropmay G. D., Joseph A. M., RoyChaudhuri C.* Modelling the effective conductance drop due to a particle in a solid state nanopore towards optimized design. *IEEE Transactions on NanoBioscience*, 2020. Vol. 1, No. 1. DOI: 10.1109/tnb.2020.3015592.

18. *Zhang Y., Liu G., Li M., Luo J., Huang C.* Simulation analysis of nanopore performance in single-nanoparticle detection. 10th IEEE International Conference on Nano/Micro Engineered and Molecular Systems, 2015. DOI: 10.1109/nems.2015.7147416.

19. *Wang J., Ma J., Ni Z., Zhang L., Hu G.* Effects of access resistance on the resistive-pulse caused by translocating of a nanoparticle through a nanopore. *RSC Advances*, 2014. Vol. 4. No. 15. Pp. 7601. DOI: 10.1039/c3ra46032k.

20. Newman J. *Elektrohimicheskie sistemy. Per. s angl. pod red M. ZH. Chizmadzheva* [Electrochemical systems. Translation from English edited by M.J. Chizmadzhev]. Moscow, Mir Publ., 1977 (in Russia).

УДК 004.8

ДИАГНОСТИКА ЗЛОКАЧЕСТВЕННЫХ НОВООБРАЗОВАНИЙ ГРУДНОЙ КЛЕТКИ С ПОМОЩЬЮ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

А. Г. Зимина^{1,*}

¹Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

*e-mail: blasunnybla@mail.ru

Поступила в редакцию: 22.06.2024

После доработки: 6.11.2024

Принята к публикации: 12.11.2024

Негативная динамика частоты онкологических заболеваний придает высокую значимость и актуальность задаче повышения эффективности методов диагностики. По всему миру ежегодно выявляют более 10 млн случаев патологии, в том числе фиксируется 2.2 млн случаев онкологии легких, из которых 1.8 млн случаев заканчиваются летально. Ранняя, дифференциальная и точная диагностика заболевания традиционно считается важной задачей медицины. Целью работы является создание автоматизированной системы обработки результатов объективного контроля для дифференциальной диагностики злокачественных новообразований в грудной клетке и повышение с ее помощью точности и скорости диагностики. Полученный в результате работы продукт представляет собой систему искусственного интеллекта на основе нейронной сети, осуществляющей анализ изображений и их множественную классификацию. Анализ изображений позволяет не только фиксировать отсутствие или наличие злокачественных новообразований, но и в последнем случае произвести дифференциальную диагностику аденокарциномы, крупноклеточной карциномы и плоскоклеточного рака легких. Результаты работы данного продукта заметно превосходят достижения других описанных и доступных в настоящее время систем: полученный в результате работы продукт имеет ошибку 3.5 %, в то время как ошибка существующих аналогов составляет не менее 7.1 %, что в два раза больше ошибки полученной системы. Предлагаемый продукт позволяет в два раза сократить количество неправильно поставленных системой диагнозов по сравнению с существующими в настоящее время аналогами.

Ключевые слова: искусственный интеллект, нейросеть, дифференциальная диагностика, онкология, аугментация.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.6.7

EDN TNDLDH

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается задача дифференциальной диагностики рака легких по снимкам компьютерной томографии грудной клетки с использованием нейронных сетей. Данная задача остается актуальной и сейчас, так как ежегодно раком легких заболевают 2.2 млн человек, из которых 1.8 млн человек умирают [1]. Выживаемость выше, если онкозаболевание выявлено на ранних стадиях. Около 80 % пациентов правильно диагностируются на средней или поздней стадии рака [2], ранняя диагностика существенно повышает эффективность лечения.

Медицинская визуализация является критически важным инструментом для обнаружения и диагностики онкозаболевания на ранней стадии. Ручная интерпретация большого количества ме-

дицинских снимков весьма трудоемка, а также допускает человеческие предвзятости и ошибки в процессе диагностики. Алгоритмы классификации моделей определяют входные данные в различные классы в качестве основы для характеристик входных данных.

Описанные ранее в литературе процедуры не достигали высокой точности в дифференциальной диагностике, так как нейронные сети были еще недавно недостаточно развиты. Несмотря на то, что применением нейронных сетей для диагностики рака легких по снимкам компьютерной томографии грудной клетки активно занимаются ученые [3–6], дифференциальная диагностика по снимкам компьютерной томографии грудной клетки с использованием нейронных сетей изучена в меньшей степени и имеет недостаточно высокую точность.

ДИАГНОСТИКА ЗЛОКАЧЕСТВЕННЫХ НОВООБРАЗОВАНИЙ ГРУДНОЙ КЛЕТКИ С ПОМОЩЬЮ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Целью работы являлось создание автоматизированной системы обработки результатов объективного контроля для дифференциальной диагностики злокачественных новообразований в грудной клетке и повышение с ее помощью точности и скорости диагностики. В ходе работы решены следующие группы задач:

1) выбор архитектуры нейронной сети, определение количества скрытых слоев, оптимизация количества нейронов в слоях;

2) сбор и подготовка данных, включая формирование сбалансированных классов;

3) обучение и тестирование обученной модели, оценка достигаемой точности и надежности;

4) создание интерфейса (веб-приложения) доступа пользователя к системе с моделью.

Теоретическая значимость работы заключается в рассмотрении методов машинного обучения, дающих высокие результаты при дифференциальной диагностике рака легких по снимкам компьютерной томографии грудной клетки. Практическая значимость обусловлена получением высоких результатов при обучении нейронных сетей для решения задачи дифференциальной диагностики рака легких по снимкам компьютерной томографии грудной клетки.

НАБОР ДАННЫХ

Входными данными являются достоверные и реальные снимки компьютерной томографии грудной клетки из общедоступного банка данных¹. Всего использовалось 627 изображений, которые равномерно распределены на 4 класса: аденокарцинома (рис. 1), крупноклеточная карцинома (рис. 2), плоскоклеточный рак (рис. 3) и отсутствие рака (рис. 4).

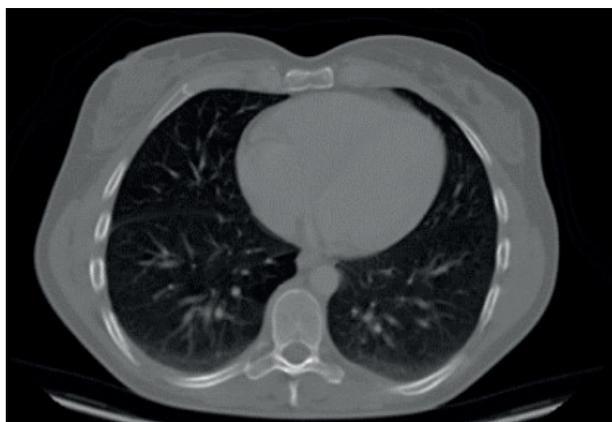


Рис. 1. Аденокарцинома (КТ)



Рис. 2. Крупноклеточная карцинома (КТ)

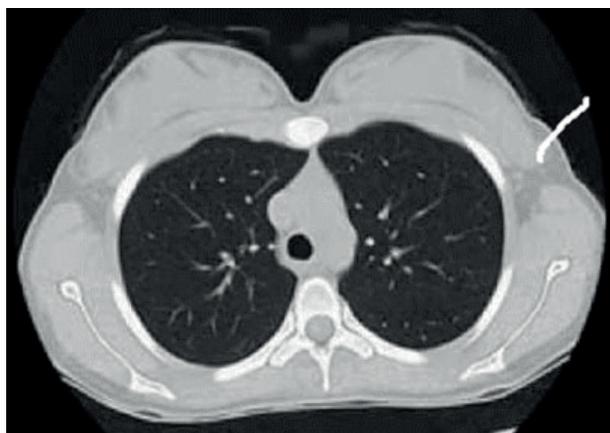


Рис. 3. Плоскоклеточный рак (КТ)

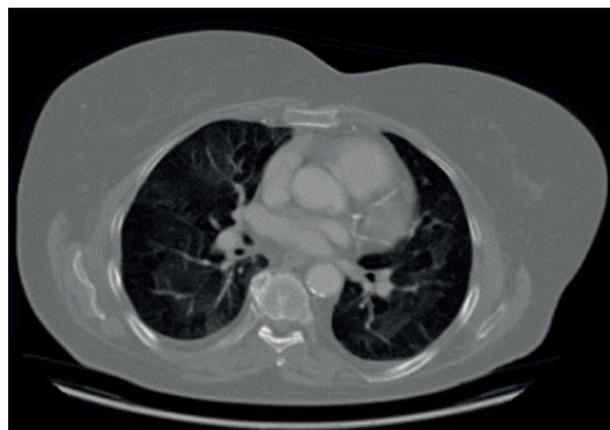


Рис. 4. Отсутствие рака (КТ)

Балансировка данных в нейронных сетях важна для предотвращения смещения модели в сторону часто встречающихся классов данных. Она может включать в себя использование весов классов, аугментацию данных или сэмплирование данных так, чтобы каждый класс был представлен более равномерно. Это помогает модели обучаться более сбалансированно и делает ее более устойчивой к различиям в распределении

¹ Chest CT-Scan images Dataset [Электронный ресурс]. URL: <https://www.kaggle.com/datasets/mohamedhanyyy/chest-ctscan-images/data> (дата обращения: 16.12.2023).

данных в реальном мире. В связи с этим была произведена балансировка данных.

ОБ ИСКЛЮЧЕНИИ НЕУДАЧНОЙ АУГМЕНТАЦИИ

В рамках машинного обучения нейронных сетей широко применяются методы аугментации данных для увеличения объема обучающей выборки². Под аугментацией традиционно понимается увеличение выборки путем модификации имеющихся данных (см., например, [7]). Так в классической задаче распознавания рукописного текста внесение в имеющийся образец разумно внести некоторые искажения (например, растяжение или сжатие, поворот и пр.) и рассматривать искусственно полученные изображения как реально существующие образцы, увеличивая тем самым количество образцов, используемых для обучения нейронной сети³. Применимость такого подхода обсуждается редко, и часто специалисты по обучению нейронных сетей считают применимость аугментации доказанной. В настоящей работе приведен пример того, как применение аугментации значительно снижает качество обучения нейронной сети, и ее аналитическая способность уменьшается.

При формировании обучающей выборки казалось правильными и разумным воспользоваться методом аугментации для увеличения ее объема. Использовались две трансформации: поворот на случайное количество градусов в пределах 360° и вертикальное отражение, вторая – поворот на случайное количество градусов в пределах 360° и горизонтальное отражение. Однако экспериментальная работа показала, что расширение объема выборки с такой аугментацией устойчиво приводит к снижению диагностического результата приблизительно на 4 %. Следует иметь в виду, что эти 4 % отнюдь не малая величина, так она равна тому выигрышу, который удалось достичь в приведенной работе в сравнении с уже известными работам: до настоящего времени точность классификации составляла только 93 %, нам же удалось достичь точности 97 %.

Выявленный в данном конкретном примере эффект – отрицательное влияние аугментации – следует детализировать и объяснить. Предложен один из вариантов объяснения, связанный с раз-

личием исходной задачи распознавания образов. Например очевидно, что несильно искаженная рукописная цифра не теряет своего смысла и по существу ничем не отличается от изначальной. Точно так же изображение кошки (еще один классический объект для систем распознавания изображений), перевернутое вверх ногами, не перестает быть кошкой. В некотором смысле образы кошки или рукописной цифры инвариантны относительно поворота на некоторый угол (а изображение кошки еще и относительно отражения). В то же время формирование картины новообразований в грудной клетке происходит в привязке к конкретным осям – рост вправо и влево будет идти неодинаково. Таким образом, не исключено, что новообразование, повернутое на некоторый угол, является собой нереальный, несуществующий объект, а искусственная нейросеть, получив его как образец для машинного обучения, по существу оказывается введенной в заблуждение.

В связи с предложенным объяснением следует отметить наличие ряда вопросов для дальнейшей проработки. Например, имеет смысл понять, почему нейросеть не смогла сориентироваться по внешним областям снимка (ребра, грудина, позвоночник). Однако проделанная работа очевидно указывает на то, что к применению аугментации следует подходить с осторожностью, и возможность (или невозможность) применения этого приема должна быть доказана в ходе обучения сети.

КЛАССИФИКАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Для классификации рака легких по снимкам компьютерной томографии грудной клетки была выбрана сверточная нейронная сеть, так как она хорошо себя зарекомендовала в задаче классификации изображений. Сверточная нейронная сеть является центральным компонентом компьютерного зрения. Ее обучение происходит путем обнаружения разнообразных абстрактных характеристик, варьирующихся от простых до сложных. Сеть затем использует эти признаки для прогнозирования правильной категории [8]. Основными функциональными особенностями являются нормализация, свертка, активация, объединение, полносвязные слои и классификаторы.

Среди сверточных нейросетей рассматривались AlexNet, ResNet, GoogleNet, VGG, после чего была выбрана ResNet как сеть, показывающая наименьшую ошибку (таблица сравнения ошибок нейронных сетей представлена на рис. 5).

На момент проведения исследования рассматривались ResNet-34, ResNet-50, ResNet-101, ResNet-152. Так как изображений всего 627, то

² Аугментация данных для обучения нейронной сети на примере печатных символов. [Электронный ресурс]. URL: <https://habr.com/ru/companies/smartengines/articles/264677/> (дата обращения: 07.11.2023).

³ A Complete Guide to Data Augmentation. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.datacamp.com/tutorial/complete-guide-data-augmentation> (дата обращения: 07.11.2023).

ДИАГНОСТИКА ЗЛОКАЧЕСТВЕННЫХ НОВООБРАЗОВАНИЙ ГРУДНОЙ КЛЕТКИ С ПОМОЩЬЮ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

method	top-1 err.	top-5 err.
VGG [41] (ILSVRC'14)	-	8.43 [†]
GoogLeNet [44] (ILSVRC'14)	-	7.89
VGG [41] (v5)	24.4	7.1
PReLU-net [13]	21.59	5.71
BN-inception [16]	21.99	5.81
ResNet-34 B	21.84	5.71
ResNet-34 C	21.53	5.60
ResNet-50	20.74	5.25
ResNet-101	19.87	4.60
ResNet-152	19.38	4.49

Рис. 5. Сравнения уровней ошибки для различных нейросетей⁴

были рассмотрены ResNet-50 и ResNet-101, однако точность модели при использовании ResNet-101 ниже, чем при использовании ResNet-50, так как в случае использования нейронной сети с большим количеством слоев начинается переобучение. Архитектура ResNet-50 представлена на рис. 6.

Чтобы использовать архитектуру ResNet-50, для данной задачи была произведена замена выходного слоя на новый, у которого четыре выхода. После этого было произведено дообучение модели (график обучения нейронной сети представлен на рис. 7). Для увеличения точности модели была использована кросс-валидация. Также было рассмотрено несколько видов оптимизаторов.

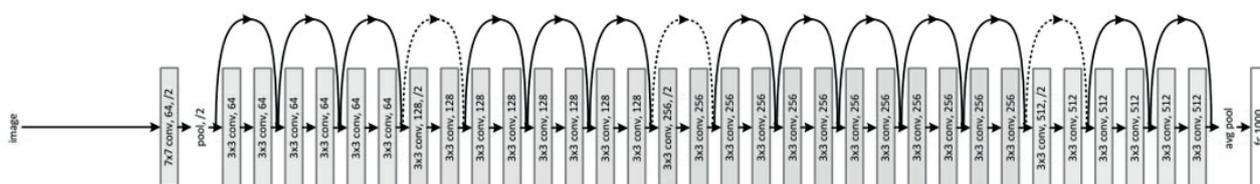


Рис. 6. Архитектура модели ResNet-50⁵

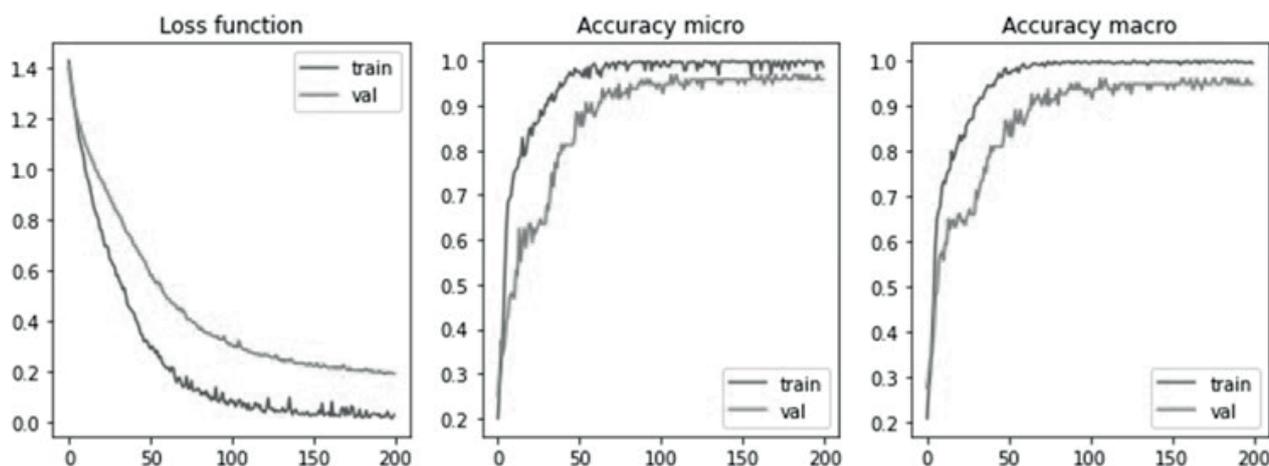


Рис. 7. График обучения нейронной сети

РЕЗУЛЬТАТЫ

Для оценки результатов обучения модели для множественной классификации были использованы микроточность (доля экземпляров, которые модель правильно спрогнозировала) и макроточность (средняя точность на уровне класса). По

итогу проведения экспериментальных работ микроточность диагностики равняется 96.9 %, а макроточность диагностики – 96.5 %.

Обученная нейронная сеть может быть помещена на сервер, в результате чего ее смогут использовать специалисты в дополнение к самостоятельному анализу снимков, что позволит повысить точность диагностики рака легких по снимкам компьютерной томографии грудной клетки. В настоящее время создан цифровой продукт, позволяющий осуществлять взаимодействие пользователя с созданной системой. Этот продукт не только предоставляет наиболее вероятный диагноз на основе анализа изображений, но и указывает вероятность этого диагноза.

⁴ Расширенные темы в глубоких сверточных нейронных сетях. [Электронный ресурс]. URL: <https://machinelearningmastery.ru/advanced-topics-in-deep-convolutional-neural-networks-71ef1190522d/> (дата обращения: 16.12.2023).

⁵ ResNet (34, 50, 101): «остаточные» CNN для классификации изображений. [Электронный ресурс]. URL: <https://neurohive.io/ru/vidy-nejrosetej/resnet-34-50-101/> (дата обращения: 16.12.2023).

Следует также отметить, что полная замена работанной системой деятельности медицинских специалистов является ошибкой, так как в случае получения вероятности класса менее 90 %, не следует ориентироваться исключительно на результат работы автоматизированной системы, а необходимо медицинскому персоналу установить причины возникновения подобных результатов.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В работе был рассмотрен и реализован метод для получения более высокой точности дифференциальной диагностики легких по снимкам компьютерной томографии грудной клетки по сравнению с результатами, представленными в других найденных научных статьях. Предлагаемый продукт в рамках процедуры дифференциальной диагностики рака легких по снимкам компьютерной томографии грудной клетки дает ошибку 3.5 %. Это более чем в два раза меньше ошибки существующих аналогов, где она составляет не менее 7.1 %. Из этого следует, что новый продукт позволяет в два раза сократить количество неправильно поставленных системой диагнозов по сравнению с существующими в настоящее время аналогами, что является существенным достижением.

Методологическая значимость данной работы заключается в обосновании методов машинного обучения, дающих более высокие результаты при дифференциальной диагностике рака легких по снимкам компьютерной томографии грудной клетки по сравнению с известными.

Методология машинного обучения нейронных сетей при решении задач распознавания образов имеет важнейшее значение для таких приложений, как медицинская диагностика. Существенными результатами проведенной работы по совершенствованию этой технологии являются:

- создание полномасштабной рабочей системы искусственного интеллекта для дифференциальной диагностики онкологических заболеваний грудной клетки с уровнем надежности и точности, превосходящим существующие аналоги;
- возможность распространения данной технологии для создания систем диагностики иных онкологических заболеваний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Комарова А.И., Саидова З.А. Онкологические заболевания в России и мире // Человек и общество, М., 2022. Т. 846 (888), вып. 55. Режим доступа: <https://clck.ru/379RTE> (дата обращения: 16.12.2023).
2. Motohiro A., Ueda H., Komatsu H., Yanai N., Mori T. National Chest Hospital Study Group for Lung Cancer. Prognosis of non-surgically treated, clinical stage I lung cancer patients in Japan // Lung Cancer, 2002. V. 36. Iss. 1. P. 65–69. DOI: 10.1016/S0169-5002(01)004597.
3. Bushara A.R. Deep Learning-based Lung Cancer Classification of CT Images using Augmented Convolutional Neural Networks // Electronic Letters on Computer Vision and Image Analysis, 2022. V. 21(1). P. 130–142. DOI: 10.5565/rev/elcvia.1490.
4. Venkatesh C., Ramana K., Lakkisetty S. Y., Band S.S., Agarwal S., Mosavi A. A Neural Network and Optimization Based Lung Cancer Detection System in CT Images // Front. Public Health, 2022. V. 10. DOI: 10.3389/fpubh.2022.769692.
5. Kuruvilla J., Gunavathi K. Lung cancer classification using neural networks for CT images // Comput Methods Programs Biomed, 2014. V. 113(1). P. 202–209. DOI: 10.1016/j.cmpb.2013.10.011.
6. Mohamed T.I.A., Oyelade O.N., Ezugwu A.E. Automatic detection and classification of lung cancer CT scans based on deep learning and ebola optimization search algorithm // PLoS One, 2023. V. 18(8). e0285796. DOI: 10.1371/journal.pone.0285796.
7. Андриянов Н.А., Андриянов Д.А. О важности аугментации данных при машинном обучении в задачах обработки изображений в условиях дефицита данных // Сб. трудов по материалам VI Международной конференции и молодежной школы, 2020. Режим доступа: <https://clck.ru/36TBwi> (дата обращения: 07.11.2023).
8. Khan S., Rahmani H., Shah S.A.A., Bennamoun M. A Guide to Convolutional Neural Networks for Computer Vision // Synthesis Lectures on Computer Vision, 2018. Режим доступа: https://www.researchgate.net/publication/323174279_A_Guide_to_Convolutional_Neural_Networks_for_Computer_Vision (дата обращения: 06.06.2024).

DIAGNOSIS OF MALIGNANT NEIPLASMS OF THE CHEST USING NEURAL NETWORK

A.G. Zimina^{1,*}

¹National Research Nuclear University «Mephi», Moscow, 115409, Russia

*e-mail: blasunnybla@mail.ru

Received June 22, 2024; revised November 6, 2024; accepted November 12, 2024

The negative dynamics of the incidence of cancer gives high importance and relevance to the task of improving the effectiveness of diagnostic methods. Worldwide, more than 10 million cases of pathology are detected annually including 2.2 million cases of lung cancer of which 1.8 million cases are fatally. Early differential and accurate diagnosis of the disease is traditionally considered an important task of medicine. The aim of the work is to create an automated system for processing the results of objective control for the differential diagnosis of malignant neoplasms in the chests and to increase the accuracy and speed of diagnosis with its help. The resulting product is an artificial intelligence system based on a neural network that analyzes images and their multiple classification. Image analysis allows not only record the absence of presence of malignant neoplasms but also in the latter case to make a differential diagnosis of adenocarcinoma, large cell carcinoma and squamous cell lung cancer. The results of this product significantly exceed the achievements of other systems described and currently available the resulting product has an error of 3.5 % while the error of existing analogues is at least 7.1 % which is twice the error of the resulting system. The proposed product makes it possible to reduce the number of incorrectly diagnosed diagnoses by 2 times compared to currently existing analogues which is a significant achievement.

Keywords: artificial intelligence, neural network, differential diagnosis, oncology, augmentation.

REFERENCES

1. Komarova A.I., Saidova Z.A. *Oncologicheskiye zabollevaniya v Rossii i mire*. [Oncological diseases in Russia and the world]. Nauchnoye, Enciclopedicheskoye mnogotomnoye izdaniye «Chelovek i obchestvo», 2022. Moscow, 2022. Vol. 846 (888). Iss. 55 (in Russian). URL: <https://elck.ru/379RTE> (date of application: 16.12.2023).
2. Motohiro A., Ueda H., Komatsu H., Yanai N., Mori T. National Chest Hospital Study Group for Lung Cancer. Prognosis of non-surgically treated, clinical stage I lung cancer patients in Japan. *Lung Cancer*, 2002. Vol. 36. Iss. 1. Pp. 65–69. DOI: 10.1016/S0169-5002(01)004597.
3. Bushara A.R. Deep Learning-based Lung Cancer Classification of CT Images using Augmented Convolutional Neural Networks. *Electronic Letters on Computer Vision and Image Analysis*, 2022. Vol. 21(1). Pp. 130–142. DOI: 10.5565/rev/elcvia.1490.
4. Venkatesh C., Ramana K., Lakkisetty S. Y., Band S.S., Agarwal S., Mosavi A. A Neural Network and Optimization Based Lung Cancer Detection System in CT Images. *Front. Public Health*, 2022. Vol. 10. DOI: 10.3389/fpubh.2022.769692.
5. Kuruvilla J., Gunavathi K. Lung cancer classification using neural networks for CT images. *Comput Methods Programs Biomed*, 2014. Vol. 113(1). Pp. 202–209. DOI: 10.1016/j.cmpb.2013.10.011.
6. Mohamed T.I.A., Oyelade O.N., Ezugwu A.E. Automatic detection and classification of lung cancer CT scans based on deep learning and ebola optimization search algorithm. *PLoS One*, 2023. Vol. 18(8). e0285796. DOI: 10.1371/journal.pone.0285796.
7. Andriyanov N.A., Andriyanov D.A. O vazhnosti augmentacii danih pri machinnom obuchenii v zadachah obrabotki izobrazheniy v usloviyah deficita danih [On the importance of data augmentation in machine learning in image processing tasks in conditions of data scarcity]. *Sbornik trudov po materialam VI Mezhdunarodnoi konferencii I molodezhnoy shkoli* [collection of works based on materials from the VI International Conference and Youth School], 2020. URL: <https://elck.ru/36TBwi> (date of application: 07.11.2023) (in Russian).
8. Khan S., Rahmani H., Shah S.A.A., Bennamoun M. A Guide to Convolutional Neural Networks for Computer Vision. *Synthesis Lectures on Computer Vision*, 2018. URL: https://www.researchgate.net/publication/323174279_A_Guide_to_Convolutional_Neural_Networks_for_Computer_Vision (date of application: 06.06.2024).

УДК 658.511.3

АНАЛИЗ БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ КОНТРОЛЬНЫХ ПРОЦЕДУР ПРИЕМКИ ОБЪЕКТОВ КАПИТАЛЬНОГО СТРОИТЕЛЬСТВА ДЛЯ ЦИФРОВИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА

А. С. Серова^{1,*}, А. А. Трибелев²

¹Факультет бизнес-информатики и управления комплексными системами, НИЯУ МИФИ,
Москва, 115409, Россия

²Институт Интеллектуальных Кибернетических Систем, НИЯУ МИФИ,
Москва, 115409 Россия

*e-mail: as.serova@mail.ru

Поступила в редакцию: 09.07.2024

После доработки: 04.12.2024

Принята к публикации: 10.12.2024

В настоящее время в строительной отрасли активно внедряются цифровые решения, обеспечивающие поддержку технологических процессов строительно-монтажных работ (СМР). Особенно актуальным решением является цифровизация производства исполнительной документацией. Современные стандарты и нормативные акты уже описывают рекомендации к информационным системам электронного документооборота на строительных объектах, а также характеристики, которыми должна обладать документация в цифровом виде. Однако описание этапов инспекций строительного контроля при формировании комплектов исполнительной документации они не регламентируют. В связи с технической потребностью информационная система исполнительной документации должна быть гибкой и универсальной для применения к любому типу объекта строительства. Разработка цифрового инструмента требует комплексной аналитики по унификации бизнес-процессов строительного контроля, что является целью данной работы. В исследовании авторами были рассмотрены нормативные источники, описывающие требования к ведению на проектах капитального строительства ключевых приемочных работ, а именно, инспекций входного, геодезического, операционного и приемочного контролей. Составлена таксономия видов СМР, для которых применимы унифицированные группы контрольных процедур. С помощью метода графического моделирования разработан набор унифицированных бизнес-процессов. Средствами системного анализа определены ответственные исполнители и сроки проведения инспекционных мероприятий. В завершение работы представлено описание текущих ограничений для цифровизации разработки и ведения исполнительной документации.

Ключевые слова: исполнительная документация, строительный контроль, бизнес-процесс, цифровизация.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.6.8

EDN TOWCSM

ВВЕДЕНИЕ

В современных условиях строительства ключевыми аспектами являются качество и безопасность выполняемых работ. Однако процессы контроля и приемки объектов капитального строительства остаются сложными и трудоемкими. Традиционные методы ведения исполнительной документации, основанные на бумажных носителях и ручных проверках, часто приводят к задержкам, ошибкам и неполадкам в цепочке строительных процессов. Существует необходимость

в модернизации этих процессов для повышения их эффективности, надежности и прозрачности.

Исполнительная документация в строительстве – это набор документов, отражающих фактическое выполнение строительных, монтажных и других работ на объекте. Ведение исполнительной документации является важным процессом, обеспечивающим контроль качества, безопасность и юридическую защищенность строительного процесса. Правильное и своевременное оформление этих документов способствует успешному завершению строительства и вводу

АНАЛИЗ БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ КОНТРОЛЬНЫХ ПРОЦЕДУР ПРИЕМКИ ОБЪЕКТОВ КАПИТАЛЬНОГО СТРОИТЕЛЬСТВА ДЛЯ ЦИФРОВИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА

объекта в эксплуатацию. Полный перечень мероприятий в рамках данной деятельности утвержден Градостроительным кодексом РФ¹. Каждое производство объекта капитального строительства обладает специфическими требованиями к проведению контрольных процедур для приемки строительно-монтажных работ, унификация которых необходима на уровне стандартизации.

Актуальность темы исследования определяется тенденцией к цифровизации всех аспектов производственной деятельности, включая строительство. Внедрение цифровых решений в строительную отрасль позволяет автоматизировать многие процессы, снизить вероятность ошибок, улучшить управление данными и обеспечить доступность и прозрачность информации для всех участников проекта. Современные стандарты и нормативные акты уже включают рекомендации по использованию информационных систем электронного документооборота на строительных объектах, однако конкретные аспекты и этапы строительного контроля при формировании исполнительной документации остаются недостаточно регламентированными. Процесс цифровизации стимулируется нормативно-правовой базой в сфере ведения исполнительной документации. Новый приказ Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации² установил ведение в цифровом виде комплектов исполнительной документации для дальнейшей подготовки к передаче ее в надзорные органы. В 2022 г. был разработан и введен в действие ГОСТ Р 70108-2022³, определяющий общие положения по формированию и ведению исполнительной документации.

Остаются неохваченными вопросы унификации и стандартизации процессов строительного контроля, а также конкретные методики их цифровизации. Малоизученными являются аспекты интеграции различных информационных систем, уже используемых предприятиями на строительных площадках. Отсутствуют актуальные данные о результатах цифровизации инспекционной де-

ятельности, большинство проектов по переходу к формированию и ведению исполнительной документации в электронном виде все еще в стадии внедрения и опытной эксплуатации.

Целью данного исследования является разработка комплекта моделей бизнес-процессов строительного контроля при приемке объектов капитального строительства для цифровизации процесса оформления исполнительной документации. В рамках исследования будут рассмотрены нормативные источники, описывающие требования к строительному контролю, разработаны модели контрольных процедур и определены ключевые участники инспекционных мероприятий. Ожидается, что результаты исследования позволят создать гибкую и универсальную информационную систему исполнительной документации, применимую к любому типу объекта строительства.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕГЛАМЕНТОВ КОНТРОЛЬНЫХ ПРОЦЕДУР И ИНСПЕКЦИОННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

В рамках выполнения исследования были изучены нормативно-правовые акты Российской Федерации, в которых зафиксировано описание порядка проведения строительного контроля для проектов строительства. На основании изученной информации были определены основные шаги контрольных процедур, элементы строительной документации, подтверждающей качество принимаемых строительно-монтажных работ, а также основные участники процесса инспекционной деятельности.

Приказ Минстроя РФ от 16.05.2023 № 344, действие которого вступило в силу с 1 сентября 2023 г., определяет требования к составу и порядку ведения документации, необходимой при строительстве, реконструкции и капитальном ремонте для проектов строительства с целью обеспечения качества и безопасности строительных работ. В данном нормативном акте перечислен набор документов, входящих в состав комплектов исполнительной документации, направляемой в государственные надзорные органы на проверку. Среди них можно выделить следующие типы документации, которая используется и формируется в процессах контроля качества:

- разрешительно-аттестационная документация;
- общий и специальные журналы учета выполненных работ;
- акты освидетельствования;
- комплект рабочих чертежей;
- исполнительные схемы;

¹ Градостроительный кодекс Российской Федерации «Статья 54. Государственный строительный надзор» от 29.12.2004 № 190-ФЗ // Российская газета, 2005.

² Приказ Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации «Об утверждении состава и порядка ведения исполнительной документации при строительстве, реконструкции, капитальном ремонте объектов капитального строительства» от 16.05.2023 № 344/пр // Собрание законодательства Российской Федерации, 2023.

³ ГОСТ Р 70108-2022 Документация исполнительная. Формирование и ведение в электронном виде: национальный стандарт Российской Федерации (дата введения: 2023-01-01) / Федеральное агентство по техническому регулированию. Изд. официальное. М.: Стандартинформ, 2022.

- акты испытания технических устройств и систем;
- документы контроля качества строительных материалов и оборудования;
- протоколы испытаний и проверки качества;
- замечания по недостаткам выполнения работ;
- предписания для устранения выявленных недостатков⁴.

При подробном ознакомлении с перечисленной выше документацией каждый пример был изучен подробнее. Определено, что исполнительные схемы используются для отображения расположения конструкций, инженерных сетей, монтируемого оборудования. Они содержат отметки и дополнительные параметры, которые могут отличаться от проектной документации, так как отражают фактические показатели строительного объекта. Утверждение исполнительных чертежей осуществляется уполномоченными лицами при проведении инспекций строительного и геодезического контроля⁵.

Протоколы испытаний и проверки качества содержат результаты контрольных испытаний материалов, конструкций, элементов и оборудования. Их целью является подтверждение соответствия фактических характеристик материально-товарных ресурсов (МТР) требованиям проектной документации и нормативов. Проверка объектов МТР при входном контроле завершается оформлением актов с указанием результатов инспекции.

Общий журнал работ, а также специальные журналы работ, оформляемые на разные виды СМР, ведутся ежедневно и отражают ход выполнения строительных работ. Они включают в себя записи о проведенных контрольных мероприятиях, условиях выполнения СМР и использованных материалах. Для специальных журналов работ заполняются дополнительные тематические характеристики, необходимые для подтверждения соблюдения стандартов качества разных типов строительной деятельности.

Акты в строительстве представляют собой официальные документы, подтверждающие выполнение определенных этапов или видов работ, соответствие СМР проектной документации, техническим регламентам и нормативам. Среди основных видов актов можно выделить следующие:

акты освидетельствования скрытых работ, акты входного контроля, акты промежуточной приемки, акты испытаний и проверки качества, акты приемки выполненных работ, акты приемки объекта в эксплуатацию. Акты оформляются по завершении инспекций контрольных процедур⁶.

Ведение и оформление актов является ключевым результатом процесса строительного контроля, обеспечивающим документальное подтверждение качества и безопасности выполнения строительных работ. Перечисленные выше документы служат юридическим основанием для приемки объекта в эксплуатацию и являются основой для разрешения возможных споров между участниками строительства. Акты освидетельствования скрытых работ подтверждают выполнение СМР, которые будут скрыты последующими этапами строительства. Они составляются до начала проведения последующих этапов строительства и подписываются представителями подрядчика и заказчика. Акты входного контроля отражают результаты проверки качества строительных материалов, изделий, конструкций и оборудования, поступивших на строительную площадку. Для документирования результатов испытаний и проверок качества строительных материалов, конструкций и оборудования могут быть также оформлены акты испытаний и проверок качества. В свою очередь, акты промежуточной приемки являются подтверждением завершения отдельных этапов строительных работ, которые влияют на безопасность объекта. В конце каждого этапа строительства формируется акт приемки выполненных работ. В соответствии с данным документом проводится подтверждение выполнения всего комплекса СМР лицом, осуществляющим строительство. На основании акта заказчик передает в работу следующую очередь строительства организации-застройщику. При завершении всех строительного-монтажных работ представители подрядчика, заказчика и надзорных органов подписывают акты приемки объекта в эксплуатацию.

Основные положения о порядке проведения и требования к процедуре строительного контроля указаны в ст. 53 Градостроительного кодекса Российской Федерации. В соответствии с законодательным актом целью проведения контрольных процедур является проверка соответствия выполняемых работ проектной документации, требованиям технических регламентов, инженерных изысканий и другим установленным нормам в сфере

⁴ Приказ Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации «Об утверждении состава и порядка ведения исполнительной документации при строительстве, реконструкции, капитальном ремонте объектов капитального строительства» от 16.05.2023 № 344/пр // Собрание законодательства Российской Федерации, 2023.

⁵ ГОСТ Р 51872-2019 Документация исполнительная геодезическая. Правила выполнения (дата введения: 2019-09-01). М.: Стандартинформ, 2019. 32 с.

⁶ Постановление Правительства РФ «О порядке проведения строительного контроля при осуществлении строительства, реконструкции и капитального ремонта объектов капитального строительства» от 21.06.2010 № 468 // Российская газета, 2010; с изм. и допол. в ред. от 06.05.2024

АНАЛИЗ БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ КОНТРОЛЬНЫХ ПРОЦЕДУР ПРИЕМКИ ОБЪЕКТОВ КАПИТАЛЬНОГО СТРОИТЕЛЬСТВА ДЛЯ ЦИФРОВИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА

градостроительства. Строительный контроль проводится лицом, осуществляющим строительство, застройщиком, техническим заказчиком. Итоговое подтверждение удовлетворения требованиям качества осуществляется региональным представительством Ростехнадзора. При этом к проведению инспекций могут привлекаться не только юридические лица, но и физические, которыми являются наемные специалисты с экспертизой в определенной области строительства. Для объектов федерального значения и объектов, финансируемых из федерального бюджета, строительный контроль может проводиться федеральными органами исполнительной власти или подведомственными учреждениями.

Объектом контрольных процедур являются все строительно-монтажные работы, влияющие на безопасность объекта строительства или капитального ремонта. Результаты инспекций должны быть задокументированы в соответствии с представленными Минстроем РФ формами актов освидетельствования. При выявлении отклонений от плановых характеристик объекта строительства и производства работ ответственные лица формируют набор замечаний и предписаний. В случае наличия критических отклонений, требуется их устранить и провести повторную инспекцию. По итогам проверочных процедур выпускается юридически значимый документ. Его необходимо подписать с двух сторон: со стороны организации, осуществляющей работы на объекте, а также со стороны технического заказчика, проводящего приемку⁷.

Положения о проведении строительного контроля при осуществлении строительства, реконструкции и капитального ремонта объектов капитального строительства также утверждены Постановлением Правительства РФ от 21 июня 2010 г. № 468. Документ определяет целью и предметом контроля проверку соответствия выполняемых работ проектной документации, инженерным изысканиям, градостроительному плану, техническим регламентам и стандартам для обеспечения безопасности зданий и сооружений. Строительный контроль осуществляют подрядные организации, выполняющие строительно-монтажные работы, заказчики и организации, занимающиеся подготовкой проектной документации по договору с заказчиком или застройщиком. Работники подрядчика и заказчика, ответственные за контроль, проводят различные мероприятия, включая проверку качества материалов и оборудования, соблюдение норм

складирования и хранения, последовательности технологических операций, приемку скрытых работ и готовых конструкций, а также совместную проверку с заказчиком соответствия объекта проектной документации и регламентам⁸.

Законодательные акты, регулирующие ведение исполнительной документации в строительстве, тесно связаны с законом о строительном контроле, поскольку они обеспечивают документальное подтверждение соответствия выполняемых строительных работ установленным требованиям и стандартам.

Документирование проверок всех этапов строительных работ позволяет управлять качеством и безопасностью строительства, реконструкции и капитального ремонта объектов. Таким образом, ведение исполнительной документации является неотъемлемым элементом системы строительного контроля, обеспечивая прозрачность и подотчетность процессов реализации СМР.

2. МЕТОДЫ АНАЛИЗА БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ

Положения законов и нормативных актов необходимо использовать для создания подробного и унифицированного описания инспекционной деятельности. Проведение проверок строительного контроля представляет собой набор бизнес-процессов.

Бизнес-процесс – это система последовательных, регламентированных действий, преобразующих входные ресурсы в результаты, ценные для потребителей. Предприятия выбирают методы анализа бизнес-процессов в зависимости от целей и задач, ориентируясь на повышение общей эффективности деятельности. Это позволяет выявлять внутренние резервы развития и принимать эффективные управленческие решения. Игнорирование анализа приводит к ошибкам и экономическим потерям, тогда как его эффективное использование повышает результаты деятельности организации. Каждый вариант анализа бизнес-процессов представляет собой инструмент управления.

Методы исследования бизнес-процессов можно разделить на несколько типов. Первым является корректирующий анализ. Он рассматривает уже существующие бизнес-процессы с целью выявления текущих проблем и неэффективных операций. Тем самым предприятие способно исправить ошибки в своей операционной деятельности. Другим подтипом анализа бизнес-процес-

⁷ Градостроительный кодекс Российской Федерации «Статья 53. Строительный контроль» от 29.12.2004 № 190-ФЗ // Российская газета, 2005; вступ. в силу с 01.05.2024.

⁸ Градостроительный кодекс Российской Федерации «Статья 54. Государственный строительный надзор» от 29.12.2004 № 190-ФЗ // Российская газета, 2005.

сов является проектирующий. В данном подходе осуществляется разработка новых бизнес-шагов основной деятельности или оптимизация уже существующей. В адаптивном варианте анализа уделяется внимание способности процессов быстро приспосабливаться к новым условиям. Это особенно важно в современной динамичной бизнес-среде, где изменения и новые требования могут возникать быстро и неожиданно [1].

В рамках аналитической подготовки необходимо провести исследование организационно-производственной структуры, получить понимание условий проведения этапов работ, управления и функциональных обязанностей сотрудников. Эффективным будет моделирование изучаемого объекта по средствам графических схем и изображений для иллюстрации логической последовательности шагов и цепочек бизнес-процессов. Это позволит наглядно продемонстрировать наличие лишних или дублирующих друг друга подпроцессов, которые необходимо устранить. Также на основании графических схем можно идентифицировать каждый шаг процесса для его более глубокого изучения [2].

При построении бизнес-процессов процедур в строительстве важен системный подход к управлению ими, а также необходимо предусмотреть унифицированную структуру для возможности поддерживать разрозненные сущности в процессах при их цифровизации. Правильное построение и моделирование инспекционной деятельности, включая межфункциональные процессы, является ключевым аспектом для обеспечения взаимодействия между различными функциональными подразделениями и организациями. После определения приоритетных бизнес-процессов необходимо их детальное описание. При его формировании важно учитывать цепочки создания ценностей для потребителя. В этом помогает структурный анализ как метод исследования системы, начиная с ее общего обзора и постепенно детализируясь, что способствует лучшему пониманию сложных связей компонентов. Важность структурного подхода подчеркивается в контексте инженерии программного обеспечения, где такие методы, как структурный анализ и структурное проектирование играют важную роль в преобразовании бизнес-требований в программные спецификации и конфигурации аппаратного обеспечения [3].

В части методов для моделирования бизнес-процессов можно выделить имитационное моделирование. С его помощью можно выявить проблемные точки и затраты в существующих процессах организации, а также описать пути оптимизации через автоматизацию и перераспре-

деление функций между исполнителями. В процессе построения модели важно учитывать и те моменты, которые невозможно оценить количественно, например, использование высокооплачиваемого персонала для выполнения ручного труда или избыточные этапы согласования. Также стоит отметить, что при построении модели должны быть определены границы начала и завершения процесса. Они могут представлять собой событие, возникновение бизнес-потребности или результат выполнения предыдущего бизнес-процесса. Анализ проводится с использованием нотаций описания, например ARIS, EPC, BPMN, IDEF0. Средствами программного моделирования выполняется валидация построенных процессов бизнес-операций [4].

Для проведения исследования процессов контрольных процедур приемки строительно-монтажных работ требуется не только построить модель самих процессов строительного контроля, но также определить их участников. На основании проведенного анализа нормативных актов отразить артефакты, которые поступают на вход каждого шага и производятся в результате отдельных действий. В свою очередь, для элементов строительной документации определен источник данных, чтобы продемонстрировать взаимосвязь между системами в структуре строительной организации, которая обеспечивает процесс проведения контрольных процедур и формирования исполнительной документации.

3. ОПИСАНИЕ СТРОИТЕЛЬНО-МОНТАЖНЫХ РАБОТ

В целях описания объекта исследования была представлена классификация строительно-монтажных работ. СМР включают в себя все этапы возведения и монтажа конструкций, начиная с подготовительных работ и заканчивая финальной отделкой. Перед началом любого строительства разрабатывается проект, в котором на чертежах проектной и рабочей документации объекта строительства точно определяется объем СМР, а также их сметная стоимость. В структуре СМР можно выделить два основных блока: общестроительные и специальные работы. Общестроительные работы представляют собой комплекс массовых строительных задач, которые выполняются специалистами широкого профиля. Они охватывают все основные этапы возведения и обеспечения строительных объектов.

Специальные строительно-монтажные работы – это высокоспециализированные задачи, требующие особых навыков, профессиональной подготовки и использования специализирован-

АНАЛИЗ БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ КОНТРОЛЬНЫХ ПРОЦЕДУР ПРИЕМКИ ОБЪЕКТОВ КАПИТАЛЬНОГО СТРОИТЕЛЬСТВА ДЛЯ ЦИФРОВИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА

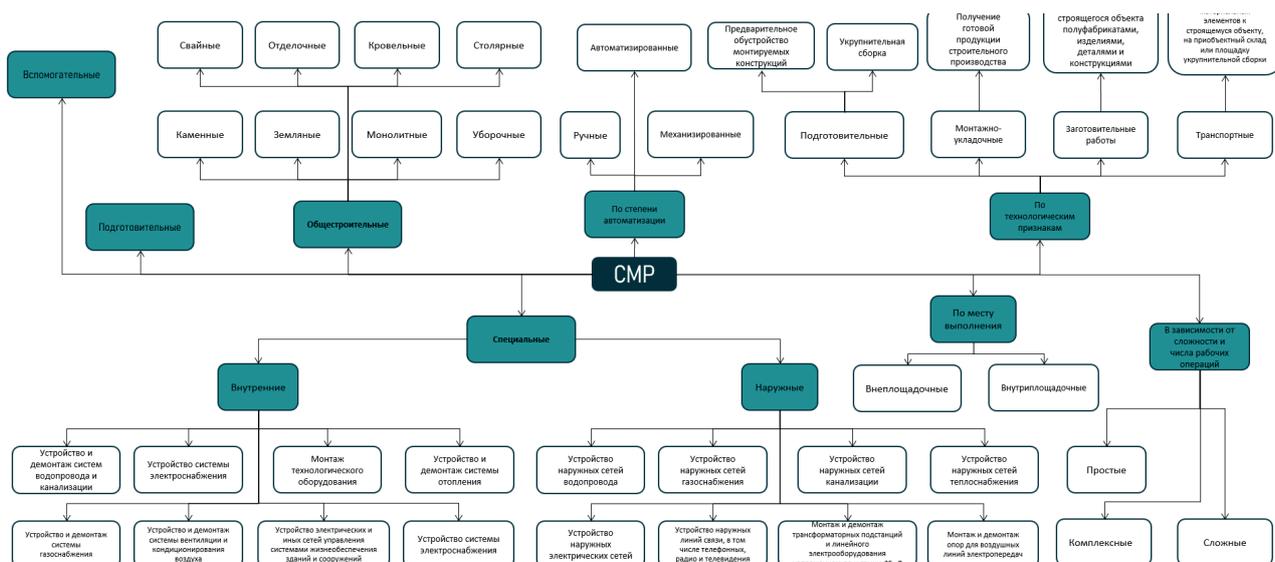


Рис. 1. Таксономическая карта для описания типов СМР

ного оборудования и материалов. Такие работы включают установку инженерных систем, монтаж сложного оборудования и выполнения специфических строительных задач, обеспечивающих функционирование и долговечность объектов. Более подробная классификация СМР представлена на таксономической карте ниже. Данный вид представления был выбран для удобной демонстрации результатов анализа. Общестроительные и специальные работы были детализированы до конкретных подтипов строительной деятельности. Также была рассмотрена классификация СМР по следующим признакам: сложность выполнения работ, место выполнения работ на объекте строительства, технология производства СМР, применение автоматизированных средств и инструментов в работах.

На основании разработанного таксономического описания работ было определено, что, несмотря на обилие подтипов СМР, для всех них необходим унифицированный состав контролей. Производство большей части работ требует вовлечения материалов и оборудования, в связи с этим для их начала необходимо прохождение входного контроля используемых МТР. Также каждый подтип работ проходит процедуры оценки качества как в процессе производства, так и по завершении, требуя привлечения специалистов строительного контроля для проведения операционных и приемочных инспекций. Так как основой сооружения является подготовка площадки строительства и проведения замеров для разметки строительных конструкций на объекте, важным этапом является проведение геодезического контроля. Оценка качества экспертами по геодезии влияет на приня-

тие решений о продолжении специальных работ по монтажу элементов оборудования, проведению сварочных работ и началу отделки объектов сооружения.

4. ОПИСАНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ КОНТРОЛЬНЫХ ПРОЦЕДУР

На основании изученной нормативной документации, а также ранее составленной онтологической карты типов СМР было определено, что для унификации процессов контрольных процедур необходимо рассмотреть универсальные виды строительного контроля. Среди них были идентифицированы и выбраны для подробного описания следующие процессы: входной контроль, строительный контроль как операционный, так и приемочный, геодезический контроль. Подробнее их описание представлено в данном разделе.

4.1. Входной контроль

Это ключевой этап строительного контроля, направленный на проверку качества строительных материалов, изделий, конструкций и оборудования, поступающих на строительную площадку. Проводится до момента применения продукции в строительных работах. Оценке подлежат документация, предоставленная к материально-техническим ресурсам. Она должна содержать сведения о качестве поставленной продукции, количестве материала, заложенного в проекте. В свою очередь, проверяется соответствие объектов МТР требованиям рабочей документации, технических регламентов, стандартов и сводов

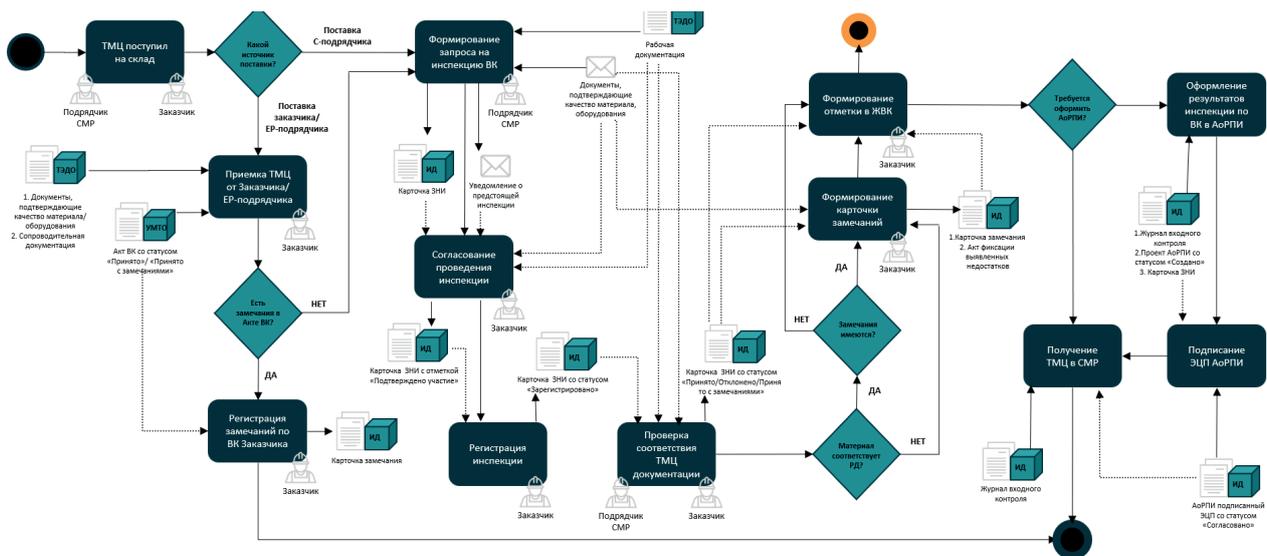


Рис. 2. Модель бизнес-процесса входного контроля

правил. Оцениваются такие параметры, как химический состав, физические свойства, геометрические размеры и другие технические характеристики⁹.

Входной контроль включает проверку соблюдения установленных норм и правил складирования и хранения продукции. При хранении должны быть обеспечены условия, предотвращающие ее повреждение и ухудшение качества. Если в ходе проверки обнаруживаются нарушения норм и правил хранения, применение продукции приостанавливается до подтверждения ее соответствия требованиям проектной документации и технических регламентов.

Подрядчик имеет право провести необходимые измерения и испытания продукции своими силами или поручить их проведение аккредитованной организации. Порядок и методики проведения лабораторных проверок устанавливаются в соответствии с требованиями стандартов, регламентирующих материально-технические ресурсы.

Результаты входного контроля фиксируются в соответствующих актах и журналах, которые затем используются в качестве приложения к комплектам исполнительной документации. Это обеспечивает подтверждение результатов проверки качества поступающей продукции и соблюдение всех нормативных требований. Продукция, не прошедшая входной контроль или выявленная как не соответствующая требованиям, не допускается к использованию в строительстве. Ее применение при осуществлении СМР может быть возобнов-

лено только после устранения недостатков и повторной проверки¹⁰.

Процесс входного контроля начинается с поступления материалов и оборудования на склад строительной площадки. В предложенной модели бизнес-процесса была рассмотрена стандартная ситуация, когда закупка материалов производится как техническим заказчиком, включая привлечение ЕР-подрядчиков, так и подрядными организациями самостоятельно. Сведения о материалах заказчик предварительно регистрирует в учетных системах склада (УМТО), входной контроль на материалы при этом может проводиться экспертами складской логистики. Это позволяет снизить издержки на персонал входного контроля, а также сократить время инспекций. При этом стоит отметить, что результаты процедур проверки качества, включая замечания и оценку их критичности, должны быть зарегистрированы в системе исполнительной документации (ИД).

При проверке материалов строительного подрядчика необходимо сформировать заявку на проведение инспекции (ЗНИ) и уведомить об этом строительный контроль технического заказчика. Эксперты заказчика, ознакомившись с составом материалов и оборудования, заявленных к инспекции, регистрируют карточку заявки и принимают решение о проведении инспекции входного контроля. Сама инспекция проводится в несколько этапов и включает в себя не только

⁹ Свод правил СП 48.13330.2019. Свод правил. Организация строительства. СНиП 12-01-2004 (дата введения: 2020-06-25). М.: Стандартинформ, 2019. 70 с.

¹⁰ Постановление Правительства РФ «О порядке проведения строительного контроля при осуществлении строительства, реконструкции и капитального ремонта объектов капитального строительства» от 21.06.2010 № 468 // Российская газета, 2010; с изм. и допол. в ред. от 06.05.2024.

АНАЛИЗ БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ КОНТРОЛЬНЫХ ПРОЦЕДУР ПРИЕМКИ ОБЪЕКТОВ КАПИТАЛЬНОГО СТРОИТЕЛЬСТВА ДЛЯ ЦИФРОВИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА

визуальный осмотр МТР, но и проверку его соответствия рабочей документации и сертификатов или паспортов качества на материалы. Такие документы регистрируются заранее в системе технического электронного документооборота (ТЭДО). В случае выявления критических замечаний материал не может быть использован при производстве строительно-монтажных работ. Он перемещается со склада в карантин. Эксперт, участвующий в инспекции, оформляет карточки замечаний, а также оповещает лицо, осуществляющее строительство, о выявленных недостатках в результате инспекции. Если в ходе инспекции не выявлены замечания, или они являются незначительными, отдельным шагом в процессе входного контроля является определение необходимости составления акта о результатах проверки изделий (АОРПИ). Оформление акта является опциональным и зависит от типов материалов и решения технического заказчика о включении такого документа в состав исполнительной документации. После составления необходимой документации, подтверждающей соответствие МТР нормативам строительства, она должна быть подписана с использованием электронной цифровой подписи в системе ИД. Завершением процесса входного контроля является выдача проверенных МТО в работу организации, осуществляющей строительство.

4.2. Операционный и приемочный контроль

Строительный контроль представляет собой систему мероприятий, направленных на обеспечение соответствия выполняемых строительно-монтажных работ проектной и рабочей документации, строительным нормам и стандартам, а также требованиям безопасности и качества. Этот контроль включает несколько видов инспекций и проверок на различных этапах строительства. Среди них можно выделить операционный

и приемочный контроль. Ключевым отличием является то, что операционный контроль направлен на текущий мониторинг и корректировку процесса строительства, тогда как приемочный фокусируется на окончательной оценке и подтверждении качества завершенных мероприятий. Ниже представлена таблица сравнения двух типов инспекций строительного контроля.

Операционный контроль осуществляется непосредственно в процессе выполнения СМР и направлен на проверку соответствия выполняемых работ технической документации и требованиям нормативов. В рамках инспекций проводится оценка технологий и методов, которые лицо, осуществляющее строительство, применяет. Особое внимание уделяется проверкам работ, которые будут скрыты последующими строительными операциями. Таким образом, промежуточные этапы строительства по средствам регулярных инспекций позволяют своевременно выявлять и устранять недостатки и ошибки.

В данной контрольной процедуре принимают участие представители организации-заказчика и подрядных организаций, которые подписывают исполнительную документацию с указанием объемов и видов работ, подлежащих проверке. Предварительное уведомление о готовности к проведению операционного контроля, а также извещение о завершении работ не требуются¹¹.

При проведении операционного контроля нет необходимости оформлять заявки на проведение инспекции (ЗНИ). При этом результаты контрольных процедур фиксируются в системе исполнительной документации (ИД) в специальной форме журнала. При наличии выявленных замечаний они должны быть зарегистрированы и оценены также в информационной системе. После регистрации предписаний организация, осуществляющая строительство, проводит работы по устра-

¹¹ Свод правил СП 48.13330.2019. Свод правил. Организация строительства. СНиП 12-01-2004 (дата введения: 2020-06-25). М.: Стандартинформ, 2019. 70 с.

Таблица 1. Сопоставление характеристик операционного и приемочного контроля

Характеристика	Операционный контроль	Приемочный контроль
Цель	Контроль за соблюдением технологий и норм	Подтверждение соответствия завершенных работ
Этап проведения	В процессе выполнения СМР	По завершении этапов СМР или сооружения всего объекта
Основные задачи	Проверка технологии строительства, инспекция скрытых работ	Финальные проверки выполненных СМР, составление актов для исполнительной документации
Документация	Записи в журналах операционного контроля	Акты освидетельствования и приемки, входящие в состав ИД
Ответственные лица	Специалисты подрядчика, инженеры технадзора заказчика, специализированные организации	Комиссия из представителей заказчика, подрядчика, эксперты строительного контроля

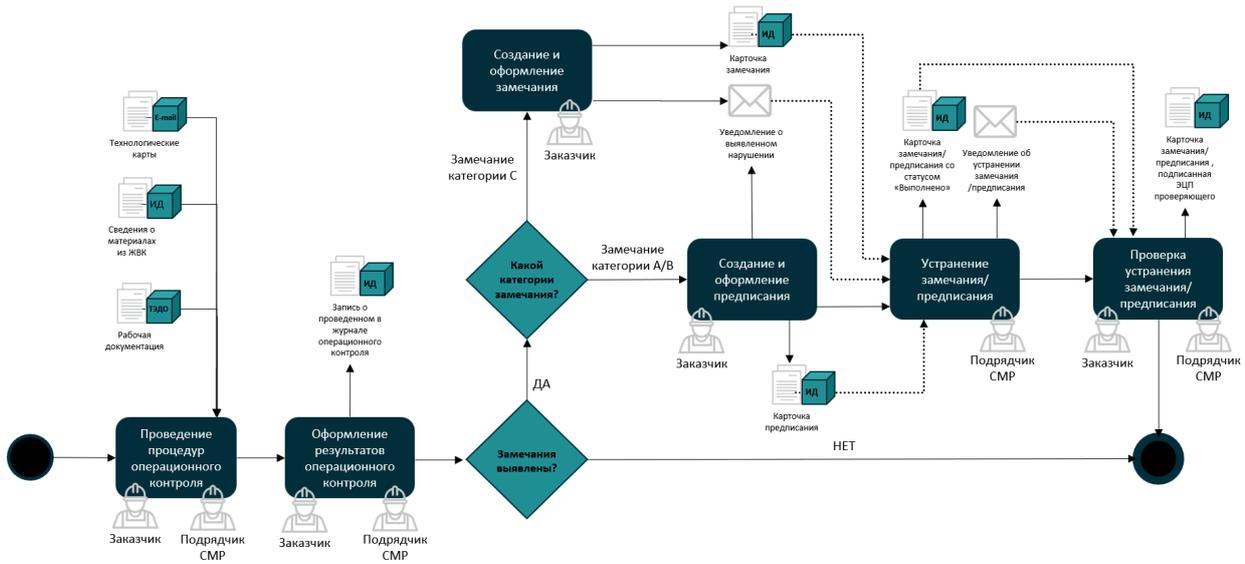


Рис. 3. Модель бизнес-процесса операционного контроля

нению несоответствий. Для проверки устранения замечаний необходимо оповестить экспертов технического заказчика, используя электронную почту или иные средства коммуникации.

Приемочный контроль проводится по завершении отдельных этапов СМР или всего проекта в целом. Его целью также является подтверждение экспертами заказчика соответствия выполненных работ положениям чертежей и нормативным требованиям по качеству. В свою очередь, при приемке результатов проведенных строительно-монтажных работ могут проводиться испытания, например, лабораторные, а также инженерных систем и конструкций для подтверждения их работоспособности и соответствия проектным требованиям.

Для проведения инспекции лицо, осуществляющее строительство, предварительно формирует заявку, которую рассматривают эксперты технического заказчика. По итогу принятого решения о проведении приемочного контроля группа экспертов проводит необходимые для выполненного вида работ мероприятия. В случае, когда были выявлены замечания к реализованным СМР, инспектор оформляет замечания и предписания для его устранения. Критические отклонения должны быть скорректированы строительными организациями, после чего проводится повторная проверка заявленного объема работ. Сформированные и подписанные электронной подписью с двух сторон акты освидетельствования являются основанием для фиксации подтверждения о закры-

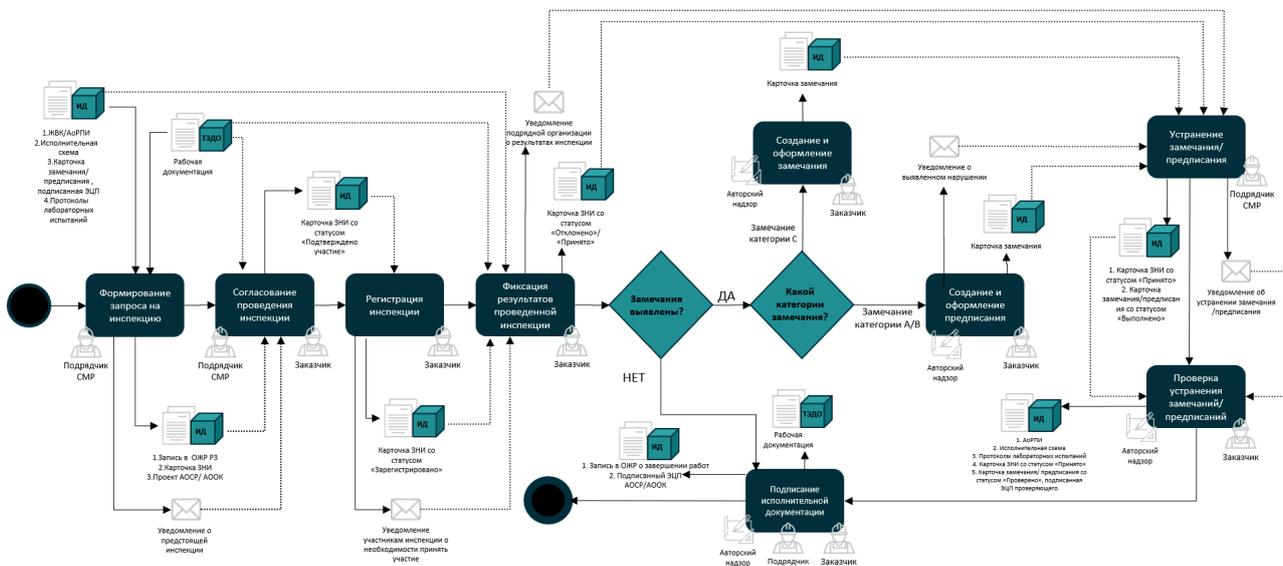


Рис. 4. Модель бизнес-процесса приемочного контроля

АНАЛИЗ БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ КОНТРОЛЬНЫХ ПРОЦЕДУР ПРИЕМКИ ОБЪЕКТОВ КАПИТАЛЬНОГО СТРОИТЕЛЬСТВА ДЛЯ ЦИФРОВИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА

тии определенного объема СМР и оформлении на него комплекта исполнительной документации¹².

Для начала процесса приемочного контроля организация, выполнившая СМР, регистрирует заявку на проведение инспекции (ЗНИ). Приложением к заявке будет набор документов с результатами проведенного входного контроля, а также лабораторных испытаний материалов и оборудования, с которыми проводилось производство работ. Согласование и регистрация инспекций производится силами экспертов технического заказчика в системе исполнительной документации (ИД). Уведомления о завершении каждого шага рассмотрения карточки инспекции отправляется участникам на электронную почту или на иное средство связи. При наличии замечаний, для каждого из них в системе ИД регистрируется карточка и производится оценка критичности. Возможно привлечение специалистов авторского надзора (АН) для оценки выявленных несоответствий. В случае если требуется исправить отмеченные в инспекции приемочного контроля нарушения, подрядчику необходимо устранить несоответствия и повторить процесс, подав заявку на проведение инспекции повторно. В отсутствие замечаний по результатам инспекции стороны заказчика и подрядной организации подписывают электронной подписью акты освидетельствования, которые являются частью комплектов исполнительной документации. Подписание производится с использованием электронной подписи в системе исполнительной документации.

4.3. Геодезический контроль

В данном исследовании мы также описываем геодезический контроль как одну из форм инспекций на объектах строительства. Геодезический контроль – это система мероприятий и процедур, направленных на обеспечение соответствия геометрических параметров и расположения строительных конструкций положениям проектной документации. В рамках данной инспекции проводится обследование участка строительства на предмет корректного размещения объектов на площадке. В качестве основного инструмента проверки используются специализированные приборы для проведения замеров фактического положения конструкций. Сопоставление проводится между документацией, полученной от проектировщика, и исполнительными схемами, на которые нанесены характеристики расположения объекта. При выявлении критических отклонений от данных проектной документации может быть принято решение о ликвидации уже сооруженных элементов либо о необходимости провести корректировки. Требуется повторная инспекция геодезического контроля для проверки выполненных работ по устранению замечаний¹³.

В описанной модели процесса геодезического контроля началом шагов является предоставление от лица, осуществляющего строительство, данных геодезических измерений. Сотрудники подрядных организаций ведут реестр сведений о геодезических показателях объектов на личных устройствах, в связи с этим данные поступают

¹² Свод правил СП 48.13330.2019. Свод правил. Организация строительства. СНиП 12-01-2004 (дата введения: 2020-06-25). М.: Стандартинформ, 2019. 70 с.

¹³ Свод правил СП 126.13330.2017. Геодезические работы в строительстве (дата введения 2018-04-25). М.: Стандартинформ, 2018. 72 с.

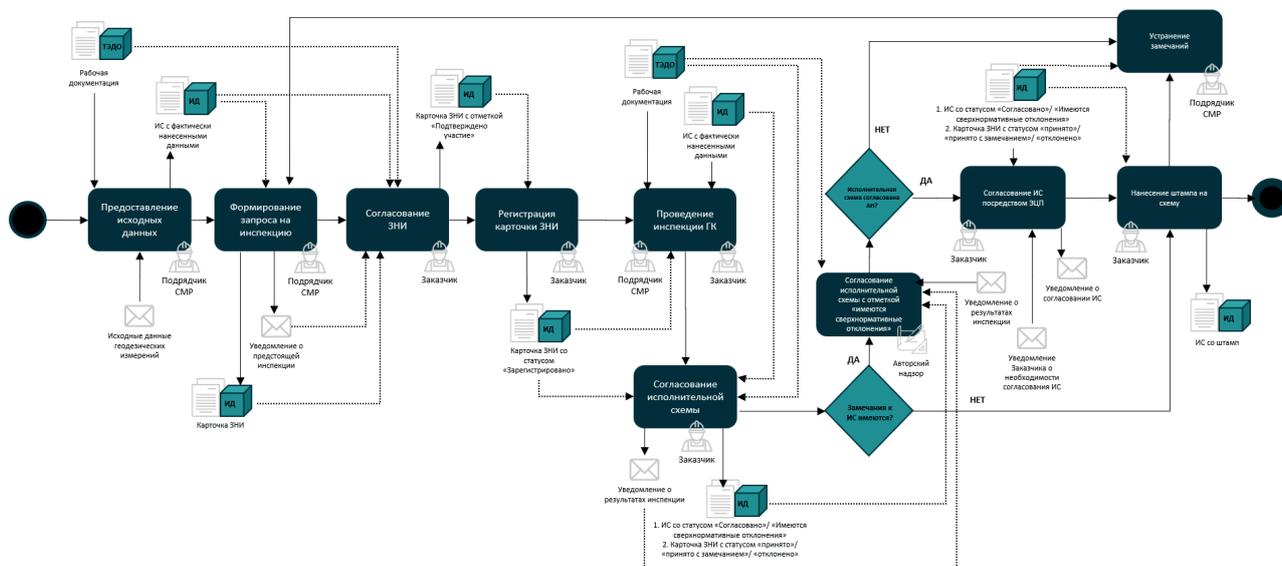


Рис. 5. Модель бизнес-процесса геодезического контроля

в систему ручной загрузки полученных по электронной почте документов. Отражение на исполнительных схемах (ИС) фактических размеров и расположения объектов сооружения уже производится в системе исполнительной документации (ИД). При оформлении заявки на проведение инспекции (ЗНИ) геодезического контроля также требуется рабочая документация, которая доступна в системе технического электронного документооборота (ТЭДО). Представитель технического заказчика знакомится с полученной заявкой и согласует заявленный к инспекции объем работ. Инспекция проводится на площадке строительства вне информационных систем. Однако результаты геодезического контроля, а также выявленные замечания оформляются в системе ИД. Оценка выявленных замечаний также производится инструментами системы исполнительной документации. В случае, если выявленные замечания требуют привлечения экспертов авторского надзора (АН), согласование исполнительных схем проводится только после отражения результатов экспертной оценки в системе ИД. Уведомление стороны строительного подрядчика о результатах инспекции и о решении АН производится на электронную почту или посредством контактного номера. При наличии выявленных критических отклонений застройщик приступает к устранению замечаний и повторяет процесс подготовки и подачи заявки на проведение инспекции геодезического контроля. Если замечаний выявлено не было, на исполнительную схему средствами системы исполнительной документации наносится штамп, а сам документ ИС прикрепляется к необходимому комплекту исполнительной документации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ позволил выявить ключевые аспекты и проблемы в текущих бизнес-процессах процедур строительного контроля для приемки объектов капитального строительства. Полученные данные могут быть использованы для разработки и внедрения новых, более эффективных инструментов для ведения технической строительной документации в цифровом виде. Описанные унифицированные шаги бизнес-процессов позволяют продемонстрировать, какие этапы контроля могут и должны быть зарегистрированы в информационных системах для сбора полного набора данных о результатах реализации общестроительных СМР. Это позволит сократить временные затраты, повысить точность и снизить риск человеческих ошибок.

Согласно обновленным положениям Приказа Министра РФ от 16.05.2023 № 344/ПР определе-

ны требования к формату ведения исполнительной документации, а именно, переход к ведению ее в полностью цифровом виде. В настоящее время допускается вести документы на бумаге или в электронном формате без дублирования на бумажном носителе. В связи с ранее описанной и подтвержденной возможностью перевода бизнес-процессов контрольных процедур и формирования артефактов инспекционной деятельности в цифровом варианте, большое количество организаций уже активно внедряют профильные информационные системы. Однако существует ряд ограничений для полного перехода к ведению исполнительной документации и фиксации инспекционной деятельности в электронном виде. Интересным направлением развития для работы является изучение как правовых, так и технических аспектов применения электронных подписей и настройки взаимодействия систем ИД с удостоверяющими их центрами.

Полный переход на ведение исполнительной документации и регистрации контрольных процедур в электронном виде предполагает проверку комплектов исполнительной документации также в цифровом формате. Для этого Ростехнадзор, Министерство строительства и жилищно-коммунального хозяйства, а также иные надзорные органы в плотной кооперации создают уникальную систему управления строительными проектами (ИСУП). Одной из задач данной системы является регистрация, передача и возможность проводить проверку подготовленной исполнительной документации, а также исследовать и проверять результаты инспекционной деятельности. В данный момент региональные отделения Ростехнадзора частично внедрились и используют пилотные проекты системы ГИС ТОР КНД. Однако она все еще не интегрирована в информационную систему управления, так как последняя только разрабатывается.

Необходимо провести последующее исследование, направленное на оценку эффективности внедренных цифровых решений в реальных условиях строительства. В данный момент сложно провести оценку затрат и потенциальной экономической выгоды от внедрения цифровых технологий для проведения контрольных процедур. Несмотря на значительную стимуляцию государственных органов в части перехода на ведение ИД в электронном виде, на российском рынке мало информационных решений, в полной мере удовлетворяющих требованиям законодательства. Они не могут своевременно и качественно адаптироваться к принятым в организациях процессам и специфическим требованиям, в том числе к проведению регистрации шагов инспекций.

АНАЛИЗ БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ КОНТРОЛЬНЫХ ПРОЦЕДУР ПРИЕМКИ ОБЪЕКТОВ КАПИТАЛЬНОГО СТРОИТЕЛЬСТВА ДЛЯ ЦИФРОВИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА

Необходимо больше времени для формирования статистики по внедрению и функционированию подобных информационных систем на существующих проектах строительства в Российской Федерации.

Другим направлением дальнейшего исследования может стать изучение процессов инспекционной деятельности на объектах инфраструктуры атомной энергетики (ОИАЭ). Несмотря на общие подходы в ряде строительно-монтажных работ, нормативные акты атомной отрасли описывают более строгие критерии приемки выполненных СМР, а также дополнительные шаги контролей качества.

Процесс входного контроля на проектах сооружения ОИАЭ включает в себя проверку классового оборудования, такого как сосуды под давлением, теплообменное оборудование, турбины и генераторы. Контроль качества должен соответствовать заранее разработанным планам, которые включают в себя контрольные точки проверки, начиная с выпуска заводом-изготовителем элементов оборудования, также в процессе их транспортировки до строительной площадки и при доставке и подготовке к монтажу конструкций. В набор шагов инспекции обязательно входит проверка доставленного на площадку сооружения продукции на соответствие рабочей и проектной документации. При проведении экспертизы необходимо провести проверку аутентичности и сертификации классового оборудования. Средства измерений и испытательное оборудование также должны быть выбраны в соответствии с требованиями нормативной документации на контролируемую продукцию и пройти поверку в установленном порядке¹⁴.

Строительный контроль при строительстве ОИАЭ организуется в соответствии с требованиями стандартов ГК «Росатом» и СРО НП «Союзатомстрой», которые определяют обязанности застройщика и генерального подрядчика. Особенно важными являются инспекции, связанные с проверкой работ по монтажу реакторной установки, первого контура, систем управления защитой. Для фиксации результатов проверок комплексных систем требуется оформление исполнительной документации на разные виды работ. Также они должны проходить обязательные испытания, среди которых: проверка герметичности, обследование качества сварных соединений, проверка правильности установки и подключения систем автоматики, испытания функционально-

сти и надежности систем. Сформированная ИД будет отличаться от типовой для общестроительных работ. В связи с этим необходимо скорректировать и дополнить шаги бизнес-процессов инспекций строительного и входного контроля для ОИАЭ.

Таким образом, полученные результаты являются основой для дальнейших разработок в сфере цифровых технологий в капитальном строительстве. Особенно важным является продолжение изучения возможности перехода к ведению исполнительной документации в полностью электронном виде. Исследование данного вопроса будет продолжено в части системного анализа компонентов информационных систем, взаимодействующих в процессе формирования и ведения ИД.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кабакова Ю.А. Методы анализа бизнес-процессов // Бизнес-образование в экономике знаний, 2016. № 2 (4). С. 38–40.
2. Устимова Д.В. Методы анализа бизнес-процессов в современных организациях // Результаты современных научных исследований и разработок, 2018. С. 211–213.
3. Попов В.О. Методы анализа бизнес-процессов предприятия и разработки структуры информационной системы // Актуальные научные исследования в современном мире, 2020. № 7–1. С. 94–97.
4. Курчева Е.М., Осенний В.В., Манютина С.Ю. Современные методы анализа бизнес-процессов с применением имитационного моделирования // Энигма, 2019. Т. 1. № 16–1. С. 109–122.
5. Серова А.С., Трибелев А.А. Анализ бизнес-процессов контрольных процедур приемки объектов капитального строительства для цифровизации производства // Сборник тезисов докладов XI Международной молодежной научной школы-конференции «Современные проблемы физики и технологий». М.: Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 2024. С. 356–358.

¹⁴ РД ЭО 1.1.2.01.0931-2021. Входной контроль продукции, поставляемой для филиалов АО «Концерн Росэнергоатом». Основные положения (дата введения: 2021-02-20). М.: АО «Концерн Росэнергоатом», 2021. 62 с.

BUSINESS PROCESS ANALYSIS OF CONTROL PROCEDURES FOR CAPITAL CONSTRUCTION PROJECTS ACCEPTANCE PROCEDURES TO DIGITALIZE PRODUCTION

A. S. Serova^{1,*}, A. A. Tribelev²

¹Faculty of Business Informatics and Complex Systems Management, National Research Nuclear University MEPhI,
Moscow, 115409 Russia

²Institute of Intelligent Cybernetic Systems, National Research Nuclear University MEPhI,
Moscow, 115409 Russia

e-mail: as.serova@mail.ru

Received July 09, 2024; revised December 4, 2024; accepted December 10, 2024

The construction industry is actively implementing digital solutions to support the technological processes of construction and assembly works (C&I). Especially relevant is the digitalization of executive documentation production. Modern standards and regulations already describe recommendations for information systems of electronic document management at construction sites, as well as the characteristics that the documentation should have in digital form. However, they do not regulate the stages of construction control inspections when forming sets of executive documentation. Due to the technical demand, the information system of executive documentation should be flexible and universal for application to any type of construction object. The development of a digital tool requires complex analytics on unification of construction control business processes, which represents the objective of this paper. In the study, the authors reviewed regulatory resources describing the requirements for conducting key acceptance activities on capital construction projects, namely incoming, surveying, operational and acceptance inspections. A taxonomy of construction and assembly activities has been compiled, for which unified groups of control procedures are applicable. A set of standardized business processes was developed using the method of graphical simulation. The means of system analysis were used to determine responsible executors and deadlines for inspection activities. The paper concludes with a description of current limitations for digitalization of development and maintenance of executive documentation.

Keywords: executive documentation, construction supervision, business process, digitalization.

REFERENCES

1. Kabakova Y.A. Metody analiza biznes-processov [Methods of analyzing business processes]. *Biznes-obrazovanie v ekonomike znaniy*, 2016. No. 2 (4). Pp. 38–40 (in Russian).
2. Ustimova D.V. Metody analiza biznes-processov v sovremennykh organizatsiyah [Methods of business process analysis in modern organizations]. *Rezul'taty sovremennykh nauchnykh issledovaniy i razrabotok*, 2018. Pp. 211–213 (in Russian).
3. Popov V.O. Metody analiza biznes-processov predpriyatiya i razrabotki struktury informacionnoy sistemy. [Methods of analyzing the business processes of the enterprise and developing the structure of the information system]. *Aktual'nye nauchnye issledovaniya v sovremennom mire*, 2020. No. 7–1. Pp. 94–97 (in Russian).
4. Kircheva E.M., Osenniy V.V., Manyutina S.Yu. Sovremennye metody analiza biznes-processov s primeneniem imitacionnogo modelirovaniya [Modern methods of business process analysis using simulation modeling]. *Enigma*, 2019. Vol. 1. No. 16–1. Pp. 109–122 (in Russian).
5. Serova A.S., Tribelev A.A. [Analysis of business processes of control procedures of acceptance of capital construction objects for digitalization of production]. *Sovremennye problemy fiziki i tekhnologii: Sbornik tezisev dokladov XI mezhdunarodnoy molodezhnoy nauchnoy shkoly-konferentsii*, Moskva, 23–25 aprelya 2024 goda [Proc. XI Int. Youth Scientific School-Conference «Modern Problems of Physics and Technology». Moscow, April 23–25, 2024]. M.: National Research Nuclear University «MEPhI», 2024. Pp. 356–358 (in Russian).

УДК 004.77, 621.039.6

**ПОРТАЛ АИП ИКП (FUSIONSPACE.RU)
ДЛЯ ИНФОРМАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
УЧАСТНИКОВ ИССЛЕДОВАНИЙ
В ОБЛАСТИ УПРАВЛЯЕМОГО ТЕРМОЯДЕРНОГО СИНТЕЗА**

Е. В. Семенов^{1,*}, А. С. Вишня², А. В. Лебедева², Д. М. Гусев², О. И. Семенов¹, Е. Ю. Миронова¹, С. С. Портоне¹

¹Частное учреждение госкорпорации Росатом «Проектный центр ИТЭР», Москва, 123060, Россия,

²ООО «АйТинерис», Калининград, 236022, Россия

*e-mail: E.Semenov@iterrf.ru

Поступила в редакцию: 25.10.2024

После доработки: 08.11.2024

Принята к публикации: 12.11.2024

В ходе научных исследований в области управляемого термоядерного синтеза сегодня в России используется ряд электрофизических установок и стендов. Данные научные исследования имеют большое значение для развития национальной программы по физике плазмы и в активных фазах их проведения требуют как современных средств их автоматизированной информационной поддержки (например, обеспечения своевременного регламентированного доступа к вычислительным средствам для проведения расчетов), так и наличия единой площадки для взаимодействия с коллегами в рамках общей новостной, нормативно-справочной, событийной и иных тематических повесток. Таким образом, крайне актуальной является задача создания единых, современных, унифицированных программных средств, которые обеспечили бы возможность оперативного обмена информацией по тематикам исследований через веб-интерфейс. В России разрабатывается уникальная отечественная аппаратно-инфраструктурная платформа информационно-коммуникационного пространства (АИП ИКП, включающая в себя ряд функциональных возможностей для получения данных из источников (установок и стендов), их отображения и анализа. В данной работе рассмотрена задача создания портала информационного обмена как единого интерфейса взаимодействия участников УТС-сообщества в рамках АИП ИКП (FusionSpace.RU). Были определены основные задачи, архитектура, а также выбраны и апробированы технологии их реализации. Рассмотренные решения обеспечивают возможность информационного взаимодействия участников УТС-сообщества России в рамках АИП ИКП. Сформированы выводы по результатам проведенной работы.

Ключевые слова: дистанционные эксперименты, информационный обмен, термоядерный синтез, порталное решение, интеграция систем, цифровизация.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.6.9

EDN ZSFZUE

ВВЕДЕНИЕ

Цифровизация научно-исследовательской деятельности является актуальной на сегодняшний день задачей. Помимо специализированного оборудования и программного обеспечения, способных поддерживать обработку научными установками и стендами в области УТС-данных, вопрос обеспечения коммуникации между исследователями может нести решающее значение в оперативности принятия решений, корректировках вектора исследований и т.д.

В России с целью обеспечения автоматизированной информационной поддержки исследований в области УТС осуществляется разработка и развитие платформы совместной работы с экспериментальными и проектными данными УТС-исследований с учетом лучших международных практик (аппаратно-инфраструктурная платформа информационно-коммуникационного пространства в области управляемого термоядерного синтеза в Российской Федерации, АИП ИКП или FusionSpace.RU [1]).

Однако до настоящего времени АИП ИКП, имея в рамках платформы ряд систем и сервисов, была лишена единой унифицированной точки авторизации и доступа ко всем сервисам системы: информационным и новостным сервисам, средствам пользовательской коммуникации, включая межпользовательские прямые взаимодействия (частные встречи в формате «точка-точка»), совещания, конференции и семинары, а также к средствам доступа к исследовательской информации установок, их данным и возможности работы с ними.

Единый подход к взаимодействию участников УТС-сообщества, обеспечивающий возможность оперативного обмена информацией по тематикам исследований в области УТС посредством пользовательского веб-интерфейса, реализуется в виде Портала информационного обмена АИП ИКП (FusionSpace.RU).

ТЕКУЩЕЕ СОСТОЯНИЕ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ И ГРАНИЦ АВТОМАТИЗАЦИИ В РАМКАХ АИП ИКП

Тематика УТС является весьма объемной с точки зрения формируемых, прежде всего, экспериментальных данных. Так, еще в 2020 г. в рамках международной организации (МО) ИТЭР отмечалось, что примерно к 2035 г. ИТЭР будет производить порядка 2 пб данных в день. При этом по состоянию на 2020 г. МО ИТЭР, включая данные различных национальных агентств, располагала порядка 2.2 ПБ проектных данных [2].

Существенные массивы данных в рамках проведения научных исследований формируются и на установках/стендах, распределенных по территории России научно-исследовательских центров [3]. Для обеспечения на уровне разрабатываемой отечественной АИП ИКП возможности совместной работы с экспериментальными данными ранее реализовано программное обеспечение информационного взаимодействия (ПО ИВ) и программное обеспечение анализа и отображения экспериментальных данных (ПО АОЭД) [4–5].

Помимо ПО ИВ и ПО АОЭД автоматизация тематики УТС в рамках АИП ИКП на этапе создания Портала характеризуется следующим набором существующих и являющихся смежными по отношению к Порталу решений:

- контроллером домена для обеспечения работы с учетными записями пользователей на базе общеупотребимого легковесного протокола Lightweight Directory Access Protocol (LDAP);
- системой видеоконференцсвязи (ВКС) на базе защищенной отечественной платформы для корпоративного общения TrueConf;

– почтовым сервером, выполняющий типовую функцию по отправке почтовых уведомлений посредством простого протокола передачи почты Simple Mail Transfer Protocol (SMTP).

Действующие программные средства, перечисленные выше, ориентированы преимущественно на решение прикладных и (или) базовых инфраструктурных задач. Анализируя опыт МО ИТЭР по обеспечению коллективной работы сотрудников в рамках порталного решения [6], российскую MEPHIST-0 [7] и международную практику H-1NF [8], W7-X [9-10], EAST [11] ELisA (LHC) [12], Alcator C-Mod [13], KSTAR [14] в части построения электронных журналов экспериментов, доклады и повестку в целом 14-й Международной технической конференции Международного агентства по атомной энергии (МАГАТЭ) 15–18 июля 2024 г.¹, а также учитывая необходимость расширения и сопряжения пользовательских средств работы с данными установок (например, посредством журналов экспериментов с функциональными возможностями коммуникации в ходе его проведения), построение собственного Портала для оперативного обмена информацией по тематике УТС-исследований через веб-интерфейс является необходимым.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В рамках проектных работ по созданию Портала определены его следующие основные задачи:

- предоставление пользователям сервисов информационного обмена, включая сквозной доступ к веб-интерфейсу работы с экспериментальными данными;
- обеспечение возможности управления научными мероприятиями, включая конференции и семинары, в связке с действующей ВКС;
- сквозной поиск, просмотр, сортировка и фильтрация порталной информации;
- запросы распределенных компьютерных ресурсов на моделирование и расчеты;
- пользовательский календарь событий, проводимых в рамках ВКС;
- средства описания установок и стендов УТС, включая ведение расписаний экспериментов;
- обеспечение работы с открытой нормативно-справочной документацией;
- предоставление пользователям личных кабинетов, синхронизированных с контроллером домена;

¹ 14th Technical Meeting on Control Systems, Data Acquisition, Data Management and Remote Participation in Fusion Research. [Электронный ресурс]. URL: <https://conferences.iaea.org/event/377/overview> (дата обращения: 25.07.2024).

ПОРТАЛ АИП ИКП (FUSIONSPACE.RU) ДЛЯ ИНФОРМАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УЧАСТНИКОВ ИССЛЕДОВАНИЙ В ОБЛАСТИ УПРАВЛЯЕМОГО ТЕРМОЯДЕРНОГО СИНТЕЗА

– автоматическое логирование системных событий и пользовательских действий.

Каждая из представленных выше задач была спроецирована на компонентно-модульную структуру будущего Портала по следующему принципу: задача эквивалентна функциональному блоку/модулю Портала, в дальнейшем, при необходимости, формируются интеграционные взаимосвязи модулей как между собой, так и с ранее разработанными программными средствами АИП ИКП.

Укрупненно всю совокупность компонентно-модульной структуры Портала можно объединить в следующие три группы:

– обеспечение сквозной авторизации, сервисного подхода и контролируемости – вход пользователя в режиме одного окна, доступ к функциональности как к сервису, журнализация всех событий в точках пользовательского контакта с информацией;

– пользовательская работа с информацией и коммуникационные возможности – новостная повестка и публикационный фонд, сквозной поиск информации, планирование и участие в мероприятиях, работа с календарями событий, управление содержанием личного профиля с отражением опыта, компетенций и т.д.;

– работа с данными установок и стендов с переходом от общности (установок) к частностям (сигналам) – просмотр сведений об установке/стенде, анализ журнала экспериментов с возможностью формирования пометок и комментариев на значимые импульсы, переход к анализу и отображению данных в интеграции с функциональностью ПО АОЭД и данными, формируемыми ПО ИВ.

ФОРМИРОВАНИЕ АРХИТЕКТУРЫ ПОРТАЛА ИНФОРМАЦИОННОГО ОБМЕНА

Для целей разработки функциональности Портала была применена совокупность методов объектно-ориентированного программирования (ООП) [15] с целью выделения отдельно взятой области автоматизации в условно-независимые самостоятельные элементы прикладной архитектуры. Такой подход обеспечивает возможность как параллельной разработки функциональных блоков Портала, так и реализации таких архитектурных концепций, которые позволили бы развивать Портал по отдельным модулям без необходимости масштабной переработки классической монолитной архитектуры.

С точки зрения прикладной архитектуры в составе Портала выделены атомарные еди-

ницы, обладающие изолированной функциональностью, называемые микросервисами [16]. При этом ряд принципов ООП использован на уровне построения архитектуры микросервисов Портала, а именно: инкапсуляция данных и логики микросервисов с предоставлением доступа через интерфейсы, обеспечение абстракции путем применения контрактов для взаимодействия между микросервисами, полиморфизм на уровне обработки разных типов сущностей (например, разных типов мероприятий – семинаров и конференций в рамках одного микросервиса), а также наследование через общие библиотеки и шаблоны для создания микросервисов. Таким образом, применение комбинации ООП и микросервисной архитектуры при реализации Портала обеспечивает как структурированность кода и данных, так и расширения данных принципов на распределенную микросервисную архитектуру. Состав и назначение микросервисов Портала представлены в табл. 1.

Для обеспечения интеграционной совместности на уровне Портала реализовано следующее:

– каждый из микросервисов существует независимо;

– точки интеграции с микросервисом – веб-сервис, реализованный в терминах REST API посредством протокола HTTP;

– обеспечение централизации точки управления запросами к REST API каждого из микросервисов осуществляется путем применения реверс-прокси на базе Nginx²;

– взаимодействие микросервисов между собой осуществляется не напрямую (путем вызова REST API одного микросервиса другим), а по архитектурному шаблону асинхронного взаимодействия, а именно: опосредованно через брокер сообщений на базе RabbitMQ³;

– хранение данных каждого из микросервисов осуществляется в выделенной для каждого из них реляционной базе данных под управлением PostgreSQL⁴;

– бинарные объекты (документы, изображения и т.п.) размещаются микросервисами в объектном хранилище, а структурированные данные, необходимые отдельным микросервисам, извлекаются из структурированного хранилища;

– при необходимости заданный набор микросервисов взаимодействует как с контроллером до-

² Nginx. [Электронный ресурс]. URL: <https://nginx.org/> (дата обращения: 25.07.2024).

³ RabbitMQ: One broker to queue them all. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.rabbitmq.com/> (дата обращения: 25.07.2024).

⁴ PostgreSQL: The World's Most Advanced Open Source Relational Database. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.postgresql.org/> (дата обращения: 25.07.2024).

Таблица 1. Микросервисы Портала

№	Микросервис	Назначение
1	Микросервис сервисов	Управление составом и содержанием сервисов (опорных сущностей Портала, доступных для пользователей, прошедших процедуру верификации в качестве члена ИКП), условиями доступа к ним и их пользователями
2	Микросервис новостей	Формирование, модерирование и публикация новостей, публикуемых с заданным уровнем доступа на Портале
3	Микросервис нормативно-справочной информации	Управление базовыми справочниками, классификаторами и нормативными документами, необходимыми для обеспечения функционирования Портала в рамках создания и модификации сущностей, их поиска и просмотра базовой нормативной информации (например, пользовательское соглашение)
4	Микросервис мероприятий	Планирование, конфигурация, управление доступом и проведение мероприятий в интеграции с ВКС посредством REpresentational State Transfer (REST) Application Programming Interface (API) на базе протокола HyperText Transfer Protocol (HTTP) в соответствии со спецификацией TrueConf Server API
5	Микросервис поиска	Индексирование и обеспечение возможности пользовательского сквозного поиска информации, представленной на Портале с учетом уровня доступа пользователя
6	Микросервис настроек	Управление общесистемными настройками Портала, обеспечивающими его базовое функционирование и связь с другими системами
7	Микросервис пользователей	Реализация авторизационной логики, обеспечение регистрации и управление пользователями, включая прохождение процедуры верификации в качестве члена ИКП
8	Микросервис статей	Формирование, модерирование и публикация статей, в качестве которых могут быть инструкции, тезисы конференций, публикации и т.д.
9	Микросервис экспериментов	Управление настройками журналов экспериментов, а также их предоставление пользователям в интеграции с функциональностью ПО АОЭД и данными ПО ИВ
10	Микросервис полномочий на доступ к импульсам (разрядам) и диагностикам	Разграничение прав доступа пользователей на уровне экспериментальных данных (установка – дата – импульс – диагностика)
11	Микросервис визуализации экспериментальных данных	Базовый интеграционный модуль ПО АОЭД, обеспечивающий возможность переиспользования существующей функциональности ПО АОЭД в других модулях и компонентах Портала
12	Микросервис вычислений экспериментальных данных	Расчетный модуль ПО АОЭД, обеспечивающий выполнение запрошенных пользователями вычислительных сценариев, в рамках которых используется заданный набор входных экспериментальных данных и математическая логика, реализованная в терминах языка программирования Python
13	Микросервис экспорта экспериментальных данных	Экспортный модуль ПО АОЭД, обеспечивающий выгрузку исходных экспериментальных и расчетных данных в файлы заданных форматов (например, HDF5, Parquet, CSV и т.д.)

мена, так и с ВКС и почтовым сервером в рамках реализации своей функциональности.

Визуальное представление укрупненной архитектуры Портала приведено на рис. 1.

Следует отметить, что для целей организации микросервисов в исполняемые и переносимые объекты, называемые контейнерами, использована свободно-распространяемая технология для построения и контейнеризации приложений – Docker Engine. Для решения задач управления контейнерами микросервисов использован свободно-распространяемый оркестратор с открытым исходным кодом на базе Kubernetes.

ТЕХНОЛОГИИ РЕАЛИЗАЦИИ

С учетом изложенных ранее по тексту архитектурной и функциональной составляющих Портала для целей его реализации определены технологические решения, функционально удовлетворяющие сформированным задачам Портала, широко применяемые, в том числе в рамках уже функционирующих ПО АОЭД и ПО ИВ, и являющиеся свободно-распространяемым (open-source) программным обеспечением.

Разработка Портала осуществлена с использованием объектно-ориентированного языка

ПОРТАЛ АИП ИКП (FUSIONSPACE.RU) ДЛЯ ИНФОРМАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УЧАСТНИКОВ ИССЛЕДОВАНИЙ В ОБЛАСТИ УПРАВЛЯЕМОГО ТЕРМОЯДЕРНОГО СИНТЕЗА

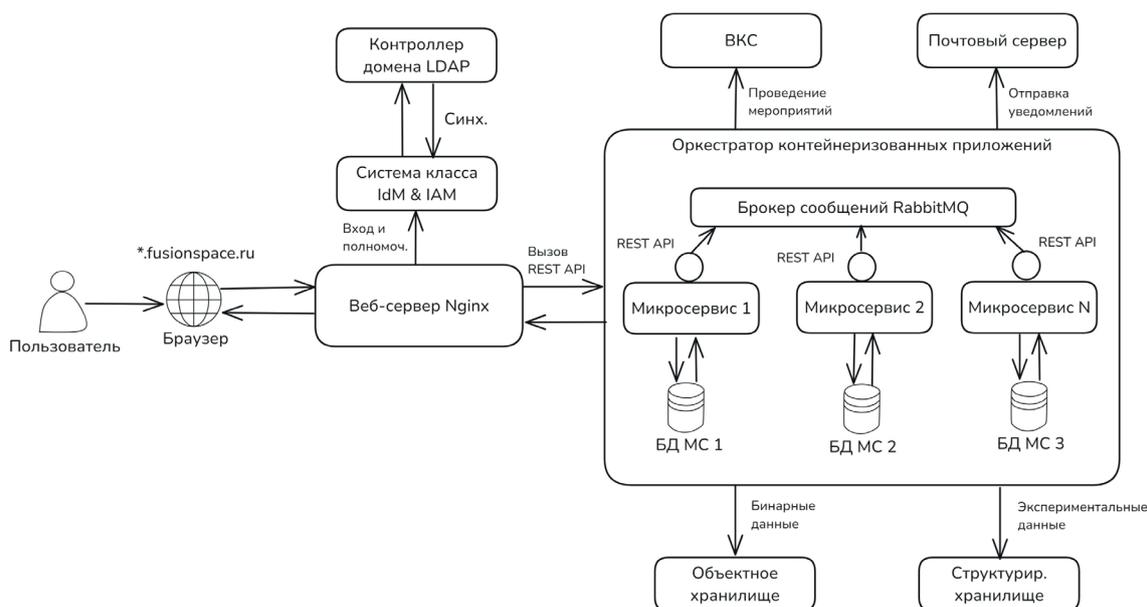


Рис. 1. Визуальное представление укрупненной архитектуры Портала

программирования C#. Для разработки клиентской части веб-приложений Портала использован высокоуровневый язык программирования TypeScript, являющийся расширением языка JavaScript.

Серверное программное обеспечение, необходимое для функционирования Портала, представлено в табл. 2.

Для эксплуатации Портала пользователю необходимо и достаточно иметь только современный веб-браузер на базе Chromium, поскольку функциональность Портала позволяет, не покидая веб-интерфейс, осуществлять работу текстовой и графической информации, а также взаимодействовать с другими пользователями Портала в интеграции с ВКС.

Таблица 2. Состав и назначение серверного ПО Портала

№	Серверное ПО	Назначение
1	Nginx	HTTP-сервер и обратный прокси-сервер, почтовый прокси-сервер, а также Transmission Control Protocol (TCP)/User Datagram Protocol (UDP) прокси-сервер общего назначения
2	Kestrel ⁵	Веб-сервер, основанный на кроссплатформенной библиотеке асинхронного ввода/вывода libuv. Kestrel по умолчанию включается в проект ASP.NET Core
3	PostgreSQL	Свободная объектно-реляционная система управления базами данных
4	RabbitMQ	Программный брокер сообщений на основе стандарта Advanced Message Queuing Protocol (AMQP) – тиражируемое связующее программное обеспечение, ориентированное на обработку сообщений
5	Identity Management и Identity and Access Management	Решение с открытым кодом для реализации Single Sign-On (SSO) с возможностью управления доступом. Реализует логику аутентификации и авторизации

РЕЗУЛЬТАТЫ АПРОБАЦИИ

Результаты апробации решений в рамках Портала приводятся в виде фрагментов графического пользовательского интерфейса некоторых из функций далее по тексту.

⁵ Kestrel веб-сервер в ASP.NET Core [Microsoft Learn]. [Электронный ресурс]. URL: <https://learn.microsoft.com/ru-ru/aspnet/core/fundamentals/servers/kestrel> (дата обращения: 25.07.2024).

Базовым интерфейсом работы пользователя Портала с журналом экспериментов выбранной установки является страница, состоящая из следующих элементов интерфейсов: блок общих сведений и анонсов, блок последних новостей и (если необходимо) статей, связанных с установкой/стендом, блок экспериментов/экспериментальных программ/проектов и непосредственно импульсов (разрядов). Фрагмент графического

пользовательского интерфейса базовой страницы журнала экспериментов Портала на примере установки Глобус-М2 приведен на рис. 2.

В результате выбора пользователем Портала в журнале экспериментов интересующего импульса и соответствующей диагностики доступен переход к интерфейсу анализа и отображения, который позволяет осуществлять визуализацию дву- и трехмерных графиков, работать с табличным представлением экспериментальных данных, выполнять математические операции

и т.д. в рамках ПО АОЭД. Фрагмент графического пользовательского интерфейса одной из страниц рабочей области анализа и отображения экспериментальных данных после перехода из журнала экспериментов Портала в ПО АОЭД в рамках интеграции приведен на рис. 3.

Базовый интерфейс пользовательской работы на Портале с сервисами представляет собой список с краткими наименованиями и описаниями сервисов, а также изображениями. При переходе к карточке сервиса доступен просмотр базовой

The screenshot shows the 'LOGBOOK.FusionSpace.RU' portal interface. At the top, there is a header with the portal name and 'Глобус-М2'. Below the header, a journal entry titled 'Добро пожаловать в журнал экспериментов Глобус-М2' is displayed, dated '16 августа, 12:17'. The entry text describes the GLOBUS-M2 facility and its role in plasma research. Below the journal entry, there is a section for 'Последние новости' (Latest News) featuring three news items with dates and titles. At the bottom, there is a section for 'Эксперименты и импульсы' (Experiments and Impulses) with a table listing experimental data.

Последние новости

- 20 июня 2024: Вестника атомпрома
- 06 февраля 2024: «Санкт-Петербург научный» на международной выставке-форуме «Россия» на ВДНХ
- 18 января 2024: Новосибирский ИЯФ СО РАН создал редкий дисперсионный интерферометр для измерения плотности плазмы токамака Глобус-М2

Эксперименты и импульсы

Номер	Дата ↓	Диагностик	Программа	Метки	Создан вручную
44622	08 августа 2024	42	-	-	Нет
44622	05 августа 2024	42	-	-	Нет
44623	05 августа 2024	42	-	-	Нет

Рис. 2. Работа с журналом экспериментов Портала

ПОРТАЛ АИП ИКП (FUSIONSPACE.RU) ДЛЯ ИНФОРМАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УЧАСТНИКОВ ИССЛЕДОВАНИЙ В ОБЛАСТИ УПРАВЛЯЕМОГО ТЕРМОЯДЕРНОГО СИНТЕЗА

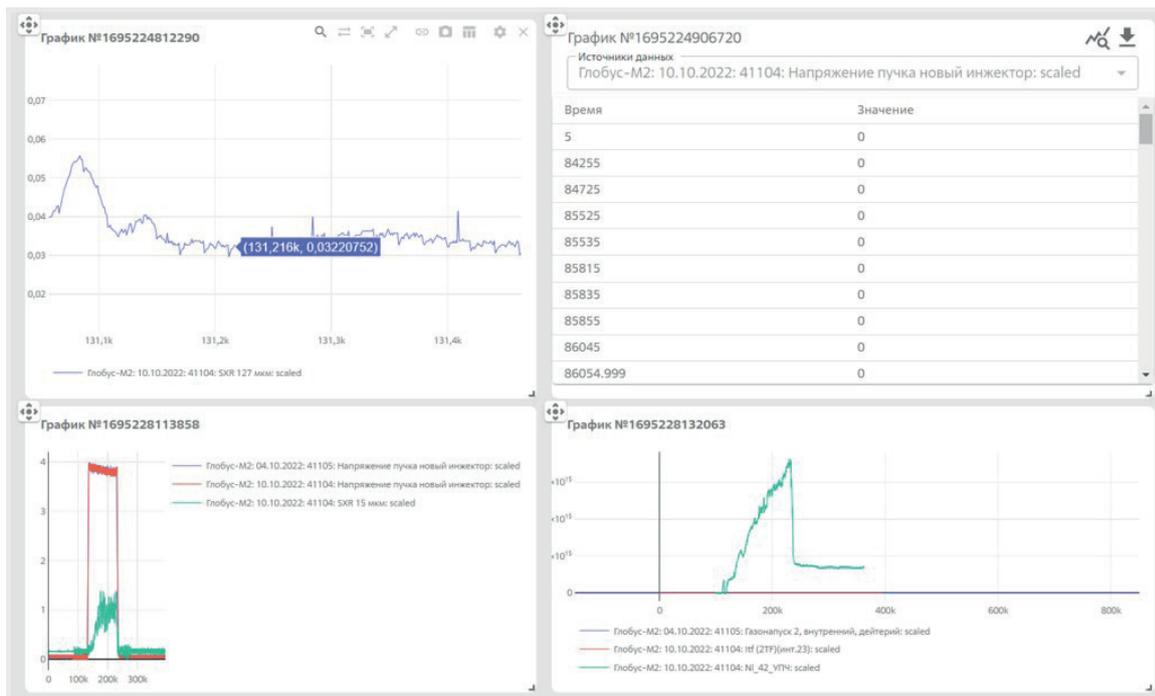


Рис. 3. Пример работы с анализом диагностик в рамках журнала экспериментов Портала

информации о сервисе, а при подаче заявки и получении доступа – расширенная функциональность, включая служебную информацию, возможность взаимодействия с административным персоналом сервиса и т.д. Сервисы являются базовой сущностью Портала, которая представляет пользователям возможность работы с дополни-

тельной функциональностью: доступ к данным той или иной установки, совместное проектирование, работа с распределенными ресурсами для моделирования и расчетов и т.д. Фрагмент графического пользовательского интерфейса стартовой страницы сервисов АИП ИКП приведен на рис. 4.

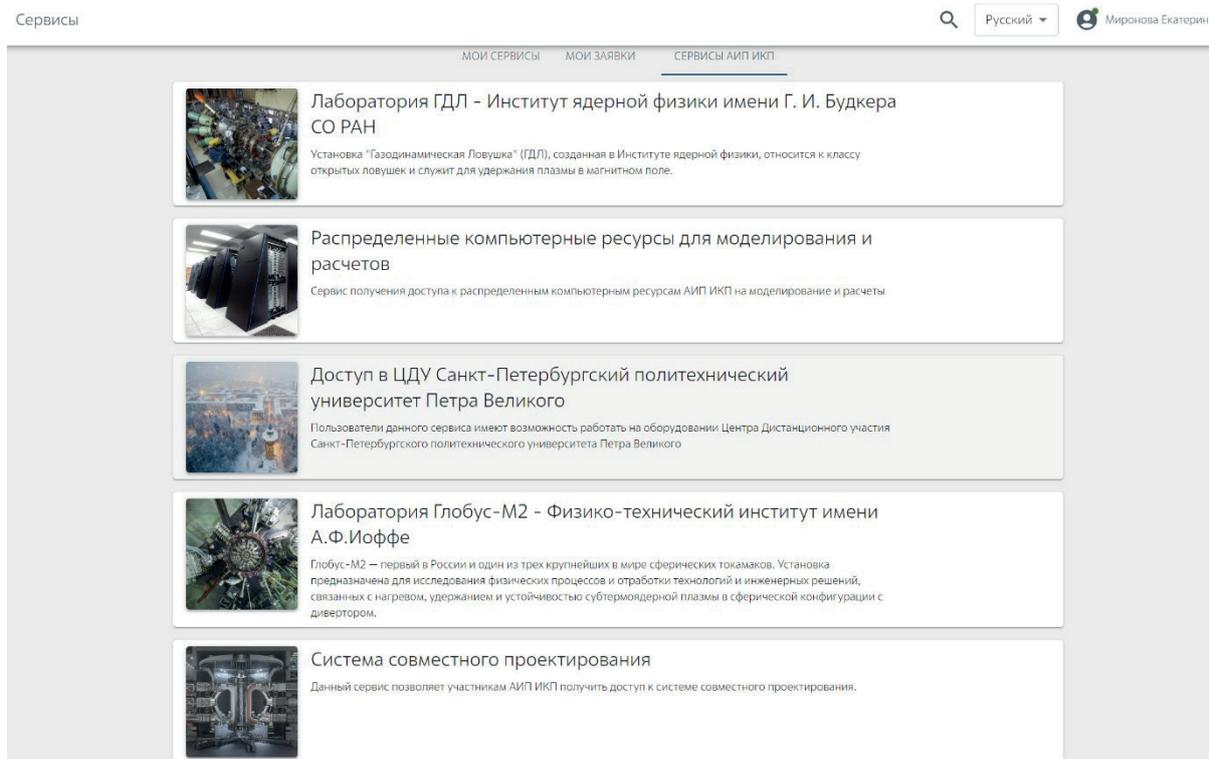


Рис. 4. Пример каталога сервисов Портала

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате работы был создан портал информационного обмена, выступающий единым интерфейсом взаимодействия участников сообщества управляемого термоядерного синтеза в рамках АИП ИКП (FusionSpace.RU). Были определены основные задачи, архитектура Портала, выработан технологический подход к реализации, а также проведена апробация решений.

Созданный Портал представляет собой инструмент, который обеспечивает пользователей дополнительными возможностями для повышения оперативности решения задач, связанных с научными исследованиями в области УТС. Он предоставляет пользователям доступ к сервисам информационного обмена, включая удобный веб-интерфейс для работы с экспериментальными данными. Портал обеспечивает интеграцию с ВКС, что позволяет как планировать, так и проводить научные мероприятия в едином интерфейсе: совещания, семинары, конференции.

Среди ключевых функций Портала – возможность сквозного поиска, просмотра, сортировки и фильтрации информации, что значительно упрощает доступ к необходимым данным. Кроме того, пользователи могут подавать запросы на использование распределенных компьютерных ресурсов для выполнения сложных моделирований и расчетов.

Особое внимание в Портале уделено организации рабочих процессов. Пользователи могут использовать персонализированные календари для отслеживания событий, проводимых в рамках видеоконференций, а также средства для описания установок и стендов УТС, что включает ведение расписаний экспериментов. Эти возможности позиционируют Портал как инструмент для планирования и координации научной работы.

Кроме того, Портал обеспечивает работу с нормативно-справочной документацией, предоставляет пользователям доступ к личным кабинетам, синхронизированным с контроллером домена, и осуществляет автоматическое логирование системных событий и пользовательских действий. Таким образом, Портал является единым интерфейсом для управления научными данными и взаимодействия участников научного сообщества в области УТС.

Выбранные технологические решения Портала находят широкое применение, в том числе в рамках действующих решений в составе АИП ИКП (ПО ИВ и ПО АОЭД), распространяются свободно (имеют открытый исходный код), а успешная апробация в рамках настоящей работы подчеркивает их эффективность для решения поставленных задач Портала.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена в рамках государственного контракта с Госкорпорацией «Росатом» от 22.03.2023 № Н.4к.241.09.23.1036 «Разработка и создание аппаратно-инфраструктурной платформы информационно-коммуникационного пространства в области термоядерных исследований в Российской Федерации. Этап 2023–2024 годов».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Портоне С.С., Миронова Е.Ю., Семенов О.И., Ежова З.В., Семенов Е.В., Миронов А.Ю., Ларионов А.С., Нагорный Н.В., Звонарева А.А., Григорян Л.А., Гужев Д.И., Николаев А.И., Семенов И.Б., Красильников А.В. Развитие аппаратно-инфраструктурной платформы информационно-коммуникационного пространства как инструмента интеграции исследований в области УТС // ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез, 2022. Т. 45. Вып. 4. С. 34–44.
2. Pat Brans. How to manage 2 petabytes of new data every day // ITER Scientific Data Centre, 2020. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.iter.org/newslines/-/3534> (дата обращения: 25.07.2024).
3. Семенов О.И., Лобес Л.А., Потанов А.М., Степанов Д.Н., Портоне С.С., Ларионов А.С., Нагорный Н.В., Миронова Е.Ю., Ежова З.В., Семенов И.Б. Опыт России в разработке и тестировании элементов для удаленного участия в эксперименте ИТЭР // ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез, 2022. Т. 45. Вып. 4. С. 56–60.
4. Вишня А.С., Гусев Д.М., Ларионов А.С., Лебедева А.В., Миронова Е.Ю., Портоне С.С., Семенов О.И. Подходы к сбору, хранению и визуализации экспериментальных данных УТС-установок РФ в АИП ИКП // Сб. тезисов докладов XX Всероссийской конференции «Диагностика высокотемпературной плазмы». М.: Издательские технологии, 2023. С. 336–337.
5. Вишня А.С., Лебедев А.В., Семенов О.И., Миронова Е.Ю., Калина Л.Ю., Гусев Д.М., Ежова З.В., Портоне С.С. Разработка комплексного программного обеспечения для совместной работы с экспериментальными данными по управляемому термоядерному синтезу // ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез, 2023. Т. 46. Вып. 4. С. 16–24.
6. Prescott B., Downing J., Di Maio M. How J. Using SharePoint to manage and disseminate fusion project information: An ITER case study // Fusion Engineering and Design, 2010. V. 85(3–4). P. 571–578. DOI: 10.1016/j.fusengdes.201004068.
7. Efimov N., Podolyako F., Prishvitsyn A., Krat S. MPhIST-0 integrated control and data acquisition system // Fusion Engineering and Design, 2023. V. 196. 113990. DOI: 10.1016/j.fusengdes.2023.113990.
8. Blackwell B.D., & Gough C. The H-1NF electronic logbook // Proceedings of the 13th International

Stellarator Workshop. Australia, 2002. Доступно по адресу: <https://inis.iaea.org/search/34085972> (дата обращения 25.07.2024).

9. *Grahl M., Spring A., Bluhm T., Bosch H.-S., Brakel R., Dumke S., P. etc.* The new W7-X logbook – A software for effective experiment documentation and collaborative research at Wendelstein 7-X // *Fusion Engineering and Design*, 2019. V.146(A). P. 1254–1257. DOI: 10.1016/j.fusengdes.201902052.

10. *Grahl M., Spring A., Andreeva T., Bluhm T., Bozhenkov S., Dumke S., ect.* W7-X logbook REST API for processing experimental metadata and data enrichment at the Wendelstein 7-X stellarator // *Fusion Engineering and Design*, 2020. V. 160. DOI: 10.1016/j.fusengdes.2020111819.

11. *Fei Y., Xiao B.* Web-based Logbook System for EAST Experiments // *Plasma Science and Technology*, 2010. V.12(5). P. 632. DOI: 10.1088/1009-0630/12/5/23.

12. *Corso Radu A., G Lehmann Miotto, Magnoni L.* The Electronic Logbook for the Information Storage of ATLAS

Experiment at LHC (ELisA) // *Journal of Physics: Conference Series*, 2012. V. 396(1). 12014.

DOI: 10.1088/1742-6596/396/1/012014.

13. *Fredian T.W., Stillerman J.A.* Web based electronic logbook and experiment run database viewer for Alcator C-Mod. // *Fusion Engineering and Design*, 2006. V. 81(15). P. 1936–1967. DOI: 10.1016/j.fusengdes.2006.04.009.

14. *Baek S., Lee S., Park M., etc.* Electronic logbook development for the KSTAR commissioning // *Fusion Engineering and Design*, 2010. V. 85(3–4). P. 487–490. DOI: 10.1016/j.fusengdes.2010.03.003.

15. *Буч Г., Максимчук Р.А., Энгл М.У., Янг Б.Дж., Коналлен Д., Хьюстон К.А.* Объектно-ориентированный анализ и проектирование с примерами приложений. М.: Издательский дом «Вильямс», 2017. 720 с.

16. *Ричардсон К.* Микросервисы. Паттерны разработки и рефакторинга / СПб: Издательство «Питер», 2023. 544 с.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 6, pp. 449–458

INFORMATION PORTAL (FUSIONSPACE.RU) FOR RESEARCHERS IN THE FIELD OF CONTROLLED THERMONUCLEAR FUSION

E. V. Semenov^{1,}, A. S. Vishnya², A. V. Lebedeva², D. M. Gusev², O. I. Semenov¹, E. Yu. Mironova¹, S. S. Portone¹*

¹*Institution «Project Center ITER», Москва, 123060, Russia,*

²*LLC «ITneris», Kaliningrad, 236022, Russia*

**e-mail: E.Semenov@iterrf.ru*

Received October 25, 2024; revised November 8, 2024; accepted November 12, 2024

A number of fusion installations and stands are currently used in Russia in the course of research in the field of controlled thermonuclear fusion. These scientific studies are of great importance for the development of the national program on plasma physics and in the active phases of their implementation require modern means of automated information support (for example, ensuring timely regulated access to computing facilities for calculations). The presence of a unified IT-platform is also required for interaction with colleagues, as well as access to scientific news, regulatory information and reference, events and other thematic agendas. Thus, the task of creating unified, modern IT-solution that would provide information exchange on research topics through a web interface is extremely urgent. A unique domestic infrastructural hardware platform of the common IT-space for fusion research (FusionSpace.RU) is being developed in Russia, which includes a number of functional capabilities for obtaining data from fusion installations and stands for the following display and analysis. This paper summarizes the creation of a portal for information exchange as a unified interface for interaction between researchers of the Russian fusion community. Basic problems and architecture were defined, and technologies for their implementation were selected and tested in the course of this work. The solutions considered provide the possibility of information interaction of participants of the Russian fusion community within an IT-platform of FusionSpace.RU. Conclusions are presented based on the results of the study.

Keywords: remote experiments, information exchange, thermonuclear fusion, portal solution, systems integration, digitalization.

REFERENCES

1. *Portone S.S., Mironova E.Yu., Semenov O.I., Ezhova Z.V., Semenov E.V., Mironov A.Yu., Larionov A.S., Nagornyy N.V., Zvonareva A.A., Grigoryan L.A., Guzhev D.I., Nikolaev A.I., Semenov I.B., Krasilnikov A.V.* Razvitie apparatno-infrastrukturnoy platformy informacionno-kommunikacionnogo prostranstva kak instrumenta integratsii issledovaniy v oblasti UTS [Infrastructural hardware platform of the common it space for fusion research (fusionspace.ru)]. VANT. Ser. Termoyadernyy sintez, 2022. Vol. 45. Iss. 4. Pp. 34–44 (in Russian).
2. *Pat Brans.* How to manage 2 petabytes of new data every day [ITER Scientific Data Centre]. Available at: <https://www.iter.org/newsline/-/3534> (accessed: 25.07.2024).
3. *Semenov O.I., Lobes L.A., Potapov A.M., Stepanov D.N., Portone S.S., Larionov A.S., Nagornyy N.V., Mironova E.YU., Ezhova Z.V., Semenov I.B.* Opyt Rossii v razrabotke i testirovaniy ehlementov dlya udalonnogo uchastiya v ehksperimente ITER [Russian experience in development and testing of the elements of remote participation in ITER experiment]. VANT. Ser. Termoyadernyy sintez, 2022. Vol. 45. Iss. 4. Pp. 56–60 (in Russian).
4. *Vishnya A.S., Gusev D.M., Larionov A.S., Lebedeva A.V., Mironova E.Yu., Portone S.S., Semenov O.I.* Podkhody k sboru, khraneniyu i vizualizatsii ehksperimental'nykh dannykh UTS- ustanovok RF v AIP IKP [Approaches to collecting, storing and visualizing experimental data from Russian fusion facilities at fusionspace.ru]. Sb. tezisov dokladov XX Vserossiyskoj konferentsii «Diagnostika vysokotemperaturnoj plazmy» [Sat. abstracts of reports of the XX All-Russian conference «Diagnostics of high-temperature plasma»]. Moscow, Izdatelskie tekhnologii Publ., 2023. Pp. 336–337 (in Russian).
5. *Vishnya A.S., Lebedev A.V., Semenov O.I., Mironova E.Yu., Kalina L.Yu., Gusev D.M., Ezhova Z.V., Portone S.S.* Razrabotka kompleksnogo programmnogo obespecheniya dlya sovместnoy raboty s ehksperimental'nyimi dannymi po upravlyаемому termoyadernomu sintezu [Development of a complex software for collaborative work with experimental fusion data]. VANT. Ser. Termoyadernyy sintez, 2023. Vol. 46. Iss. 4. Pp. 16–24 (in Russian).
6. *Prescott B., Downing J., Di Maio M.* How J. Using SharePoint to manage and disseminate fusion project information: An ITER case study. Fusion Engineering and Design, 2010. Vol. 85(3–4). Pp. 571–578. DOI: 10.1016/j.fusengdes201004068.
7. *Efimov N., Podolyako F., Prishvitsyn A., Krat S.* MPhIST-0 integrated control and data acquisition system. Fusion Engineering and Design, 2023. Vol. 196. 113990. DOI: 10.1016/j.fusengdes.2023.113990.
8. *Blackwell B.D., & Gough C.* The H-1NF electronic logbook // Proceedings of the 13th International Stellarator Workshop. Australia, 2002. Available at: <https://inis.iaea.org/search/34085972> (accessed 25.07.2024).
9. *Grahl M., Spring A., Bluhm T., Bosch H.-S., Brakel R., Dumke S., P. etc.* The new W7-X logbook – A software for effective experiment documentation and collaborative research at Wendelstein 7-X. Fusion Engineering and Design, 2019. Vol. 146(A). Pp. 1254–1257. DOI: 10.1016/j.fusengdes201902052.
10. *Grahl M., Spring A., Andreeva T., Bluhm T., Bozhenkov S., Dumke S., etc.* W7-X logbook REST API for processing experimental metadata and data enrichment at the Wendelstein 7-X stellarator. Fusion Engineering and Design, 2020. Vol. 160. DOI: 10.1016/j.fusengdes2020111819.
11. *Fei Y., Xiao B.* Web-based Logbook System for EAST Experiments. Plasma Science and Technology, 2010. Vol. 12(5). Pp. 632. DOI: 10.1088/1009-0630/12/5/23.
12. *Corso Radu A., G Lehmann Miotto, Magnoni L.* The Electronic Logbook for the Information Storage of ATLAS Experiment at LHC (ELISA). Journal of Physics: Conference Series, 2012. Vol. 396(1), 12014. DOI: 10.1088/1742-6596/396/1/012014.
13. *Fredian T.W., Stillerman J.A.* Web based electronic logbook and experiment run database viewer for Alcator C-Mod. Fusion Engineering and Design, 2006. Vol. 81(15). Pp. 1936–1967. DOI: 10.1016/j.fusengdes.2006.04.009.
14. *Baek S., Lee S., Park M., etc.* Electronic logbook development for the KSTAR commissioning. Fusion Engineering and Design, 2010. Vol. 85(3–4). Pp. 487–490. DOI: 10.1016/j.fusengdes.2010.03.003.
15. *Booch Gr., Maksymchuk R.A., Engle M.W., Young B.J., Conallen J., Houston K.A.* Ob'ektno-orientirovannyj analiz i proektirovanie s primerami prilozhenij. [Object-Oriented Analysis and Design with Application Examples]. Moscow, Izdatel'skij dom «Vil'yams» Publ., 2017. 720 p.
16. *Richardson K.* Mikroservisy. Patterny razrabotki i refaktoringa [Microservices. Patterns of development and refactoring]. St. Petersburg, Izdatel'stvo «Piter» Publ., 2023. 544 p.