

<https://vestnikmephi.elpub.ru>

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ»



ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ»

Том 14 № 1 2025 ЯНВАРЬ – ФЕВРАЛЬ

Основан в июле 2012 г.

Выходит 6 раз в год

ISSN: 2304-487X

ПИ № ФС 77 - 41948

Главный редактор
М.Н. Стриханов

Редакционная коллегия:

А.В. Аксёнов, Pavel Bedrikovetsky,
С.Г. Гаранин, Vladimir S. Gerjikov, Н.Н. Евтихийев,
Yalchin Efendiev, Alexei I. Zhurov, Н.П. Калашников, Н.И. Каргин, С.А. Кащенко,
Н.А. Кудряшов (*заместитель главного редактора*),
Raytcho Lazarov, О.В. Нагорнов, А.Д. Полянин,
В.В. Цегельник, Б.Н. Четверушкин,
М.А. Чмыхов (*ответственный секретарь*), William E. Schiesser

Выпускающий редактор: Н.В. Ермолаева

Адрес редакции: 115409, Москва, Каширское ш., 31,

Вестник НИЯУ МИФИ

Интернет: <https://vestnikmephi.elpub.ru>

Электронная почта: vestnik@mephi.ru

Москва
НИЯУ МИФИ

СОДЕРЖАНИЕ

Том 14, № 1, 2025

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

РЭС-модель релятивистского двухрезонаторного отражательного клистрона с магнитным зеркалом

А.Е. Дубинов, Г.Н. Колесов

3

Разработка недисперсионного инфракрасного газоанализатора для измерения динамики концентраций парниковых газов

И.А. Карпов, И.Л. Фуфурин, И.Б. Винтайкин, Д.Р. Анфимов, А.П. Костерова, Ю.Д. Караулова, П.П. Дёмкин, А.Н. Морозов

16

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Нелинейное уравнение Шредингера общего вида: многофункциональная модель, редукции и точные решения

А.Д. Полянин, Н.А. Кудряшов

24

Сравнение методов выявления аномальных выбросов в исходных данных и их применение при обработке данных искусственной вентиляции легких

С.Г. Климанов, А.А. Котляров, А.В. Крянев, В.Х. Тимербаев, В.А. Трикозова, Д.Д. Царева, Н.В. Воронков, Э.М. Мухамедзянов, А.А. Умаров, Ф.С. Утин, Е.А. Чилека

37

Прогнозирование финансового состояния кредитных организаций на основе сингулярно-спектрального анализа

В.В. Иванов, А.В. Крянев, А.С. Приказчикова, Е.П. Акишина

50

Полная система уравнений Навье – Стокса: линеаризация и построение решений

А.А. Бугаенко, И.Ю. Крутова

64

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Анализ рисков и направлений их устранения для национальной критической информационной инфраструктуры в условиях роста угроз безопасности

И.А. Василенко

79

АВТОМАТИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Исследования сбоеустойчивости электронных компонентов под действием отдельных частиц

П.А. Александров, А.В. Беклемишева, П.Ю. Макавеев, Е.И. Уксусов, С.С. Фанченко, Е.В. Ефименко

85

CONTENTS

Volume 14, Number 1, 2025

TECHNICAL PHYSICS

- PIC-model of relativistic two-cavity reflex klystron with magnetic mirror**
A.E. Dubinov H.N. Kolesov 3
- Development of a non-dispersive infrared gas analyzer for measuring the dynamics of greenhouse gases concentrations**
I.A. Karpov, I.L. Fufurin, I.B. Vintaykin¹, D.R. Anfimov, A.P. Kosterova, J.D. Karaulova, P.P. Demkin, A.N. Morozov 16
-

MATHEMATICAL MODELS AND NUMERICAL METHODS

- Nonlinear Schrödinger equation of general form: multifunctional model, reductions and exact solutions**
A.D. Polyinin, N.A. Kudryashov 24
- Comparison of methods for detecting abnormal emissions in the original data and their application in processing artificial ventilatory data**
S.G. Klimanov, A.A. Kotlyarov, A.V. Kryanev, V.Kh. Timerbaev, V.A. Trikozova, D.D. Tsareva, N.V. Voronkov, E.M. Mukhamedzyanov, A.A. Umarov, F.S. Utin, E.A. Chileka 37
- The credit organizations financial state forecasting based on singular-spectral analysis**
V.V. Ivanov, A.V. Kryanev, A.S. Prikazchikova, E.P. Akishina 50
- Complete system of Navier – Stokes equations: linearization and construction of solutions**
A.A. Bugaenko, I.Yu. Krutova 64
-

APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

- Risk analysis and mitigation strategies for national critical information infrastructure amidst growing security threats**
I.A. Vasilenko 79
-

AUTOMATION AND ELECTRONICS

- Investigations into the failure tolerance of electronic components under the influence of individual particles**
P.A. Alexandrov, A.V. Beklemisheva, P.Yu. Makaveev, E.I. Uksusov, S.S. Fanchenko, E.V. Efimenko 85

УДК 004.428; 621.385.6

PIC-модель релятивистского двухрезонаторного отражательного клистрона с магнитным зеркалом

А. Е. Дубинов^{1,2}, Г. Н. Колесов^{1,2}

¹ Саровский физико-технический институт – филиал научно-исследовательского ядерного университета «Московский инженерно-физический институт» (СарФТИ НИЯУ МИФИ), г. Саров, Нижегородская обл., 607186, Россия

² Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики (РФЯЦ-ВНИИЭФ), г. Саров, Нижегородская обл., 607188, Россия

Предложена концепция и дизайн релятивистского двухрезонаторного отражательного клистрона с магнитным зеркалом. Создана 2.5-D компьютерная *particle-in-cell* (PIC) модель релятивистского двухрезонаторного отражательного клистрона с магнитным зеркалом на основе PIC-кода KARAT. Модель учитывает подвод внешней СВЧ-волны от задающего генератора, позволяет самосогласованно вычислять динамику электронов и выходные характеристики клистрона. Проведено сравнительное моделирование релятивистского двухрезонаторного отражательного клистрона с магнитным зеркалом и релятивистского двух-резонаторного пролетного клистрона без магнитного зеркала. Показано, что спектральные характеристики обоих клистронов близки друг другу. Выполнено сравнение выходной мощности отражательного и пролетного клистрона. Найдено, что выходная мощность у отражательного клистрона примерно в 1.4 раза больше, чем у пролетного. Изучено влияние положения магнитного зеркала на величину генерируемой СВЧ-мощности отражательного клистрона.

Ключевые слова: релятивистский отражательный клистрон, PIC-код, магнитное зеркало.

Введение

Двухрезонаторный пролетный клистрон представляет собой СВЧ-осциллятор, в котором осуществляется преобразование постоянного по плотности электронного пучка в пространственно-периодический. Происходит это следующим образом. При проходе электронного пучка сквозь первый резонатор, в котором предварительно возбуждены продольные СВЧ-колебания электрического поля с помощью какого-либо внешнего источника, возникает модуляция электронов по скорости. Далее при проходе пучка сквозь длинную трубу дрейфа происходит преобразование модуляции электронного пучка по скорости в его модуляцию по плотности. В результате этого первоначально сплошной электронный пучок разбивается на периодическую последовательность электронных банчей. Эти банчи возбуждают второй резонатор, из которого выводится СВЧ-излучение. Фактически клистрон, работающий в таком режиме, является СВЧ-усилителем входного СВЧ-излучения, которым возбуждается первый резонатор. Клистрон был изобретен братьями Russell Varian и Sigurd Varian в 1939 г. [1]. Ранняя история создания первых клистронов представлена в [2].

Принцип действия клистрона, его теория и области применения рассмотрены во многих книгах (например, [3, 4]). Кроме того, клистроны также могут быть многорезонаторными [5–7] и/или многопучковыми [6, 8–10]. Развиваются также сильноточные релятивистские пролетные клистроны для

✉ А.Е. Дубинов: dubinov-ae@yandex.ru

Поступила в редакцию: 18.01.2025

После доработки: 31.01.2025

Принята к публикации: 04.02.2025

EDN BXVVKZ

систем СВЧ-излучения большой мощности [11 – 16]. Клистроны, в основном, применяются для питания линейных ускорителей электронов [17, 18].

В многочисленном семействе клистронов известен еще один представитель – однорезонаторный отражательный клистрон [3, 4]. В нем электронный пучок проходит сквозь единственный резонатор дважды, отражаясь между этими проходами тормозящим электрическим полем, создаваемым электродом-отражателем. При этом единственный резонатор в нем одновременно выполняет две функции – модулятора электронного пучка и отбирающего СВЧ-энергию у пучка резонатора.

Известны многопучковые отражательные клистроны [19, 20]. Однако релятивистские отражательные клистроны для систем СВЧ-излучения большой мощности пока не существуют. Одна из главных причин отсутствия релятивистских отражательных клистронов заключается в том, что на отражатель необходимо подавать отрицательный потенциал больший, чем на катод. Это может привести к вакуумному пробою на электроде-отражателе.

В то же время в вакуумной сильноточной электронике известны и другие, не электростатические, способы отражения электронов, например с помощью магнитного зеркала [21–25]. Существуют многочисленные доказательства успешного применения магнитных зеркал в гиротронах [26, 27], магнетронах [28] и виркаторах [29, 30], когда повышается эффективность осцилляторов. Например, в МИФИ был разработан и создан виркатор с магнитным зеркалом для проведения лабораторных работ со студентами [31]. Однако идея отражения электронов магнитным зеркалом в отражательном клистроне ранее нигде не высказывалась. Тем не менее применение магнитного зеркала в отражательном клистроне позволит создавать как релятивистские сильноточные отражательные клистроны для систем СВЧ-излучения большой мощности, так и многорезонаторные отражательные клистроны.

Для моделирования и исследования характеристик электронных приборов СВЧ-диапазона часто используют численное моделирование. Проведение численного эксперимента является наиболее действенным и быстрым способом предсказания работоспособности и эффективности моделируемого устройства в зависимости от изменения параметров его модели по сравнению с экспериментальным исследованием. Это позволяет существенно уменьшить затраты времени на эксперименты и настройку проектируемого устройства.

При проведении численных экспериментов, связанных с физикой электронных пучков, часто используют метод крупных частиц, одной из модификаций которого является метод частиц в ячейках (в научной литературе его называют *particle-in-cell*, или сокращенно PIC-методом).

Коды, в которых используется PIC-метод, обычно устроены следующим образом [32, 33]. На каждом временном шаге вычисляются пространственные распределения компонентов векторов E и B электромагнитного поля в системе. Для чего используются сеточные методы расчета на заданной пространственной сетке. После этого вычисляются все компоненты движения (скорости, импульсы, смещения) всех частиц. Для этого используется какой-нибудь одношаговый алгоритм (например, Рунге–Кутты). После выполнения такого шага снова вычисляется электромагнитное поле с учетом движения заряженных частиц.

При моделировании аксиально-симметричных систем PIC-методом для уменьшения вычислительных затрат применяют так называемый 2.5-мерный расчет (2.5D-расчет). Под термином «2.5D-моделирование» подразумевается расчет с учетом азимутальных компонентов скорости (и/или импульсов) частиц без вычисления азимутальных смещений частиц. Таким образом, вычисляются все три компоненты скорости (импульса) частицы и только две компоненты координат частиц (r и z) [34–36].

В связи с заданной проблемой (гипотезой) была поставлена цель, которая заключалась в создании 2.5-D компьютерной PIC-модели релятивистского двухрезонаторного отражательного клистрона с магнитным зеркалом, с помощью которой можно было бы:

- показать работоспособность релятивистского двухрезонаторного отражательного клистрона с магнитным зеркалом;
- установить особенности пространственной и фазовой динамики электронов в нем;
- оценить мощностные и спектральные характеристики осциллятора в сравнении с обычным двухрезонаторным пролетным клистроном.

В результате была создана PIC-модель релятивистского двухрезонаторного отражательного клистрона с магнитной пробкой на базе известного PIC-кода KAPAT [37].

Конфигурация отражательного клистрона, принцип действия, параметры, и выбранный код

Компьютерная модель релятивистского двухрезонаторного отражательного клистрона построена для конфигурации, показанной на рис. 1. Этот клистрон содержит релятивистский замагниченный диод – наилучший выбор для генерации трубчатых релятивистских электронных пучков [38]. Клистрон имеет традиционные для обычного двухрезонаторного пролетного клистрона элементы: трубчатый катод С и анодный электрод А, содержащий входную коаксиальную линию O_1 (на рис. 1 слева) с волновым сопротивлением $\rho_1 = 66$ Ом, подсоединенную к задающему генератору, выходную коаксиальную линию O_2 с сопротивлением $\rho_2 = 4.8$ Ом (на рис. 1 справа), подсоединенную к выходной антенне, два резонатора $CR_{1,2}$, один из которых CR_1 осуществляет модуляцию электронного пучка по скорости, а другой CR_2 – концентрирует выходное электромагнитное поле. Резонаторы $CR_{1,2}$ находятся друг от друга на расстоянии, необходимом для преобразования модуляции электронного пучка по скорости в его модуляцию по плотности. Эта часть анодного электрода представляет собой цилиндрическую трубу дрейфа. Завершается тракт транспортировки электронного пучка в клистроне коллектором К (на рис. 1 справа). Резонатор CR_1 отделен от магнитоизолированного диода и трубой дрейфа прозрачными для электронов фольгами $F_{1,2}$, а резонатор CR_2 отделен от трубы дрейфа и полости коллектора фольгами $F_{3,4}$. Вместо фольг F_{1-4} могут быть использованы сетки из металлической проволоки. Размеры всех элементов клистрона понятны из рис. 1, на котором радиальные и осевые масштабы различны.

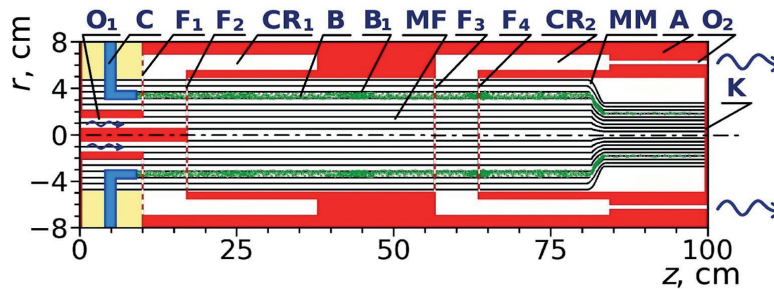


Рис. 1. Геометрия релятивистского двухрезонаторного отражательного клистрона с магнитной пробкой: O_1 и O_2 – входная и выходная коаксиальная линия; С – катод; F_{1-4} – фольга; $CR_{1,2}$ – коаксиальные резонаторы; В – электронный пучок; B_1 – электронный банчик; MF – линии индукции магнитного поля; MM – магнитное зеркало; А – анодный электрод; К – коллектор, волнистые стрелки показывают входящую СВЧ-волну задающего генератора (слева) и выходящую на антенну СВЧ-волну (справа)

Считалось, что на клистрон по всей его длине с помощью длинного соленоида наложено однородное магнитное поле с индукцией 1 Тл, а в области коллектора с помощью дополнительного соленоида магнитное поле увеличено в δ раз, в результате чего формируется магнитное зеркало с зеркальным соотношением δ . При $\delta > 1$ моделируется релятивистский двухрезонаторный отражательный клистрон, а при $\delta = 1$ отражательный клистрон трансформируется в обычный пролетный. Профиль магнитного поля вдоль оси клистрона при $\delta = 3$ показан на рис. 2. Этот профиль магнитного поля является граничным условием,

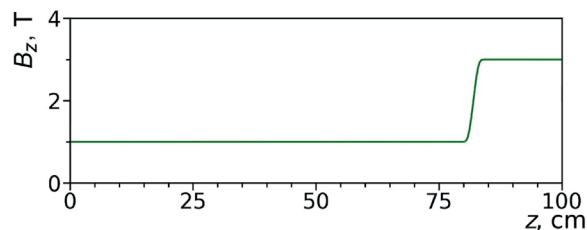


Рис. 2. Профиль магнитного поля вдоль оси отражательного клистрона

с учетом которого рассчитывалось распределение магнитного поля во всей области, как решение уравнения $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ на заданной сетке, в том числе в области прохождения электронного пучка. В области прохождения пучка радиальная компонента магнитного поля не равна нулю, а на оси она равна нулю. Об этом свидетельствуют рассчитанные линии индукции магнитного поля, которые показаны на рис. 1.

Электрические потенциалы катода и анода в клистроне задавались постоянными по времени. В модели предусматривалась следующая последовательность физических процессов в клистроне: сначала во входную коаксиальную линию O_1 запускалась синусоидальная ТЕМ-волна задающего генератора. Далее, после того как эта волна отразится от торцевой стенки резонатора CR_1 и вернется назад к своему входу, в резонаторе устанавливается стоячая СВЧ-волна. Эта волна в зазоре между фольгами $F_{1,2}$ имеет z -ю компоненту электрического поля и используется для модуляции электронного пучка по скорости.

После того как в резонаторе установится стоячая СВЧ-волна, с катода начинает эмитироваться с постоянным током трубчатый релятивистский электронный пучок с внутренним и внешним радиусами $r_i = 3.1$ см и $r_e = 3.65$ см, соответственно. Задавалось время задержки пуска электронного пучка относительно пуска ТЕМ-волны с задающего генератора $\tau = 20$ нс.

Далее электронный пучок последовательно проходит диодный промежуток; промежуток между фольгами $F_{1,2}$ резонатора CR_1 , где модулируется по скорости; трубу дрейфа, где осуществляется преобразование модуляции электронного пучка по скорости в его модуляцию по плотности; промежуток между фольгами $F_{3,4}$ резонатора CR_4 , где происходит отбор энергии сгруппированного электронного пучка; коллектор, в котором пучок отражается магнитным зеркалом и направляется в обратном направлении.

В качестве примера выбраны следующие параметры для модели релятивистского двухрезонаторного отражательного клистрона: зеркальное соотношение $\delta = 3$, потенциал катода -178 кВ, ток электронного пучка -100 А, мощность и частота входной СВЧ-волны -2 кВт и 1 ГГц. Моделировалась работа клистрона на протяжении 100 нс. Конечно, все параметры клистрона можно варьировать.

РЭС-модель релятивистского двухрезонаторного отражательного клистрона построена на базе релятивистского электромагнитного РЭС-кода КАРАТ [36, 37]. Код предназначен для решения нестационарных электродинамических задач, имеющих сложную геометрию и включающих динамику, в общем случае релятивистских частиц (электронов, ионов, нейтралов). Код самосогласованно решает релятивистские уравнения движения частиц и уравнения Максвелла на прямоугольной сетке с постоянным шагом. Уравнения движения частиц численно решаются с помощью традиционных одношаговых алгоритмов. Для решения уравнений Максвелла применяется конечно-разностная схема с перешагиванием на прямоугольных сетках со сдвигом на полшага. Контроль за точностью расчета ведется по точности выполнения закона сохранения полной энергии частиц и электромагнитных полей в моделируемой области. Поскольку геометрия клистрона имеет осевую симметрию, то использовался 2.5-D вариант расчета. Число узлов в расчетной сетке 71×1001 .

Укажем, что код КАРАТ ранее многократно тестировался и использовался для моделирования вакуумно-пучковых и плазменно-пучковых приборов [29, 30, 39–44], а также газоразрядных процессов [25, 45–47].

Динамика электронного пучка в клистроне

Обычный двухрезонаторный пролетный клистрон. Рассмотрим сначала динамику электронного пучка в двухрезонаторном пролетном клистроне без магнитного зеркала. В результате моделирования было определено, что электроны пучка полностью проходят вакуумную полость клистрона от катода до коллектора, двигаясь по прямолинейным траекториям вдоль линии индукции магнитного поля.

На рис. 3 показан фазовый портрет пучка в момент времени 27 нс. На нем видна продольная группировка электронного пучка, типичная для клистронов. Фазовый портрет дополняет мгновенное распределение линейной плотности электронов, вычисленное как интеграл электронной концентрации по поперечному сечению пучка (рис. 4). Видно, что в пучке сформированы электронные банчи, которые движутся вдоль направления движения электронов.

Характер движения банчей можно представить в виде пространственно-временной денситограммы, полученной в результате обработки таких распределений линейной плотности электронов, как на рис. 4

для интервала времени 20–100 нс с шагом 0.02 нс. Денситограмма представлена на рис. 5а, а ее фрагмент – на рис. 5б. Из денситограммы видно, что банчи движутся строго периодически и с постоянной скоростью.

Денситограмма позволяет найти пространственный период следования банчей – 19.3 см, временной период прохождения какого-либо поперечного сечения клистрона – 1 нс, частоту – 1 ГГц, что соответствует частоте задающего генератора. Была также вычислена скорость движения банчей – 19.3 см/нс = 0.64 c . Это значение показывает, что банчи движутся со скоростью, близкой по значению со скоростью отдельных электронов при энергии 178 кэВ. Все эти данные подтверждают, что в клистроне без магнитного зеркала происходят электронные процессы, характерные для традиционных клистронов.

Отражательный двухрезонаторный клистрон с магнитным зеркалом. Представим результаты моделирования динамики электронного пучка в двухрезонаторном отражательном клистроне с магнитным зеркалом в области коллектора при $\delta = 3$. В результате моделирования было определено, что электроны пучка полностью проходят вакуумную полость клистрона от катода до зеркала, а далее часть электронов пучка проходит сквозь зеркало, а другая часть отражается от него. На рис. 6 представлены проекции мгновенного фазового портрета пучка в момент времени 27 нс. Проекция $P_z(z)$ (см. рис. 6а) показывает сепарацию электронов магнитным зеркалом. Наличие P_r - и P_ϕ -компонент импульса (см. рис. 6б,с) свидетельствует о циклотронном вращении электронов в области магнитного зеркала и после прохождения или отражения от зеркала.

Фазовый портрет дополняет мгновенное распределение линейной плотности электронов, которое представлено на рис. 7. Наблюдая за движением отдельных банчей в отражательном клистроне, можно заметить, что банчи делятся магнитным зеркалом на две части, одна из которых проходит сквозь зеркало, а другая часть отражается им. При этом длина отраженной части банчей увеличена. Денситограмма электронного пучка в отражательном клистроне и ее фрагмент показывают динамику сепарации банчей магнитным зеркалом (рис. 8). Частота следования банчей и их скорость остались такими же, как и у пролетного клистрона.

Отраженные от магнитного зеркала электроны имеют большой энергетический разброс, который связан с модуляцией электронов пучка по скорости, посредством электрического поля внешней электромагнитной волны в первом резонаторе.

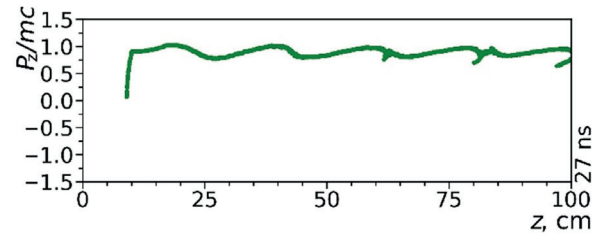


Рис. 3. Мгновенный фазовый портрет электронного пучка в пролетном клистроне

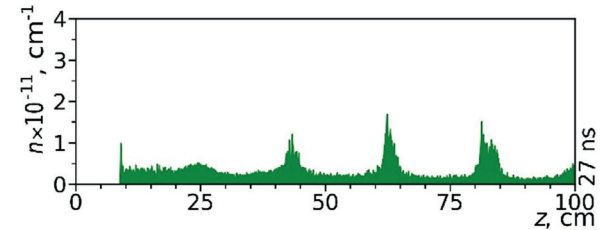


Рис. 4. Мгновенное распределение линейной плотности электронов в пролетном клистроне

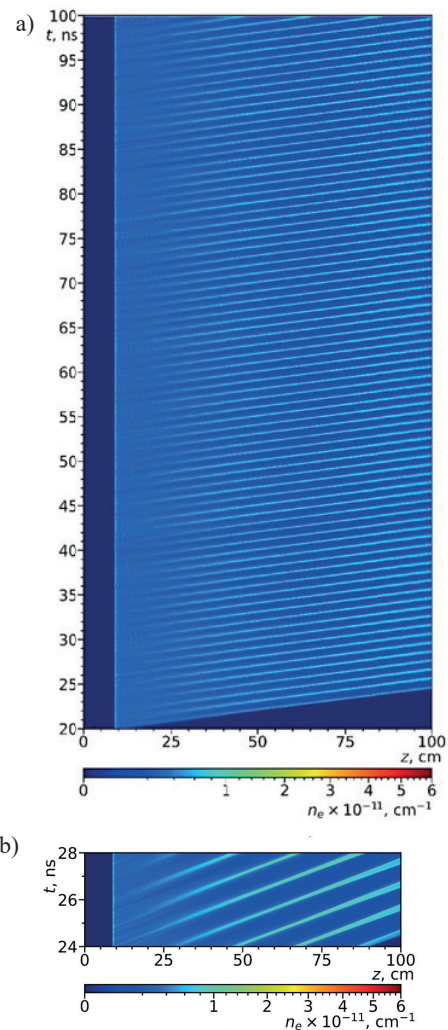


Рис. 5. Денситограмма электронного пучка в пролетном клистроне: а – полная денситограмма; б – ее фрагмент

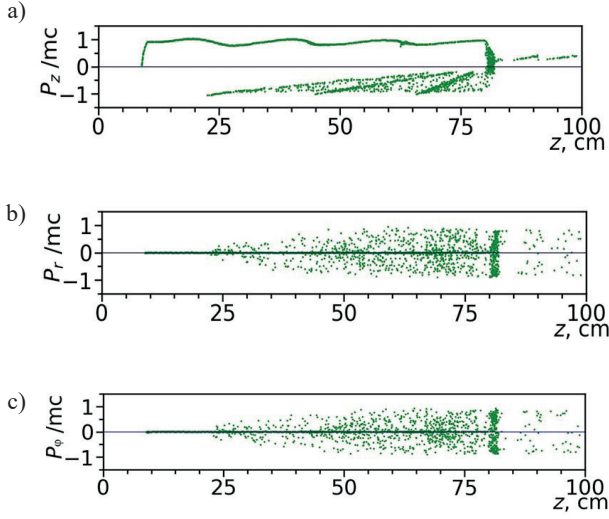


Рис. 6. Мгновенные фазовые портреты P_z , P_r и P_ϕ компонент импульса пучковых электронов в отражательном клистроне с магнитным зеркалом: а) P_z ; б) P_r ; в) P_ϕ

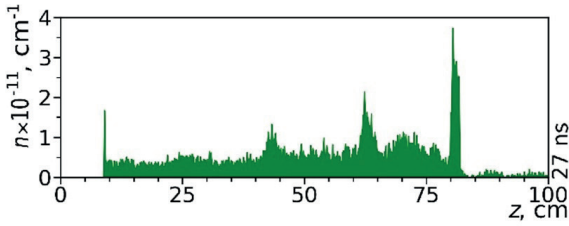


Рис. 7. Мгновенное распределение линейной плотности электронов в отражательном клистроне с магнитным зеркалом

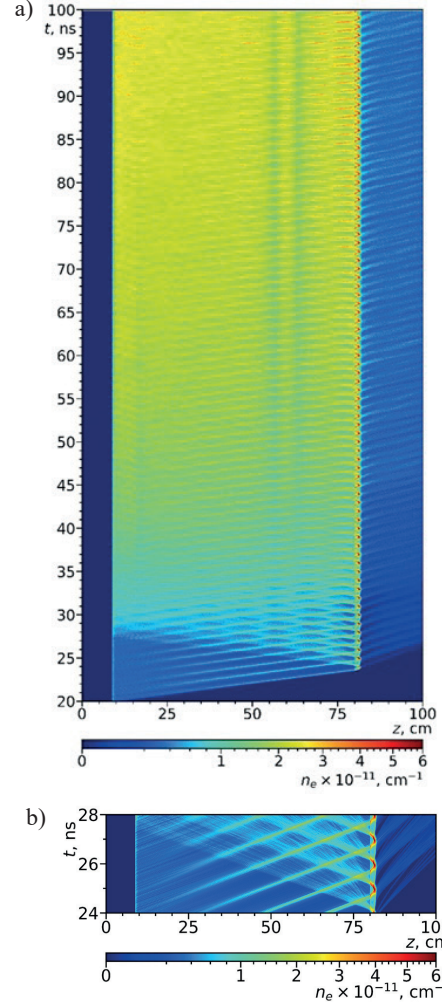


Рис. 8. Денситограмма электронного пучка в отражательном клистроне: а – полная денситограмма; б – ее фрагмент

наторе. Этот разброс хорошо виден на рис. 6а. Для его оценки вычислялись и анализировались энергетические спектры электронов $S_W(W)$ во всей расчетной области клистрона в различные моменты времени с шагом расчета 0,02 ns (конечно же, с учетом отраженных электронов). Если объединить все такие спектры, то можно получить энергетическую спектрограмму, показывающую эволюцию энергетического спектра электронов во времени. На рис. 9 представлена спектрограмма электронов в интервале времени от 24 до 28 нс. Этот временной интервал, во-первых, охватывает четыре периода колебаний электрического поля в первом резонаторе; во-вторых, содержит момент времени 27 нс, для которого были построены вышеприведенные фазовые портреты пучка. Поскольку амплитуда колебаний электрического поля в первом резонаторе постоянна, то и энергетическая спектрограмма имеет квазистационарную ширину от 140 до 220 кэВ.

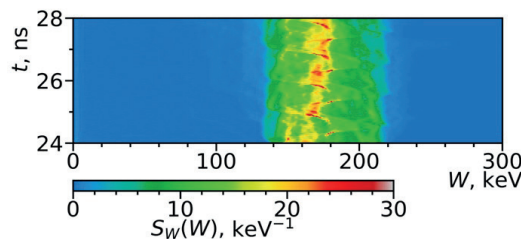


Рис. 9. Фрагмент энергетической спектрограммы электронов

Сравнение выходных СВЧ-характеристик пролетного и отражательного клистронов

Сравнение спектральных характеристик пролетного и отражательного клистронов. Для установления спектральных характеристик СВЧ-полей, генерируемых различными приборами, обычно вычисляются фурье-спектры колебаний тока [40, 41] или одной из компонент электромагнитной волны в выходном волноводе [48]. Для рассматриваемых здесь клистронов удобнее вычислять $E_r(t)$ компоненту электрического поля СВЧ-волны в волноводе O_2 в сечении с координатой $z = 95$ см, а затем ее Фурье-спектр.

На рис. 10 представлены спектры СВЧ-генерации пролетного и отражательного клистронов соответственно. На обоих рисунках видно, что основная частота клистронов совпадает с частотой входной СВЧ-волны 1 ГГц и с частотой следования банчей. Этот факт убеждает нас в том, что рассматриваемые осцилляторы работают в режиме клистронов.

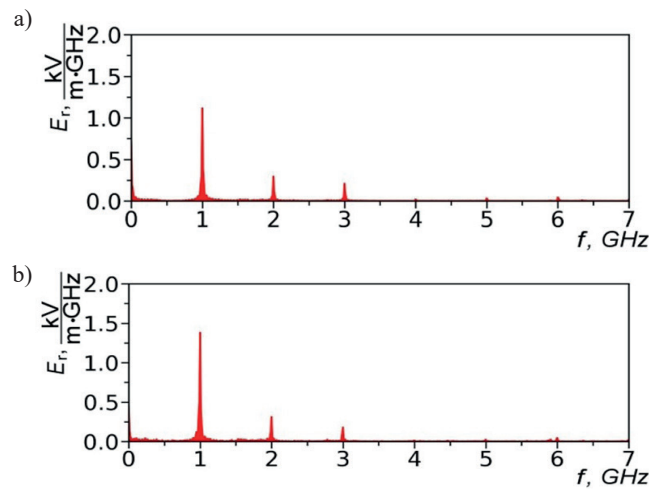


Рис 10. СВЧ-спектры генерации в осцилляторах: а – пролетный клистрон; б – отражательный клистрон

На спектрах также заметны высшие гармоники в СВЧ-волне. Причем уровень основной гармоники у отражательного клистрона немного выше, чем у пролетного клистрона, в то время как уровни высших гармоник, наоборот, у пролетного клистрона больше, чем у отражательного клистрона. Этот факт указывает на то, что эффективность отражательного клистрона на основной частоте выше, чем у пролетного клистрона.

Сравнение мощностных характеристик пролетного и отражательного клистронов. Для нахождения мощностных характеристик клистронов, как и для вычисления мощности в СВЧ-осцилляторах другого типа в [30, 39, 48], вычислялся поток вектора Пойнтинга вблизи открытого торца коаксиального волновода O_2 в сечении с координатой $z = 95$ см. Рассчитанный временной ход этого потока для пролетного и отражательного клистронов представлен на рис. 11, соответственно. В обоих случаях зависимости потока вектора Пойнтинга от времени имеют пиковый характер. Из них также следует, что выходная мощность у отражательного клистрона примерно в 1.4 раза больше, чем у пролетного клистрона. Это доказывает не только работоспособность, но и эффективность предложенного здесь отражательного клистрона.

Зависимость мощностных характеристик отражательного клистрона от расположения магнитного зеркала. Созданная 2.5-D компьютерная РІС-модель релятивистского двухрезонаторного отражательного клистрона с магнитным зеркалом позволяет проводить его оптимизацию и исследование. В качестве примера приведем результаты исследований, в которых определялось влияние положения магнитного зеркала на выходную мощность клистрона. Была проведена серия расчетов с различным положением магнитного зеркала, в каждом из которых вычислялся поток вектора Пойнтинга вблизи открытого торца коаксиального волновода O_2 в сечении с координатой $z = 95$ см. На рис. 12 представлен график зависимости среднего значения амплитуд пиков от величины смещения магнитного зеркала

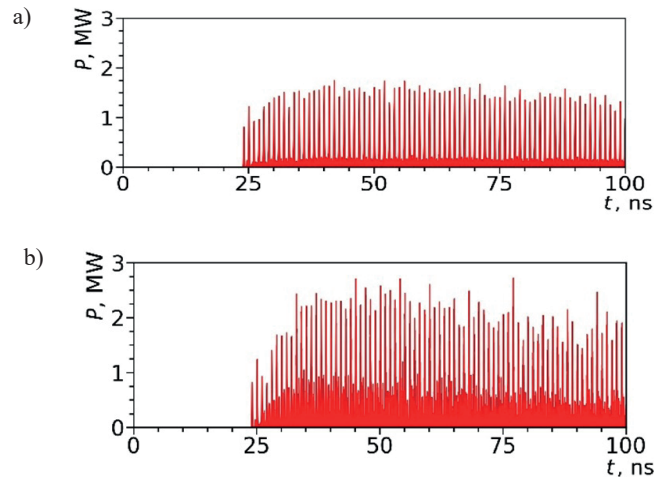


Рис. 11. Временной ход потока вектора Пойнтинга в выходных волноводах осцилляторов: а) – пролетный клистрон; б) – отражательный клистрон

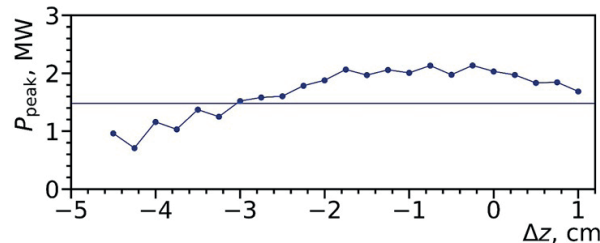


Рис. 12. Зависимость средней амплитуды пиков потока вектора Пойнтинга в выходном волноводе отражательного клистрона от расположения (смещения) магнитного зеркала (вдоль оси z). Горизонтальной линией показан уровень средней амплитуды пиков для пролетного клистрона без магнитного зеркала

от начального положения, при котором $\Delta z = 0$, т.е. положения магнитного зеркала, при котором рост магнитного поля начинался в сечении $z = 80$ см, а заканчивался в сечении $z = 82$ см. При варьировании координаты начала и конца магнитного зеркала одновременно смещались на величину Δz . График рассчитанной зависимости имеет характерный максимум шириной, примерно равной продольной длине прямых банчей.

Заключение

В работе предложена концепция и дизайн двухрезонаторного отражательного клистрона с магнитным зеркалом. Предложенная концепция впервые позволила рассматривать реализуемую схему релятивистского отражательного клистрона с несколькими резонаторами. Ранее отражательные клистроны с релятивистской энергией электронов, а также отражательные клистроны с несколькими резонаторами нигде не рассматривались. Создана 2.5D-PIC модель релятивистского двухрезонаторного отражательного клистрона с магнитным зеркалом на основе PIC-кода KARAT. Модель учитывает подвод внешней СВЧ-волны от задающего генератора, позволяет самосогласованно вычислять динамику электронов и выходные характеристики клистрона. Модель и ее компьютерная реализация позволяют оперативно изменять параметры отражательного клистрона для исследовательских целей.

Преимущество предложенного релятивистского двухрезонаторного отражательного клистрона с магнитным зеркалом заключается в увеличении его выходной мощности по сравнению с пролетным клистроном при одинаковых параметрах электронных пучков и мощности задающего генератора. Увеличение выходной мощности связано, прежде всего, с дополнительным отбором энергии у отраженных от магнитного зеркала банчей.

Проведено сравнительное моделирование релятивистского двухрезонаторного отражательного клистрона с магнитным зеркалом и релятивистского двухрезонаторного пролетного клистрона без магнитного зеркала. Показано, что спектральные характеристики обоих клистронов близки друг другу. Выполнено сравнение выходной мощности отражательного клистрона и пролетного клистрона. Найдено, что выходная мощность у отражательного клистрона примерно в 1.4 раза больше, чем у пролетного клистрона.

Изучено влияние положения магнитного зеркала на величину генерируемой СВЧ-мощности отражательного клистрона.

Финансирование

Авторы заявляют об отсутствии источников финансирования.

Вклад авторов

Дубинов А.Е. – формулировка идеи и целей исследования; постановка задачи; выбор методов исследования; разработка концепции исследования; разработка математической модели; подбор литературных источников; редактирование текста статьи; анализ данных численного моделирования; обсуждение результатов; подготовка заключения.

Колесов Г.Н. – проведение численных расчетов; анализ данных численного моделирования; оптимизация параметров модели; обработка результатов; редактирование текста статьи; обсуждение результатов; подготовка заключения.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Список литературы

1. *Varian R., Varian S.F.* A high frequency oscillator and amplifier // *Journal of Applied Physics*, 1939. V. 10. P. 321–327. <https://doi.org/10.1063/1.1707311>.
2. *Caryotakis G.* The klystron: A microwave source of surprising range and endurance // *Physics of Plasmas*, 1998. V. 5. P. 1590–1598. <https://doi.org/10.1063/1.872826>.
3. *Tsimring S.E.* Electron beams and microwave vacuum electronics. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2006. 573 p.
4. *Gilmour A.S.* Klystrons, traveling wave tubes, magnetrons, crossed-field amplifiers, and gyrotrons. Boston & London: Artech House, 2011.
5. *Nguyen K.T., Abe D.K., Pershing D.E., Levush B., Wright E.L., Bohlen H., etc.* High-power four-cavity S-band multiple-beam klystron design // *IEEE Transactions on Plasma Science*, 2004. V. 32, P. 1119–1135. <https://doi.org/10.1109/TPS.2004.828884>.
6. *Cai J. C., Syratchev I., Burt G.* Design study of a high-power Ka-band high-order-mode multibeam klystron // *IEEE Transactions on Electron Devices*, 2020. V. 67. P. 5736–5742. <https://doi.org/10.1109/TED.2020.3028348>.
7. *Behtouei M., Spataro B., Di Paolo F., Leggieri A.* The Ka-band high power klystron amplifier design program of INFN // *Vacuum*, 2021. V. 191, 110377-1–6. <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2021.110377>.
8. *Boyd M. R., Dehn R. A., Hickey J. S., Mihran T. G.* The multiple-beam klystron. // *IRE Transactions on Electron Devices*, 1962. V. 9, P. 247–252. <https://doi.org/10.1109/T-ED.1962.14979>.
9. *Korolyov A.N., Gelvich E.A., Zhary Y.V., Zakurdayev A.D., Poognin V.I.* Multiple-beam klystron amplifiers: performance parameters and development trends // *IEEE Transactions on Plasma Science*, 2004. V. 32. P. 1109–1118. <https://doi.org/10.1109/TPS.2004.828807>.
10. *Ding Y., Zhu Y., Yin X., Sun X., Shen B., Miao Y., Wang C.* Research progress on C-band broadband multibeam klystron // *IEEE Transactions on Electron Devices*, 2007. V. 54. P. 624–631. <https://doi.org/10.1109/TED.2007.892354>.
11. *Lau Y.Y., Friedman M., Krall J., Serlin V.* Relativistic klystron amplifiers driven by modulated intense relativistic electron beams // *IEEE Transactions on Plasma Science*, 1990. V. 18. P. 553–569. <https://doi.org/10.1109/27.55927>.
12. *Serlin V., Friedman M.* Development and optimization of the relativistic klystron amplifier // *IEEE Transactions on Plasma Science*, 1994. V. 22. P. 692–700. <https://doi.org/10.1109/27.338284>.
13. *Levine J.S., Harteneck B.D.* Repetitively pulsed relativistic klystron amplifier // *Applied Physics Letters*, 1994. V. 65. P. 2133–2135. <https://doi.org/10.1063/1.112813>.

14. Huang H., Feng D.C., Luo G.Y., Lei L.Y., Chen Zh.G., Liao Y., Tan J., Jin X., Meng F.B. Repetitive operation of an S-band 1-GW relativistic klystron amplifier // IEEE Transactions on Plasma Science, 2007. V. 35. P. 384–387. <https://doi.org/10.1109/TPS.2007.893263>.
15. Yang F., Dang F., Ge X., He J., Ju J., Zhang X. A compact coaxial relativistic klystron amplifier with three cascaded single-gap bunching cavities for efficient output // Physics of Plasmas, 2022. V.29. 093111-1–7. <https://doi.org/10.1063/5.0109774>.
16. Benford J. History and future of high power microwaves // IEEE Transactions on Plasma Science, 2024. V. 52. P. 1137–1144. <https://doi.org/10.1109/TPS.2024.3391732>.
17. Allen M.A., Boyd J.K., Callin R.S., Deruyter H., Eppley K.R., Fant K.S., Fowkes W.R., etc. High-gradient electron accelerator powered by a relativistic klystron // Physical Review Letters, 1989. V. 63. P. 2472–2475. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.2337>.
18. Wang S., Fukuda S., Lu Z., Nisa Z., Zhou Z., Xiao O., Pei G. Design study and modeling of multi-beam klystron for Circular Electron Positron Collider // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A, 2022. V.1026. 166208-1–9. <https://doi.org/10.1016/j.nima.2021.166208>.
19. Jang K.-H., Jeon S.-G., Kim J.-I., Won J.-H., So J.-K., Bak S.-H., Srivastava A., Jung S.-S., Park G.-S. High order mode oscillation in a terahertz photonic-band-gap multibeam reflex klystron // Applied Physics Letters, 2008. V. 93. 211104-1–3. <https://doi.org/10.1063/1.3037026>.
20. Jang K.-H., Park S. H., Lee K., Park G.-S., Jeong Y.U. High-order photonic bandgap reflex klystron using carbon nanotube multi-beam cathode // Electronics Letters, 2012. V. 48. P. 707–708. <https://doi.org/10.1049/el.2012.0976>.
21. Gillespie K.M., Speirs D.C., Ronald K., McConville S.L., Phelps A.D.R., Bingham R., Cross A.W., Robertson C.W., Whyte C.G., He W., Vorgul I., Cairns R.A., Kellett B.J. 3D PiC code simulations for a laboratory experimental investigation of Auroral kilometric radiation mechanisms // Plasma Physics and Controlled Fusion, 2008. V. 50. 124038-1–11. <https://doi.org/10.1088/0741-3335/50/12/124038>.
22. Higaki H., Sakurai S., Ito K., Okamoto H. Nonneutral electron plasmas confined in a compact magnetic mirror trap // Applied Physics Express, 2012. V.5. 106001-1–3. <https://doi.org/10.1143/APEX.5.106001>.
23. Leopold J.G., Krasik Ya.E., Bliokh Y.P., Schamiloglu E. Producing a magnetized low energy, high electron charge density state using a split cathode // Physics of Plasmas, 2020. V. 27. 103102-1–9. <https://doi.org/10.1063/5.0022115>.
24. Timofeev I.V., Annenkov V.V., Volchok E.P., Glinskiy V.V. Electron beam–plasma discharge in GDT mirror trap: particle-in-cell simulations// Nuclear Fusion, 2022. V.62, 066033. <https://doi.org/10.1088/1741-4326/ac3cdc>.
25. Dubinov A.E., Tarakanov V.P. Particle-in-cell/Monte Carlo-simulation of the discharge in helium initiated by a relativistic electron beam in the chamber with a magnetic mirror // Contributions to Plasma Physics, 2022. V. 62. 202100198-1–13. <https://doi.org/10.1002/ctpp.202100198>.
26. Borzenkov D.V., Luksha O.I. Numerical simulation of space-charge dynamics in a gyrotron trap // Technical Physics, 1997. V.42. P. 1071–1074. <https://doi.org/10.1134/1.1258768>.
27. Ilyakov E.V., Kulagin I.S., Manuilov V.N., Shevchenko A.S. Experiments on the formation of an intense helical electron beam under conditions of picking-up of the electrons reflected from the magnetic mirror // Radiophysics and Quantum Electronics, 2007. V.50. P. 713–719. <https://doi.org/10.1007/s11141-007-0062-4>.
28. Fuks M.I., Schamiloglu E. Application of a magnetic mirror to increase total efficiency in relativistic magnetrons // Physical Review Letters, 2019. V. 122. 224801-1–6. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.224801>.
29. Dubinov A.E. Features of electron dynamics in a vircator with a magnetic mirror// Journal of Communications Technology and Electronics, 2000. V. 45. P. 792–796. <https://elibrary.ru/item.asp?id=14996670>.
30. Dubinov A.E., Kolesov H.N., Tarakanov V.P. Relativistic multivircator with two magnetic mirrors on underlimit electron beam: concept and PIC-simulation results // IEEE Transactions on Plasma Science, 2022. V. 50. P. 4589–4595. <https://doi.org/10.1109/TPS.2022.3214995>.
31. Гаркуша О.В., Зданович А.И., Школьников Э.Я. СВЧ-генератор на виртуальном катоде в магнитной пробке // Сб. Науч. Тр.: Научная Сессия МИФИ, 2001, Т.7. С. 146–147.
32. Березин Ю.А., Вишневков В.А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы. Новосибирск: Наука, 1980. 95 с.
33. Бэдсел Ч., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергоатомиздат, 1989. 452 с.
34. Skjæraasen O., Melatos A., Spitkovsky A. Particle-in cell simulations of a nonlinear transverse electromagnetic wave in a pulsar wind termination shock // Astrophysical Journal, 2005. V. 634. P. 542–546. <https://doi.org/10.1086/496873>.
35. Lee S.-Y., Lee† E., Kim K.-H., Seon J., Lee D.-H., Ryu K.-S. Development and test of 2.5-dimensional electromagnetic PIC simulation code // Journal of Astronomy and Space Sciences, 2015. V. 32. P. 45–50. <https://doi.org/10.5140/JASS.2015.32.1.45>.
36. Rozental R.M., Tai E.M., Tarakanov V.P., Fokin A.P. Using the 2.5-dimensional PIC code for simulating gyrotrons with nonsymmetric operating modes // Radiophysics and Quantum Electronics, 2022. V. 65. P. 384–396. <https://doi.org/10.1007/s11141-023-10221-7>.
37. Tarakanov V.P. User's Manual for Code KARAT. Springfield, VA: Berkley Research Associates, 1992.
38. Friedman M., Ury M. Microsecond duration intense relativistic electron beams // Review of Scientific Instruments, 1972. V. 43. P. 1659–1661. <https://doi.org/10.1063/1.1685517>.
39. Donets E.D., Donets E.E., Syresin E.M., Dubinov A.E., Makarov I.V., Sadovoy S.A., Saikov S.K., Tarakanov V.P. Formation of longitudinal nonlinear structures in the electron cloud of an electron-string ion source // Plasma Physics Reports, 2009. V. 35. P. 54–61. <https://doi.org/10.1134/S1063780X09010073>.

40. Dubinov A.E., Tarakanov V.P. PIC simulation of the dynamics of electrons in a conical vircator // IEEE Transactions on Plasma Science, 2016. V. 44. P.1391 – 1395. <https://doi.org/10.1109/TPS.2016.2580608>.
41. Dubinov A.E., Tarakanov V.P. PIC simulation of a two-foil vircator // Laser and Particle Beam, 2017. V. 35. P. 362 – 365. <https://doi.org/10.1017/S0263034617000283>.
42. Ginzburg N.S., Rozental R.M., Sergeev A.S., Fedotov A.E., Zotova I.V., Tarakanov V.P. Generation of rogue waves in gyrotrons operating in the regime of developed turbulence // Physical Review Letters, 2017. V. 119. 034801-1 – 6. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.034801>
43. Totmeninov E.M., Klimov A.I., Konev V.Yu., Pegel I.V., Rostov V.V., Tsygankov R.V., Tarakanov V.P. Mode selection in an S-band relativistic backward wave oscillator based on a coaxial waveguide // Technical Physics Letters, 2014. V. 40. P. 152 – 156. <https://doi.org/10.1134/S1063785014020278>.
44. Dubinov A.E., Tarakanov V.P. Simulation of the formation of the squeezed state of an electron beam with a sublimiting beam current in a closed drift tube // Technical Physics, 2020. V. 65. P. 1002 – 1005. <https://doi.org/10.1134/S1063784220060080>.
45. Dubinov A.E. The simulation of a beam-plasma discharge with the beam current exceeding the limiting vacuum current // High Temper, 2004. V. 42. P. 675 – 681. <https://doi.org/10.1023/B:HITE.0000046520.56858.b9>.
46. Barabanov V.N., Dubinov A.E., Loiko M.V., Saikov S.K., Selemir V.D., Tarakanov V.P. Beam discharge excited by distributed virtual cathode // Plasma Physics Reports, 2012. V. 38. P. 169 – 178. <https://doi.org/10.1134/S1063780X12010023>.
47. Kralkina E.A., Nekhudova P.A., Nikonov A.M., Vavilin K.V., Zadiriev I.I. Mutual influence of the channels in a combined discharge based on the RF inductive and DC discharges // Vacuum, 2022. V. 198. 110873-1 – 11. <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2022.110873>.
48. Mumtaz S., Lim J.S., Ghimire B., Lee S.W., Choi J.J., Choi E.H. Enhancing the power of high power microwaves by using zone plate and investigations for the position of virtual cathode inside the drift tube // Physics of Plasmas, 2018. V. 25. 103113-1 – 9. <https://doi.org/10.1063/1.5043595>.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2025, vol. 14, no. 1, pp. 3 – 15

PIC-model of relativistic two-cavity reflex klystron with magnetic mirror

A. E. Dubinov^{1,2,✉} H. N. Kolesov^{1,2}

¹ Sarov Institute of Physics and Technology – Branch of National Research Nuclear University «Moscow Engineering Physics Institute» (SarFTI–NRNU MEPhI), 6 Dukhova St., Sarov, Nizhny Novgorod region, 607186, Russia

² Russian Federal Nuclear Center – All-Russia Scientific and Research Institute of Experimental Physics (RFNC–VNIIEF), 37 Mira Ave., Sarov, Nizhny Novgorod region, 607188, Russia

✉ dubinov-ae@yandex.ru

Received January 18, 2025; revised January 31, 2025; accepted February 04, 2025

The concept and design of a relativistic two-cavity reflex klystron with a magnetic mirror is proposed. A 2.5-D computer particle-in-cell (PIC) model of a relativistic two-cavity reflex klystron with magnetic mirror based on the KARAT PIC code was created. The model takes into account the input of an external microwave from the master oscillator, allows self-consistent calculation of the electron dynamics and output characteristic of the klystron. Comparative simulation of relativistic two-cavity reflex klystron with magnetic mirror and relativistic two-cavity transit klystron without magnetic mirror was carried out. It was been shown that the spectral characteristics of both klystrons are close. The output power of the reflex klystron and the transit klystron are compared. It was found that the output power of the reflex klystron is about 1.4 times more that of the transit klystron. The influence of magnetic mirror position on the value of the generated microwave power of the reflex klystron has been studied.

Keywords: relativistic two-cavity reflex klystron, PIC code, magnetic mirror.

References

1. Varian R., Varian S.F. A high frequency oscillator and amplifier. *Journal of Applied Physics*, 1939, vol. 10, pp. 321–327. <https://doi.org/10.1063/1.1707311>.
2. Caryotakis G. The klystron: A microwave source of surprising range and endurance. *Physics of Plasmas*, 1998, vol. 5, pp. 1590–1598. <https://doi.org/10.1063/1.872826>.
3. Tsimring S.E. *Electron beams and microwave vacuum electronics*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2006. 573 p.
4. Gilmour A.S. *Klystrons, traveling wave tubes, magnetrons, crossed-field amplifiers, and gyrotrons*. Boston & London: Artech House, 2011.
5. Nguyen K.T., Abe D.K., Pershing D.E., Levush B., Wright E.L., Bohlen H., etc. High-power four-cavity S-band multiple-beam klystron design. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 2004, vol. 32, pp. 1119–1135. <https://doi.org/10.1109/TPS.2004.828884>.
6. Cai J.C., Syratheev I., Burt G. Design study of a high-power Ka-band high-order-mode multibeam klystron. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 2020, vol. 67, pp. 5736–5742. <https://doi.org/10.1109/TED.2020.3028348>.
7. Behtouei M., Spataro B., Di Paolo F., Leggieri A. The Ka-band high power klystron amplifier design program of INFN. *Vacuum*, 2021, vol. 191, 110377-1–6. <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2021.110377>.
8. Boyd M.R., Dehn R.A., Hickey J.S., Mihran T.G. The multiple-beam klystron. *IRE Transactions on Electron Devices*, 1962, vol. 9, pp. 247–252. <https://doi.org/10.1109/T-ED.1962.14979>.
9. Korolyov A.N., Gelvich E.A., Zhary Y.V., Zakurdayev A.D., Poognin V.I. Multiple-beam klystron amplifiers: performance parameters and development trends. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 2004, vol. 32, pp. 1109–1118. <https://doi.org/10.1109/TPS.2004.828807>.
10. Ding Y., Zhu Y., Yin X., Sun X., Shen B., Miao Y., Wang C. Research progress on C-band broadband multibeam klystron. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 2007, vol. 54, pp. 624–631. <https://doi.org/10.1109/TED.2007.892354>.
11. Lau Y.Y., Friedman M., Krall J., Serlin V. Relativistic klystron amplifiers driven by modulated intense relativistic electron beams. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 1990, vol. 18, pp. 553–569. <https://doi.org/10.1109/27.55927>.
12. Serlin V., Friedman M. Development and optimization of the relativistic klystron amplifier. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 1994, vol. 22, pp. 692–700. <https://doi.org/10.1109/27.338284>.
13. Levine J.S., Harteneck B.D. Repetitively pulsed relativistic klystron amplifier. *Applied Physics Letters*, 1994, vol. 65, pp. 2133–2135. <https://doi.org/10.1063/1.112813>.
14. Huang H., Feng D.C., Luo G.Y., Lei L.Y., Chen Zh. G., Liao Y., Tan J., Jin X., Meng F.B. Repetitive operation of an S-band 1-GW relativistic klystron amplifier. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 2007, vol. 35, pp. 384–387. <https://doi.org/10.1109/TPS.2007.893263>.
15. Yang F., Dang F., Ge X., He J., Ju J., Zhang X. A compact coaxial relativistic klystron amplifier with three cascaded single-gap bunching cavities for efficient output. *Physics of Plasmas*, 2022, vol. 29, 093111-1–7. <https://doi.org/10.1063/5.0109774>.
16. Benford J. History and future of high power microwaves. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 2024, vol. 52, pp. 1137–1144. <https://doi.org/10.1109/TPS.2024.3391732>.
17. Allen M.A., Boyd J.K., Callin R.S., Deruyter H., Eppey K.R., Fant K.S., Fowkes W.R., etc. High-gradient electron accelerator powered by a relativistic klystron. *Physical Review Letters*, 1989, vol. 63, pp. 2472–2475. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.2337>.
18. Wang S., Fukuda S., Lu Z., Nisa Z., Zhou Z., Xiao O., Pei G. Design study and modeling of multi-beam klystron for Circular Electron Positron Collider. *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A*, 2022, vol. 1026, 166208-1–9. <https://doi.org/10.1016/j.nima.2021.166208>.
19. Jang K.-H., Jeon S.-G., Kim J.-I., Won J.-H., So J.-K., Bak S.-H., Srivastava A., Jung S.-S., Park G.-S. High order mode oscillation in a terahertz photonic-band-gap multibeam reflex klystron. *Applied Physics Letters*, 2008, vol. 93, p211104-1–3. <https://doi.org/10.1063/1.3037026>.
20. Jang K.-H., Park S.H., Lee K., Park G.-S., Jeong Y.U. High-order photonic bandgap reflex klystron using carbon nanotube multi-beam cathode. *Electronics Letters*, 2012, vol. 48, pp. 707–708. <https://doi.org/10.1049/el.2012.0976>.
21. Gillespie K.M., Speirs D.C., Ronald K., McConville S.L., Phelps A.D.R., Bingham R., Cross A.W., Robertson C.W., Whyte C.G., He W., Vorgul I., Cairns R.A., Kellett B.J. 3D PiC code simulations for a laboratory experimental investigation of Auroral kilometric radiation mechanisms. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 2008, vol. 50, 124038-1–11. <https://doi.org/10.1088/0741-3335/50/12/124038>.
22. Higaki H., Sakurai S., Ito K., Okamoto H. Nonneutral electron plasmas confined in a compact magnetic mirror trap. *Applied Physics Express*, 2012, vol. 5, 106001-1–3. <https://doi.org/10.1143/APEX.5.106001>.
23. Leopold J.G., Krasik Ya. E., Bliokh Y.P., Schamiloglu E. Producing a magnetized low energy, high electron charge density state using a split cathode. *Physics of Plasmas*, 2020, vol. 27, 103102-1–9. <https://doi.org/10.1063/5.0022115>.
24. Timofeev I.V., Annenkov V.V., Volchok E.P., Glinskiy V.V. Electron beam–plasma discharge in GDT mirror trap: particle-in-cell simulations. *Nuclear Fusion*, 2022, vol. 62, 066033. <https://doi.org/10.1088/1741-4326/ac3cdc>.
25. Dubinov A.E., Tarakanov V.P. Particle-in-cell/Monte Carlo-simulation of the discharge in helium initiated by a relativistic electron beam in the chamber with a magnetic mirror. *Contributions to Plasma Physics*, 2022, vol. 62, 202100198-1–13. <https://doi.org/10.1002/ctpp.202100198>.

26. Borzenkov D.V., Luksha O.I. Numerical simulation of space-charge dynamics in a gyrotron trap. *Technical Physics*, 1997, vol. 42, pp. 1071–1074. <https://doi.org/10.1134/1.1258768>.
27. Ilyakov E.V., Kulagin I.S., Manuilov V.N., Shevchenko A.S. Experiments on the formation of an intense helical electron beam under conditions of picking-up of the electrons reflected from the magnetic mirror. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 2007, vol. 50, pp. 713–719. <https://doi.org/10.1007/s11141-007-0062-4>.
28. Fuks M.I., Schamiloglu E. Application of a magnetic mirror to increase total efficiency in relativistic magnetrons. *Physical Review Letters*, 2019, vol. 122, 224801-1–6. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.224801>.
29. Dubinov A.E. Features of electron dynamics in a vircator with a magnetic mirror// *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2000, vol. 45, pp. 792–796. <https://elibrary.ru/item.asp?id=14996670>.
30. Dubinov A.E., Kolesov H.N., Tarakanov V.P. Relativistic multivircator with two magnetic mirrors on underlimit electron beam: concept and PIC-simulation results. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 2022, vol. 50, pp. 4589–4595. <https://doi.org/10.1109/TPS.2022.3214995>.
31. Garkusha O.V., Zdanovich A.I., Shkol'nikov E.Ya. SVCH-generator na virtual'nom katode v magnitnoj probke [Microwave generator on a virtual cathode in a magnetic plug]. *Sb. Nauch. Tr.: Nauchnaya Sessiya MIFI [Sat. Scientific Proceedings: Scientific Session MEFH]*, 2001, vol. 7, pp. 146–147.
32. Berezin YU. A., Vshivkov V. A. Metod chastic v dinamike razrezhennoj plazme [Particle method in rarefied plasma dynamics]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1980. 95 p.
33. Bedsel CH., Lengdon A. *Fizika plazmy i chislennoe modelirovanie*. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1989. 452 p.
34. Skjæraasen O., Melatos A., Spitkovsky A. Particle-in cell simulations of a nonlinear transverse electromagnetic wave in a pulsar wind termination shock. *Astrophysical Journal*, 2005, vol. 634, pp. 542–546. <https://doi.org/10.1086/496873>.
35. Lee S.-Y., Lee† E., Kim K.-H., Seon J., Lee D.-H., Ryu K.-S. Development and test of 2.5-dimensional electromagnetic PIC simulation code. *Journal of Astronomy and Space Sciences*, 2015, vol. 32, pp. 45–50. <https://doi.org/10.5140/JASS.2015.32.1.45>.
36. Rozental R.M., Tai E.M., Tarakanov V.P., Fokin A.P. Using the 2.5-dimensional PIC code for simulating gyrotrons with nonsymmetric operating modes. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 2022, vol. 65, pp. 384–396. <https://doi.org/10.1007/s11141-023-10221-7>.
37. Tarakanov V.P. *User's Manual for Code KARAT*. Springfield, VA: Berkley Research Associates, 1992.
38. Friedman M., Ury M. Microsecond duration intense relativistic electron beams. *Review of Scientific Instruments*, 1972, vol. 43, pp. 1659–1661. <https://doi.org/10.1063/1.1685517>.
39. Donets E.D., Donets E.E., Syresin E.M., Dubinov A.E., Makarov I.V., Sadovoy S.A., Saikov S.K., Tarakanov V.P. Formation of longitudinal nonlinear structures in the electron cloud of an electron-string ion source. *Plasma Physics Reports*, 2009, vol. 35, pp. 54–61. <https://doi.org/10.1134/S1063780X09010073>.
40. Dubinov A.E., Tarakanov V.P. PIC simulation of the dynamics of electrons in a conical vircator. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 2016, vol. 44, pp. 1391–1395. <https://doi.org/10.1109/TPS.2016.2580608>.
41. Dubinov A.E., Tarakanov V.P. PIC simulation of a two-foil vircator. *Laser and Particle Beam*, 2017, vol. 35, pp. 362–365. <https://doi.org/10.1017/S0263034617000283>.
42. Ginzburg N.S., Rozental R.M., Sergeev A.S., Fedotov A.E., Zotova I.V., Tarakanov V.P. Generation of rogue waves in gyrotrons operating in the regime of developed turbulence. *Physical Review Letters*, 2017, vol. 119, 034801-1–6. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.034801>.
43. Totmeninov E.M., Klimov A.I., Konev V.Yu., Pegel I.V., Rostov V.V., Tsygankov R.V., Tarakanov V.P. Mode selection in an S-band relativistic backward wave oscillator based on a coaxial waveguide. *Technical Physics Letters*, 2014, vol. 40, pp. 152–156. <https://doi.org/10.1134/S1063785014020278>.
44. Dubinov A.E., Tarakanov V.P. Simulation of the formation of the squeezed state of an electron beam with a sub-limiting beam current in a closed drift tube. *Technical Physics*, 2020, vol. 65, pp. 1002–1005. <https://doi.org/10.1134/S1063784220060080>.
45. Dubinov A.E. The simulation of a beam-plasma discharge with the beam current exceeding the limiting vacuum current. *High Temper.*, 2004, vol. 42, pp.675–681. <https://doi.org/10.1023/B:HITE.0000046520.56858.b9>
46. Barabanov V.N., Dubinov A.E., Loiko M.V., Saikov S.K., Selemir V.D., Tarakanov V.P. Beam discharge excited by distributed virtual cathode. *Plasma Physics Reports*, 2012, vol. 38, pp. 169–178. <https://doi.org/10.1134/S1063780X12010023>.
47. Kralkina E.A., Nekhudova P.A., Nikonov A.M., Vavilin K.V., Zadiriev I.I. Mutual influence of the channels in a combined discharge based on the RF inductive and DC discharges. *Vacuum*, 2022, vol. 198, 110873-1–11. <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2022.110873>.
48. Mumtaz S., Lim J.S., Ghimire B., Lee S.W., Choi J.J., Choi E.H. Enhancing the power of high power microwaves by using zone plate and investigations for the position of virtual cathode inside the drift tube. *Physics of Plasmas*, 2018, vol. 25, 103113-1–9. <https://doi.org/10.1063/1.5043595>.

УДК 543.4

Разработка недисперсионного инфракрасного газоанализатора для измерения динамики концентраций парниковых газов

И. А. Карпов¹, И. Л. Фуфурин¹, И. Б. Винтайкин¹, Д. Р. Анфимов¹, А. П. Костерова¹,
Ю. Д. Караулова², П. П. Дёмкин¹, А. Н. Морозов¹

¹ МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, 105005, Россия;

² Центр прикладной физики МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, 105005, Россия

Контроль концентраций парниковых газов и измерение динамики концентраций является одной из фундаментальных и ключевых задач в области экологического мониторинга. Такие газы, как водяной пар, диоксид углерода, метан и другие, попадают в атмосферу вследствие как естественных природных процессов, так и антропогенной деятельности. Накопление этих газов в атмосфере усиливает парниковый эффект, который в свою очередь негативно влияет на здоровье людей, аграрную деятельность и на всю окружающую среду в целом. Именно поэтому важной задачей является разработка устройств, способных определять концентрации парниковых газов в атмосфере. Оптические методы измерений, в том числе методы недисперсионной инфракрасной спектроскопии (Nondispersive infrared, NDIR), позволяют бесконтактно и в автоматическом режиме измерять концентрации составляющих газовых смесей. Представленный в данной работе NDIR-газоанализатор регистрирует излучение на длине волны 4.26 мкм для определения концентрации диоксида углерода (также предусмотрена возможность регистрации паров воды). Полученный сигнал нормируется с помощью опорного канала, который настроен на длину волны 3.95 мкм. Для обработки экспериментальных данных была разработана математическая модель, позволяющая определять концентрации диоксида углерода в воздухе. Данная модель основывается на методах программы MATLAB и языка программирования Python. Разработанный прибор является газоанализатором открытого типа. Это позволяет использовать его в различных условиях благодаря снижению энергопотреблению. Представленное устройство может использоваться на карбоновых полигонах для контроля качества работы низкоорбитальных спутников, проводящих мониторинг парниковых газов в атмосфере.

Ключевые слова: недисперсионная инфракрасная спектроскопия; парниковые газы; газоанализатор; карбоновые полигоны.

Введение

Экологический мониторинг является одной из основных задач современного человечества. Важными направлениями в области наблюдения за окружающей средой являются измерение и контроль концентраций парниковых газов в атмосфере. Такие газы, как диоксид углерода, водяной пар, метан и другие, оказывают большое влияние на климат планеты. Парниковый эффект негативно сказывается на окружающей среде, а также на здоровье людей и аграрной деятельности [1, 2].

Для проведения мониторинга парниковых газов в атмосфере на территории Российской Федерации обустроена сеть карбоновых полигонов. Особенности экосистемы данных территорий позволяют проводить различные научные исследования и эксперименты, нацеленные на разработку и испытание новейших технологий в области контроля концентраций парниковых газов в атмосфере [3]. По данным

✉ И.А. Карпов: Ivan123121@mail.ru

Поступила в редакцию: 05.07.2024

После доработки: 23.12.2024

Принята к публикации: 24.12.2024

Министерства науки и высшего образования РФ, в настоящее время в России действует 19 карбоновых полигонов общей площадью 312939.53 га¹.

Существуют различные методы измерения концентраций парниковых газов в атмосфере. Для мониторинга малых газовых компонентов, таких как: диоксид углерода, метан, угарный газ, закись азота и другие, широко используются инфракрасные (ИК) Фурье-спектрометры. Они находят применение в наземных, самолетных и низкоорбитальных спутниковых системах [4–6]. Также для определения концентраций парниковых газов в атмосферном воздухе применимы методы комбинационного рассеяния света [7]. Помимо прочего, для мониторинга и измерения потоков газов, имеющих высокое поглощение в дальнем и среднем ИК-диапазонах, используется метод турбулентных пульсаций, заключающийся в синхронном измерении показаний анемометров и NDIR-датчиков [8].

Методы NDIR-спектроскопии основываются на законе Бугера–Ламберта–Бера, с помощью которого можно косвенно измерить концентрацию вещества в газе по интенсивности поглощения в заданной полосе ИК-спектра. При прохождении ИК-излучения через исследуемый газ молекулы этого газа поглощают часть энергии данного излучения. Данную зависимость можно представить в виде [9]:

$$I = I_0 \cdot \exp(-a_\lambda lc), \quad (1)$$

где I – интенсивность излучения, прошедшего через исследуемый газ; I_0 – исходная интенсивность излучения источника; a_λ – коэффициент для длины волны излучения λ ; l – оптический путь; c – концентрация вещества.

Методы NDIR-спектроскопии, основывающиеся на абсорбции ИК-излучения исследуемым веществом, широко применяются в области газоанализа. NDIR-газоанализаторы часто применяются для измерения концентраций CO₂ в помещениях. Повышенное содержание углекислого газа в помещениях влияет на физиологические процессы в организме человека: снижение когнитивных способностей (1000–2500 ppm CO₂), снижение частоты сердечных сокращений (1000–3000 ppm CO₂), затрудненное дыхание (0.3–0.5 % CO₂), потеря сознания (7–10 % CO₂) [10].

Также NDIR-газоанализаторы находят применение в области медицины. Данные устройства применимы при измерении концентраций углекислого газа в выдыхаемом человеком воздухе. Такие измерения позволяют производить непрерывный мониторинг состояния пациентов, находящихся в отделениях интенсивной терапии, а также исследовать скорость их метаболизма [11, 12].

Более того, NDIR-газоанализаторы применяются для контроля аграрных производственных процессов. В работе [13] представлено устройство, нацеленное на контроль выбросов таких парниковых газов, как метан и диоксид углерода на молочных фермах. Посредством использования NDIR-газоанализатора персонал фермы может выявить изъяны в своих методах управления, таких как эффективность использования кормов и органических удобрений.

Помимо прочего, датчики, основанные на методах NDIR-спектроскопии, применяются для детектирования метана. NDIR-сенсоры позволяют достичь высокой чувствительности, селективности и долговременной стабильности при обнаружении CH₄. Данные датчики можно применять в угольных шахтах, водоочистительных станциях и в сельском хозяйстве [14–16]. Для предотвращения взрывов и их последствий необходимо точно определять концентрации метана в замкнутых помещениях, так как метан является взрывоопасным в смеси с воздухом при его концентрации в диапазоне от 5 до 15 % [17].

Целью данной работы является разработка системы измерения концентраций парниковых газов в атмосферном воздухе, основывающаяся на методах NDIR-спектроскопии.

Методы

В рамках данной работы был разработан NDIR-газоанализатор. Источником ИК-излучения прибора является широкополосный излучатель, который расположен в параболическом отражателе диаметром 6 мм. Рабочая температура нагревательного элемента ИК излучателя составляет 610 ± 30 °С. Фотоприемное

¹ Карбоновые полигоны Российской Федерации // Минобрнауки России [Электронный ресурс]. URL: <https://carbon-polygons.ru/> (дата обращения: 30. 09.2024).

устройство (ФПУ) представлено в виде пироприемника с четырьмя каналами, с размерами чувствительных фотоэлементов $2.0 \cdot 2.0 \text{ мм}^2$. Каждый из четырех каналов настроен на определенные длины волн с помощью полосовых светофильтров, характеристики которых приведены в табл. 1. Особенностью данного ФПУ является его полярность: отрицательный сигнал при положительном изменении потока ИК-излучения.

Таблица 1. Характеристики светофильтров ФПУ NDIR-газоанализатора

Номер канала	1	2	3	4
Применение канала	Опорный	Диоксид углерода	Вода	Опорный
Центральная длина волны, нм	3950 ± 45	4260 ± 90	5800 ± 50	3950 ± 45

На рис. 1 приведена схема разработанного NDIR-газоанализатора. Излучатель, настроенный на широкую полосу ИК-диапазона, создает дискретный поток излучения с частотой 10 Гц. С помощью оптической системы данное излучение падает на ФПУ через открытый оптический путь длиной 300 мм между блоками излучателя и ФПУ, через который циркулирует атмосферный воздух. Данные с каждого канала считываются, и полученный сигнал нормируется на опорный канал. Для реализации метода турбулентных пульсаций полученные данные соотносят с показаниями анемометра. Для определения параметров окружающей среды, таких как влажность, температура и давление, используется блок датчиков.

На рис. 2 представлена схема экспериментальной установки. Для управления работой блоков излучателя и ФПУ используется модуль ввода / вывода аналоговых и цифровых сигналов L-Card E-502. После обработки сигнала данным модулем обработанные данные передаются в компьютер.

Для определения концентрации углекислого газа в атмосферном воздухе была разработана модель математической обработки сигнала, получаемого с помощью разработанного прибора. Разработанная математическая модель основывается на методах программ MATLAB, Origin и языка программирования Python.

Работа модуля L-Card E-502 контролируется программным кодом, написанным на языке Python. С помощью канала цифро-аналогового преобразователя (ЦАП) на блок излучателя подается переменное напряжение в виде положительного однополярного меандра с частотой 10 Гц со значениями 0 и 5 В.

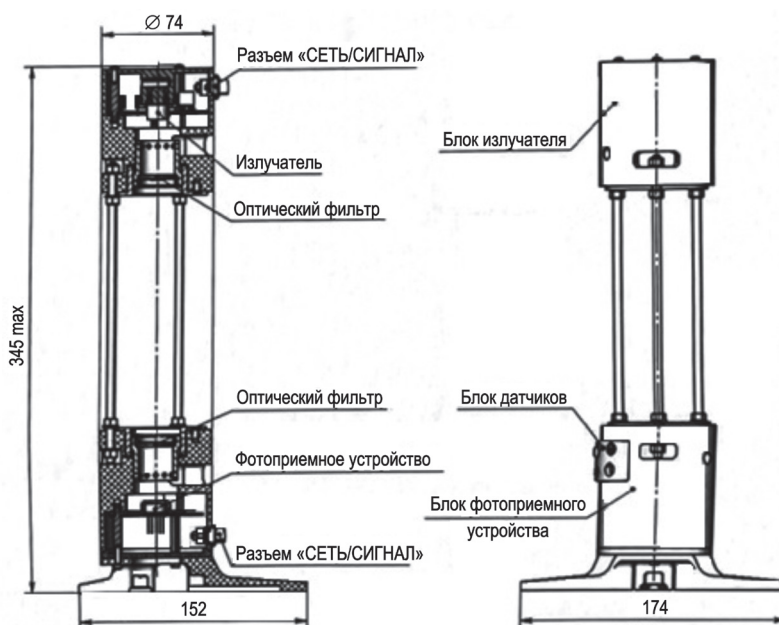


Рис. 1. Схема газоанализатора

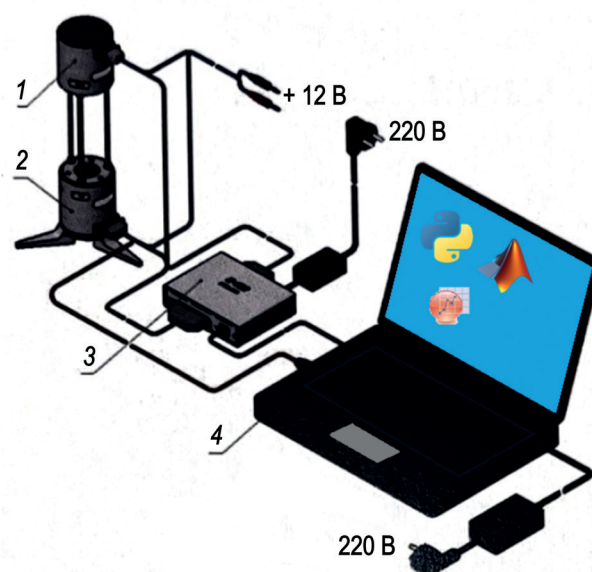


Рис. 2. Экспериментальная установка: 1 – блок излучателя, 2 – блок ФПУ, 3 – L-Card E-502, 4 – компьютер

Таким образом создается дискретное ИК излучение частотой 10 Гц (данные показатели частоты являются необходимыми для реализации метода турбулентных пульсаций). Сигнал, получаемый с блока ФПУ попадает на компьютер с помощью каналов аналого-цифрового преобразователя (АЦП). По полученным массивам данных можно косвенно оценить концентрацию CO_2 в окружающем воздухе. Разработанный прибор является газоанализатором открытого типа, способный измерять концентрации газов in-situ. Энергопотребление таких газоанализаторов снижено, благодаря тому что для их работы не требуется насос. Искажение данных такими газоанализаторами мало. В основном оно вызывается вследствие потери данных из-за осадков, осреднения в оптическом тракте и пространственного разделения с анемометром [18].

Теоретически рассчитанное соотношение сигнал/шум (SNR) разработанного NDIR-газоанализатора составляет $10^4 \div 10^5$, соответствующее чувствительности $10 \div 100$ ppb. Проведение эксперимента по подтверждению теоретических значений является задачей для дальнейших исследований.

Проведение экспериментов и результаты

Для определения зависимости между показаниями прибора и концентрацией углекислого газа в окружающем воздухе был проведен эксперимент, в котором разработанный NDIR-газоанализатор был помещен в герметично закрытый бокс. Лабораторная установка представлена на рис. 3.

В ходе данного эксперимента генератор сигналов создавал меандр, подаваемый на излучатель. Lcard E-502 был использован только на считывание данных с помощью каналов АЦП, сигнал с которых представлен на рисунке 4. По полученным блокам данных были рассчитаны значения, пропорциональные оптической плотности, посчитанные как натуральный логарифм со знаком минус от отношения интенсивностей второго и опорного каналов. Было снято два блока данных для двух заведомо известных газовых смесей: 1) продувка бокса азотом – точка с концентрацией CO_2 0 ppm; 2) продувка бокса углекислым газом для установки концентрации углекислого газа 600 ppm. По полученным точкам была построена тарировочная кривая с помощью метода линейной интерполяции программы Origin (рис. 5).

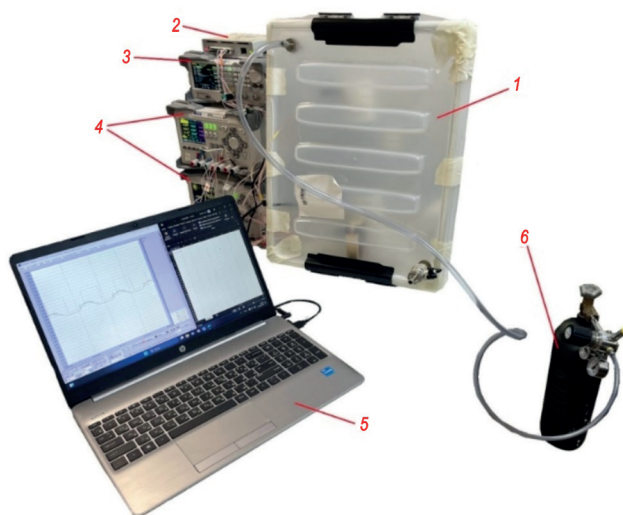


Рис. 3. Лабораторная установка: 1 – бокс, 2 – L-Card E-502, 3 – генератор сигналов, 4 – источники питания, 5 – компьютер, 6 – баллон с азотом

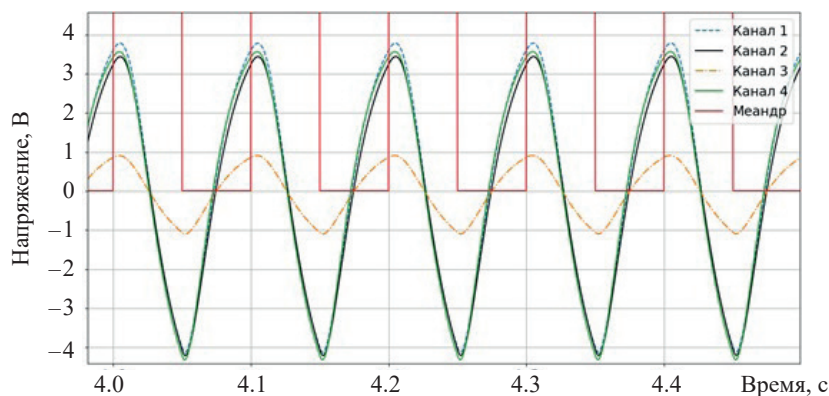


Рис. 4. Вид сигнала, получаемого с АЦП L-Card E-502

Далее приведено уравнение полученной тарировочной кривой (формула 2):

$$c = 5298.36 \cdot D + 8.99, \quad (2)$$

где $D = -\ln(I_2/I_4)$ – показания с NDIR-газоанализатора, c – показания NDIR-газоанализатора переведенные в единицы концентрации CO_2 в ppm.

Опираясь на полученную формулу, можно проводить оценку концентрации углекислого газа в атмосферном воздухе.

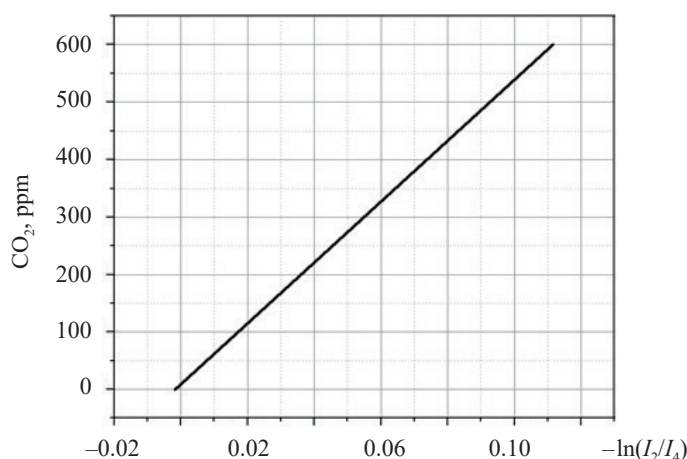


Рис. 5. Тарировочная кривая NDIR газоанализатора. I_2 и I_4 – интенсивности со второго и опорного каналов соответственно

Обсуждение

В настоящей работе был представлен NDIR-газоанализатор открытого типа, источником ИК-излучения которого является широкополосный излучатель. Разработанное устройство имеет четырехканальный пироприемник в качестве ФПУ. Каждый из чувствительных каналов настроен на определенные диапазоны длин волн:

- пары воды – 5800 ± 50 нм;
- углекислый газ – 4260 ± 90 нм;
- опорные – 3950 ± 45 нм.

Для обеспечения работы NDIR газоанализатора была разработана математическая модель, основанная на методах языка программирования Python, а также программ MATLAB и Origin.

Значение SNR, рассчитанное на основе характеристик ФПУ и излучателя, флуктуирует в диапазоне от 10^4 до 10^5 , что соответствует чувствительности от 10 до 100 ppb. Экспериментальное подтверждение данных значений является задачей для будущих исследований.

Был проведен эксперимент по вычислению тарировочной кривой. Используя зависимость, описывающую данную кривую, можно преобразовывать показания с разработанного NDIR-газоанализатора в показания концентрации CO_2 в атмосферном воздухе.

Помимо прочего, предстоящей задачей является проведение экспериментов, основывающихся на методе турбулентных пульсаций, на карбоновом полигоне. Показания, получаемые с разработанного NDIR-газоанализатора, будут сопоставляться с показаниями анемометра для осуществления методов модели eddy covariance.

Финансирование

Работа выполнена в рамках реализации программы стратегического академического лидерства «Приоритет-2030», утвержденных постановлением Правительства Российской Федерации от 13 мая 2021 г. № 729.

Вклад авторов

Карпов И.А. – выполнение экспериментальных работ, обработка результатов, подготовка текста статьи, подбор литературных источников.

Фуфурин И.Л. – формулировка идеи и целей исследования, постановка задачи, выбор методов исследования.

Винтайкин И.Б. – участие в проведении исследования и обсуждении результатов.

Анфимов Д.Р. – участие в проведении исследования и обсуждении результатов.

Костерова А.П. – разработка математической модели, выполнение измерений, анализ экспериментальных данных, выявление закономерностей, редактирование текста статьи.

Караулова Ю.Д. – разработка макета газоанализатора.

Дёмкин П.П. – постановка эксперимента.

Морозов А.Н. – формулировка идеи и целей исследования, постановка задачи, выбор методов исследования.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Список литературы

1. Mikhaylov A., Moiseev N., Aleshin K., Burkhardt T. Global climate change and greenhouse effect. // *Entrepreneurship and Sustainability Issues*, 2020. V. 7. № 4. P. 2897–2913. [http://doi.org/10.9770/jesi.2020.7.4\(21\)](http://doi.org/10.9770/jesi.2020.7.4(21))
2. Забураева Х.Ш., Керимов И.А., Романова О.С., Широкова В.А. Аналитический обзор: причины и последствия глобальных изменений климата. // *Труды Института геологии Дагестанского научного центра РАН*, 2021. № 4. С. 103–111. <http://doi.org/10.33580/2541-9684-2021-87-4-103-111>
3. Керимов И.А., Эльжаев А.С., Додуев А.А. Геофизические исследования на карбоновом полигоне Чеченской Республики. // *Геология и Геофизика Юга России*, 2023. Т. 13. № 3. С. 49–62. <https://doi.org/10.46698/VNC.2023.42.75.004>
4. Виролайнен Я.А. Методические аспекты определения содержания углекислого газа в атмосфере с помощью ИК-Фурье-спектроскопии. // *Журнал прикладной спектроскопии*, 2018. Т. 85. № 3. С. 453–460.
5. Асташкин А.А., Карелин А.В., Комиссарова И.Н., Кузьмин Ю.А., Шувалов В.А., Яковлев А.А. Обзор орбитальных группировок космических аппаратов оперативного метеонаблюдения // *Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ*, 2021. Т. 181. № 2. С. 24–55.
6. Mayorova V., Morozov, A., Golyak, I., Golyak, I., Lazarev, N., Melnikova, V., Rachkin D., Svirin V., Tenenbaum S., Vintaykin I., Anfimov D., Fufurin I. Determination of greenhouse gas concentrations from the 16U cubesat spacecraft using fourier transform infrared spectroscopy // *Sensors*, 2023. V. 23. № 15. P.6794. <https://doi.org/10.3390/s23156794>
7. Петров Д.В., Матросов И.И., Сединкин Д.О., Заринов А.Р. Определение концентрации углекислого газа в атмосферном воздухе с помощью спектроскопии кр. // *Двенадцатое Сибирское совещание и школа молодых ученых по климато-экологическому мониторингу*, 2017. С. 225–226.
8. Ким Д.В., Зеневич С.Г., Газизов И.Ш., Спиридонов М.В., Родин, А.В. Разработка портативного газоанализатора для проведения измерений потоков CO₂, CH₄ и H₂O методом турбулентных пульсаций. // *Оптика атмосферы и океана. Физика атмосферы*, 2022. С. В186–В189. <http://doi.org/10.56820/OAOPA.2022.25.48.001>
9. Мальцев А.А. Молекулярная спектроскопия. // М.:Изд-во МГУ, 1980. 272 с.
10. Dinh T.V., Lee J.Y., Ahn J.W., Kim J.C. Development of a wide-range non-dispersive infrared analyzer for the continuous measurement of CO₂ in indoor environments. // *Atmosphere*, 2020. V. 11. № 10. P. 1024. <https://doi.org/10.3390/atmos11101024>
11. Vincent T.A., Gardner J.W. A low cost MEMS based NDIR system for the monitoring of carbon dioxide in breath analysis at ppm levels // *Sensors and Actuators B: Chemical*, 2016. V. 236. P. 954–964. <https://doi.org/10.1016/j.snb.2016.04.016>
12. Xu M., Xu Y., Tao J., Li Y., Kang Q., Shu D., Li T., Liu Y. A design of an ultra-compact infrared gas sensor for respiratory quotient (qCO₂) detection // *Sensors and Actuators A: Physical*, 2021. V. 331. P. 112953. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2021.112953>
13. Li Q., He Y., Zhao K., Ji J., Li. H., Bewley J. Development and Testing of NDIR-Based Rapid Greenhouse Gas Detection Device for Dairy Farms. // *Sustainability*, 2024. V. 16. № 5. P. 2131. <https://doi.org/10.3390/su16052131>
14. Fu L., You S., Li G., Fan Z. Enhancing methane sensing with NDIR technology: Current trends and future prospects. // *Reviews in Analytical Chemistry*, 2023. V. 42. № 1. P. 20230062. <https://doi.org/10.1515/revac-2023-0062>
15. Ab Latif F.N.B., Yaacob M. Detection of Methane Gas Using Absorption Spectroscopy Technique in Non-Dispersive Infrared (NDIR) Region. // *Evolution in Electrical and Electronic Engineering*, 2022. V. 3. № 2. P. 25–34. <https://doi.org/10.30880/eeee.2022.03.02.004>
16. Karacan C.Ö., Ruiz F.A., Cotè M., Phipps S. Coal mine methane: a review of capture and utilization practices with benefits to mining safety and to greenhouse gas reduction. // *International journal of coal geology*, 2011. V. 86. № 2–3. P. 121–156. <https://doi.org/10.1016/j.coal.2011.02.009>
17. Бурба Г.Г., Курбатова Ю.А., Куричева О.А., Авилов В.К., Мамкин В.В. Метод турбулентных пульсаций. // *Краткое практическое руководство. Москва: ИПЭЭ им. А.Н Северцова РАН*, 2016, С. 11–27.

Development of a non-dispersive infrared gas analyzer for measuring the dynamics of greenhouse gases concentrations

**I. A. Karpov^{1,✉}, I. L. Fufurin¹, I. B. Vintaykin¹, D. R. Anfimov¹, A. P. Kosterova¹, J. D. Karaulova²,
P. P. Demkin¹, A. N. Morozov¹**

¹ Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia;

² Center for Applied Physics Bauman MSTU, Moscow, 105005, Russia.

✉ Ivan123121@mail.ru

Received July 5, 2024; revised December 23, 2024; accepted December 24, 2024

Monitoring of the greenhouse gases concentrations and their dynamics is a fundamental and crucial task in environmental monitoring. Gases such as water vapor, carbon dioxide, methane, and others enter the atmosphere through both natural processes and anthropogenic activities. The accumulation of these gases enhances the greenhouse effect, negatively impacting human health, agriculture, and the environment as a whole. Therefore, the development of devices capable of determining atmospheric greenhouse gas concentrations is vital. Optical measurement methods, including nondispersive infrared (NDIR) spectroscopy, offer non-contact and automated measurement of gaseous mixture components. The NDIR gas analyzer presented in this work registers radiation at a wavelength of 4.26 μm to determine carbon dioxide concentration (with provision for water vapor detection). The resulting signal is normalized using a reference channel tuned to 3.95 μm . The mathematical model, developed using MATLAB and Python programming languages, processes the experimental data to determine atmospheric carbon dioxide concentrations. The developed device is an open-path gas analyzer, enabling its use in diverse environments due to its reduced power consumption. This instrument is applicable for carbon polygon monitoring and for quality control of low-Earth orbit satellites performing atmospheric greenhouse gases monitoring.

Keywords: non-dispersive infrared spectroscopy; greenhouse gases; gas analyzer, carbon polygons.

References

1. Mikhaylov A., Moiseev N., Aleshin K., Burkhardt T. Global climate change and greenhouse effect. *Entrepreneurship and Sustainability Issues*, 2020, vol. 7, no. 4, pp. 2897–2913. doi: [http://doi.org/10.9770/jesi.2020.7.4\(21\)](http://doi.org/10.9770/jesi.2020.7.4(21))
2. Zaburaeva Kh.Sh., Kerimov I.A., Romanova O.S., Shirokova V.A. Analiticheskij obzor: prichiny i posledstviya global'nyh izmenenij klimata [Analytical review: causes and consequences of global climate change]. *Trudy Instituta geologii Dagestanskogo nauchnogo centra RAN*, 2021, no. 4, pp. 103–111 (in Russian). doi: <http://doi.org/10.33580/2541-9684-2021-87-4-103-111>
3. Kerimov I.A., El'zhaev A.S., Doduev A.A. Geofizicheskie issledovaniya na karbonovom poligone Chechenskoj Respubliki [Geophysical research at the carbon polygon of the Chechen Republic]. *Geologiya i Geofizika Yuga Rossii*, 2023, vol. 13, no. 3, pp. 49–62. (In Russian). doi: <https://doi.org/10.46698/VNC.2023.42.75.004>
4. Virolajnen Ya.A. Metodicheskie aspekty opredeleniya sodержaniya uglekislogo gaza v atmosfere s pomoshch'yu IK-Fur'e-spektroskopii [Methodological aspects of determining the carbon dioxide content in the atmosphere using Fourier transform infrared spectroscopy]. *Zhurnal prikladnoj spektroskopii*, 2018, vol. 85, no. 3, pp. 453–460 (in Russian).
5. Astashkin A.A., Karelin A.V., Komissarova I.N., Kuz'min Yu.A., Shuvalov V.A., Yakovlev A.A. Obzor orbital'nyh gruppirovok kosmicheskikh apparatov operativnogo meteonablyudeniya [Review of orbital constellations of operational weather observation spacecraft]. *Voprosy elektromekhaniki. Trudy VNIIEM*, 2021, vol. 181, no. 2, pp. 24–55 (in Russian).
6. Mayorova V., Morozov A., Golyak I., Golyak I., Lazarev N., Melnikova V., Rachkin D., Svirin V., Tenenbaum S., Vintaykin I., Anfimov D., Fufurin I. Determination of greenhouse gas concentrations from the 16U cubesat spacecraft using fourier transform infrared spectroscopy. *Sensors*, 2023, vol. 23, no. 15, 6794 p. doi: <https://doi.org/10.3390/s23156794>
7. Petrov D.V., Matrosov I.I., Sedinkin D.O., Zaripov A.R. Opredelenie koncentracii uglekislogo gaza v atmosfernom vozduhe s pomoshch'yu spektroskopii kr [Determination of carbon dioxide concentration in atmospheric air using Raman

- spectroscopy]. Dvenadcatoe Sibirskoe soveshchanie i shkola molodyh uchenykh po klimato-ekologicheskomu monitoringu, 2017, pp. 225–226. (In Russian).
8. Kim D.V., Zenevich S.G., Gazizov I.SH., Spiridonov M.V., Rodin, A.V. Razrabotka portativnogo gazoanalizatora dlya provedeniya izmerenij potokov CO₂, CH₄ i H₂O metodom turbulentnykh pul'sacij [Development of a portable gas analyzer for measuring CO₂, CH₄ and H₂O flows using the turbulent pulsation method]. Optika atmosfery i okeana. Fizika atmosfery, 2022, pp. B186-B189. (In Russian). doi: <http://doi.org/10.56820/OAOPA.2022.25.48.001>
9. Mal'cev A.A. Molekulyarnaya spektroskopiya [Molecular spectroscopy]. Moscow, Izd-vo MGU Publ., 1980, 272 p.
10. Dinh T.V., Lee J.Y., Ahn J.W., Kim J.C. Development of a wide-range non-dispersive infrared analyzer for the continuous measurement of CO₂ in indoor environments. Atmosphere, 2020, vol. 11, no. 10, 1024 p. doi: <https://doi.org/10.3390/atmos11101024>
11. Vincent T.A., Gardner J.W. A low cost MEMS based NDIR system for the monitoring of carbon dioxide in breath analysis at ppm levels. Sensors and Actuators B: Chemical, 2016, vol. 236, pp. 954–964. doi: <https://doi.org/10.1016/j.snb.2016.04.016>
12. Xu M., Xu Y., Tao J., Li Y., Kang Q., Shu D., Li T., Liu Y. A design of an ultra-compact infrared gas sensor for respiratory quotient (qCO₂) detection. Sensors and Actuators A: Physical, 2021, vol. 331, 112953 p. doi: <https://doi.org/10.1016/j.sna.2021.112953>
13. Li Q., He Y., Zhao K., Ji J., Li. H., Bewley J. Development and Testing of NDIR-Based Rapid Greenhouse Gas Detection Device for Dairy Farms. Sustainability, 2024, vol. 16, no. 5, 2131 p. doi: <https://doi.org/10.3390/su16052131>
14. Fu L., You S., Li G., Fan Z. Enhancing methane sensing with NDIR technology: Current trends and future prospects. Reviews in Analytical Chemistry, 2023, vol. 42, no. 1, 20230062 p. doi: <https://doi.org/10.1515/revac-2023-0062>
15. Ab Latif F.N.B., Yaacob M. Detection of Methane Gas Using Absorption Spectroscopy Technique in Non-Dispersive Infrared (NDIR) Region. Evolution in Electrical and Electronic Engineering, 2022, vol. 3, no. 2, pp. 25–34. doi: <https://doi.org/10.30880/eeee.2022.03.02.004>
16. Karacan C.Ö., Ruiz F.A., Cotè M., Phipps S. Coal mine methane: a review` of capture and utilization practices with benefits to mining safety and to greenhouse gas reduction. International journal of coal geology, 2011, vol. 86, no. 2–3, pp. 121–156. doi: <https://doi.org/10.1016/j.coal.2011.02.009>
17. Burba G.G., Kurbatova YU.A., Kuricheva O.A., Avilov V.K., Mamkin V.V. Metod turbulentnykh pul'sacij. Kratkoe prakticheskoe rukovodstvo [Turbulent pulsation method. A short practical guide]. Moskva: IPEE im. AN Severtsova RAN, 2016, pp. 11–27 (in Russian).

УДК 517.9

Нелинейное уравнение Шредингера общего вида: многофункциональная модель, редукции и точные решения

А. Д. Полянин¹, Н. А. Кудряшов²¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия² Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

Представлена новая математическая модель, основанная на нелинейном уравнении Шредингера с шестью произвольными функциями и позволяющая учитывать различные факторы. Эта многофункциональная модель является обобщением более простых родственных нелинейных моделей, которые часто встречаются в различных разделах теоретической физики, включая нелинейную оптику, сверхпроводимость и физику плазмы. Для анализа рассматриваемого нелинейного уравнения используется комбинация метода функциональных связей и методов обобщенного разделения переменных. Описаны одномерные несимметричные редукции, приводящие исследуемое сложное уравнение в частных производных к более простым обыкновенным дифференциальным уравнениям или системам таких уравнений. Найден ряд точных решений нелинейного уравнения Шредингера общего вида, которые выражаются в квадратурах или элементарных функциях. Получены периодические решения как по времени, так и по пространственной переменной. Особое внимание уделено некоторым более узким классам уравнений с меньшим числом произвольных функций. Описанная общая многофункциональная модель путем конкретизации вида произвольных функций позволяет эффективно анализировать многочисленные более простые модели и находить их точные решения. Полученные в данной работе точные решения могут использоваться в качестве тестовых задач, предназначенных для проверки адекватности и оценки точности численных и приближенных аналитических методов интегрирования нелинейных уравнений математической физики.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, нелинейные УЧП общего вида, нелинейная оптика, точные решения, решения в квадратурах, решения с обобщенным разделением переменных, несимметричные редукции.

1. Введение

Классическое уравнение Шредингера и родственные уравнения

Во многих разделах теоретической физики встречаются нелинейные уравнения Шредингера вида

$$iu_t + au_{xx} + f(|u|)u = 0, \quad (1)$$

где $u(x, t)$ – искомая комплекснозначная функция действительных аргументов, t – время, x – пространственная переменная, a – параметр уравнения, $f(|u|)$ – функция потенциала (в нелинейной оптике эта функция определяет закон взаимодействия светового импульса с материалом волокна), i – мнимая единица ($i^2 = -1$).

Классическое нелинейное уравнение Шредингера [1–6] является важным специальным случаем уравнения (1) при $f(|u|) = k|u|^2$. Это уравнение используется для математического моделирования рас-

✉ А. Д. Полянин: polyanin@ipmnet.ru
Н. А. Кудряшов: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию: 5.12.2024
После доработки: 21.12.2024
Принята к публикации: 24.12.2024

пространения волн в нелинейной оптике, теории сверхпроводимости, физике плазмы и других разделах теоретической физики, где рассматриваются нелинейные волновые процессы. Теоретическое и экспериментальное обоснование использования классического нелинейного уравнения Шредингера в нелинейной оптике дано в [7–10]. При описании распространения импульсов в оптическом волокне выражение со второй производной отвечает за дисперсию импульса, квадратичная функция $f(|u|) = k|u|^2$, называемая керровской нелинейностью, характеризует взаимодействие светового импульса с материалом волокна и определяет зависимость коэффициента преломления света в нелинейной среде. Классическое нелинейное уравнение Шредингера, являясь базовым уравнением для нелинейной оптики, относится к классу интегрируемых уравнений в частных производных (УрЧП) [5]. Это уравнение имеет бесконечное число законов сохранения, преобразования Бэклунда и проходит тест Пенлеве [4, 5, 11–13]. Задача Коши для уравнения (1) при $f(|u|) = k|u|^2$ с начальным условием общего вида решается методом обратной задачи рассеяния [4, 5]. Точные решения классического нелинейного уравнения Шредингера (1) приведены, например, в [14–16].

Точные решения уравнения (1) в случае степенной зависимости $f(|u|) = k|u|^n$ рассматривались, например, в [14–16]. В теории плазмы и лазерной физике встречается уравнение (1) с $f(|u|) = k(1 - e^{a|u|})$ (см., например, [17]). Точные решения нелинейного уравнения Шредингера (1) для произвольной функции $f(|u|)$ приведены в [14, 16].

Родственные и более сложные нелинейные уравнения типа Шредингера, которые встречаются в литературе, можно найти, например, в [14–16, 18–33].

Точные решения нелинейных уравнений в частных производных (терминология)

В данной статье под точными решениями уравнений в частных производных понимаются [34]:

- a) решения, которые выражаются через элементарные функции;
- b) решения, которые выражаются в квадратурах, т. е. через элементарные функции, функции, входящие в уравнение (это необходимо, если уравнение содержит произвольные или специальные функции) и неопределенные интегралы;
- c) решения, которые выражаются через решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или систем таких уравнений.

Допускаются также различные комбинации решений, описанных в пп. (a)–(c). В случаях (a) и (b) точное решение может быть представлено в явной, неявной или параметрической форме.

Важно отметить, что точные решения являются математическими эталонами, которые часто используются в качестве тестовых задач для проверки адекватности и оценки точности численных методов интегрирования нелинейных уравнений в частных производных. Наиболее предпочтительными для этих целей являются простые решения из пп. (a) и (b). Несколько таких и более сложных точных решений описано далее в данной статье.

2. Нелинейное уравнение Шредингера общего вида. Преобразование к системе действительных УрЧП

Нелинейное уравнение Шредингера общего вида

В данной работе будет исследоваться многофункциональное нелинейное уравнение Шредингера весьма общего вида

$$iu_t + [f(|u|)u]_{xx} + \frac{[g(|u|)]_{xx}}{|u|}u + h(|u|)u_x + p(|u|)u + i[q(|u|)u_x + r(|u|)u] = 0, \quad (2)$$

где $u = u(x, t)$ – искомая комплекснозначная функция действительных аргументов, $f = f(\rho)$, $g = g(\rho)$, $h = h(\rho)$, $p = p(\rho)$, $q = q(\rho)$, $r = r(\rho)$ – произвольные действительные функции (f и g должны быть дважды непрерывно дифференцируемыми функциями, а h, p, q, r – непрерывными функциями), $i^2 = -1$.

Многофункциональное уравнение (2) является естественным обобщением многочисленных более простых родственных нелинейных уравнений (см., например, [14–16]), которые используются в различных областях теоретической физики, включая нелинейную оптику, сверхпроводимость и физику плазмы. Физический смысл мономов, входящих в уравнение (2), можно интерпретировать следующим образом. Второе слагаемое $[f(|u|)u]_{xx}$ в уравнении (2) отвечает за нелинейную дисперсию [35–37]. Третье слагаемое со второй производной $[g(|u|)]_{xx}$ обобщает широко известное резонансное выражение [38–42]. Функция $p(|u|)$ определяет потенциал. Член $q(|u|)u_x$ и остальные выражения в уравнении (2) отвечают за обострение фронта при распространении волны, которое наблюдалось в ряде экспериментов, потери при распространении волны и рассеяние за счет дифракции [43–46]. Комбинация двух последних слагаемых (с функциями q и r) в подобных уравнениях встречается в физике плазмы [14, 47].

Отметим, что уравнение (2) с двумя произвольными функциями $f=f(\rho)$ и $p=p(\rho)$ (остальные функции были равны нулю) исследовалось в [31, 32], где были получены его точные решения. Уравнение (2) при $f=\text{const}$ и двумя произвольными функциями p и r (остальные функции равны нулю) рассматривалось в [14].

Свойство уравнения (2). Если $u(x, t)$ – решение уравнения (2), то функция

$$\bar{u} = e^{iC_1} u(x + C_2, t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные действительные постоянные, также является решением данного уравнения. Из этого свойства следует, что уравнение (2) допускает точные решения типа бегущей волны вида $u = U(z)$, $z = x - \lambda t$, где λ – произвольная постоянная (более сложные решения, включающие решения типа бегущей волны, будут рассмотрены в конце разд. 4).

Преобразование уравнения Шредингера к системе действительных УрЧП

Представим искомую функцию в показательной форме

$$u = \rho e^{i\varphi}, \quad \rho = |u|, \quad (3)$$

где $\rho = \rho(x, t) \geq 0$ и $\varphi = \varphi(x, t)$ – действительные функции.

Дифференцируя (3), находим производные:

$$\begin{aligned} u_t &= (\rho_t + i\rho\varphi_t)e^{i\varphi}, \quad u_x = (\rho_x + i\rho\varphi_x)e^{i\varphi}, \\ [f(|u|)]_x &= (F_x + iF\varphi_x)e^{i\varphi}, \quad F = \rho f(\rho), \\ [f(|u|)u]_{xx} &= [F_{xx} - F\varphi_x^2 + i(2F_x\varphi_x + F\varphi_{xx})]e^{i\varphi}, \quad F = \rho f(\rho), \\ [g(|u|)]_{xx} &= [g(\rho)]_{xx}. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставим (4) в (2), а затем разделим все члены на $e^{i\varphi}$. Приравнявая далее к нулю действительную и мнимую части полученного соотношения, приходим к следующей системе двух действительных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} -\rho\varphi_t + F_{xx} - F\varphi_x^2 + [g(\rho)]_{xx} + h(\rho)\rho_x + \rho p(\rho) - \rho q(\rho)\varphi_x &= 0, \\ \rho_t + 2F_x\varphi_x + F\varphi_{xx} + \rho h(\rho)\varphi_x + q(\rho)\rho_x + \rho r(\rho) &= 0, \quad F = \rho f(\rho). \end{aligned} \quad (5)$$

Система (5) вместе с выражением (3) будут использованы далее для построения точных решений нелинейного уравнения Шредингера (2).

3. Метод функциональных связей

Поиск точных решений уравнения (2) затруднен тем, что оно содержит шесть произвольных функций: $f=f(\rho)$, $g=g(\rho)$, $h=h(\rho)$, $p=p(\rho)$, $q=q(\rho)$, $r=r(\rho)$. Для построения точных решений этого уравнения наложим на аргумент произвольных функций одно из четырех дополнительных соотношений:

$$|u| = \text{const}, \quad (6)$$

$$|u| = \xi(x), \quad (7)$$

$$|u| = \eta(t), \quad (8)$$

$$|u| = \zeta(z), \quad z = kx - \lambda t, \quad (9)$$

где $\xi(x)$, $\eta(t)$, $\zeta(z)$ – некоторые функции одного аргумента, z – переменная типа бегущей волны. При выполнении любого из первых трех соотношений (6)–(8) уравнение (2) «линеаризуется», что позволяет далее использовать стандартную процедуру разделения переменных, применяемую для линейных УрЧП [101] (или метод обобщенного разделения переменных, применяемый для нелинейных УрЧП [14, 34]). Аналогичный прием, основанный на привлечении дополнительных соотношений типа (6)–(8) и называемый *методом функциональных связей*, позволил найти много точных решений нелинейных УрЧП с запаздыванием [49–51]. Последнее соотношение (9) возникает в результате перехода от исходных переменных x , t к новым переменным z , t .

После перехода от комплексного уравнения (2) к системе действительных УрЧП (5) при построении точных решений следует использовать соотношения (6)–(8), положив в них $|u| = \rho$ (это следует из представления (3)).

4. Точные решения нелинейного уравнения Шредингера общего вида

Ниже описаны точные решения нелинейного уравнения Шредингера общего вида (2), которое содержит шесть произвольных функций: $f=f(\rho)$, $g=g(\rho)$, $h=h(\rho)$, $p=p(\rho)$, $q=q(\rho)$, $r=r(\rho)$ (рассматриваются также частные случаи, когда некоторые из этих функций специальным образом задаются). Для построения этих решений, как отмечено выше, используются дополнительные функциональные связи (6)–(9) и методы разделения переменных.

Замечание 1. Для построения точных решений нелинейного уравнения в частных производных (2) можно использовать также принцип структурной аналогии решений, который формулируется следующим образом: точные решения более простых уравнений могут служить основой для построения решений более сложных родственных уравнений (см., например, [51, 52]). А именно, в данном случае для построения точных решений уравнения (2) можно взять за основу структуру известных точных решений более простого родственного уравнения с одной произвольной функцией (1) (эти вспомогательные точные решения приведены, например, в [14, 16]).

Решения типа бегущей волны с постоянной амплитудой

Используем простейшее дополнительное соотношение (6), положив $|u| = \rho = C_1$. В этом случае система (5) имеет простое точное решение

$$\rho = C_1, \quad \varphi = Ax + Bt + C_2, \quad (10)$$

где C_1 , C_2 – произвольные действительные постоянные ($C_1 > 0$), а константы A и B определяются по формулам

$$A = -\frac{r(C_1)}{h(C_1)}, \quad B = p(C_1) - A^2 f(C_1) - Aq(C_1). \quad (11)$$

Здесь считается, что $h(C_1) \neq 0$.

В специальном случае, когда $h(\rho) = r(\rho) \equiv 0$, система (5) также допускает точное решение вида (10), где A – произвольная постоянная, а B находится с помощью второй формулы (11).

Подставив (10) в (3), получим решение типа бегущей волны рассматриваемого нелинейного уравнения (2):

$$\begin{aligned} u &= C_1 e^{i(Ax+Bt+C_2)}, \\ B &= p(C_1) - A^2 f(C_1) - Aq(C_1), \end{aligned} \quad (12)$$

где константа A определяется по первой формуле (11) (если $h(C_1) \neq 0$) или A – произвольная действительная постоянная (если $h(C_1) = r(C_1) \equiv 0$). Решение (12) является периодическим по пространству и времени с постоянной амплитудой C_1 . Отметим, что третье слагаемое в уравнении (2) на этом решении обращается в нуль.

Периодические по времени решения с амплитудой, зависящей от пространственной переменной

Используя дополнительное соотношение (7), можно показать, что система (5) допускает более сложное, чем (10), периодическое по времени t точное решение

$$\rho = \rho(x), \quad \varphi = C_1 t + \theta(x), \quad (13)$$

где C_1 – произвольная постоянная, а функции $\rho = \rho(x)$ и $\theta = \theta(x)$ описываются системой ОДУ

$$\begin{aligned} F''_{xx} + [g(\rho)]''_{xx} - F(\theta'_x)^2 + h(\rho)\rho'_x - \rho q(\rho)\theta'_x + \rho p(\rho) - C_1 \rho &= 0, \\ F\theta''_{xx} + 2F'_x \theta'_x + \rho h(\rho)\theta'_x + q(\rho)\rho'_x + \rho r(\rho) &= 0, \quad F = \rho f(\rho). \end{aligned} \quad (14)$$

В общем случае подстановка $\xi = \theta'_x$ позволяет понизить порядок этой системы на единицу.

Пусть $h(\rho) = r(\rho) \equiv 0$. В этом частном случае второе уравнение (14) допускает первый интеграл

$$F^2 \theta'_x + \int q(\rho) F d\rho = C_2, \quad (15)$$

где C_2 – произвольная постоянная. Исключив θ'_x из первого уравнения (14) с помощью (15), можно получить одно ОДУ для функции $\rho = \rho(x)$. В частности, при $C_2 = 0$ это уравнение записывается так:

$$\begin{aligned} [F + g(\rho)]''_{xx} - F^{-3} I^2 + \rho q(\rho) F^{-2} I + \rho p(\rho) - C_1 \rho &= 0, \\ F &= \rho f(\rho), \quad I = \int q(\rho) F d\rho. \end{aligned} \quad (16)$$

Для дальнейшего анализа нелинейное ОДУ второго порядка (16) удобно представить в компактной форме

$$[\Phi(\rho)]''_{xx} = \Psi(\rho), \quad (17)$$

где использованы обозначения

$$\Phi(\rho) = F + g(\rho), \quad \Psi(\rho) = F^{-3} I^2 - \rho q(\rho) F^{-2} I - \rho p(\rho) + C_1 \rho. \quad (18)$$

Нетрудно проверить, что уравнение (17) допускает первый интеграл

$$[\Phi'_\rho(\rho)\rho'_x]^2 = 2 \int \Psi(\rho) \Phi'_\rho(\rho) d\rho + C_3, \quad (19)$$

который после разрешения относительно производной ρ'_x приводится к ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными. Интегрируя это уравнение, получим общее решение уравнения (17) в неявном виде:

$$\int \Phi'_p(\rho) [2 \int \Psi(\rho) \Phi'_p(\rho) d\rho + C_3]^{-1/2} d\rho = C_4 \pm x, \quad (20)$$

где C_3 и C_4 – произвольные постоянные.

Подставив в (20) функции $\Phi(\rho)$ и $\Psi(\rho)$, которые определены в (18), можно найти общее решение нелинейного ОДУ второго порядка (16).

Решения с обобщенным разделением переменных, амплитуда которых зависит от времени

1. *Общий случай.* Используя дополнительное соотношение (8), можно показать, что в общем случае система (5) допускает периодическое по пространственной координате x точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = C_1 x + a(t), \quad (21)$$

где C_1 – произвольная постоянная, а функции $\rho = \rho(t)$ и $a = a(t)$ описываются системой автономных ОДУ первого порядка

$$\begin{aligned} a'_t + C_1^2 f(\rho) - p(\rho) + C_1 q(\rho) &= 0, \\ \rho'_t + C_1 \rho h(\rho) + \rho r(\rho) &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Поскольку второе уравнение системы (22) является изолированным (т. е. оно не зависит от первого уравнения), общее решение этой системы удастся выразить в квадратурах

$$\begin{aligned} \int \frac{d\rho}{\rho [C_1 h(\rho) + r(\rho)]} &= C_2 - t, \\ a(t) &= \int [p(\rho) - C_1^2 f(\rho) - C_1 q(\rho)] dt + C_3, \end{aligned} \quad (23)$$

где функция $\rho = \rho(t)$ задана в неявном виде, а C_2 и C_3 – произвольные постоянные.

Отметим, что третье слагаемое в уравнении (2) на решении (3) с функциями (21) обращается в нуль.

2. *Специальный случай* $h(\rho) \equiv 0$. Используя дополнительное соотношение (8), покажем, что система (5) при $h(\rho) \equiv 0$ допускает точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = a(t)x^2 + b(t)x + c(t). \quad (24)$$

Для этого подставим (24) в (5). В результате первое уравнение системы приводится к квадратному уравнению относительно x , коэффициенты которого зависят от времени. Приравнявая нулю функциональные коэффициенты этого квадратного уравнения и добавляя второе уравнение системы, которое в данном случае зависит только от t , получим следующую систему, состоящую из четырех ОДУ автономного вида:

$$\begin{aligned} a'_t &= -4a^2 f(\rho), \\ b'_t &= -4abf(\rho) - 2aq(\rho), \\ c'_t &= -b^2 f(\rho) - bq(\rho) + p(\rho), \\ \rho'_t &= -2apf(\rho) - \rho r(\rho). \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь первые три уравнения были сокращены на ρ .

Отметим, что третье слагаемое в уравнении (2) на решении (3) с функциями (24) обращается в нуль.

Первое и последнее уравнения системы (25) образуют независимую подсистему уравнений. Исключив из этих двух уравнений t , можно получить одно нелинейное ОДУ первого порядка, которое является уравнением Абеля второго рода относительно искомой функции $a = a(\rho)$. Большой список разрешимых ОДУ этого вида можно найти в справочнике [53].

Рассмотрим подробнее частный случай $r(\rho) \equiv 0$. Из первого и четвертого уравнения системы (25) при $r(\rho) \equiv 0$ получим интеграл

$$a = C_1 \rho^2, \quad (26)$$

где C_1 – произвольная постоянная. Подставим выражение (26) в первое уравнение (25). Интегрируя полученное ОДУ, находим зависимость $\rho = \rho(t)$ в неявной форме

$$\int \frac{d\rho}{\rho^3 f(\rho)} = -2C_1 t - C_2, \quad (27)$$

где C_2 – произвольная постоянная. Второе ОДУ системы (25) является линейным относительно b , а третье ОДУ – линейным относительно c . Последовательно интегрируя эти уравнения, имеем

$$\begin{aligned} b &= C_3 E(t) - 2E(t) \int \frac{aq(\rho)}{E(t)} dt, \quad E(t) = \exp\left(-4 \int af(\rho) dt\right); \\ c &= \int [p(\rho) - b^2 f(\rho) - bq(\rho)] dt + C_4, \end{aligned} \quad (28)$$

где C_3 и C_4 – произвольные постоянные, а функции $a = a(t)$ и $\rho = \rho(t)$ определяются по формулам (26) и (27).

Решения, представляющие собой нелинейные суперпозиции бегущих волн

Система (5) допускает точные решения вида

$$\rho = \rho(z), \quad \varphi = C_1 t + C_2 x + \theta(z), \quad z = x - \lambda t, \quad (29)$$

где C_1, C_2, λ – произвольные постоянные, которые обобщает решение (13). Частному случаю $C_1 = C_2 = 0$ в (29) соответствует решение типа бегущей волны.

Подставив (29) в (5), получим нелинейную систему, состоящую из двух ОДУ:

$$\begin{aligned} -\rho(C_1 - \lambda \theta'_z) + F''_{zz} - F(C_2 + \theta'_z)^2 + [g(\rho)]''_{zz} + h(\rho)\rho'_z + \rho p(\rho) - \rho q(\rho)(C_2 + \theta'_z) &= 0, \\ -\lambda \rho'_z + 2F'_z(C_2 + \theta'_z) + F\theta''_{zz} + \rho h(\rho)(C_2 + \theta'_z) + q(\rho)\rho'_z + \rho r(\rho) &= 0, \quad F = \rho f(\rho). \end{aligned} \quad (30)$$

Подстановка $\xi = \theta'_z$ позволяет понизить порядок системы ОДУ (30) на единицу.

Пусть $h(\rho) = r(\rho) \equiv 0$. В этом частном случае второе уравнение (30) допускает первый интеграл

$$F^2 \theta'_z + C_2 F^2 + \int F[q(\rho) - \lambda] d\rho = C_3, \quad (31)$$

где C_3 – произвольная постоянная. Исключив θ'_z из первого уравнения (30) с помощью (31), можно

получить одно нелинейное ОДУ для функции $\rho = \rho(z)$. Это уравнение с точностью до переобозначений независимой переменной и определяющих функций $\Phi(\rho)$ и $\Psi(\rho)$ совпадает с уравнением (17). Поэтому его общее решение можно выразить в квадратурах в неявной форме.

Замечание 2. Для физической интерпретации решения (29) удобно представить фазу φ в эквивалентной форме двумя различными способами:

$$\varphi = C_2(x - \lambda_2 t) + \theta(x - \lambda_1 t), \quad \lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = -C_1 / C_2; \quad (32)$$

$$\varphi = (C_2 + C_1 \lambda^{-1})x + \theta_1(x - \lambda t), \quad \theta_1(z) = \theta(z) - C_1 \lambda^{-1} z. \quad (33)$$

В первом случае (32) решение (29) можно интерпретировать как нелинейную суперпозицию двух бегущих волн со скоростями λ_1 и λ_2 , а во втором случае (33) – как нелинейную суперпозицию стоячей волны и бегущей волны со скоростью λ .

5. Краткие выводы

Исследуется нелинейное уравнение Шредингера общего вида, которое задается шестью произвольными функциями. Описаны одномерные редукции, приводящие рассматриваемое многофункциональное нелинейное УрЧП к более простым системам ОДУ. Найден ряд точных решений, которые выражаются в квадратурах или элементарных функциях. Построены некоторые периодические решения по времени и по пространственной переменной. Полученные решения могут использоваться в качестве тестовых задач, предназначенных для оценки точности численных и приближенных аналитических методов интегрирования нелинейных уравнений математической физики.

Финансирование

Работа выполнена по темам государственного задания (№№ госрегистрации 124012500440-9 и FSWU-2023-0031).

Вклад авторов

Полянин А.Д. – разработка математической модели, построение точных решений, подготовка текста статьи, обсуждение результатов.

Кудряшов Н.А. – разработка математической модели, построение точных решений, подготовка текста статьи, обсуждение результатов.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Список литературы

1. Агравал Г. Нелинейная волоконная оптика. М: Мир, 1996.
2. Кившарь Ю.С., Агравал Г. Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам. М: Физматлит, 2005.
3. Kodama Y., Hasegawa A. Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide // IEEE Journal of Quantum Electronics, 1987. V. 23. № 5. P. 510–524.
4. Drazin P.G., Johnson R.S. Solitons: An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
5. Ablowitz M.J., Clarkson P.A. Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
6. Kivshar Yu.S., Malomed B.A. Dynamics of solitons in nearly integrable systems // Rev. Mod. Phys., 1989. V. 63. P. 763–915.

7. Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В. Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде // Успехи физических наук, 1967. Т. 93. № 1. С. 19–70.
8. Hasegawa A., Tappert F. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion // Applied Physics Letters, 1973. V. 23. № 3. P. 142–144.
9. Hasegawa A., Tappert F. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion // Applied Physics Letters, 1973. V. 23. № 4. P. 171–172.
10. Tai K., Hasegawa A., Tomita A. Observation of modulational instability in optical fibers // Physical Review Letters, 1986. V. 56. № 2. P. 135–138.
11. Weiss J., Tabor M., Carnevale G. The Painleve property for partial differential equations // J. Math. Phys., 1982. V. 24. № 3. P. 522–526.
12. Kudryashov N.A. Painlevé analysis of the resonant third-order nonlinear Schrödinger equation // Appl. Math. Letters, 2024. V. 158. 109232.
13. Kudryashov N.A. Painlevé analysis of the Sasa–Satsuma equation // Phys. Letters A, 2024. V. 525. 129900.
14. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.
15. Al Khawaja U., Al Sakka L. Handbook of Exact Solutions to the Nonlinear Schrödinger Equations. Bristol: Institute of Physics Publ., 2019.
16. Polyanin A.D. Handbook of Exact Solutions to Mathematical Equations. Boca Raton: CRC Press–Chapman & Hall, 2025.
17. Bullough R.K. Solitons // Physics Bulletin, 1978. V. 29. № 2. P. 78–82.
18. Kudryashov N.A. A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber // Optik, 2019. V. 189. P. 42–52.
19. Kudryashov N.A. Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber // Optik, 2019. V. 194. 163060.
20. Kudryashov N.A. Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities // Optik, 2020. V. 212. 164750.
21. Kudryashov N.A. Solitary waves of the non-local Schrödinger equation with arbitrary refractive index // Optik, 2021. V. 231. 166443.
22. Kudryashov N.A. Stationary solitons of the generalized nonlinear Schrödinger equation with nonlinear dispersion and arbitrary refractive index // Applied Mathematics Letters, 2022, Vol. 128. 107888.
23. Kudryashov N.A. Almost general solution of the reduced higher-order nonlinear Schrödinger equation // Optik, 2021. V. 230. 66347.
24. Yildirim Y. Optical solitons to Schrodinger-Hirota equation in DWDM system with modified simple equation integration architecture // Optik, 2019. V. 182. P. 694–701.
25. Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Biswas A., Ekici M., Alshomrani A.S., Khan S., Zhou Q., Belic M.R. Dispersive solitons in optical fibers and DWDM networks with Schrodinger–Hirota equation // Optik, 2019. V. 199. 163214.
26. Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Alngar M.E.M., Biswas A., Moraru L., Khan S., Yildirim Y., Alshehri H.M., Belic M.R. Dispersive optical solitons with Schrodinger-Hirota model having multiplicative white noise via Ito Calculus // Physics Letters A: General, Atomic and Solid State Physics, 2022. V. 445. 128268.
27. Wang G., Kara A.H., Biswas A., Guggilla P., Alzahrani A.K., Belic M.R. Highly dispersive optical solitons in polarization-preserving fibers with Kerr law nonlinearity by Lie symmetry // Physics Letters A: General, Atomic and Solid State Physics, 2022. V. 421. 127768.
28. Biswas A., Hubert M.B., Justin M., Betchewe G., Doka S.Y., Crepin K.T., Ekici M., Zhou Q., Moshokoa S., Belic M. Chirped dispersive bright and singular optical solitons with Schrodinger–Hirota equation // Optik, 2018. V. 168. P. 192–195.
29. Zhou Q., Xu M., Sun Y., Zhong Y., Mirzazadeh M. Generation and transformation of dark solitons, anti-dark solitons and dark double-hump solitons // Nonlinear Dynamics, 2022. V. 110. № 2. P. 1747–1752.
30. Полянин А.Д., Кудряшов Н.А. Нелинейные уравнения Шредингера с запаздыванием: Точные решения, редукции и преобразования // Вестник НИЯУ МИФИ, 2024. Т. 13. № 5. С. 340–349.
31. Полянин А.Д., Кудряшов Н.А. Нелинейное уравнение Шредингера с дисперсией и потенциалом общего вида: Точные решения и редукции // Вестник НИЯУ МИФИ, 2024. Т. 13. № 6. С. 394–402.
32. Polyanin A.D., Kudryashov N.A. Closed-form solutions of the nonlinear Schrödinger equation with arbitrary dispersion and potential // Chaos, Solitons & Fractals, 2025. V. 191. 115822.
33. Polyanin A.D., Kudryashov N.A. Nonlinear Schrödinger equations with delay: Closed-form and generalized separable solutions // Contemporary Mathematics, 2024. V. 5. № 4. 5420245840.
34. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. Boca Raton–London: CRC Press, 2022.
35. Michalska M., Klein M., Dhubek M. Dissipative soliton resonance in a normal dispersion all-polarization-maintaining thulium-doped fiber laser // Optics & Laser Technology, 2025. V. 181(B). 111895.
36. Saleem Q.M., Ebrahium M.M., Aly K.A., Saddeek Y.B. Optical properties of transition metals complex films derived from hydrazone oxime for optoelectronic devices // Journal of Molecular Structure, 2025. V. 1321. № 5. 140196.

37. Choi M.-R., Hong Y., Lee Y.-R. Global existence versus finite time blowup dichotomy for the dispersion managed NLS // *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 2025. V. 251. 113696.
38. Pashaev O.K., Lee J.H. Black holes and solutions of the quantized dispersionless NLS and DNLS equations // *ANZIAM J.*, 2002. V. 44. № 1. P. 73–81.
39. Lee J.-H., Pashaev O.K., Rogers C., Schief W.K. The resonant nonlinear Schrodinger equation in cold plasma physics. Application of Backlund–Darboux transformations and superposition principles // *Journal of Plasma Physics*, 2007. V. 73. № 2. P. 257–272.
40. Lee J.-H., Pashaev O.K. Solitons of the resonant nonlinear Schrodinger equation with nontrivial boundary conditions: Hirota bilinear method // *Theoretical and Mathematical Physics*, 2007. V. 152. № 1. P. 991–1003.
41. Tala-Tebue E., Seadawy A.R. Construction of dispersive optical solutions of the resonant nonlinear Schrodinger equation using two different methods // *Modern Physics Letters B*, 2018. V. 32. № 33. 1850407.
42. Zhou Q., Wei C., Zhang H., Lu J., Yu H., Yao P., Zhu Q. Exact solutions to the resonant nonlinear Schrodinger equation with both spatio-temporal and inter-modal dispersions // *Proc. Romanian Academy, Ser. A*, 2016. V. 17. № 4. P. 307–313.
43. Eldidamony H.A., Arnous A.H., Nofal T.A., Yildirim Y. Optical soliton solutions in birefringent fibers with multiplicative white noise: an analysis for the perturbed Chen–Lee–Liu model // *Nonlinear Dynamics*, 2024. V. 112. № 24. P. 22295–22322.
44. Eslami M., Sharif A. Extended hyperbolic method to the perturbed nonlinear Chen–Lee–Liu equation with conformable derivative // *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, 2024. V. 11. 100838.
45. Lu W., Ahmad J., Akram S., Aldwoah K.A. Soliton solutions and sensitive analysis to nonlinear wave model arising in optics // *Physica Scripta*, 2024. V. 99. № 8. 085230.
46. Althrwai F.A., Alshaery A.A., Bakodah H.O., Nuruddeen R.I. Supplementary optical solitonic expressions for Gerdjikov-Ivanov equations with three Kudryashov-based methods // *Communications in Theoretical Physics*, 2024. V. 76. № 12. 125001.
47. Calogero F., Degasperis A. *Spectral Transform and Solitons: Tools to Solve and Investigate Nonlinear Evolution Equations*. Amsterdam, North Holland Publ., 1982.
48. Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E. *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*, 2nd ed. Boca Raton–London: CRC Press, 2016.
49. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014. V. 19. № 3. P. 417–430.
50. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients // *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014. V. 67. P. 267–277.
51. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I. *Delay Ordinary and Partial Differential Equations*. Boca Raton–London: CRC Press, 2024.
52. Aksenov A.V., Polyanin A.D. Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions // *Mathematics*, 2021. V. 9. № 4. 345.
53. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems*. Boca Raton–London: CRC Press, 2018.

Nonlinear Schrödinger equation of general form: multifunctional model, reductions and exact solutions

A. D. Polyanin^{1,✉}, N. A. Kudryashov^{2,✉}

1 Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526, Russia

2 National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409, Russia

✉ polyanin@ipmnet.ru

✉ nakudr@gmail.com

Received December 5, 2024; revised December 21, 2024; accepted December 24, 2024

A new mathematical model based on the nonlinear Schrödinger equation with six arbitrary functions and allowing for various factors is presented. This multifunctional model is a broad generalization of numerous simpler related nonlinear models that are commonly encountered in various areas of theoretical physics, including nonlinear optics, superconductivity, and plasma physics. To analyze the nonlinear equation under consideration, a combination of the method of functional constraints and methods of generalized separation of variables is used. One-dimensional non-symmetry reductions are described, which lead the studied complex partial differential equation to simpler ordinary differential equations or systems of such equations. A number of exact solutions of the nonlinear Schrödinger equation of general form have been found, which are expressed in quadratures or elementary functions. Both periodic solutions in time and in spatial variable are obtained. Special attention is paid to some narrower classes of nonlinear PDEs with a smaller number of arbitrary functions. The described general multifunctional model allows one to effectively analyze numerous simpler models by specifying a specific particular forms of arbitrary functions. The exact solutions obtained in this work can be used as test problems intended to check the adequacy and assess the accuracy of numerical and approximate analytical methods for integrating nonlinear equations of mathematical physics.

Keywords: nonlinear Schrödinger equation, general nonlinear PDEs, nonlinear optics, exact solutions, solutions in quadratures, generalized separable solutions, non-symmetry reductions.

References

1. Agrawal G.P. Nonlinear Fiber Optics, 4th ed. New York: Academic Press, 2007.
2. Kivshar Yu.S., Agrawal G.P. Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals. San Diego: Academic Press, 2003.
3. Kodama Y., Hasegawa A. Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide. IEEE Journal of Quantum Electronics, 1987, vol. 23, no. 5, pp. 510–524.
4. Drazin P.G., Johnson R.S. Solitons: An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
5. Ablowitz M.J., Clarkson P.A. Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
6. Kivshar Yu.S., Malomed B.A. Dynamics of solitons in nearly integrable systems. Rev. Mod. Phys., 1989, vol. 63, pp. 763–915.
7. Akhmanov S.A., Sukhorukov A.P., Khokhlov R.V. Self-focusing and diffraction of light in a nonlinear medium. Soviet Physics Uspekhi, 1968. vol. 10, no. 5, pp. 609–636.
8. Hasegawa A., Tappert F. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion. Applied Physics Letters, 1973. vol. 23, no. 3, pp. 142–144.
9. Hasegawa A., Tappert F. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion. Applied Physics Letters, 1973. vol. 23, no. 4, pp. 171–172.
10. Tai K., Hasegawa A., Tomita A. Observation of modulational instability in optical fibers. Physical Review Letters, 1986. vol. 56. No. 2, pp. 135–138.

11. Weiss J., Tabor M., Carnevale G. The Painleve property for partial differential equations. *J. Math. Phys.*, 1982. vol. 24, no. 3, pp. 522–526.
12. Kudryashov N.A. Painlevé analysis of the resonant third-order nonlinear Schrödinger equation. *Appl. Math. Letters*, 2024, vol. 158. 109232.
13. Kudryashov N.A. Painlevé analysis of the Sasa–Satsuma equation. *Phys. Letters A*, 2024, vol. 525. 129900.
14. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.
15. Al Khawaja U., Al Sakka L. *Handbook of Exact Solutions to the Nonlinear Schrödinger Equations*. Bristol: Institute of Physics Publ., 2019.
16. Polyanin A.D. *Handbook of Exact Solutions to Mathematical Equations*. Boca Raton: CRC Press–Chapman & Hall, 2025.
17. Bullough R.K. Solitons, *Physics Bulletin*, 1978, vol. 29, no. 2, pp. 78–82.
18. Kudryashov N.A. A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber. *Optik*, 2019, vol. 189, pp. 42–52.
19. Kudryashov N.A. Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber. *Optik*, 2019, vol. 194. 163060.
20. Kudryashov N.A. Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities. *Optik*, 2020, vol. 212. 164750.
21. Kudryashov N.A. Solitary waves of the non-local Schrödinger equation with arbitrary refractive index. *Optik*, 2021, vol. 231. 166443.
22. Kudryashov N.A. Stationary solitons of the generalized nonlinear Schrödinger equation with nonlinear dispersion and arbitrary refractive index. *Applied Mathematics Letters*, 2022, vol. 128. 107888.
23. Kudryashov N.A. Almost general solution of the reduced higher-order nonlinear Schrödinger equation. *Optik*, 2021, vol. 230. 66347.
24. Yildirim Y. Optical solitons to Schrodinger-Hirota equation in DWDM system with modified simple equation integration architecture. *Optik*, 2019, vol. 182, pp. 694–701.
25. Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Biswas A., Ekici M., Alshomrani A.S., Khan S., Zhou Q., Belic M.R. Dispersive solitons in optical fibers and DWDM networks with Schrodinger–Hirota equation. *Optik*, 2019, vol. 199. 163214.
26. Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Alngar M.E.M., Biswas A., Moraru L., Khan S., Yildirim Y., Alshehri H.M., Belic M.R. Dispersive optical solitons with Schrodinger-Hirota model having multiplicative white noise via Ito Calculus. *Physics Letters A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2022, vol. 445. 128268.
27. Wang G., Kara A.H., Biswas A., Guggilla P., Alzahrani A.K., Belic M.R. Highly dispersive optical solitons in polarization-preserving fibers with Kerr law nonlinearity by Lie symmetry. *Physics Letters A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2022, vol. 421. 127768.
28. Biswas A., Hubert M.B., Justin M., Betchewe G., Doka S.Y., Crepin K.T., Ekici M., Zhou Q., Moshokoa S., Belic M. Chirped dispersive bright and singular optical solitons with Schrodinger–Hirota equation. *Optik*, 2018, vol. 168, pp. 192–195.
29. Zhou Q., Xu M., Sun Y., Zhong Y., Mirzazadeh M. Generation and transformation of dark solitons, anti-dark solitons and dark double-hump solitons. *Nonlinear Dynamics*, 2022, vol. 110, no. 2, pp. 1747–1752.
30. Polyanin A.D., Kudryashov N.A. Nelineynnye uravneniya Shredingera s zapazdyvaniyem: Tochnyye resheniya, reduktsii i preobrazovaniya [Nonlinear Schrödinger equations with delay: Exact solutions, reductions, and transformations]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2024, vol. 13, no. 5, pp. 340–349 (in Russian).
31. Polyanin A.D., Kudryashov N.A. Nelineynoye uravneniye Shredingera s dispersiyey i potentsialom obshchego vida: Tochnyye resheniya i reduktsii [Nonlinear Schrödinger equation with dispersion and potential of the general form: Exact solutions and reductions]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2024, vol. 13, no. 6, pp. 394–402 (in Russian).
32. Polyanin A.D., Kudryashov N.A. Closed-form solutions of the nonlinear Schrödinger equation with arbitrary dispersion and potential. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2025, vol. 191. 115822.
33. Polyanin A.D., Kudryashov N.A. Nonlinear Schrödinger equations with delay: Closed-form and generalized separable solutions. *Contemporary Mathematics*, 2024. vol. 5, no. 4. 5420245840.
34. Polyanin A.D., Zhurov A.I. *Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs*. Boca Raton–London: CRC Press, 2022.
35. Michalska M., Klein M., Dlubek M. Dissipative soliton resonance in a normal dispersion all-polarization-maintaining thulium-doped fiber laser. *Optics & Laser Technology*, 2025, vol. 181(B). 111895.
36. Saleem Q.M., Ebrahim M.M., Aly K.A., Saddeek Y.B. Optical properties of transition metals complex films derived from hydrazone oxime for optoelectronic devices. *Journal of Molecular Structure*, 2025, vol. 1321, no. 5. 140196.
37. Choi M.-R., Hong Y., Lee Y.-R. Global existence versus finite time blowup dichotomy for the dispersion managed NLS. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 2025, vol. 251. 113696.
38. Pashaev O.K., Lee J.H. Black holes and solutions of the quantized dispersionless NLS and DNLS equations. *ANZIAM J.*, 2002. vol. 44, no. 1, pp. 73–81.
39. Lee J.-H., Pashaev O.K., Rogers C., Schief W.K. The resonant nonlinear Schrodinger equation in cold plasma physics. Application of Backlund–Darboux transformations and superposition principles. *Journal of Plasma Physics*, 2007, vol. 73, no. 2, pp. 257–272.

40. Lee J.-H., Pashaev O.K. Solitons of the resonant nonlinear Schrodinger equation with nontrivial boundary conditions: Hirota bilinear method. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2007, vol. 152, no. 1, pp. 991–1003.
41. Tala-Tebue E., Seadawy A.R. Construction of dispersive optical solutions of the resonant nonlinear Schrodinger equation using two different methods. *Modern Physics Letters B*, 2018, vol. 32, no. 33, 1850407.
42. Zhou Q., Wei C., Zhang H., Lu J., Yu H., Yao P., Zhu Q. Exact solutions to the resonant nonlinear Schrodinger equation with both spatio-temporal and inter-modal dispersions. *Proc. Romanian Academy, Ser. A*, 2016, vol. 17, no. 4, pp. 307–313.
43. Eldidamony H.A., Arnous A.H., Nofal T.A., Yildirim Y. Optical soliton solutions in birefringent fibers with multiplicative white noise: an analysis for the perturbed Chen–Lee–Liu model. *Nonlinear Dynamics*, 2024, vol. 112, no. 24, pp. 22295–22322.
44. Eslami M., Sharif A. Extended hyperbolic method to the perturbed nonlinear Chen–Lee–Liu equation with conformable derivative. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, 2024, vol. 11, 100838.
45. Lu W., Ahmad J., Akram S., Aldwoah K.A. Soliton solutions and sensitive analysis to nonlinear wave model arising in optics. *Physica Scripta*, 2024, vol. 99, no. 8, 085230.
46. Althrwai F.A., Alshaery A.A., Bakodah H.O., Nuruddeen R.I. Supplementary optical solitonic expressions for Gerdjikov-Ivanov equations with three Kudryashov-based methods. *Communications in Theoretical Physics*, 2024, vol. 76, no. 12, 125001.
47. Calogero F., Degasperis A. *Spectral Transform and Solitons: Tools to Solve and Investigate Nonlinear Evolution Equations*. Amsterdam: North Holland Publ., 1982.
48. Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E. *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*, 2nd ed. Boca Raton–London: CRC Press, 2016.
49. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 417–430.
50. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 67, pp. 267–277.
51. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I. *Delay Ordinary and Partial Differential Equations*. Boca Raton–London: CRC Press, 2024.
52. Aksenov A.V., Polyanin A.D. Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions. *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 4, 345.
53. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems*. Boca Raton–London: CRC Press, 2018.

УДК 004.62

Сравнение методов выявления аномальных выбросов в исходных данных и их применение при обработке данных искусственной вентиляции легких

С. Г. Климанов¹, А. А. Котляров¹, А. В. Крянев^{1,2}, В. Х. Тимербаев³, В. А. Трикозова¹, Д. Д. Царева¹, Н. В. Воронков¹, Э. М. Мухамедзянов¹, А. А. Умаров¹, Ф. С. Утин¹, Е. А. Чилека¹

¹ Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

² Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, 141980, Россия

³ Сеть медицинских центров «MedSwiss», Москва, Россия

В статье рассматривается проблема выявления аномальных выбросов и нивелирования их отрицательного влияния на оценки выделяемых характеристик рассчитываемых показателей. Для решения поставленной задачи в статье рассматриваются различные применяемые на практике робастные методы и основанные на них вычислительные схемы выделения аномальных выбросов в значениях исследуемых показателей. Проведено сравнение эффективности выделения аномальных выбросов различными методами для выборок случайных величин с нормальным законом распределения для различных вариантов числа и расположения аномальных выбросов по отношению к неаномальным значениям с помощью стандартных датчиков случайных величин. Исследуемые в статье робастные методы и схемы используются для выявления аномальных выбросов в показаниях пациентов и параметров вентиляционного потока при искусственной вентиляции легких (ИВЛ). Проведенные численные эксперименты, результаты которых приведены в настоящей статье, показали, что наиболее эффективным методом выявления аномальных выбросов при неизвестной дисперсии основной части неаномальных данных является разработанный в НИЯУ МИФИ модифицированный метод Хьюбера. Этот метод позволяет из сформированной базы данных клинического опыта лечения пациентов на аппаратах ИВЛ эффективно выделять аномальные выбросы, что дает возможность использовать этот метод для создания устойчивой схемы выбора оптимальных значений показателей вентиляционного потока в зависимости от значений показателей текущего состояния пациента.

Ключевые слова: аномальные выбросы, выявление аномальных выбросов, робастные методы, искусственная вентиляция легких, показания пациентов.

Введение

В исходных данных многих задач имеется, как правило, небольшая часть общего количества этих данных, численные значения которых не соответствуют общей тенденции рассматриваемого процесса, и которые принято называть аномальными выбросами. Причины появления аномальных выбросов могут быть разными, но в большинстве случаев ими являются сбои различной природы при фиксации этих значений. В то же время, в силу значительных показателей больших выбросов, их влияние на результаты обработки исходных данных без выделения аномальных выбросов будет, как правило, огромным и приведет к большим погрешностям в значениях показателей результатов обработки. Для выявления аномальных выбросов и нивелирования их вредного влияния на конечные результаты обработки исходных данных различными авторами в течение последних десятилетий были разработаны несколько методов и основанных на них вычислительных схем выявления аномальных выбросов. Целью настоящей работы

✉ А. В. Крянев: AVKryanev@mephi.ru

Поступила в редакцию: 14.12.2024

После доработки: 28.12.2024

Принята к публикации: 14.01.2024

EDN LBYWBJ

является сравнение эффективности выявления аномальных выбросов различными существующими методами, определение среди них наиболее эффективных при обработке данных ИВЛ и применение наиболее эффективного для выявления аномальных выбросов в значениях текущих показаний пациента при ИВЛ.

Робастные методы выявления аномальных выбросов

Ниже приведены математические методы и основанные на них численные алгоритмы выявления и фильтрации аномальных выбросов и сравнение их эффективности [1–7]. Математически эта задача сводится к выделению из совокупности зашумленных значений рассматриваемой случайной величины аномальных значений.

Метод Андрюса

Широкий спектр робастных оценок порожден ММП-схемой, согласно которой минимизируется выражение: $-\ln(p(X_i; u)) = \rho\left(\frac{X_i - u}{\sigma}\right)$. Тогда ММП-оценка $\hat{u}$ - параметра сдвига u минимизирует сумму:

$$\hat{u} = \text{Arg} \min \sum_{i=0}^n \rho\left(\frac{X_i - u}{\sigma}\right), \quad (1)$$

где минимум берется по u , где $p(X_i, u)$ – робастная плотность, $\rho\left(\frac{X_i - u}{\sigma}\right) = -\ln(p(X_i; u))$, а функции $\rho(s)$ – четная выпуклая положительная функция и $\rho(0) = 0$.

Чтобы M -оценка была робастной по отношению к большим выбросам, если исходный закон распределения нормальный, необходим более медленный рост функции $\rho(s)$ по сравнению с квадратичной функцией, по крайней мере, для больших по модулю s , и близкая к квадратичной зависимость для малых по модулю s .

Робастная оценка параметра положения u , порожденная функцией

$$\rho(s) = \begin{cases} a \left(1 - \cos \frac{s}{a}\right), & |s| \leq \pi a, \\ 2a, & |s| > \pi a, \end{cases} \quad (2)$$

называется оценкой Андрюса. При уменьшении a «степень робастности» оценки Андрюса увеличивается.

Оценка Андрюса является нелинейной. Для нахождения этой оценки применяется несколько итеративных методов, чаще всего итеративный метод наименьших квадратов. Запишем минимизируемый функционал в виде:

$$\sum_{i=0}^n (X_i - u)^2 W_i, \text{ где } W_i = \frac{1}{(X_i - u)^2} \sum_{i=0}^n \rho\left(\frac{X_i - u}{\sigma}\right)$$

Если веса W_i фиксированы, то $\hat{u} = \sum_{i=0}^n X_i W_i \left(\sum_{i=0}^n W_i \right)^{-1}$, σ – стандартное отклонение.

Оценка Андрюса определяется согласно итерационному процессу, который сходится за конечное число итераций:

$$\hat{u}_{j+1} = X_i W_{ij} \left(\sum_{i=0}^n W_{ij} \right)^{-1}, \text{ где } W_{ij} = \frac{1}{(X_i - u_j)^2} \sum_{i=0}^n \rho\left(\frac{X_i - u_j}{\sigma}\right). \quad (3)$$

Данные для обработки были сгенерированы с помощью датчика нормально распределенной случайной величины, в них добавлялись вручную аномальные выбросы. Эта схема использовалась для получения исходных данных, представленных на рис. 1, 3, 5, 7, 9, 11. Были взяты выборки размером 100, 500 1000 элементов. Размер выбросов – 1, 5 и 10 % для каждого размера выборки. Метод показывает себя чуть хуже на данных, в которых выбросы находятся только сверху или только снизу относительно математического ожидания, однако оценка все равно является намного лучше обычного среднего, которое в данном случае будет сильно смещено в сторону выбросов. Можно сделать вывод об эффективности метода с проецированием по сравнению с методом без проецирования.

На рис. 1 приведен один из примеров исходных данных реализации значений нормально распределенной случайной величины с четырьмя аномальными выбросами (АВ), причем несимметрично относительно математического ожидания (три – с большими значениями, а один – с меньшим значением). Все четыре выброса были выявлены с помощью представленного выше итерационного процесса (3), – и на рис. 2 представлен итог фильтрации. На оси абсцисс рис. 1 – 6 отложен номер члена выборки, а на оси ординат значения реализаций нормально распределенных случайных величин, полученных с помощью датчика случайных величин, с последующим наложением аномальных выбросов до и после фильтрации.

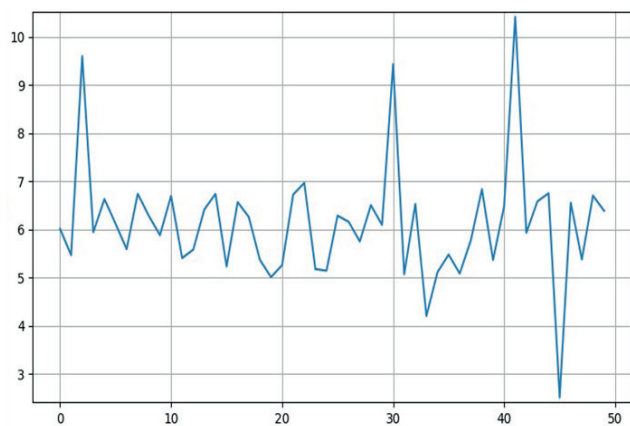


Рис. 1. Выборка с четырьмя аномальными выбросами

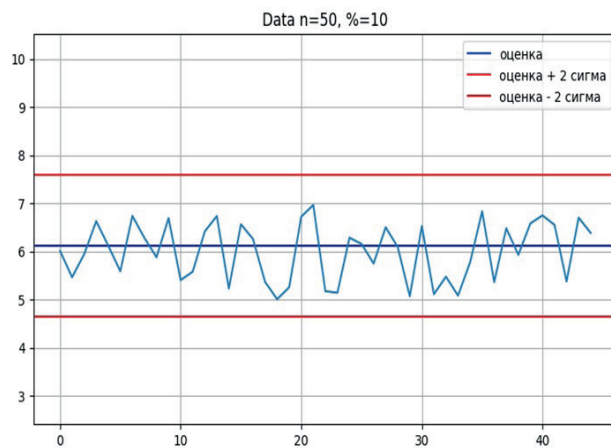


Рис. 2. Отфильтрованная выборка

По совокупности полученных результатов можно сделать вывод об эффективности метода Андруса для фильтрации аномальных выбросов. Метод показывает себя хуже на данных, в которых большая часть выбросов находится только сверху или только снизу относительно математического ожидания. Кроме того, схема метода Андруса с проецированием аномальных выбросов на границы $u - K\sigma$, $Y_i + K\sigma$, по сравнению с методом без проецирования является более эффективной. Эти два замечания остаются в силе и для других методов выявления аномальных выбросов, представленных в статье ниже.

Метод Рамсея

В методе Рамсея робастная ММП-оценка порождена функцией

$$\rho(s) = \frac{1}{\lambda^2} [1 - (1 + \lambda |s|) e^{-\lambda |s|}]. \quad (4)$$

Параметр λ обычно выбирается так, чтобы точка перегиба $\rho(s)$ функции равнялась 3. При увеличении λ «степень робастности» оценки Рамсея увеличивается.

Оценка Рамсея $\hat{u}$ является нелинейной. Для нахождения оценки в таком случае применяется несколько итеративных методов. Чаще всего используется итеративный метод наименьших квадратов.

Запишем минимизируемый функционал (4) в виде

$$\sum_{i=0}^n (X_i - u)^2 W_i, \quad (5)$$

где

$$W_i = \frac{1}{(X_i - u)^2} \sum_{i=0}^n \rho\left(\frac{X_i - u}{\sigma}\right). \quad (6)$$

Если веса W_i фиксированы, то

$$\hat{u} = \sum_{i=0}^n X_i W_i \left(\sum_{i=0}^n W_i \right)^{-1}. \quad (7)$$

Определим итерационный процесс:

$$\hat{u}_{j+1} = X_i W_{ij} \left(\sum_{i=0}^n W_{ij} \right)^{-1}, \text{ где } W_{ij} = \frac{1}{(X_i - \hat{u}_j)^2} \sum_{i=0}^n \rho\left(\frac{X_i - \hat{u}_j}{\sigma}\right). \quad (8)$$

Данные для обработки были сгенерированы с помощью датчика нормально распределенной случайной величины. Были взяты выборки размером 100, 500 1000 элементов. Размер выбросов – 1, 5 и 10 % для каждого размера выборки. Выбросы генерировались отдельно.

На рис. 3 приведен один из примеров исходных данных реализации значений нормально распределенной случайной величины с двумя аномальными выбросами, причем несимметрично относительно математического ожидания (оба с меньшим значением). Все два выброса были выявлены, и на рис. 4 представлен итог фильтрации.

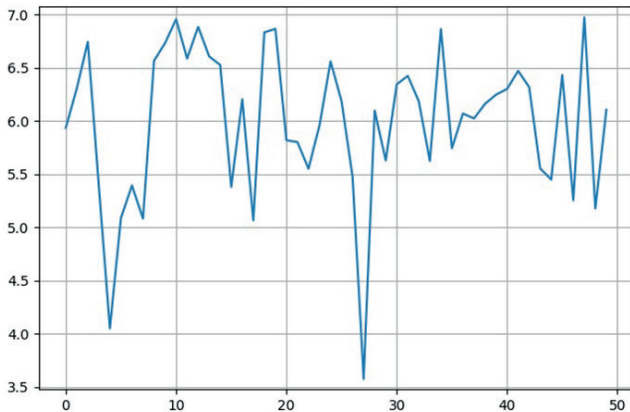


Рис. 3. Выборка с двумя аномальными выбросами

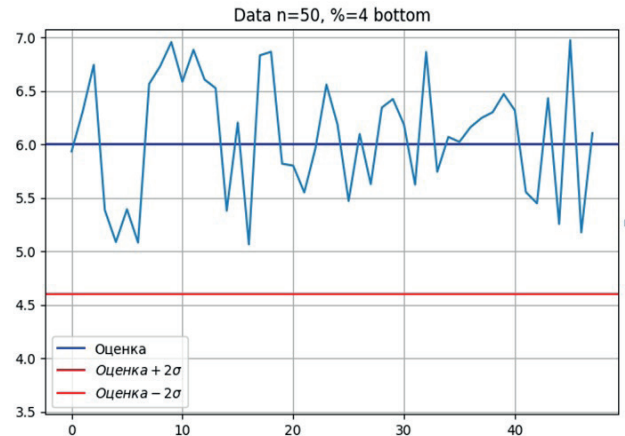


Рис. 4. Отфильтрованная выборка

По совокупности полученных результатов можно сделать вывод об эффективности метода Рамсея для очистки данных от выбросов. Метод иногда показывает результаты хуже на данных, в которых большая часть выбросов находятся только сверху или только снизу относительно математического ожидания.

Метод усеченной средней

Одним из самых ранних методов выявления аномальных выбросов и вычисления робастной оценки параметра положения u является метод усеченной средней:

$$\hat{u} = \bar{X}_{yc} = \frac{1}{n - 2m} \sum_{i=m+1}^{n-m} X_i, \quad (9)$$

где $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ – упорядоченные по возрастанию члены выборки $X_1, \dots, X_n$, а $m \leq [n/2]$. Из формулы следует, что усеченная средняя получена отбрасыванием m самых левых и m самых правых членов выборки $X_1, \dots, X_n$ и усреднением $(n - 2m)$ оставшихся.

Этот метод не является достаточно эффективным при выявлении выбросов из выборок данных, где аномальные значения расположены несимметрично по отношению к среднему значению. Поэтому использовалась модификация данного метода: сначала вычисляется количество аномальных значений, которые находятся за пределами интервала $[\bar{X} - k\sigma, \bar{X} + k\sigma]$, где $\bar{X}$ – среднее значение выборки, k – параметр, задающий ширину интервала; затем из упорядоченной по возрастанию выборки удаляются m самых меньших и p самых больших членов выборки.

Имеем итоговую оценку усеченного среднего:

$$\hat{u} = \bar{X}_{yc} = \frac{1}{n - m - p} \sum_{i=m+1}^{n-p} X_i, \quad (10)$$

где $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ – упорядоченные по возрастанию члены выборки $X_1, \dots, X_n$, m – количество элементов выборки, меньших $\bar{X} - k\sigma$; p – количество элементов выборки, превышающих $\bar{X} + k\sigma$. Из формулы следует, что усеченная средняя получена отбрасыванием m самых левых и p самых правых членов выборки $X_1, \dots, X_n$ и усреднением $(n - m - p)$ оставшихся.

Было проведено сравнение метода усеченной средней с методом Хьюбера при 2σ и 3σ . Основное отличие состоит в том, что для выявления всех выбросов метод усеченной средней необходимо применять итеративно несколько раз (два раза для интервала 2σ и больше трех раз для интервала 3σ).

Метод Винзора

Одним из эффективных методов борьбы с выбросами и получения устойчивой оценки по отношению аномальных выбросов является метод Винзора

$$\hat{u} = \hat{X} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=m+1}^{n-m} X_{(i)} + m(X_{(m+1)} + X_{(n-m)}) \right). \quad (11)$$

В отличие от усеченной средней, в оценке Винзора (11) крайние значения выборки не отбрасываются, а заменяются: m самых малых значений заменяются на $(m+1)$ -е, а m самых больших значений – на $(n-m)$ -е. Оценка Винзора похожа на минимаксную оценку Хьюбера, но отличается от нее тем, что просеивание крайних значений выполняется до вычисления оценки и заранее известно при заданном m . Увеличение m повышает степень робастности оценки Винзора. При численном тестировании оценки Винзора было создано 27 выборок данных с использованием генератора случайных чисел на Python: рассматривались три разных объема выборок – 100, 500 и 1000 и три уровня засорения аномальными выбросами: 1, 5 и 10 % с разными вариантами их расположения относительно математического ожидания.

Сравнение метода Винзора с методом Андрюса показало, что метод Андрюса показывает иногда результаты хуже, чем метод Винзора на данных, в которых выбросы находятся только с одной стороны по отношению к среднему значению.

Метод Хьюбера

Робастная оценка параметра положения метода Хьюбера определяется равенством:

$$\hat{u} = \frac{1}{n} \left[\sum_{i \in I_0} X_i + (\hat{n}_+ + \hat{n}_-) \hat{u} + K\sigma(\hat{n}_+ - \hat{n}_-) \right], \quad (12)$$

где $\hat{I}_+$, $\hat{I}_-$, $\hat{I}_0$ определены равенствами

$$\hat{I}_+ = \{i : X_i - \hat{u} > K\sigma\}, \quad \hat{I}_- = \{i : X_i - \hat{u} < -K\sigma\}, \quad (13)$$

$\hat{I}_0 = \{i : |X_i - \hat{u}| \leq K\sigma\}$, $\hat{n}_+$, $\hat{n}_-$ – количество индексов i , принадлежащих множествам $\hat{I}_+$, $\hat{I}_-$ соответственно. Для нахождения оценки Хьюбера использовался итерационный процесс:

$$\hat{u}_{j+1} = \frac{1}{n} \left[\sum_{i \in I_{0j}} X_i + (\hat{n}_{+j} + \hat{n}_{-j}) \hat{u}_j + K\sigma(\hat{n}_{+j} - \hat{n}_{-j}) \right], \quad (14)$$

где $\hat{I}_{+j} = \{i : X_i - \hat{u}_j > K\sigma\}$, $\hat{I}_{-j} = \{i : X_i - \hat{u}_j < -K\sigma\}$, $\hat{I}_{0j} = \{i : |X_i - \hat{u}_j| \leq K\sigma\}$, $\hat{n}_{+j}$, $\hat{n}_{-j}$ – количество индексов i , принадлежащих множествам $\hat{I}_{+j}$, $\hat{I}_{-j}$ соответственно.

В качестве нулевого приближения можно брать среднее арифметическое $\hat{u}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

Метод Хьюбера позволяет за конечное число шагов удалить все выбросы при их равномерном распределении с интервалом $\pm 2\sigma$. Однако при этом метод Хьюбера иногда дает худшие результаты, когда большинство выбросов находятся с одной стороны от среднего значения, а процент аномальных выбросов больше 5 %.

Модифицированный метод Хьюбера

Пусть рассматриваемый показатель состояния пациента u принимает значения X_i для $i=1, \dots, n$.

$$\hat{u}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \sigma_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{u}_1)^2$$

Определим вектор $\vec{X}^{(1)} = (X_1, \dots, X_n)$ равенством

$$X_i^{(1)} = \begin{cases} X_i, & \text{если } i \in I_0^{(1)}, \\ \hat{u}_1 - K\sigma_1, & \text{если } i \in I_+^{(1)}, \\ \hat{u}_1 + K\sigma_1, & \text{если } i \in I_-^{(1)}, \end{cases} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} I_0^{(1)} &= \{i : |X_i - \hat{u}_1| \leq K\sigma_1\}, \\ I_+^{(1)} &= \{i : X_i - \hat{u}_1 > K\sigma_1\}, \\ I_-^{(1)} &= \{i : X_i - \hat{u}_1 < -K\sigma_1\}, \end{aligned} \quad (16)$$

K – так называемый параметр Хьюбера, значение которого зависит от доли больших выбросов, и в данной работе взято $K=1.8$.

Реализуем итерационный процесс:

$$\hat{u}_{l+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{(l+1)}, \quad (17)$$

$$\sigma_{l+1}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^{(l+1)} - \hat{u}_{l+1})^2, \quad (18)$$

$$X_i^{(l+1)} = \begin{cases} X_i^{(l)}, & \text{если } i \in I_0^{(l+1)} \\ X_i^{(l)} - K\sigma_l, & \text{если } i \in I_+^{(l+1)} \\ X_i^{(l)} + K\sigma_l, & \text{если } i \in I_-^{(l+1)} \end{cases} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} I_0^{(l+1)} &= \{i : |X_i^{(l)} - \hat{X}_i^{(l)}| \leq K\sigma_l\}, \\ I_+^{(l+1)} &= \{i : X_i^{(l)} - \hat{X}_i^{(l)} > K\sigma_l\}, \\ I_-^{(l+1)} &= \{i : X_i^{(l)} - \hat{X}_i^{(l)} < -K\sigma_l\}, \end{aligned} \quad (20)$$

Введем норму в пространстве E^n :

$$\|\vec{X}\| = \max_{i=1, \dots, n} |X_i|. \quad (21)$$

Тогда, задав приемлемый уровень допустимой погрешности $\varepsilon > 0$, продолжаем описанный итерационный процесс, пока не будет выполнено условие

$$\|\vec{X}^{(l+1)} - \vec{X}^{(l)}\| < \varepsilon. \quad (22)$$

Аналогичные робастные схемы используются для выделения с помощью робастных методов временных трендов при наличии аномальных выбросов в значениях показателей [4–7].

На рис. 5 приведен один из примеров исходных данных реализации значений нормально распределенной случайной величины с тремя аномальными выбросами, причем несимметрично относительно математического ожидания (все 3 с меньшим значением). Все три выброса были выявлены с помощью всех вышеперечисленных методов, и на рис. 6 представлен итог фильтрации.

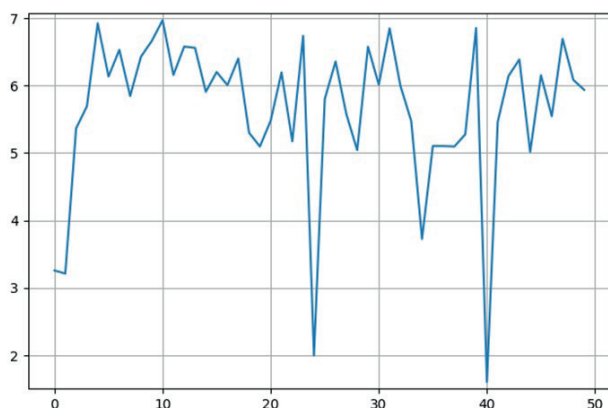


Рис. 5. Выборка с тремя аномальными выбросами

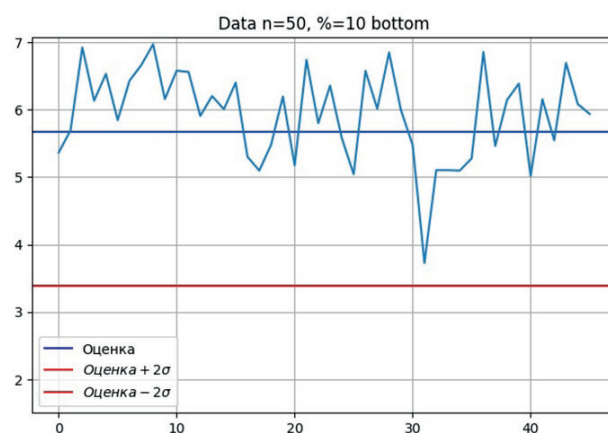


Рис. 6. Отфильтрованная выборка

Было проведено сравнение метода усеченной средней с методом Хьюбера при 2σ и 3σ . Основное отличие состоит в том, что для выявления всех выбросов метод усеченной средней необходимо применять итеративно несколько раз (два раза для интервала 2σ и больше трех раз для интервала 3σ).

Модифицированный метод Хьюбера позволяет за конечное число шагов удалить все выбросы, когда процент аномальных выбросов не превышает 20 %. При этом модифицированный метод Хьюбера иногда дает худшие результаты, когда все выбросы находятся с одной стороны от среднего значения, а процент аномальных выбросов больше 20 %, что при обработке данных прикладных задач встречается редко.

Выявление аномальных выбросов в значениях показателей текущего состояния пациента, подключенного к аппарату ИВЛ

Ниже для иллюстрации эффективности методов выявления аномальных выбросов представлены результаты их фильтрации для некоторых значимых показателей состояния пациента, подключенного к аппарату ИВЛ.

На рис. 7 представлены исходные фиксируемые значения во времени показателя «Минутная вентиляция легких» (MV). На оси абсцисс рисунков 7–18 отложено время фиксации показателя в минутах, а на оси ординат этих рисунков – значения показателей до и после фильтрации аномальных выбросов.

На рис. 8 – отфильтрованные с помощью метода Андрюса значения во времени показателя «Минутная вентиляция легких» (MV), представленные на рис. 7.

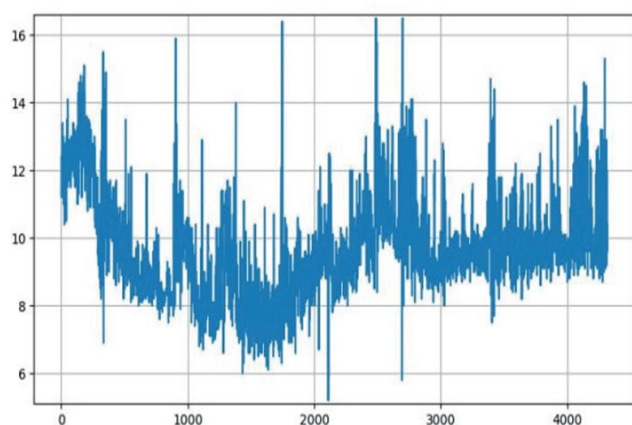


Рис. 7. Показатель MV

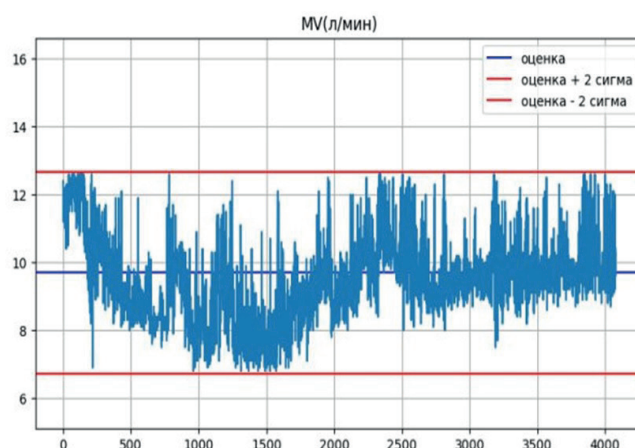


Рис. 8. Отфильтрованный показатель MV

На рис. 9 представлены исходные фиксируемые значения во времени показателя « $f_{\text{общ}}$ – общее количество дыхательных циклов».

На рис. 10 – отфильтрованные с помощью метода Рамсея значения во времени показателя « $f_{\text{общ}}$ – общее количество дыхательных циклов», представленные на рис. 9.

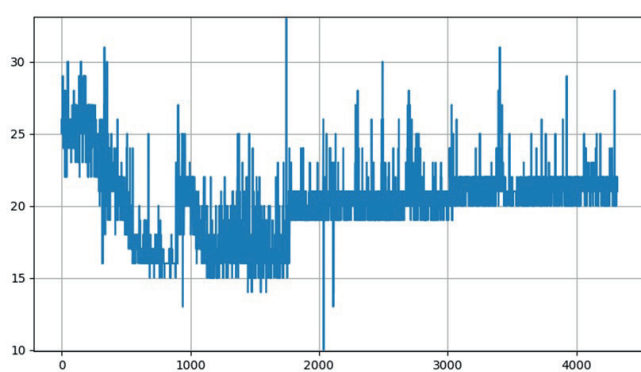


Рис. 9. Показатель $f_{\text{общ}}$

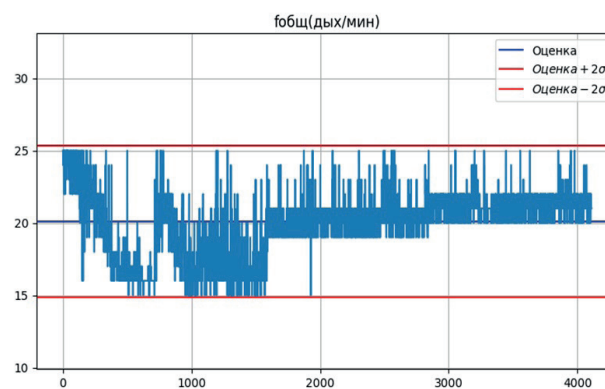


Рис. 10. Отфильтрованный показатель $f_{\text{общ}}$

На рис. 11 представлены исходные фиксируемые значения во времени показателя TV_i (мл) – «Объем вдоха».

На рис. 12 – отфильтрованные с помощью метода «Усеченной средней» значения во времени показателя TV_i (мл) – «Объем вдоха», представленные на рис. 11.

На рис. 13 представлены исходные фиксируемые значения во времени показателя WOB (Дж/мин) – «Работа дыхания».

TVi (мл), 2sigma

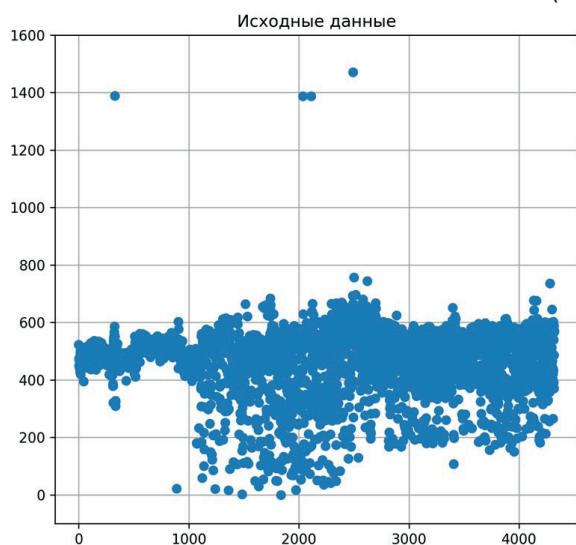


Рис. 11. Показатель TVi

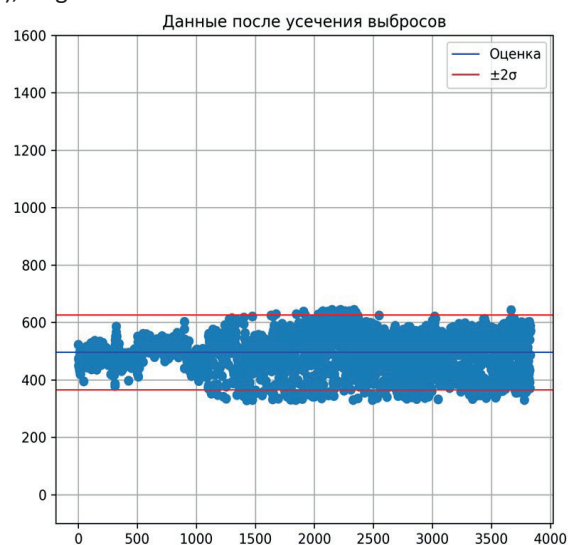


Рис. 12. Отфильтрованный показатель TVi

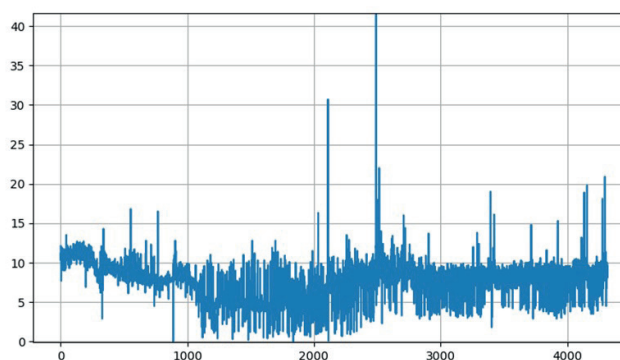


Рис. 13. Показатель WOB

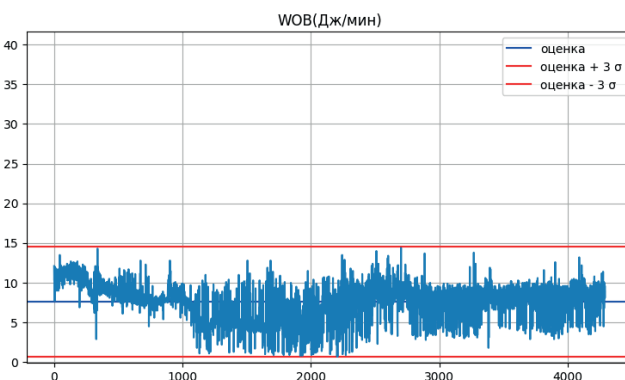


Рис. 14. Отфильтрованный показатель WOB

На рис. 14 – отфильтрованные с помощью метода Винзора значения во времени показателя «WOB (Дж/мин) – «Работа дыхания», представленные на рис. 13.

На рис. 15 представлены исходные фиксируемые значения во времени показателя $P_{\text{пик}}$ (см. H_2O) – максимальное давление в дыхательных путях во время вдоха.

На рис. 16 – отфильтрованные с помощью метода Хьюбера значения во времени показателя $P_{\text{пик}}$, представленные на рис. 15.

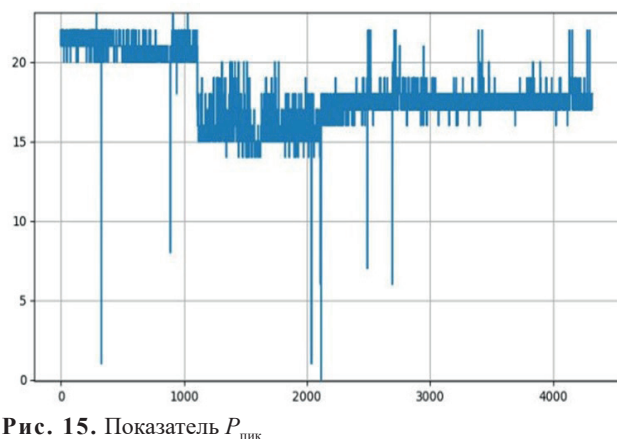


Рис. 15. Показатель $P_{\text{пик}}$

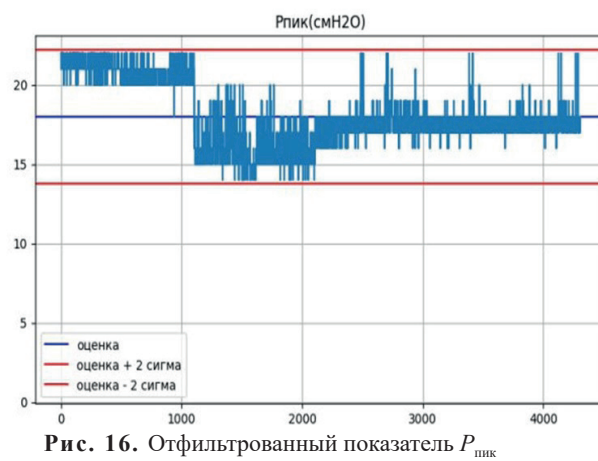


Рис. 16. Отфильтрованный показатель $P_{\text{пик}}$

На рис. 17 представлены исходные фиксируемые значения во времени показателя Re (см. вод ст/л/с) – сопротивление дыхательных путей выдоху.

На рис. 18 – отфильтрованные с помощью модифицированного метода Хьюбера значения во времени показателя Re , представленные на рис. 17.

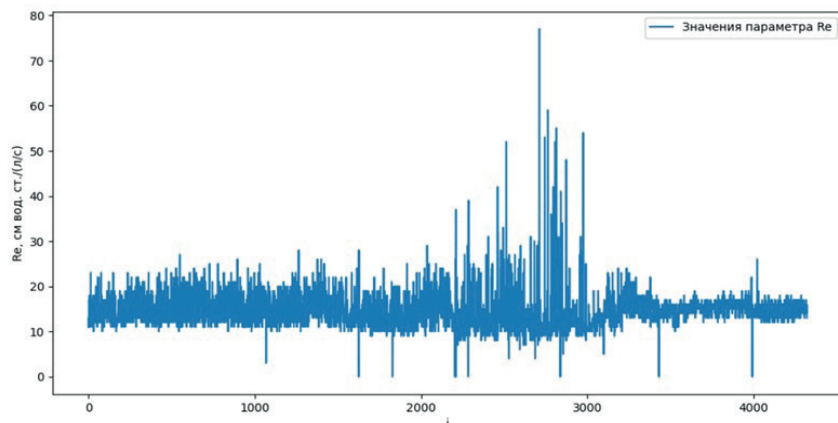


Рис. 17. Показатель Re

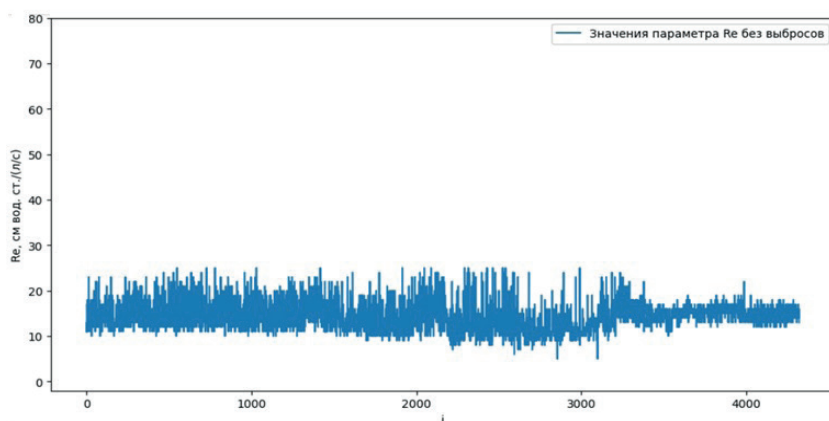


Рис. 18. Отфильтрованный показатель Re

Анализ полученных результатов и выводы

Проведенные исследования по сравнению существующих робастных методов выявления аномальных выбросов, результаты которых приведены в настоящей статье, показали, что наиболее эффективным из них при неизвестной дисперсии основной части данных, за исключением аномальных выбросов, является разработанный в НИЯУ МИФИ модифицированный метод Хьюбера, который позволяет на основе сформированной базы данных клинического опыта лечения пациентов на аппаратах ИВЛ и использования методов искусственных нейронных сетей или методов метрического анализа [8–13], устанавливать устойчивую зависимость между совокупностью значений показателей текущего состояния пациента и оптимальными значениями регулируемых параметров вентиляционного потока аппарата ИВЛ и прогнозировать будущее состояние пациента.

Финансирование

Работа частично выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект государственного задания № FSWU-2023-0031).

Вклад авторов

Климанов С.Г. – участие в проведении исследования и обсуждении результатов, анализ экспериментальных данных;

Котляров А.А. – участие в формулировке идеи и целей исследования, участие в проведении исследования и обсуждении результатов.

Крянев А.В. – участие в формулировке идеи и целей исследования и обсуждении результатов, постановка задачи, выбор методов исследования, анализ экспериментальных данных, выявление закономерностей, подбор литературных источников, редактирование текста статьи.

Тимербаев В.Х. – участие в формулировке идеи и целей исследования, предоставление клинических данных показаний состояний пациентов, участие в проведении исследования и обсуждении результатов.

Трикозова В.А. – выбор методов исследования, анализ экспериментальных данных, участие в составлении части программного кода и проведение с его помощью серии численных расчетов, включая анализ их результатов.

Царева Д.Д. – выбор методов исследования, анализ экспериментальных данных, участие в составлении части программного кода и проведение с его помощью серии численных расчетов, включая анализ их результатов.

Воронков Н.В. – участие в составлении части программного кода и проведение с его помощью серии численных расчетов, включая анализ их результатов.

Мухамедзянов Э.М. – участие в составлении части программного кода и проведение с его помощью серии численных расчетов, включая анализ их результатов.

Умаров А.А. – участие в составлении части программного кода и проведение с его помощью серии численных расчетов, включая анализ их результатов.

Утин Ф.С. – участие в составлении части программного кода и проведение с его помощью серии численных расчетов, включая анализ их результатов.

Чилека Е.А. – участие в составлении части программного кода и проведение с его помощью серии численных расчетов, включая анализ их результатов.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Список литературы

1. Смоляк С.А., Титаренко Б.П. Устойчивые методы оценивания. М.: Статистика, 1980. 254 с.
2. Хьюбер П. Робастность в статистике. М.: Мир, 1984. 303 с.
3. Арсенин В.Я., Крянев А.В., Цупко-Ситников М.В. Применение робастных методов для решения некорректных задач // ЖВММФ, 1989, Т. 29. № 5. С. 653–661.
4. Хампель М., Рончетти Э., Рауссеу П., Штаэль В. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния. М.: Мир, 1989. 512 с.
5. Цыпкин Я.З. Информационная теория идентификации. М.: Наука, 1995. 336 с.
6. Шурыгин А.М. Прикладная статистика: робастность, оценивание, прогноз. М.: Финансы и статистика, 2000. 223 с.
7. Крянев А.В., Лукин Г.В., Удумян Д.К. Метрический анализ и обработка данных. М.: Физматлит, 2012. 308 с.
8. Ананьев Е.П., Полупан А.А., Мацковский И.В. [и др.]. Использование режима IntelliVent-ASV для поддержания целевого диапазона EtCO₂ у пациентов с тяжелой ЧМТ // Журнал «Вопросы нейрохирургии» имени Н.Н. Бурденко, 2017. Т. 81 (5). С. 63–68.
9. Artificial intelligence and machine learning show promise in cancer diagnosis and treatment // Medical Xpress. [Электронный ресурс]. URL: <https://medicalxpress.com/news/2022-03-artificial-intelligence-machine-cancer-diagnosis.html> [дата обращения 20.11.2024].
10. Kryanev A.V., Udumyan D.K. Metric analysis, properties and applications as a tool for interpolation // International Journal of Mathematical Analysis, 2014. V. 8. № 45. P. 2221–2228.
11. Kryanev A.V., Udumyan D. K. Metric Analysis, Properties and Applications as a Tool for Forecasting // International Journal of Mathematical Analysis, 2014. V. 8. №. 60. P. 2971–2978.
12. Ivanov V.V., Kryanev A.V., Udumyan D.K., Lukin G.V. Metric Analysis Approach for Interpolation and Forecasting of Time Processes // Applied Mathematical Sciences, 2014. V. 8. № 22. P. 1053–1060.
13. Климанов С.Г., Крянев А.В., Трикозова В.А., Царева Д.Д. Вычислительные схемы выявления аномальных выбросов в значениях текущих показаний пациента при искусственной вентиляции легких // Вестник НИЯУ МИФИ, 2024. Т. 13. № 2. С. 76–82.

Comparison of methods for detecting abnormal emissions in the original data and their application in processing artificial ventilatory data

S. G. Klimanov¹, A. A. Kotlyarov¹, A. V. Kryanev^{1,2,✉}, V. Kh. Timerbaev³, V. A. Trikozova¹, D. D. Tsareva¹,
N. V. Voronkov¹, E. M. Mukhamedzyanov¹, A. A. Umarov¹, F. S. Utin¹, E. A. Chileka¹

¹ National Research Nuclear University “MEPhI”, Moscow, 115409, Russia,

² Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, 141980, Russia,

³ Network of medical centers MedSwiss, Moscow, Russia

✉ AVKryanev@mephi.ru

Received December 14, 2024; revised December 28, 2024; accepted January 14, 2025

The article considers the problem of detecting abnormal outliers and mitigating their negative impact on the estimates of the allocated characteristics of the calculated indicators. To solve the problem, the article considers various robust methods used in practice and computational schemes for detecting abnormal outliers in the values of the studied indicators based on them. A comparison is made of the efficiency of detecting abnormal outliers by various methods for samples of random variables with a normal distribution law for various options for the number and location of abnormal outliers in relation to non-anomalous values using standard random variable sensors. The robust methods and schemes studied in the article are used to detect abnormal outliers in patient readings and ventilation flow parameters during artificial lung ventilation (ALV). The numerical experiments conducted, the results of which are presented in this article, showed that the most effective method for detecting abnormal outliers with an unknown variance of the main part of non-anomalous data is the modified Huber method developed at MEPhI. This method allows us to effectively identify abnormal emissions from the formed database of clinical experience in treating patients on ventilators, which makes it possible to use this method to create a stable scheme for selecting optimal values of ventilation flow indicators depending on the values of the indicators of the patient's current condition.

Keywords: abnormal outliers, identifying abnormal outliers, robust methods, artificial lung ventilation, patient readings.

References

1. Smolyak S.A., Titarenko B.P. Ustojchivye metody ocenivaniya [Robust estimation methods]. Moscow, Statistika Publ., 1980. 254 p.
2. Huber P. Robastnost' v statistike [Robustness in statistics]. Moscow, Mir Publ., 1984. 303 p.
3. Arsenin V.Ya., Kryanev A.V., Tsupko-Sitnikov M.V. Primenenie robustnykh metodov dlya resheniya nekorrektnykh zadach [Application of robust methods for solving ill-posed problems]. JVMMF. 1989, vol. 29, no. 5, pp. 653–661 (in Russian).
4. Hampel M., Ronchetti E., Rausseau P., Stael W. Robastnost' v statistike. Podhod na osnove funktsij vliyaniya [Robustness in statistics. An approach based on influence functions]. Moscow, Mir Publ., 1989. 512 p.
5. Tsyarkin Ya.Z. Informatsionnaya teoriya identifikatsii [Information theory of identification]. Moscow, Nauka Publ., 1995. 336 p.
6. Shurygin A.M. Prikladnaya statistika: robustnost', ocenivanie, prognoz [Applied statistics: robustness, estimation, forecast]. Moscow, Finansy i statistika Publ., 2000. 223 p.
7. Kryanev A.V., Lukin G.V., Udumyan D.K. Metricheskij analiz i obrabotka dannykh [Metric analysis and data processing]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012. 308 p.
8. Ananyev E.P., Polupan A.A., Matskovsky I.V. [et al.]. Ispol'zovanie rezhima IntelliVent-ASV dlya podderzhaniya tsелеvogo diapazona EtCO₂ u pacientov s tyazhelej CHMT. [Using the IntelliVent-ASV mode to maintain the target EtCO₂ range in patients with severe TBI]. Zhurnal «Voprosy neirohirurgii» imeni N.N. Burdenko. 2017, vol. 81 (5), pp. 63–68 (in Russian).

9. Artificial intelligence and machine learning show promise in cancer diagnosis and treatment. Medical Xpress. Available at: <https://medicalxpress.com/news/2022-03-artificial-intelligence-machine-cancer-diagnosis.html> (accessed 20.11.2024).
10. Kryanev A.V., Udumyan D.K. Metric analysis, properties and applications as a tool for interpolation. International Journal of Mathematical Analysis, 2014, vol. 8, no. 45, pp. 2221–2228.
11. Kryanev A.V., Udumyan D.K. Metric Analysis, Properties and Applications as a Tool for Forecasting. International Journal of Mathematical Analysis, 2014, vol. 8, no. 60, pp. 2971–2978.
12. Ivanov V.V., Kryanev A.V., Udumyan D.K., Lukin G.V. Metric Analysis Approach for Interpolation and Forecasting of Time Processes. Applied Mathematical Sciences. 2014, vol. 8, no. 22, pp. 1053–1060.
13. Klimanov S.G., Kryanev A.V., Trikozova V.A., Tsareva D.D. Vychislitel'nye skhemy vyyavleniya anomal'nyh vybrosov v znacheniyah tekushchih pokazanij pacienta pri iskusstvennoj ventilyacii legkih. [Computational Schemes for Detecting Abnormal Outliers in the Values of Current Patient Readings during Artificial Lung Ventilation]. Vestnik NIYaU MIFI, 2024, vol. 13, no. 2, pp. 76–82 (in Russian).

УДК 004.62

Прогнозирование финансового состояния кредитных организаций на основе сингулярно-спектрального анализа

В. В. Иванов^{1,2}, А. В. Крянев^{2,1}, А. С. Приказчикова², Е. П. Акишина¹

¹ Объединённый институт ядерных исследований, Дубна, 141980, Россия

² Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

Сингулярно-спектральный анализ успешно применяется во многих практических задачах математического моделирования, в том числе экономического характера. Целью настоящей работы является развитие нового математического подхода для прогнозирования значений ключевых показателей деятельности кредитных организаций («Прибыль», «Счета в Банке России», «Ценные бумаги»), представленных в виде временных рядов с шагом наблюдения один месяц. Анализ и прогнозирование ключевых показателей осуществлялись с использованием сингулярно-спектрального анализа методом «Гусеница»-SSA в программе CaterpillarSSA. Актуальность исследования обуславливается необходимостью внедрения новых эффективных вычислительных технологий для систем раннего предупреждения Банка России и Росфинмониторинга. В статье представлена реализация метода «Гусеница»-SSA для оценки финансового состояния кредитных организаций двух типов: банк с отозванной лицензией (АО банк «ККБ») и благонадежный банк (АО «ТБанк»). Авторам удалось реализовать декомпозицию временных рядов ключевых показателей на тренд, гармонические и шумовые составляющие. На основе главных компонент, отвечающих за тренд и периодики, с высокой точностью выполнены реконструкция и прогнозирование рассмотренных временных рядов на 6 месяцев вперед.

Ключевые слова: сингулярно-спектральный анализ, метод «Гусеница»-SSA, прогнозирование, временной ряд, кредитные организации, математические методы.

1. Введение

Сингулярно-спектральный анализ (далее – SSA) успешно применяется во многих практических задачах математического моделирования, в том числе экономического характера. Так, в работе [1] метод «Гусеница»-SSA рассматривался как инструмент прогнозирования состояния финансового рынка. В статье [2] успешно осуществлена апробация метода на временных рядах котировок российских и американских акций, валют и криптовалют. А в работе [3] с применением данного метода решена задача анализа поведения клиентов магазина.

Ранее авторами работы [4] была представлена методика идентификации кредитных организаций, попадающих в зону риска. С помощью данной методики были выделены высокорисковые кредитные организации, у которых в последующих периодах Банк России может отозвать лицензию. В статье [5] на основе деревьев решений и их ансамблей были разработаны математические модели, позволившие выделить ключевые показатели при классификации организаций на благонадежные и неблагонадежные, а именно: «Прибыль», «Счета в Банке России», «Ценные бумаги».

В рамках настоящего исследования, в качестве продолжения работ [4] и [5], авторами была поставлена следующая задача: на основе сингулярно-спектрального анализа (метод «Гусеница»-SSA) предложить подход для прогнозирования значений ключевых показателей кредитных организаций, представленных

✉ А. В. Крянев: AVKryanev@mephi.ru

Поступила в редакцию: 15.01.2025

После доработки: 29.01.2025

Принята к публикации: 31.01.2025

EDN RKSSFZ

в виде временных рядов с шагом наблюдения один месяц. Рассмотрены два типа кредитных организаций: банк с отозванной лицензией (АО «ККБ») и благонадежный банк (АО «ТБанк»).

2. Метод SSA в подходе «гусеница»

Алгоритм метода SSA состоит из четырех последовательно выполняемых шагов: вложения, сингулярного разложения, группировки и диагонального усреднения.

Пусть $F = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ – вещественный ненулевой временной ряд длиной N ; L – длина окна, $1 < L < N$. Из временного ряда F строится траекторная матрица $\mathbf{X}$, столбцы которой представляют собой векторы длиной L . При этом образуются $K = N - L + 1$ векторов вложения. Процедура вложения переводит исходный временной ряд F в траекторную матрицу $\mathbf{X}$ размерности $L \times K$ как последовательность многомерных векторов (1):

$$\mathbf{X} = (x_{ij})_{i,j=1}^{L,K} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_{K-1} \\ f_1 & f_2 & \dots & f_K \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{L-1} & f_L & \dots & f_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

На стадии сингулярного разложения траекторной матрицы она раскладывается в сумму элементарных матриц. Пусть $\mathbf{S} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L$ – собственные числа матрицы $\mathbf{S}$, а $U_1, U_2, \dots, U_L$ – ортонормированная система собственных векторов матрицы $\mathbf{S}$, соответствующих собственным числам.

Пусть $d = \max\{i: \lambda_i > 0\}$. Если обозначить $V_i = \frac{\mathbf{X}^T U_i}{\sqrt{\lambda_i}}$, $i = 1, \dots, d$, то сингулярное разложение матрицы $\mathbf{X}$ может быть записано в виде (2)

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \dots + \mathbf{X}_d, \quad (2)$$

где $\mathbf{X}_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$. Каждая из матриц $\mathbf{X}_i$ имеет ранг 1, т.е. они являются элементарными матрицами.

Набор $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$ называется i -й собственной тройкой сингулярного разложения (2) [6].

На основе разложения (2) процедура группировки делит все множество индексов $\{1, \dots, d\}$ на m непересекающихся подмножеств $I_1, \dots, I_m$. Пусть $I = \{i_1, \dots, i_p\}$. Тогда результирующая матрица $\mathbf{X}_I$, соответствующая группе I , определяется как $\mathbf{X}_I = \mathbf{X}_{i_1} + \dots + \mathbf{X}_{i_p}$. Такие матрицы вычисляются для $I = I_1, \dots, I_m$, тем самым разложение (2) может быть записано в сгруппированном виде

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{I_1} + \dots + \mathbf{X}_{I_m}. \quad (3)$$

Процедура выбора множеств $I_1, \dots, I_m$ называется *группировкой собственных троек*. На последнем шаге базового алгоритма каждая матрица сгруппированного разложения (3) переводится в новый ряд длиной N .

Пусть $\mathbf{Y}$ – матрица $L \times K$ с элементами y_{ij} , $1 \leq i \leq L$, $1 \leq j \leq K$. Положим $L^* = \min(L, K)$, $K^* = \max(L, K)$ и $N = L + K - 1$. Тогда $y_{ij}^* = y_{ij}$, если $L < K$, и $y_{ij}^* = y_{ji}$ иначе. Диагональное усреднение переводит матрицу $\mathbf{Y}$ в ряд $g_0, \dots, g_{N-1}$ по формуле

$$g_k = \begin{cases} \frac{1}{k+1} \sum_{m=1}^{k+1} y_{m,k-m+2}^* & \text{для } 0 \leq k \leq L^* - 1, \\ \frac{1}{L^*} \sum_{m=1}^{L^*} y_{m,k-m+2}^* & \text{для } L^* - 1 \leq k \leq K^*, \\ \frac{1}{N-k} \sum_{m=k-K^*+2}^{N-K^*+1} y_{m,k-m+2}^* & \text{для } K^* \leq k \leq N. \end{cases} \quad (4)$$

Применив диагональное усреднение (4) к результирующим матрицам $\mathbf{X}_{I_k}$, мы получим ряды $\tilde{F}^{(k)} = (\tilde{f}_0^{(k)}, \dots, \tilde{f}_{N-1}^{(k)})$ и, следовательно, исходный ряд $F = (f_0, f_2, \dots, f_{N-1})$ раскладывается в сумму m рядов [6]:

$$f_n = \sum_{k=1}^m \tilde{f}_n^{(k)}. \quad (5)$$

Далее рассмотрим этап прогнозирования. Прогнозирование временного ряда на p точек вперед производится в соответствии с рекуррентной формулой

$$\tilde{x}_{N+p} = \sum_{k=1}^{L-1} a_k x_{N+1-k}, \quad (6)$$

где a_k – коэффициенты ЛФР; x_{N+1-k} – значения восстановленного ряда.

При этом прогноз на p точек вперед осуществляется как применение p раз операции прогноза на одну точку. Представим матрицу U ортонормированных собственных векторов матрицы $\mathbf{S} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T$ в следующем виде:

$$U = \begin{bmatrix} u_1^{i_1} & u_1^{i_2} & \dots & u_1^{i_r} \\ u_2^{i_1} & u_2^{i_2} & \dots & u_2^{i_r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{L-1}^{i_1} & u_{L-1}^{i_2} & \dots & u_{L-1}^{i_r} \\ u_L^{i_1} & u_L^{i_2} & \dots & u_L^{i_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{L-1}^r \\ u_1^r \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где U_{L-1}^r – матрица размером $(L-1) \times r$, полученная из первых $(L-1)$ строк матрицы U ; u_1^r – вектор-строка длиной r , является последней строкой матрицы U .

Тогда коэффициенты ЛФР определяются по следующей формуле:

$$(a_{L-1}, \dots, a_1)^T = \frac{1}{1 - \vartheta^2} \left[U_{L-1}^r \cdot (u_1^r)^T \right], \quad (8)$$

где ϑ – коэффициент вертикальности пространства, рассчитываемый по значениям нижней строки, матрицы U по формуле [7]:

$$\vartheta^2 = (u_L^{i_1})^2 + \dots + (u_L^{i_r})^2. \quad (9)$$

3. Подготовка исходных данных к SSA-анализу

Согласно служебной практике Росфинмониторинга особый интерес для аналитиков представляет изучение периодических компонент временных рядов показателей деятельности кредитных организаций, именно такие компоненты несут в себе информацию о наличии латентных признаков преступной деятельности.

Для анализа кредитных организаций мы использовали программу CaterpillarSSA [8], функционал которой позволяет разложить временной ряд на отдельные составляющие: компоненты, отвечающие за тренд, набор гармонических составляющих и высокочастотный случайный шум. Основным параметром алгоритма SSA является длина окна L . За редким исключением наиболее детальное разложение достигается при выборе длины окна, приблизительно равной половине длины ряда ($L = N/2$). В нашем случае анализ показателей банков проводился за период с 01.01.2013 по 01.06.2021 – 102 временных отсчетов, поэтому длина «гусеницы» была взята равной 51.

В качестве метода SSA мы использовали метод «Гусеница»-SSA с однократным центрированием [7], показавший на практике лучшие результаты по сравнению с базовым методом SSA и методом SSA

с двойным центрированием. Перед тем как перейти к многомерному виду, все временные ряды ключевых показателей были отнормированы (средствами CaterpillarSSA).

4. SSA-анализ деятельности АО «ККБ»

Рассмотрим АО «Консервативный коммерческий банк» (АО «ККБ»). За шесть месяцев до отзыва лицензии (11.02.2022) этот банк согласно методике, описанной в работе [4], оказался в зоне повышенного риска. При этом АО «ККБ» фактически не осуществляло традиционную банковскую деятельность, специализируясь на оказании услуг в области электронной коммерции. АО «ККБ» не проводилась работа по изучению операций клиентов, источники денежных средств по которым были непрозрачны. Деятельности кредитной организации были присущи риски ее вовлечения в обслуживание «теневого» игорного бизнеса, нелегальных участников финансового рынка. На рис. 1–3 представлены графики временных рядов «Прибыль», «Счета в Банке России» и «Ценные бумаги» для АО «ККБ» соответственно.

Детальные результаты SSA-анализа показателя «Прибыль» с длиной окна, равной 51, представлены на рис. 4 (зависимость квадратного корня из собственного числа траекторной матрицы от его номера) и на рис. 5 (поведение собственных векторов во времени). Из графика на рис. 4 следует, что анализируемый временной ряд можно надежно аппроксимировать небольшим количеством главных компонент (далее – ГК). Видно, что после приблизительно 18 ГК наблюдается непрерывный спад собственных чисел, которые можно интерпретировать как случайный шум.

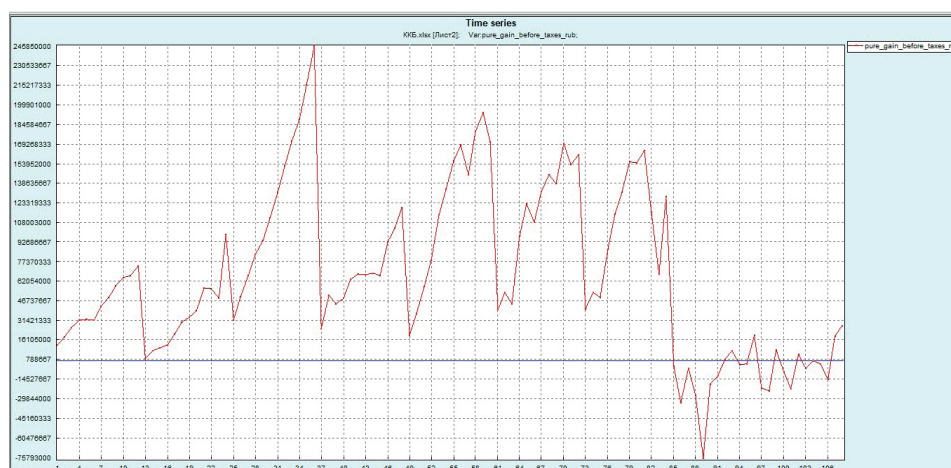


Рис. 1. Временной ряд значений показателя «Прибыль» для АО «ККБ»

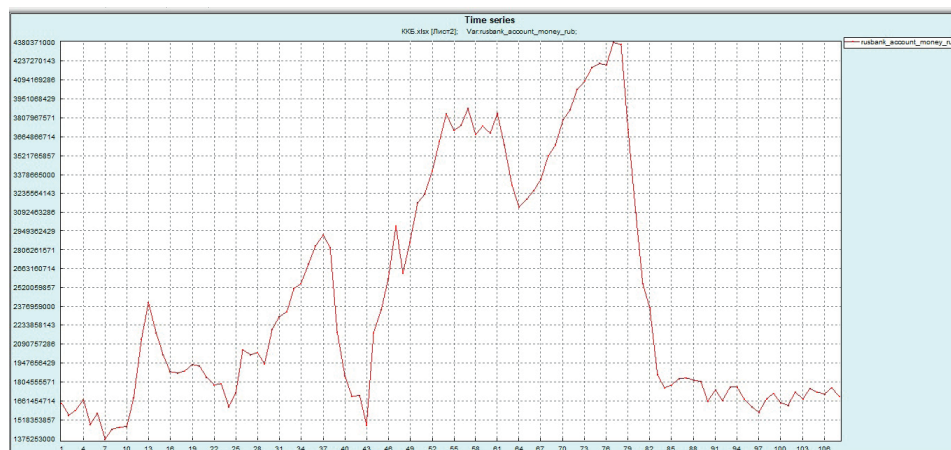


Рис. 2. Временной ряд значений показателя «Счета в Банке России» для АО «ККБ»

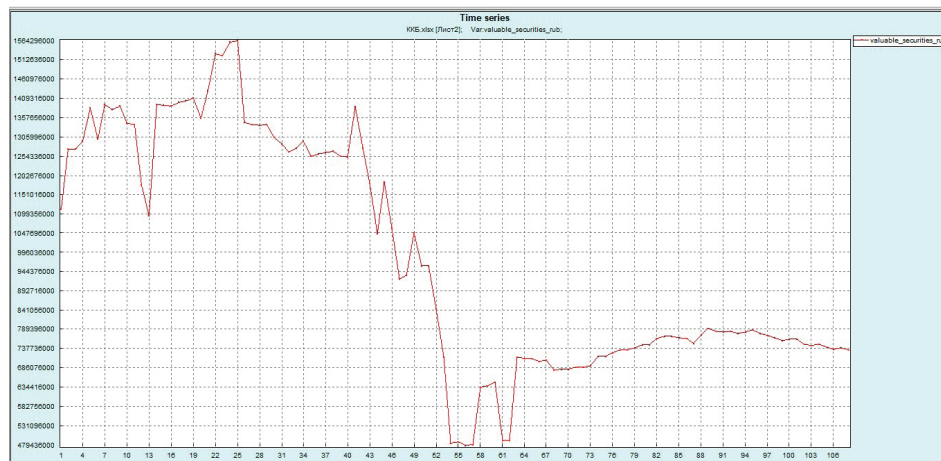


Рис. 3. Временной ряд значений показателя «Ценные бумаги» для АО «ККБ»

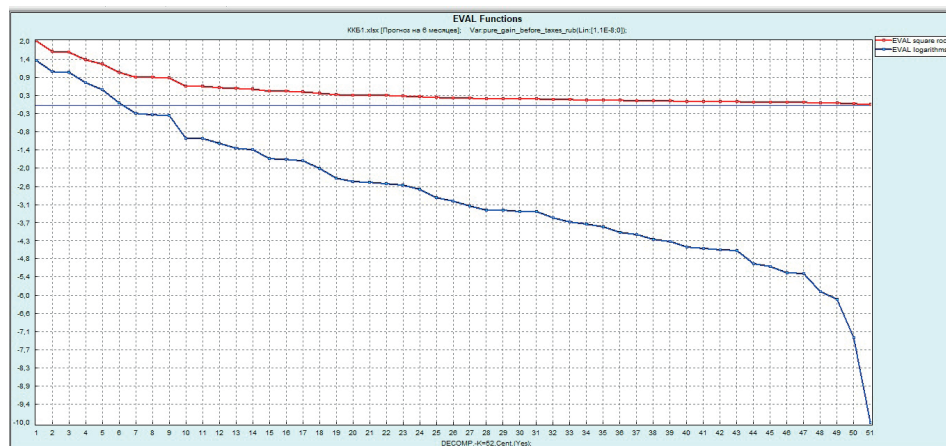


Рис. 4. Зависимость квадратного корня из собственного числа траекторной матрицы от его номера (красная кривая) для показателя «Прибыль» АО «ККБ»

Заметим, что для лучшего разложения ряда значений показателя «Прибыль» его траекторная матрица была предварительно центрирована, поэтому на рисунке 5 можно увидеть график гусеничного среднего (Average). Гусеничное среднее (далее – ГС) представляет собой нормализованный вектор средних значений по строкам траекторной матрицы. ГС соответствует константному тренду. Из графиков на рис. 5 также видно, что компоненты 1, 6, 7 отвечают за трендовые составляющие.

Вклад ГС и первых 18-ти главных компонент составил 98 %. На рис. 6 приведены: 1) сверху – исходный ряд с его аппроксимацией, реконструированной по ГС и первым 18 компонентам; 2) внизу – ряд остатков (т.е. разница между исходным и восстановленным рядами). Таким образом, с использованием метода «Гусеница»-SSA удалось обеспечить достаточно точное согласование исходного и восстановленного рядов.

На рис. 7 представлен PP-plot [9] функций накопленной вероятности для нормального распределения (изображенного отрезком прямой) и для данных, отвечающих отброшенным компонентам. Видно, что отбрасываемые данные согласуются с нормальным распределением, из чего можно предположить, что отвечающий им процесс по своему поведению близок к случайному шуму.

Далее перейдем к этапу прогнозирования методом «Гусеница»-SSA. На рис. 8 приведены результаты прогнозирования значений показателя «Прибыль» для АО «ККБ» на период в ШЕСТИ месяцев вперед, начиная с 103 точки отчета: на рисунке этот месяц отмечен вертикальным отрезком серого цвета. Слева от указанного отрезка изображен участок исходного ряда и его аппроксимация на основе 18 компонентов. Справа от указанного отрезка: а) линией синего цвета представлена прогнозная кривая; б) красными жирными линиями показаны кривые, отвечающие доверительному интервалу. Уровень доверия был задан равным 0.5.

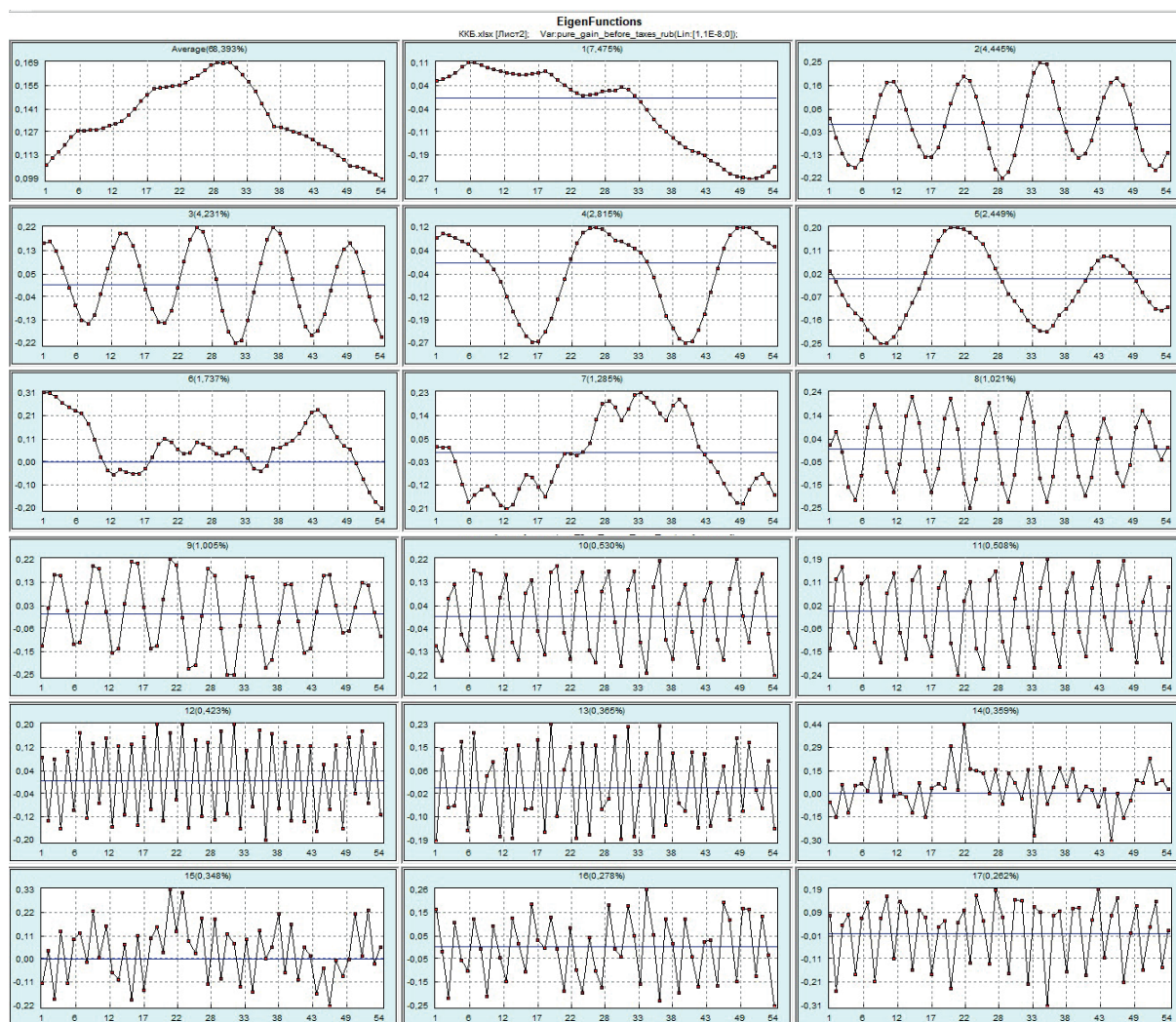


Рис. 5. Графики гусеничного среднего и первых 17-ти собственных векторов для показателя «Прибыль» АО «ККБ»

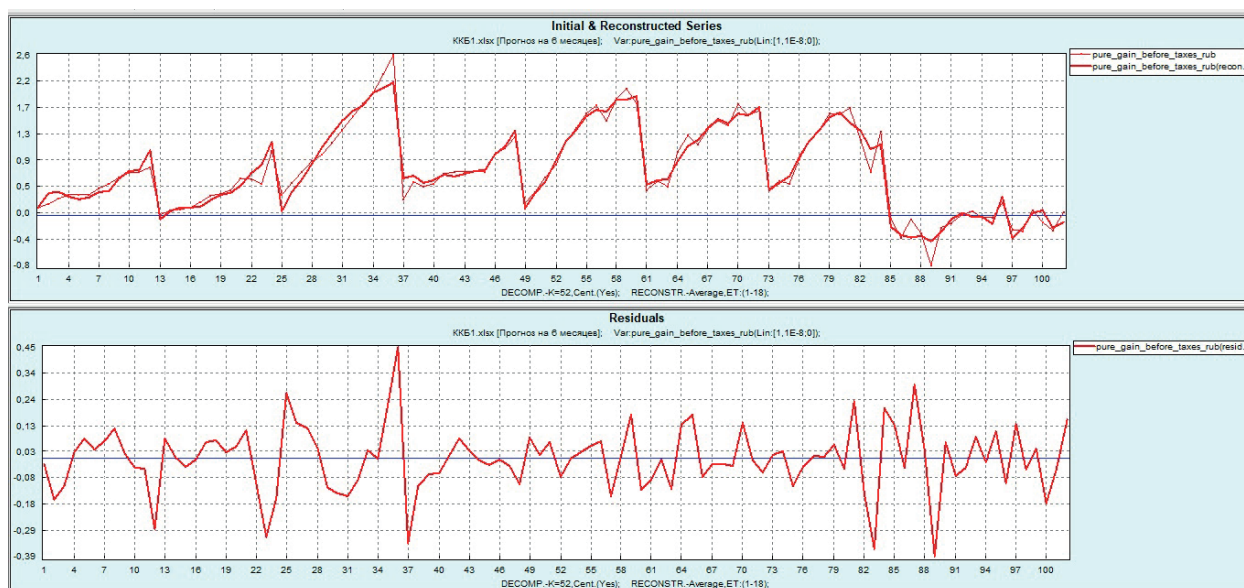


Рис. 6. Вверху – исходный и восстановленный ряд значений показателя «Прибыль» АО «ККБ», внизу – ряд остатков – похож на шум

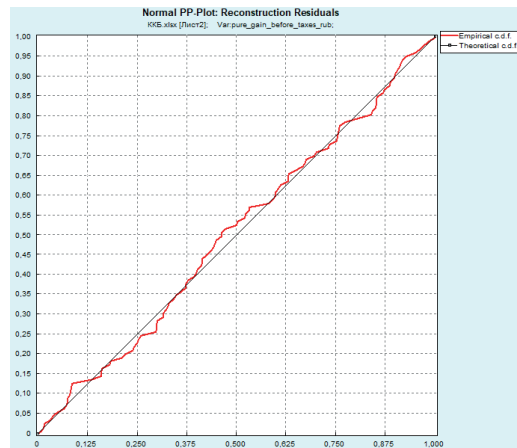


Рис. 7. Normal-pp-plot распределение, отвечающее отброшенным компонентам (для показателя «Прибыль» АО «ККБ»)

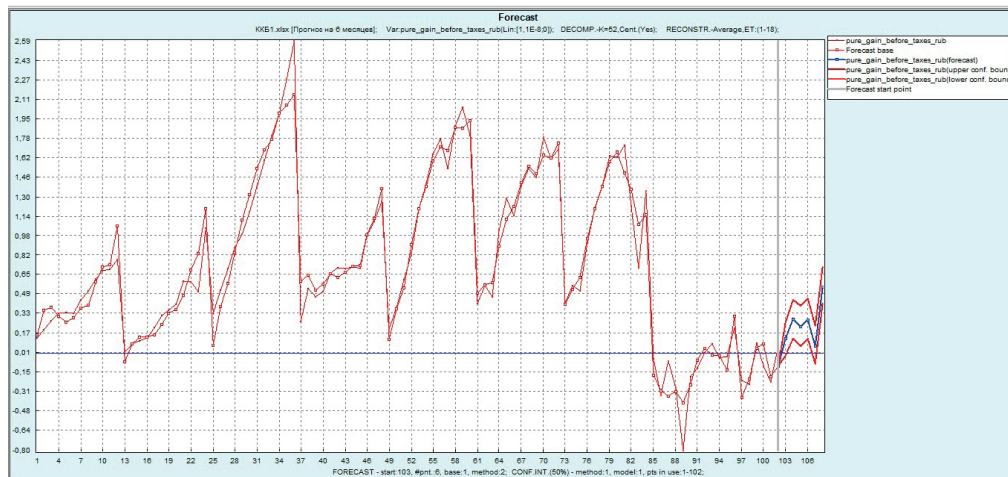


Рис. 8. Фактические и прогнозируемые значения показателя «Прибыль» для АО «ККБ» на период в 6 месяцев

Для оценки точности прогнозирования рассчитаем среднюю абсолютную процентную ошибку MAPE (10). (MAPE измеряет среднюю процентную разницу между фактическими и прогнозными значениями [10]) по формуле

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|x_t - \hat{x}_t|}{|x_t|} \times 100 \%, \quad (10)$$

где x_t – фактическое значение временного ряда показателя в момент t ; $\hat{x}_t$ – прогнозное значение временного ряда показателя в момент t ; n – длина временного ряда.

Оценка MAPE для прогнозной модели значений показателя «Прибыль» АО «ККБ» с использованием метода «Гусеница»-SSA составила 18 %. Точность прогноза рассчитывается по формуле (11)

$$Accuracy = 1 - MAPE. \quad (11)$$

и составила 82 %.

Далее рассмотрим результаты SSA-анализа временного ряда, содержащего значения показателя «Счета в Банке России» для АО «ККБ». На рис. 9 приведен временной ряд значений показателя «Счета в Банке России», восстановленный на основе ГС и первых 3 ГК, общий вклад которых в общую дисперсию составил 99 %.

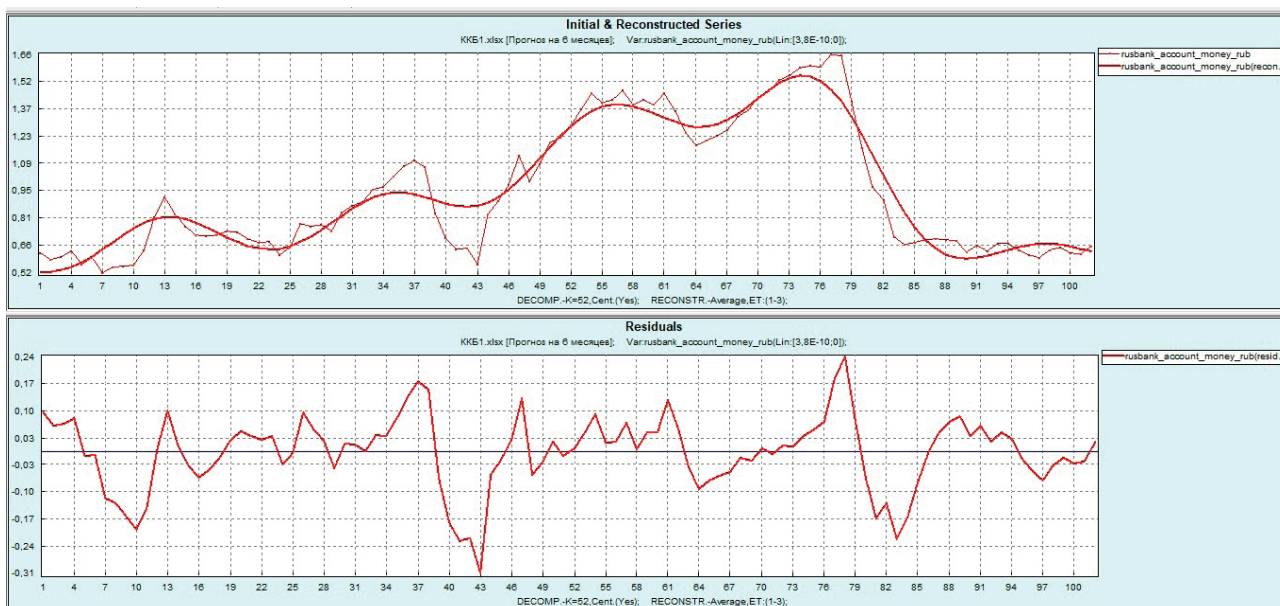


Рис. 9. Вверху – исходный и восстановленный ряд показателя «Счета в Банке России» АО «ККБ», внизу – ряд остатков

На рис. 10 представлен PP-plot функций накопленной вероятности для нормального распределения и для данных, отвечающих отброшенным компонентам.

На рис. 11 приводятся результаты прогнозирования значений показателя «Счета в Банке России» для АО «ККБ». Прогноз реализуется на период в шесть месяцев, начиная с 103 точки отчета: на рисунке этот месяц отмечен вертикальным отрезком.

Оценка MAPE для прогнозной модели значений показателя «Счета в Банке России» АО «ККБ» с использованием метода «Гусеница»-SSA составила 14 %. Точность прогноза – 86 %.

Ниже приведены результаты SSA анализа временного ряда, содержащего значения показателя «Ценные бумаги» АО «ККБ». На рис. 12 представлен временной ряд показателя «Ценные бумаги», восстановленный на основе ГС и первых 3 ГК, вклад в общую дисперсию которых составил 99 %. На рис. 13 представлен PP-plot функций накопленной вероятности для нормального распределения и для данных, отвечающих отброшенным компонентам.

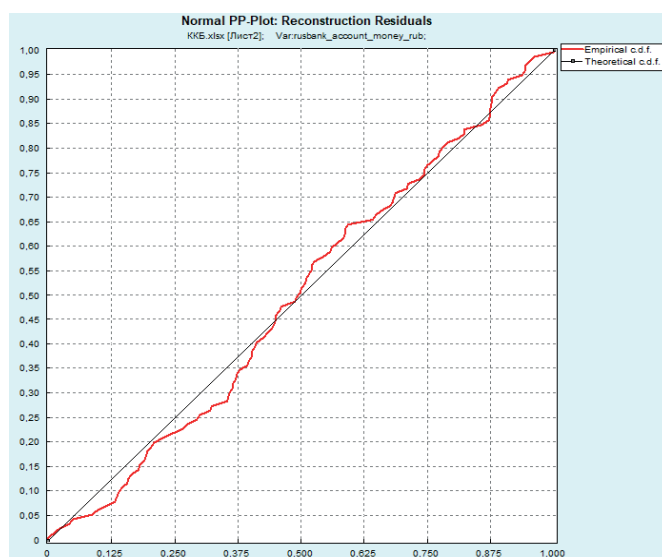


Рис. 10. Normal-pp-plot распределение, отвечающее отброшенным компонентам (для показателя «Счета в Банке России» АО «ККБ»)

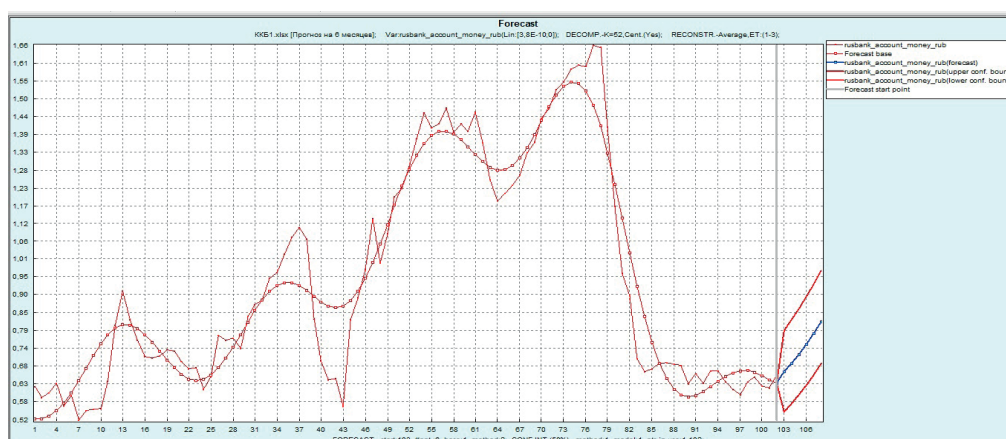


Рис. 11. Фактические и прогнозируемые значения показателя «Счета в Банке России» АО «ККБ» на период в 6 месяцев

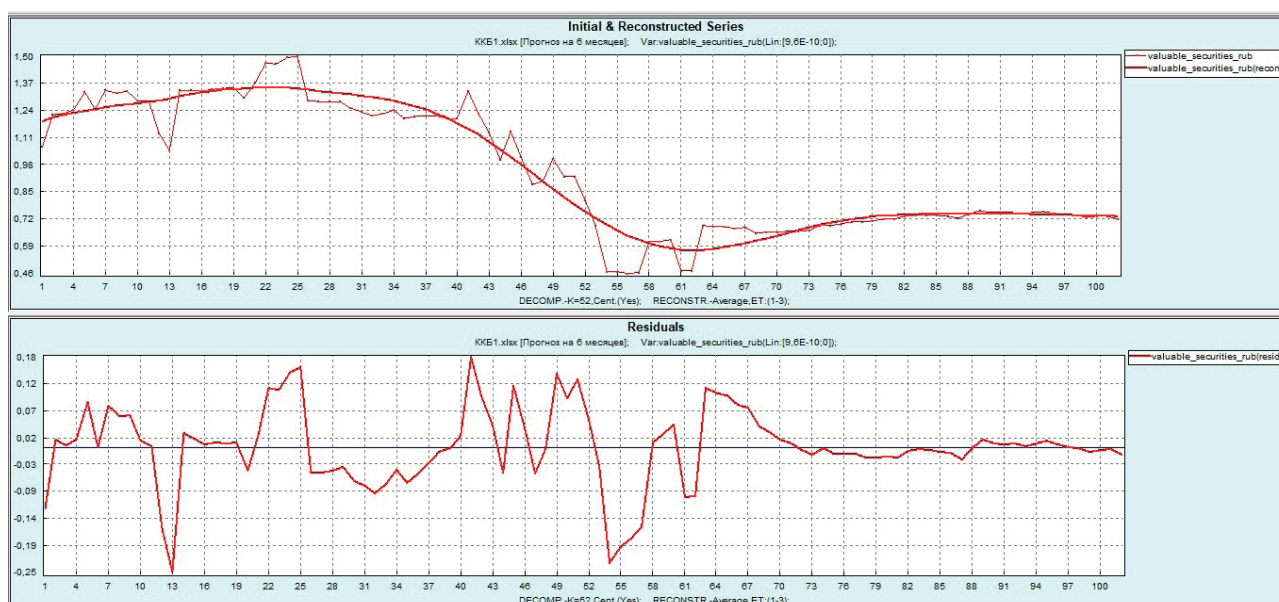


Рис. 12. Вверху – исходный и восстановленный ряд значений показателя «Ценные бумаги» АО «ККБ», внизу – ряд остатков

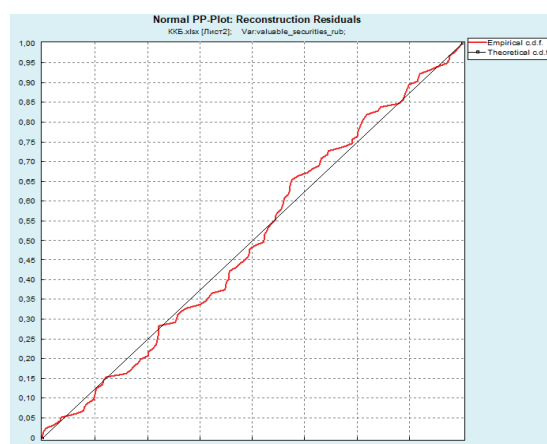


Рис. 13. Normal-pp-plot распределение, отвечающее отброшенным компонентам (для показателя «Ценные бумаги» АО «ККБ»)

На рис. 14 приводятся результаты прогнозирования значений ряда «Ценные бумаги» для АО «ККБ» на период в шесть месяцев, начиная с 103 точки отчета: на рисунке этот месяц отмечен вертикальным отрезком.

Оценка МАРЕ для прогнозной модели значений показателя «Ценные бумаги» АО «ККБ» составила 12 %. Точность прогноза – 88 %.

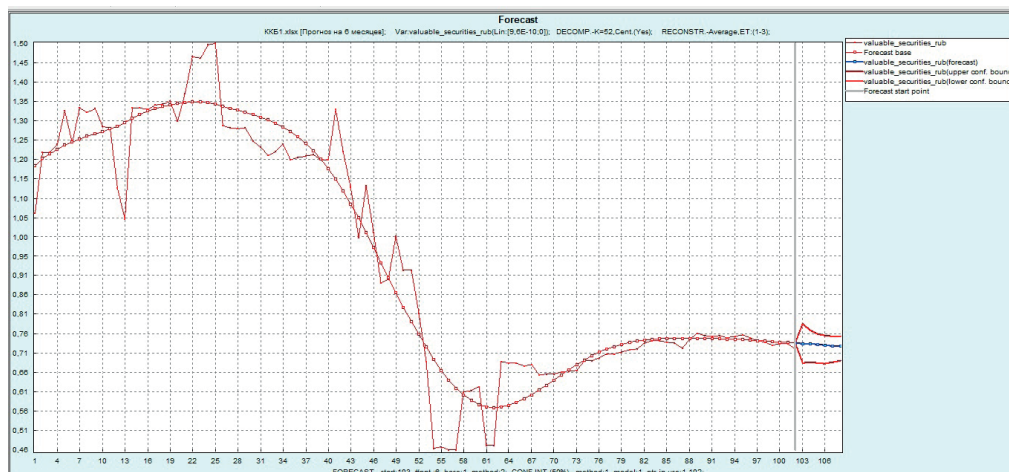


Рис. 14. Фактические и прогнозируемые значения показателя «Ценные бумаги» АО «ККБ» на период в шесть месяцев

5. SSA-анализ деятельности АО «ТБанк»

На завершающем этапе исследования рассмотрим благонадежную, с экономической точки зрения, кредитную организацию – АО «ТБанк». Для временного ряда значений показателя «Прибыль» вклад ГС и первых 12 главных компонент составил 99 %. На рис. 15 приводятся результаты прогнозирования значений ряда «Прибыль» АО «ТБанк» на период в шесть месяцев, начиная с 103 точки отчета: на рисунке этот месяц отмечен вертикальным отрезком. Уровень доверия был задан равным 0.95.

Оценка МАРЕ для прогнозной модели значений показателя «Прибыль» АО «ТБанк» составила 10 %. Точность прогноза – 90 %.

Для ряда значений показателя «Счета в Банке России» АО «ТБанк» вклад ГС и первых 11 главных компонент составил 99 %. На рисунке 16 приводятся результаты прогнозирования значений ряда «Счета в Банке России» АО «ТБанк» на период в шесть месяцев, начиная с 103 точки отчета: на рисунке этот месяц отмечен вертикальным отрезком. Уровень доверия был задан равным 0.75.

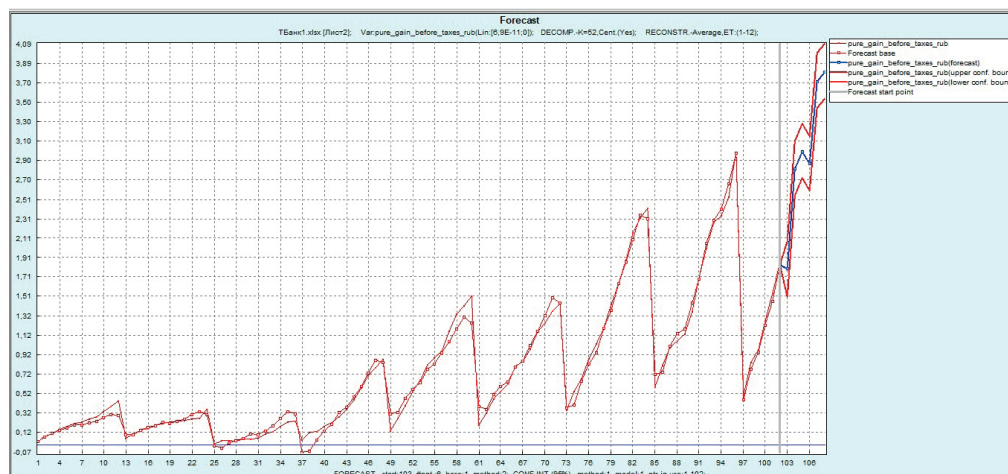


Рис. 15. Фактические и прогнозируемые значения показателя «Прибыль» АО «ТБанк» на период в шесть месяцев

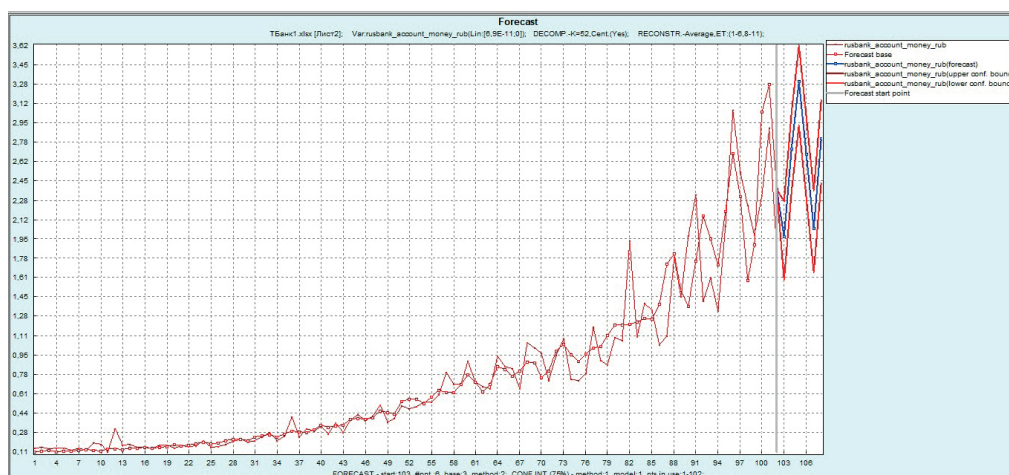


Рис. 16. Фактические и прогнозируемые значения показателя «Счета в Банке России» АО «ТБанк» на период в шесть месяцев

Оценка МАРЕ для прогнозной модели значений показателя «Счета в Банке России» АО «ТБанк» составила 19 %. Точность прогноза – 81 %.

Для ряда значений показателя «Ценные бумаги» АО «ТБанк» вклад ГС и первых трех главных компонент – 99.6 %. На рис. 17 приводятся результаты прогнозирования значений ряда «Ценные бумаги» АО «ТБанк» на период в шесть месяцев, начиная с 103 точки отчета: на рисунке этот месяц отмечен вертикальным отрезком. Уровень доверия был задан равным 0.5.

Оценка МАРЕ для прогнозной модели значений показателя «Ценные бумаги» АО «ТБанк» составила 8 %. Точность прогноза – 92 %.

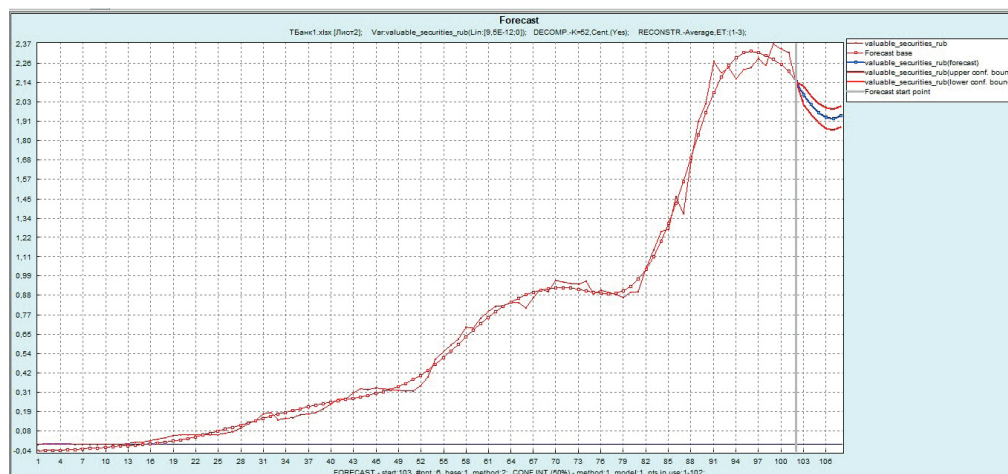


Рис. 17. Фактические и прогнозируемые значения показателя «Ценные бумаги» АО «ТБанк» на период в шесть месяцев

6. Анализ полученных результатов и выводы

В настоящей работе развит новый подход к прогнозированию финансового состояния кредитных организаций на основе их ключевых показателей («Прибыль», «Счета в Банке России», «Ценные бумаги») с использованием сингулярно-спектрального анализа методом «Гусеница»- SSA. Представлены результаты такого анализа для банка с отозванной лицензией АО «ККБ» и благонадежного банка АО «ТБанк». Применение метода «Гусеница»-SSA позволило реализовать декомпозицию анализируемых временных рядов на их составляющие: трендовые, гармонические и случайный шум. На основе отобранных главных компонент с приемлемой точностью выполнено прогнозирование рассмотренных временных рядов.

Финансирование

Работа выполнена без привлечения внешних источников финансирования.

Вклад авторов

Иванов В.В. – формулировка идеи и целей исследования, постановка задачи; разработка математической модели; проведение численных расчетов; анализ результатов вычислений; участие в проведении исследования и обсуждении результатов; подготовка текста статьи, подбор литературных источников, редактирование текста статьи, подготовка заключения.

Крянев А.В. – формулировка идеи и целей исследования, постановка задачи; разработка математической модели; участие в проведении исследования и обсуждении результатов; подготовка текста статьи, подбор литературных источников, редактирование текста статьи, подготовка заключения.

Приказчикова А.С. – разработка математической модели; проведение численных расчетов; анализ результатов вычислений; участие в проведении исследования и обсуждении результатов; подготовка текста статьи, подбор литературных источников, редактирование текста статьи, подготовка заключения.

Акишина Е.П. – проведение численных расчетов; анализ результатов вычислений; участие в проведении исследования и обсуждении результатов; подготовка текста статьи, подбор литературных источников, редактирование текста статьи, подготовка заключения.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Список литературы

1. *Вохмянин С.В., Сенашов С.И.* Метод «Гусеница»-SSA как инструмент прогнозирования состояния финансового рынка // Актуальные проблемы авиации и космонавтики, 2010 Т. 1. № 6. С. 409–410.
2. *Зиненко А.В.* Прогнозирование финансовых временных рядов с использованием сингулярного спектрального анализа // Бизнес-информатика, 2023. Т. 17. № 3. С. 87–100. DOI: 10.17323/2587-814X.2023.3.87.100.
3. *Савин А.С., Хохлов А.А., Четов А.И.* Анализ временных рядов в приложении к изучению поведения покупателей // Интернет-журнал «Науковедение», 2015. Т.7, № 3. <http://naukovedenie.ru/PDF/41TVN315.pdf> (доступ свободный). DOI: 10.15862/41TVN315.
4. *Акишина Е.П., Иванов В.В., Крянев А.В., Приказчикова А.С.* Многомерный анализ данных в задаче прогнозирования попадания кредитных организаций в зону риска // Вестник НИЯУ МИФИ, 2024. Т. 13. № 1. С. 22–29. <https://doi.org/10.26583/vestnik.2024.302>. EDN: HUDHFW.
5. *Акишина Е.П., Иванов В.В., Крянев А.В., Приказчикова А.С.* Разработка математических моделей классификации кредитных организаций с использованием деревьев решений и их ансамблей // Вестник НИЯУ МИФИ, 2024. Т. 13. № 4. С. 242–250. <https://doi.org/10.26583/vestnik.2024.350>. EDN: LGWWEN.
6. *Голяндина Н.Э.* Метод «Гусеница»-SSA: анализ временных рядов. СПб.: Издательский Центр «Академия», 2004. 52 с.
7. Главные компоненты временных рядов: метод Гусеница /Под ред. Д.Л. Данилова и А.А. Жиглявского. СПб.: СПбГУ, 1997. 307 с.
8. GistaT Group. Caterpillar-SSA, version 3.40. Professional M Edition. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.gistatgroup.com/cat/>. (дата обращения 10.12.2024).
9. *Gibbons J.D., Chakraborti S.* Nonparametric statistical inference, 4th Edition. CRC Press, 2003, 682 p. ISBN 978-0-8247-4052-8.
10. *Турунцева М.Ю.* Оценка качества прогнозов: простейшие методы // Российское предпринимательство, 2011. Т. 12, № 8 (1). С. 50–56.

The credit organizations financial state forecasting based on singular-spectral analysis

V. V. Ivanov^{1,2}, A. V. Krynev^{2,1,✉}, A. S. Prikazchikova², E. P. Akishina¹

¹ Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, 141980, Russia,

² National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, 115409, Russia,

✉ AVKrynev@mephi.ru

Received January 15, 2024; revised January 29, 2025; accepted January 31, 2025

Singular spectrum analysis is successfully applied in many practical problems of mathematical modeling, including economic ones. The purpose of this work is to develop a new mathematical approach for forecasting the values of key performance indicators of credit institutions («Profit», «Accounts with the Bank of Russia», «Securities»), presented as time series with an observation step of one month. The analysis and forecasting of key indicators was carried out using singular spectrum analysis by the «Caterpillar»-SSA method in the CaterpillarSSA program. The relevance of the study is due to the need to implement new efficient computing technologies for the early warning systems of the Bank of Russia and Rosfinmonitoring. The article presents the implementation of the «Caterpillar»-SSA method for assessing the financial condition of two types of credit institutions: a bank with a revoked license (JSC Bank «CCB») and a reliable bank (JSC «TBank»). The authors managed to implement the decomposition of time series of key indicators into a trend, harmonic and noise components. Based on the principal components responsible for the trend and periodicity, the reconstruction and forecasting of the considered time series for 6 months ahead were performed with high accuracy.

Keywords: singular spectrum analysis, «Caterpillar»-SSA method, forecasting, time series, credit institutions, mathematical methods

References

1. *Vokhmyanin S.V., Senashov S.I.* Metod «Gusenica»-SSA kak instrument prognozirovaniya sostoyaniya finansovogo rynka. [The Caterpillar-SSA method as a tool for forecasting the state of the financial market]. Aktual'nye problemy aviatsii i kosmonavтики, 2010, vol. 1, no. 6, pp. 409–410.
2. *Zinenko A.V.* Prognozirovanie finansovykh vremennykh ryadov s ispol'zovaniem singulyarnogo spektral'nogo analiza [Forecasting financial time series using singular spectrum analysis]. Biznes-informatika, 2023, vol. 17, no. 3, pp. 87–100. DOI: 10.17323/2587-814X.2023.3.87.100.
3. *Savin A. S., Khokhlov A. A., Chetov A. I.* Analiz vremennykh ryadov v prilozhenii k izucheniyu povedeniya pokupatelej. [Time Series Analysis in Application to the Study of Consumer Behavior]. Internet-zhurnal «Naukovedenie» [Internet Journal «Science Studies»], 2015. vol. 7, no. 3. <http://naukovedenie.ru/PDF/41TVN315.pdf> (free access). DOI: 10.15862/41TVN315.
4. *Akishina E.P., Ivanov V.V., Krynev A.V., Prikazchikova A.S.* Mnogomernyj analiz dannykh v zadache prognozirovaniya popadaniya kreditnykh organizatsij v zonu riska. [Multivariate data analysis in the problem of predicting whether credit institutions will fall into the risk zone]. Vestnik NIYaU MIFI, 2024, vol. 13, no.1, pp. 22–29. <https://doi.org/10.26583/vestnik.2024.302>. EDN: HUDHFW.
5. *Akishina E.P., Ivanov V.V., Krynev A.V., Prikazchikova A.S.* Razrabotka matematicheskikh modelej klassifikatsii kreditnykh organizatsij s ispol'zovaniem derev'ev reshenij i ih ansamblej [Development of mathematical models for the classification of credit institutions using decision trees and their ensembles]. Vestnik NIYaU MIFI, 2024, vol. 13, no.4, pp. 242–250. <https://doi.org/10.26583/vestnik.2024.350>. EDN: LGWWEH.
6. *Golyandina N.E.* Metod «Gusenica»-SSA: analiz vremennykh ryadov [The Caterpillar-SSA Method: Time Series Analysis]. Sankt –Peterburg, Izdatel'skij Centr «Akademiya» Publ., 2004. 52 p.

7. *Glavnye komponenty vremennyh ryadov: metod Gusenica* /Pod red. D.L. Danilova i A.A. Zhiglyavskogo [Principal Components of time series: The Caterpillar Method / Ed. by D. L. Danilov and A. A. Zhiglyavsky].]. Sankt-Peterburg, SPbGU Publ., 1997. 307 p.
8. GistaT Group. CaterpillarSSA, version 3.40. Professional M Edition. Available at: <http://www.gistatgroup.com/cat/>. (accessed 10.12.2024)
9. *Gibbons J.D., Chakraborti S.* Nonparametric statistical inference, 4th Edition. CRC Press, 2003, 682 p. ISBN 978-0-8247-4052-8.
10. *Turuntseva M.Y.* Ocenka kachestva prognozov: prostejshie metody [Assessment of Forecast Quality: the Simplest Methods]. Rossijskoe predprinimatel'stvo, 2011, vol. 12, no. 8(1), pp. 50–56.

УДК 519.63+533.6

Полная система уравнений Навье – Стокса: линеаризация и построение решений

А. А. Бугаенко^{1,2}, И. Ю. Крутова²

¹ Федеральное государственное унитарное предприятие «Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е.И. Забабахина», Снежинск, 456776, Россия

² ФГАОУ ВО «Снежинский физико-технический институт Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», Снежинск, 456776, Россия

Моделирование атмосферных явлений проводится на основе систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных с последующим их численным исследованием. В результате дискретизации этих уравнений мы приходим к системам с миллионами и даже миллиардами неизвестных. В силу нелинейности полной системы уравнений Навье–Стокса построение ее решений является достаточно трудоемким. Как следствие, применяется процедура линеаризации на точном решении (однородном покое). Для линеаризованной системы при учете действия сил тяжести и Кориолиса численно моделируется возникновение и развитие восходящих закрученных потоков разной интенсивности с использованием продува вверх по трубе. Численный расчет скоростных характеристик трехмерного нестационарного течения вязкого теплопроводного газа в восходящем закрученном потоке, инициированном вертикальным продувом, показал, что закрутка газа происходит в положительном направлении и обусловлена наличием в линеаризованной полной системе уравнений Навье–Стокса членов, описывающих ускорение Кориолиса. Таким образом, еще раз численно подтверждена схема возникновения восходящего закрученного потока. Также сделано заключение о возможности применения данного подхода к исследованию восходящих закрученных потоков типа «торнадо» и тропического циклона.

Ключевые слова: полная система уравнений Навье–Стокса, сила Кориолиса, линеаризация, численное моделирование, продув.

Введение

При численном построении сложных неоднородных и нестационарных течений газа для увеличения устойчивости счета часто применяют различные алгоритмы, сглаживающие решения. Для того чтобы данная процедура имела обоснованный физический смысл, в работе рассматривается полная система уравнений Навье–Стокса (ПСУНС), в которой сжимаемость газа, диссипативные эффекты вязкости и теплопроводности учтены таким образом, что общие законы сохранения массы, импульса и энергии выполняются. Благодаря учету уравнений состояния также выполняются законы термодинамики.

В силу нелинейности PSUНС построение ее решений является достаточно трудоемким [1, 2], что и послужило причиной линеаризации системы. В работе приведена процедура линеаризации PSUНС на точном решении, описывающем однородный покой. Также в статье приведены результаты численных исследований по созданию стабильного окружного движения воздуха в придонной части восходящего закрученного потока (ВЗП) с применением вертикальной трубы с вентилятором вытяжного действия, направляющим воздух по трубе снизу-вверх [3, 6, 8–10, 13–14]. В том числе описываются результаты численных расчетов газодинамических параметров: плотности, температуры, включая скоростные

✉ А.А. Бугаенко: BugaenkoAA@vniitf.ru
И.Ю. Крутова: IYKrutova@mephi.ru

Поступила в редакцию: 18.01.2025
После доработки: 29.01.2025
Принята к публикации: 31.01.2025

характеристики трехмерных нестационарных восходящих закрученных течений газа определенного масштаба, вызванных вертикальным продувом. Численный расчет подобных течений газа позволяет дать конкретные предложения и рекомендации по возможному проведению крупномасштабного эксперимента по закрутке больших масс воздуха.

Линеаризация полной системы уравнений Навье – Стокса

Полная система уравнений Навье–Стокса при учете действия силы Кориолиса и силы тяжести имеет следующий вид [2, 4–8, 11]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0, \\ u_t + uu_x + vu_y + wu_z + \frac{T}{\gamma\rho}\rho_x + \frac{1}{\gamma}T_x = av - bw + \frac{\mu_0}{\rho}\left(u_{xx} + \frac{3}{4}u_{yy} + \frac{3}{4}u_{zz} + \frac{1}{4}v_{xy} + \frac{1}{4}w_{xz}\right), \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \frac{T}{\gamma\rho}\rho_y + \frac{1}{\gamma}T_y = -au + \frac{\mu_0}{\rho}\left(\frac{3}{4}v_{xx} + v_{yy} + \frac{3}{4}v_{zz} + \frac{1}{4}u_{xy} + \frac{1}{4}w_{yz}\right), \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z + \frac{T}{\gamma\rho}\rho_z + \frac{1}{\gamma}T_z = bu - g + \frac{\mu_0}{\rho}\left(\frac{3}{4}w_{xx} + \frac{3}{4}w_{yy} + w_{zz} + \frac{1}{4}u_{xz} + \frac{1}{4}v_{yz}\right), \\ T_t + uT_x + vT_y + wT_z + (1-\gamma)T(u_x + v_y + w_z) = \frac{k_0}{\rho}(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) + \\ + \frac{\mu_0\gamma(\gamma-1)}{2\rho}\left[(u_x - v_y)^2 + (u_x - w_z)^2 + (v_y - w_z)^2 + \frac{3}{2}((u_y + v_x)^2 + (u_z + w_x)^2 + (v_z + w_y)^2)\right]. \end{array} \right. \quad (1)$$

где ρ – плотность газа; $V = (u, v, w)$ – вектор скорости газа с его проекциями на декартовы оси Ox , Oy , Oz ; $\Omega = (0; \Omega_2; \Omega_1)$; $\Omega_2 = \Omega \cos \psi$; $\Omega_1 = \Omega \sin \psi$ – вектор угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси; ψ – широта точки, в которой находится начало декартовой системы координат (x, y, z) , вращающейся вместе с Землей; $a = 2\Omega_1$; $b = 2\Omega_2$; $g = (0, 0, -g)$, $g = \text{const} > 0$ – ускорение свободного падения; μ_0 , k_0 – постоянные коэффициенты вязкости и теплопроводности [1].

Благодаря наличию в правых частях уравнений движений второго, третьего и четвертого уравнений системы (1) – слагаемых, отвечающих за присутствие ускорения Кориолиса, в поток газа вносится дополнительный внешний импульс. Именно он и приводит к закрутке вязкого теплопроводного газа в придонной части вертикального теплового восходящего потока.

В системе (1) при введении безразмерных переменных масштабные значения связаны следующими соотношениями [2, 4–8, 11, 14]:

$$u_{00} = \sqrt{R\gamma T_{00}} = c_{00}, \quad t_{00} = \frac{r_{00}}{u_{00}}, \quad p_{00} = R\rho_{00}T_{00}, \quad e_{00} = c_{v0}T_{00},$$

где $\gamma = 1 + R/c_{v0}$; R – универсальная газовая постоянная; c_{v0} – удельная теплоемкость.

Следовательно, за масштабные значения скорости, давления и внутренней энергии выбраны, соответственно, скорость звука, давление и внутренняя энергия газа с параметрами ρ_{00} , T_{00} . В качестве масштабного значения скорости берется значение $u_{00} = c_{00} = 1000/3$ м/с, близкое к значению скорости распространения звука в воздухе при стандартных условиях, т.е. при $\rho_{00} = 1.29$ кг/м³, $T_{00} = 288$ К.

Постоянные безразмерные значения коэффициентов вязкости μ_0 и теплопроводности k_0 определяются следующими соотношениями

$$\mu_0 = \frac{4\mu_*}{3\rho_{00}u_{00}r_{00}}, \quad k_0 = \frac{k_*}{c_{v0}\rho_{00}u_{00}r_{00}},$$

где μ_* , k_* – размерные значения постоянных коэффициентов вязкости и теплопроводности. Для воздуха: $\gamma = 1.4$ и тогда $k_0 \approx \mu_0$.

У системы (1) в случае $g = 0$ имеется точное решение:

$$\rho = 1, T = 1, u = v = w = 0. \quad (2)$$

Линеаризация системы (1) на точном решении (2) состоит в том, что решение этой системы представляется в виде

$$\rho = 1 + \tilde{\rho}, T = 1 + \tilde{T}, V = \tilde{V},$$

эти выражения подставляются в систему (1), предварительно умножив все уравнения кроме первого на ρ .

Слагаемые, не содержащие тильдованных функций и тильдованных производных, взаимно уничтожаются, поскольку выражения (2) задают точное решение системы (1). Затем нелинейные выражения с тильдованными функциями и тильдованными производными отбрасываются. В результате получается следующая линейная система уравнений с частными производными, где для простоты знак тильды опущен [1]:

$$\begin{cases} \rho_t + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0, \\ u_t + \frac{\rho_x}{\gamma} + \frac{T_x}{\gamma} = av - bw + \mu_0 \left(u_{xx} + \frac{3}{4}u_{yy} + \frac{3}{4}u_{zz} + \frac{1}{4}v_{xy} + \frac{1}{4}w_{xz} \right), \\ v_t + \frac{\rho_y}{\gamma} + \frac{T_y}{\gamma} = -au + \mu_0 \left(\frac{3}{4}v_{xx} + v_{yy} + \frac{3}{4}v_{zz} + \frac{1}{4}u_{xy} + \frac{1}{4}w_{yz} \right), \\ w_t + \frac{\rho_z}{\gamma} + \frac{T_z}{\gamma} = bu + \mu_0 \left(\frac{3}{4}w_{xx} + \frac{3}{4}w_{yy} + w_{zz} + \frac{1}{4}u_{xz} + \frac{1}{4}v_{yz} \right), \\ T_t + (\gamma - 1)(u_x + v_y + w_z) = k_0(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}). \end{cases} \quad (3)$$

В работе [11] показано, что процедура линеаризации квазилинейного уравнения с частными производными на его точном решении и построение решения полученного линейного уравнения фактически являются построением слагаемого с номером «один» у конкретного бесконечного ряда по степеням формального малого параметра ϵ . Этот ряд решает специальным образом поставленную характеристическую задачу Коши стандартного вида и при условии аналитичности входных данных задачи этот бесконечный ряд по степеням ϵ сходится в некоторой окрестности рассматриваемой точки. Следовательно, решение линеаризованной задачи в сумме с точным решением, на котором проведена линеаризация, дает первые два слагаемых бесконечного сходящегося ряда, задающего новое решение исходного нелинейного уравнения с частными производными.

Конечно-разностная аппроксимация линеаризованной полной системы уравнений Навье – Стокса и начально-краевых условий

Для расчета нестационарных трехмерных течений в качестве расчетной области принимается прямоугольный параллелепипед (рис. 1), в котором строится равномерная прямоугольная сетка.

Для линеаризованной системы уравнений Навье – Стокса при учете действия силы Кориолиса и силы тяжести строится следующая разностная аппроксимация.

Для аппроксимации производной по временной переменной используются значения функции с двух последовательных вре-

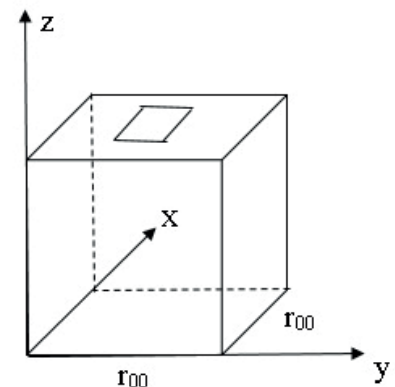


Рис. 1. Расчетная область

менных слоев [3]. А для аппроксимации производных по пространственным переменным используются центральные разности значений функций с предыдущего временного слоя:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_{i,j,k}^{n+1} - f_{i,j,k}^n}{\Delta t}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1,j,k}^n - f_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \approx \frac{f_{i,j+1,k}^n - f_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \approx \frac{f_{i,j,k+1}^n - f_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z}, \quad (4)$$

где под буквой f подразумеваются проекции вектора скорости на декартовы оси, а также плотность и температура газа $f = (\rho, T, u, v, w)$.

Вторые производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{i+1,j,k}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx \frac{f_{i,j+1,k}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \approx \frac{f_{i,j,k+1}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2}.$$

Смешанные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &\approx \frac{f_{i+1,j+1,k}^n - f_{i-1,j+1,k}^n - f_{i+1,j-1,k}^n + f_{i-1,j-1,k}^n}{4\Delta x \Delta y}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &\approx \frac{f_{i+1,j,k+1}^n - f_{i-1,j,k+1}^n - f_{i+1,j,k-1}^n + f_{i-1,j,k-1}^n}{4\Delta x \Delta z}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &\approx \frac{f_{i,j+1,k+1}^n - f_{i,j-1,k+1}^n - f_{i,j+1,k-1}^n + f_{i,j-1,k-1}^n}{4\Delta y \Delta z}. \end{aligned}$$

Использование формул (4) подразумевает, что расчет трехмерного нестационарного течения ведется по явной схеме переходом с очередного n -го временного слоя на следующий $(n+1)$ -й временной слой с постоянным заданным шагом.

При этом по пространственным переменным используется равномерная прямоугольная сетка с постоянными заданными шагами Δx , Δy и Δz соответственно.

Разностное уравнение для вычисления плотности газа во внутреннем узле (i, j, k) расчетной области

$$\frac{\rho_{i,j,k}^{n+1} - \rho_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \frac{u_{i+1,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1,k}^n - v_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} + \frac{w_{i,j,k+1}^n - w_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} = 0.$$

Аналогично для второго уравнения системы (3)

$$\begin{aligned} &\frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_{i+1,j,k}^n - \rho_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{\gamma} \frac{T_{i+1,j,k}^n - T_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} = \\ &= a v_{i,j,k}^n - b w_{i,j,k}^n + \mu_0 \frac{u_{i+1,j,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2} + \mu_0 \frac{3}{4} \frac{u_{i,j+1,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} + \mu_0 \frac{3}{4} \frac{u_{i,j,k+1}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2} + \\ &+ \mu_0 \frac{1}{4} \frac{v_{i+1,j+1,k}^n - v_{i-1,j+1,k}^n - v_{i+1,j-1,k}^n + v_{i-1,j-1,k}^n}{4\Delta x \Delta y} + \mu_0 \frac{1}{4} \frac{w_{i+1,j,k+1}^n - w_{i-1,j,k+1}^n - w_{i+1,j,k-1}^n + w_{i-1,j,k-1}^n}{4\Delta x \Delta z}. \end{aligned}$$

Разностное уравнение для вычисления второй компоненты вектора скорости:

$$\begin{aligned} & \frac{v_{i,j,k}^{n+1} - v_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_{i,j+1,k}^n - \rho_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} + \frac{1}{\gamma} \frac{T_{i,j+1,k}^n - T_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} = \\ & = -au_{i,j,k}^n + \mu_0 \frac{3}{4} \frac{v_{i+1,j,k}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2} + \mu_0 \frac{v_{i,j+1,k}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} + \mu_0 \frac{3}{4} \frac{v_{i,j,k+1}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2} + \\ & + \mu_0 \frac{1}{4} \frac{u_{i+1,j+1,k}^n - u_{i-1,j+1,k}^n - u_{i+1,j-1,k}^n + u_{i-1,j-1,k}^n}{4\Delta x\Delta y} + \mu_0 \frac{1}{4} \frac{w_{i,j+1,k+1}^n - w_{i,j-1,k+1}^n - w_{i,j+1,k-1}^n + w_{i,j-1,k-1}^n}{4\Delta x\Delta z}. \end{aligned}$$

Разностное уравнение для вычисления третьей компоненты вектора скорости:

$$\begin{aligned} & \frac{w_{i,j,k}^{n+1} - w_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_{i,j,k+1}^n - \rho_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} + \frac{1}{\gamma} \frac{T_{i,j,k+1}^n - T_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} = \\ & = bu_{i,j,k}^n + \mu_0 \frac{3}{4} \frac{w_{i+1,j,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2} + \mu_0 \frac{3}{4} \frac{w_{i,j+1,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} + \mu_0 \frac{w_{i,j,k+1}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2} + \\ & + \mu_0 \frac{1}{4} \frac{u_{i+1,j,k+1}^n - u_{i-1,j,k+1}^n - u_{i+1,j,k-1}^n + u_{i-1,j,k-1}^n}{4\Delta x\Delta y} + \mu_0 \frac{1}{4} \frac{w_{i,j+1,k+1}^n - w_{i,j-1,k+1}^n - w_{i,j+1,k-1}^n + w_{i,j-1,k-1}^n}{4\Delta x\Delta z}. \end{aligned}$$

Разностное уравнение для вычисления температуры газа:

$$\begin{aligned} & \frac{T_{i,j,k}^{n+1} - T_{i,j,k}^n}{\Delta t} + (\gamma - 1) \left(\frac{u_{i+1,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1,k}^n - v_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} + \frac{w_{i,j,k+1}^n - w_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} \right) = \\ & = k_0 \left(\frac{T_{i+1,j,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} + \frac{T_{i,j,k+1}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2} \right). \end{aligned}$$

Исходя из данных проведенных экспериментов, математическое моделирование вертикального продува осуществляется заданием вертикальной составляющей скорости газа через квадратное отверстие размером 0.1×0.1 в центре верхней грани расчетной области в виде функции $w(t) = M(1 - e^{-10t})$, описывающей постепенное увеличение со временем вертикальной скорости продува от 0 до 10. Тем самым через верхнее отверстие моделируется вертикальный плавный продув воздуха в диапазоне скоростей от 0 до M .

Граничные условия для искомых пяти функций выбираются в предположении, что газ из расчетной области может выходить только через ту часть верхней грани, где осуществляется продув, а входить только через боковые грани.

За начальные условия принимается набор функций

$$\rho = \rho_0(z) = (1 - kz)^{\gamma-1}, \quad T = T_0(z) = 1 - kz, \quad v = \frac{\gamma g}{k}, \quad k = \frac{lx_{00}}{T_{00}}, \quad l = 0.0065 \frac{K}{m},$$

$$u=0, v=0, w=0,$$

поскольку они являются точными решениями полной системы уравнений Навье–Стокса и описывают стационарные газодинамические параметры газа, покоящегося в поле силы тяжести, когда плотность и температура зависят только от высоты [6, 9].

Численное моделирование течений газа в восходящих закрученных потоках малых масштабов

Расчеты течений газа в малых восходящих закрученных потоках проводились при масштабном значении расстояния $r_{00} = 10$ м, масштабном значении времени $t_{00} = r_{00}/u_{00} = 0.03$ с, разностным шагом по трем пространственным переменным: $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.005$ и шаге по времени $\Delta t = 0.001$ [6, 9].

Через квадратное отверстие размером 0.1×0.1 в центре верхней грани расчетной области задается вертикальная скорость течения газа при $M = 0.003$.

На рис. 2, 3 представлены результаты расчетов плотности газа на высоте 0.025 (размерное значение 0.25 м) для двух различных моментов расчетного времени.

Плотность газа по периметру расчетной области сохраняется постоянной и равной значению плотности стационарного распределения. В начальные моменты времени происходят колебания плотности в четвертом десятичном знаке, а с течением времени амплитуда колебаний плотности постепенно уменьшается и наблюдается плавное понижение плотности в центре расчетной области [6, 9, 10]. При увеличении времени расчета процесс изменения плотности плавно выходит на стационарный режим. Поверхность плотности газа приобретает вид воронки с пониженной плотностью в центре расчетной области.

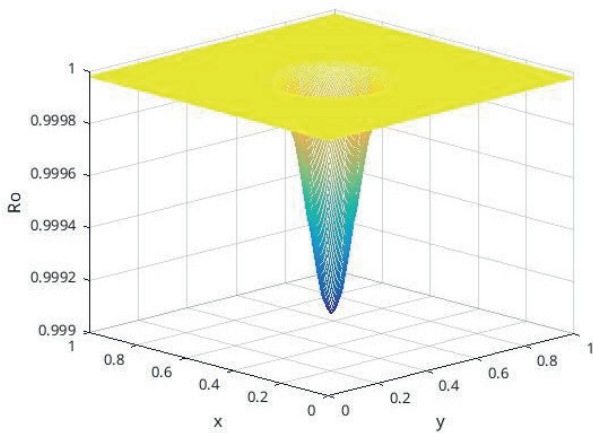


Рис. 2. Плотность газа при $t = 0.1$ с

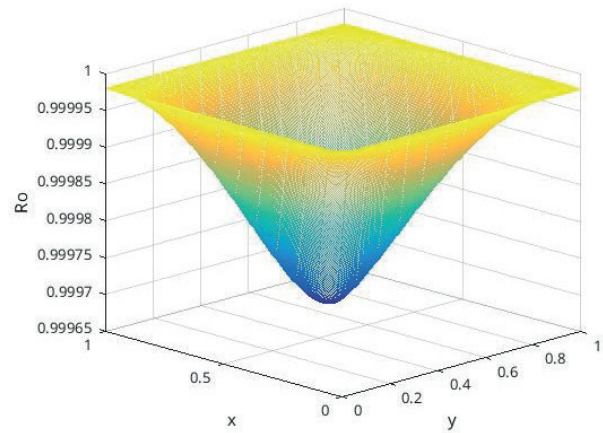


Рис. 3. Плотность газа при $t = 30$ с

На рис. 4, 5 представлены результаты расчетов температуры газа на той же высоте для тех же моментов расчетного времени.

Несмотря на продув газа через верхнее отверстие, в результате численного решения линейризованной ПСУНС отмечается понижение температуры в центре расчетной области под отверстием продува. Периферийное же значение температуры соответствует постоянному значению начального стационарного распределения. Следует отметить, что так же, как и для плотности видны незначительные изменения температуры в начальные моменты времени счета, которые постепенно исчезают при выходе процесса на стационарный режим [6].

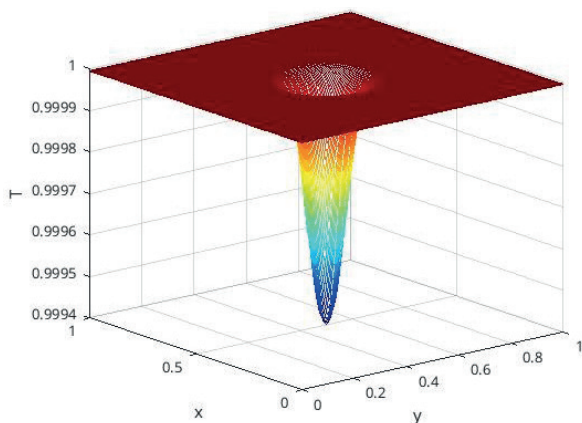


Рис. 4. Температура газа при $t = 0.1$ с

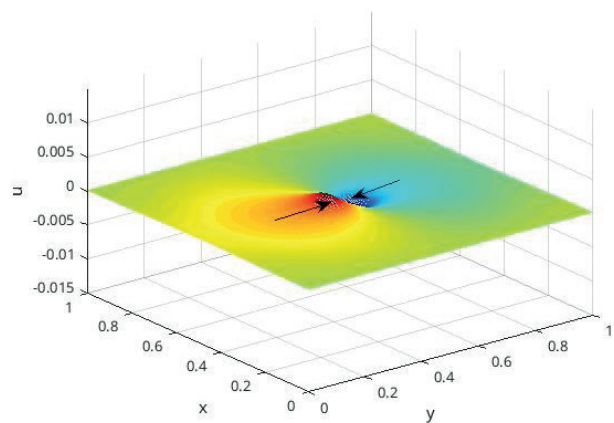


Рис. 5. Температура газа при $t = 30$ с

Общим в поведении термодинамических характеристик является то, что по мере приближения к центру расчетной области прослеживается их осевая симметрия. Ось симметрии расположена вертикально, проходит через геометрический центр расчетной области и совпадает с центром отверстия продува.

На рис. 6а – в представлении в виде поверхностей результаты расчетов первой компоненты скорости газа на высоте 0.25 м для трех расчетных моментов времени.

В начальные моменты времени счета (см. рис. 6а) на общем фоне нулевых по значению скоростей в центре расчетной области возникают зоны, в которых x -е компоненты скорости отличны от нуля и противоположны по знаку. Такое распределение скоростей означает встречное движение частиц газа в центральной области расчетного параллелепипеда. Стрелками на рисунках помечены направления движения частиц газа. Ясно, что в начальный момент времени пока нет никакой закрутки газа.

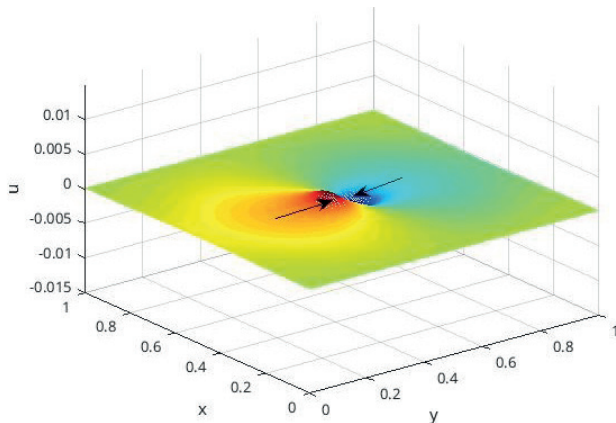


Рис. 6а. Первая компонента вектора скорости при $t=0.5$ с

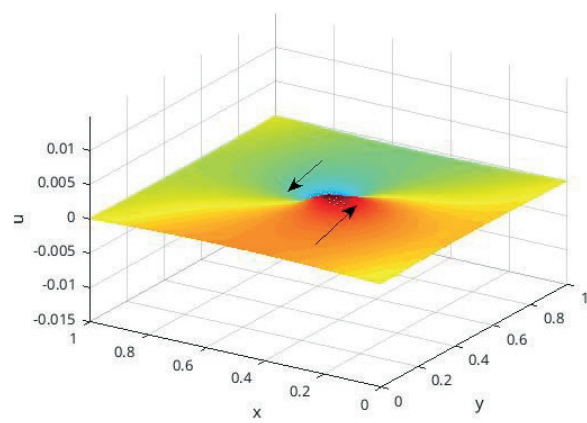


Рис. 6б. Первая компонента вектора скорости при $t=1$ с

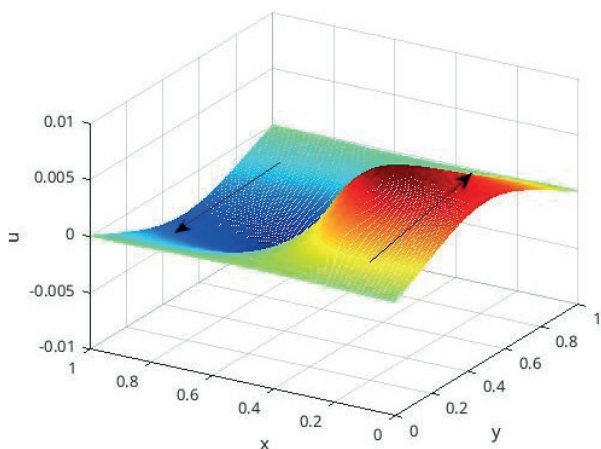


Рис. 6в. Первая компонента вектора скорости при $t=30$ с

В последующий момент расчетного времени (см. рис. 6б) происходит заметное смещение областей с положительными и отрицательными значениями x -й компоненты скорости. Такое пространственное перераспределение рассматриваемой компоненты скорости частиц газа означает, что вблизи геометрического центра расчетной области возникают встречные и разведенные в пространстве потоки газа, что равносильно возникновению вокруг вертикальной оси закрученного в положительном направлении движения частиц газа.

На следующем рис. 6в такое пространственное перераспределение областей с противоположными по знаку компонентами частиц газа усиливается. Причем процесс сопровождается увеличением модулей скоростей и увеличением размеров этих областей, т.е. закрутка газа в положительном направлении движения усиливается.

На момент расчетного времени 30 с (см. рис. 6в) видно, что распределение областей с противоположными по знаку значениями скоростей полностью завершилось, и продолжается рост абсолютных значений скоростей вплоть до выхода на стационарный режим течения. Другими словами – закрутка газа полностью сформировалась и происходит только ее усиление с точки зрения увеличения скоростей течения.

Вторая компонента скорости имеет такие же особенности изменения от времени, и поэтому описание здесь не приводится.

Особенностями в поведении вертикальной компоненты скорости частиц газа (рис. 7а – 7б, 8а – 8б) в расчетной области является близость ее значений к нулю во всех периферийных областях. В области продува вертикальная скорость постепенно растет в соответствии с законом продува и в сечении повторяет квадратный контур отверстия продува.

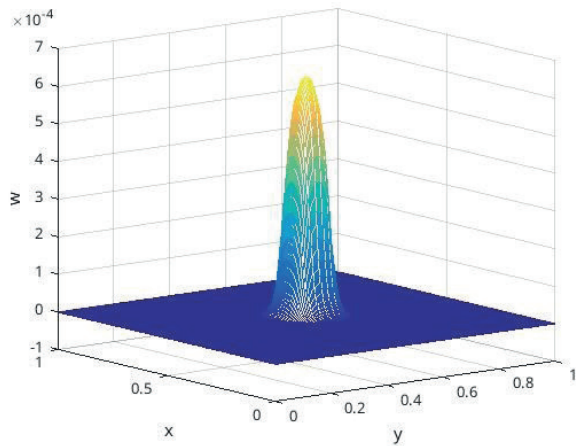


Рис. 7а. Третья компонента скорости при $t = 0.1$ с

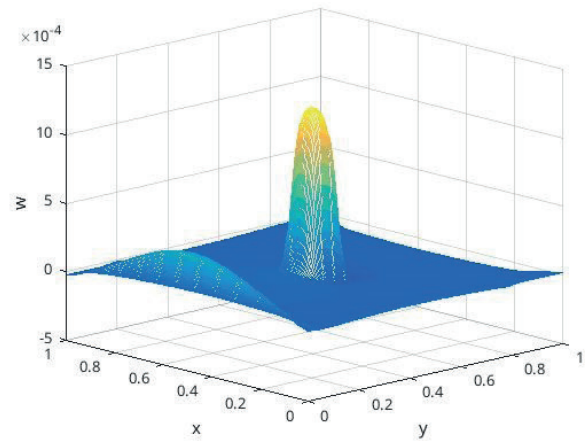


Рис. 7б. Третья компонента скорости при $t = 30$ с

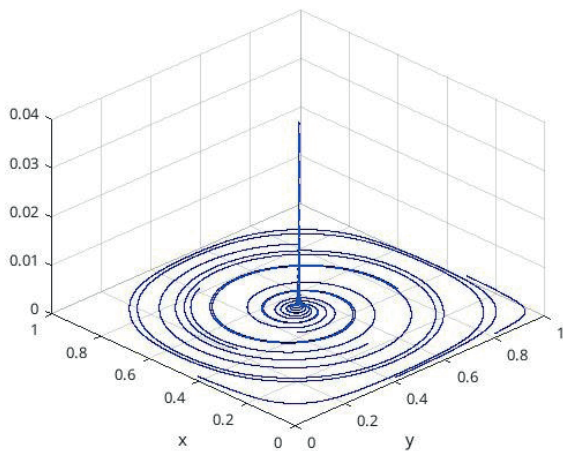


Рис. 8а. Линии тока частиц газа при $t = 0.5$ с

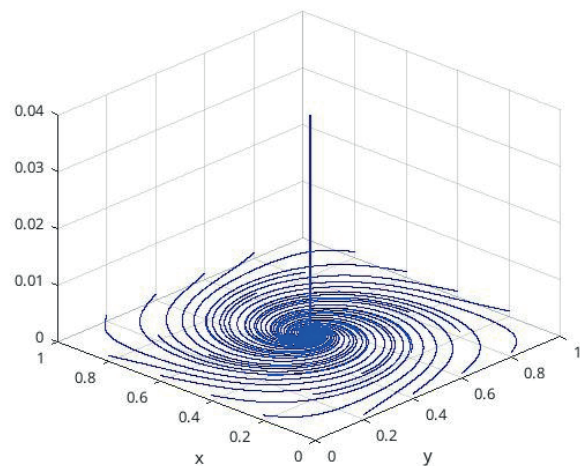


Рис. 8а. Линии тока частиц газа при $t = 1$ с

На рис. 8а и 8б представлены результаты трехмерных расчетов мгновенных линий тока частиц газа в области близкой к вертикальной части ВЗП.

Видно, как постепенно происходит закрутка газа вблизи нижней плоскости расчетного параллелепипеда и процесс передачи вращательного движения сплошной среды в вертикальную часть ВЗП [10].

Следует отметить, что мгновенные линии тока были построены исходя из рассчитанных составляющих скорости во всех узлах расчетной области, и их количество специально ограничено для большей наглядности. Высота, с которой начинался процесс построения линий тока составлял порядка 0.0001 в безразмерных единицах. Поэтому можно считать, что построенные мгновенные линии тока начинаются практически с подстилающей поверхности. Сформировавшаяся же вертикальная часть, которую видно на рисунках, представляет собой аналог (численную модель) хобота реального природного вихря [3, 6, 8–10, 13–14].

Численное моделирование течений газа в восходящих закрученных потоках средних масштабов

В данном пункте приводятся результаты численного моделирования ВЗП воздуха, возникающего в результате вертикального продува через трубу 5 м. Тем самым проводится расчет газодинамических характеристик в нестационарных трехмерных течениях воздуха в будущих возможных экспериментах. Расчеты течений газа в данных ВЗП проводились при масштабном значении расстояния $r_{00} = 50$ м, масштабном значении времени $t_{00} = r_{00}/u_{00} = 0.15$ с, разностным шагом по трем пространственным переменным: $\Delta x = \Delta y = 0.005$, $\Delta z = 0.004$ и шаге по времени $\Delta t = 0.001$. Начальные и граничные условия, а также скорость вертикального продува выбирались такими же, как в предыдущем пункте.

На рис. 9, 10 представлены результаты расчетов плотности газа на высоте 0.02 (размерное значение 1 м) для двух различных моментов расчетного времени, а на рис. 11, 12 – температуры газа.

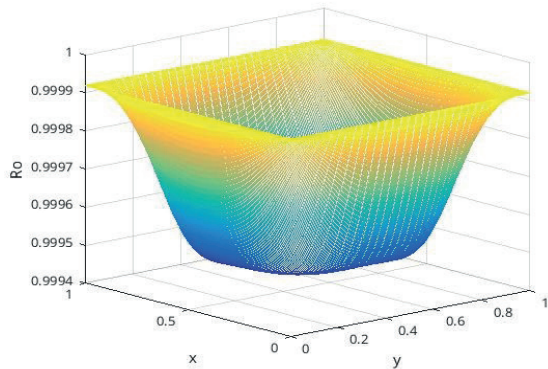


Рис. 9. Плотность газа при $t = 0.5$ с

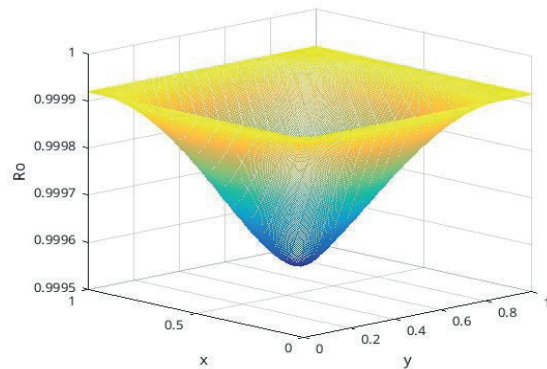


Рис. 10. Плотность газа при $t = 30$ с

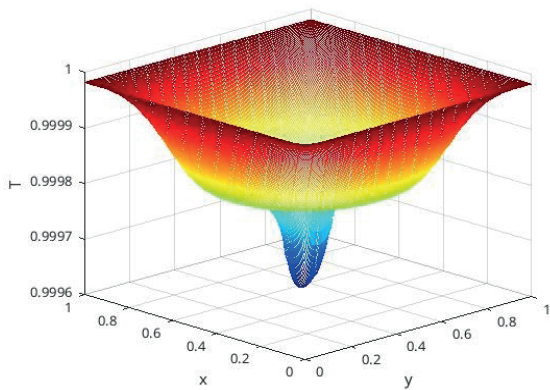


Рис. 11. Температура газа при $t = 0.5$ с

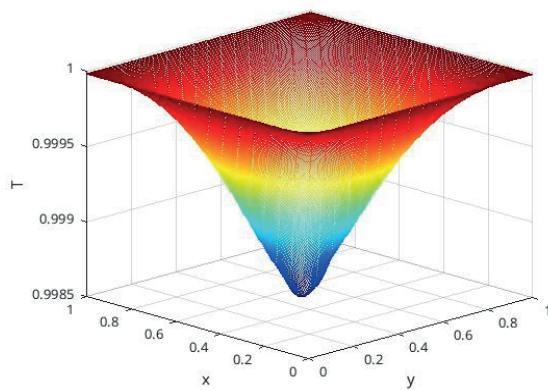


Рис. 12. Температура газа при $t = 30$ с

По плотности и температуре газа видно, что процесс – нестационарный. Величины в зоне продува уменьшаются, и с течением времени происходит выход на стационарный режим. В данном расчете явно наблюдается цилиндрическая симметрия, несмотря на то, что расчет проводился в прямоугольной системе координат.

На следующих рисунках (рис. 13а, 13б, 13в, 13г) представлены в виде поверхностей результаты расчетов первой компоненты скорости газа. Из рисунков видно, что первоначально встречные в направлении

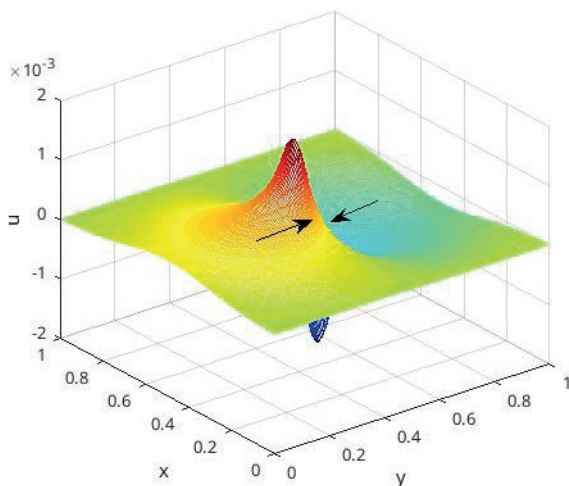


Рис. 13а. Первая компонента вектора скорости при $t = 0.5$ с

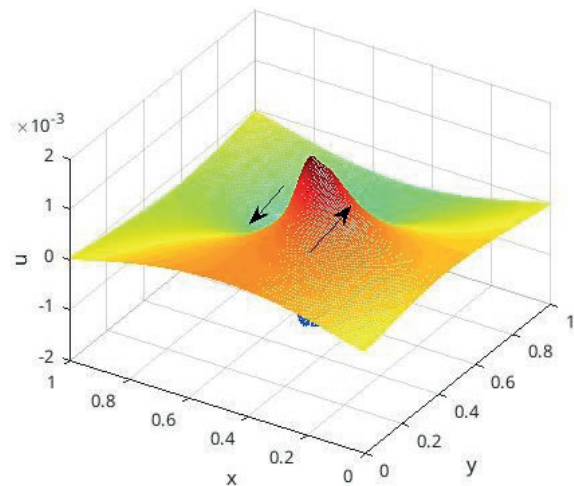


Рис. 13б. Первая компонента вектора скорости при $t = 2$ с

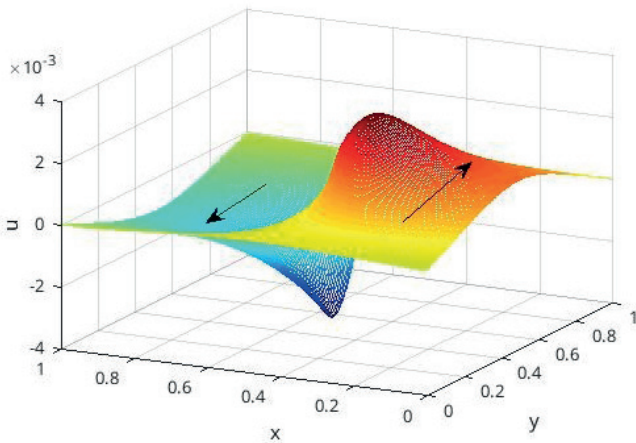


Рис. 13в. Первая компонента вектора скорости при $t = 10$ с

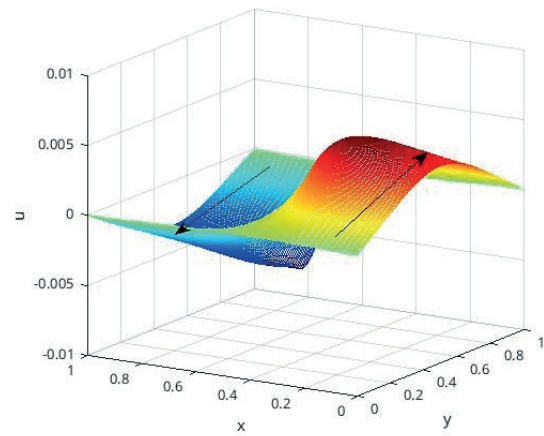


Рис. 13г. Первая компонента вектора скорости при $t = 30$ с

оси Ox потоки газа с течением времени перераспределяются в пространстве. Такое перераспределение движущихся встречных потоков иллюстрирует возникновение закрутки газа в положительном направлении, т.е. против хода часовой стрелки. С течением времени происходит рост абсолютных значений скоростей встречных потоков с постепенным выходом на стационарный режим течения [10].

На рис. 14, 15 представлены результаты трехмерных расчетов мгновенных линий тока частиц газа и вид на них сверху в области близкой к вертикальной части ВЗП.

Видно, как происходит закрутка газа вблизи нижней плоскости расчетного параллелепипеда и процесс передачи вращательного движения сплошной среды в вертикальную часть ВЗП [3, 6, 8–10, 13, 14].

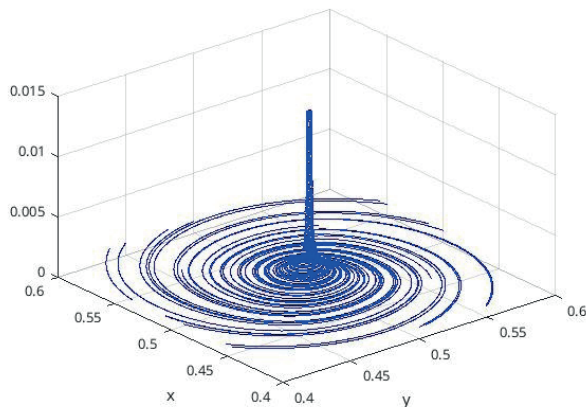


Рис. 14. Линии тока частиц газа

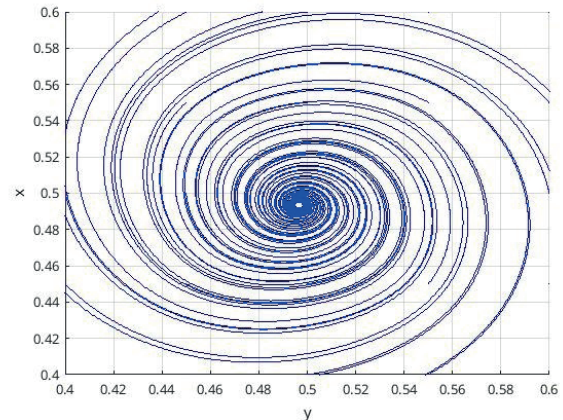


Рис. 15. Проекция линий тока частиц газа

Численное моделирование течений газа в восходящих закрученных потоках больших масштабов

Приводятся результаты численного моделирования ВЗП воздуха, возникающего в результате вертикального продува его через трубу большого диаметра. Тем самым проводится расчет газодинамических характеристик в нестационарных трехмерных течениях воздуха в тропическом циклоне средних размеров. Расчеты течений газа в данных ВЗП проводились с начальными и граничными условиями, описанными в двух предыдущих пунктах при масштабном значении расстояния $r_{00} = 50000$ м, масштабном значении времени $t_{00} = r_{00}/u_{00} = 150.15$ с, разностным шагом по трем пространственным переменным: $\Delta x = \Delta y = 0.005$, $\Delta z = 0.02$ и шаге по времени $\Delta t = 0.001$.

Через квадратное отверстие размером 0.1×0.1 в центре верхней грани расчетной области задается вертикальная скорость течения газа при $M = 0.0125$.

В начальные моменты времени происходят колебания плотности газа (рис. 16, 17) в третьем десятичном знаке, а с течением времени наблюдается понижение плотности в центре расчетной области [6, 9]. При приближении к центру прослеживается осевая симметрия в поведении плотности газа. Ось

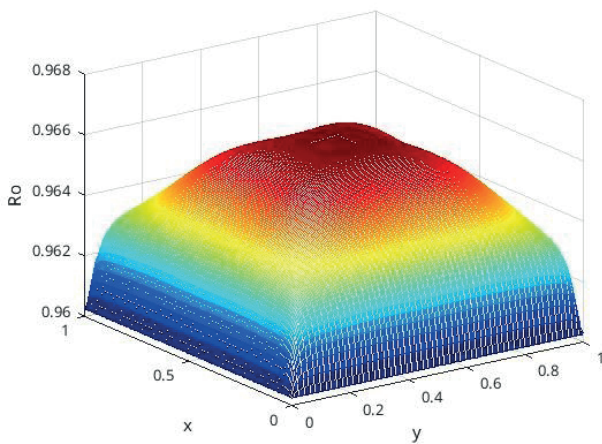


Рис. 16. Плотность газа при $t = 1$ с

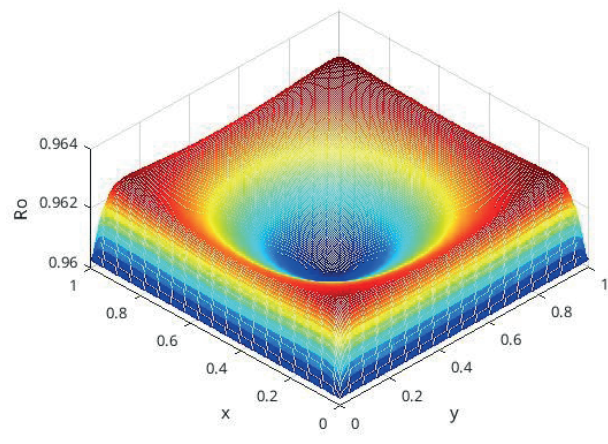


Рис. 17. Плотность газа при $t = 30$ с

симметрии расположена вертикально, проходит через геометрический центр расчетной области и совпадает с центром отверстия продува воздуха через верхнюю плоскость прямоугольного параллелепипеда.

Существенным моментом в расчете температуры в исследуемых восходящих закрученных течениях является то, что причиной возникновения таких течений есть не нагрев подстилающей поверхности, а вертикальный продув газа. При увеличении времени расчета поверхность температуры газа приобретает вид воронки с пониженными значениями в центре расчетной области (рис. 18, 19).

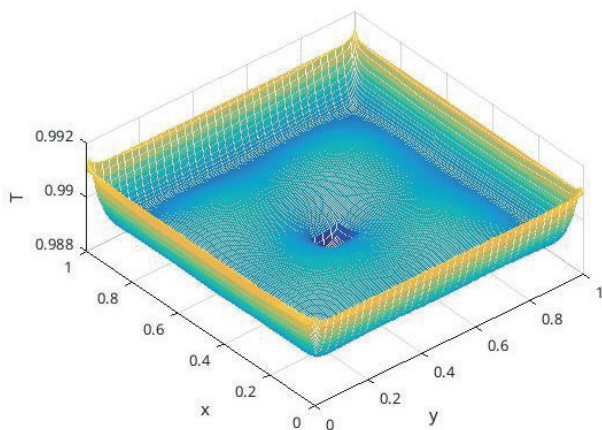


Рис. 18. Температура газа при $t = 1$ с

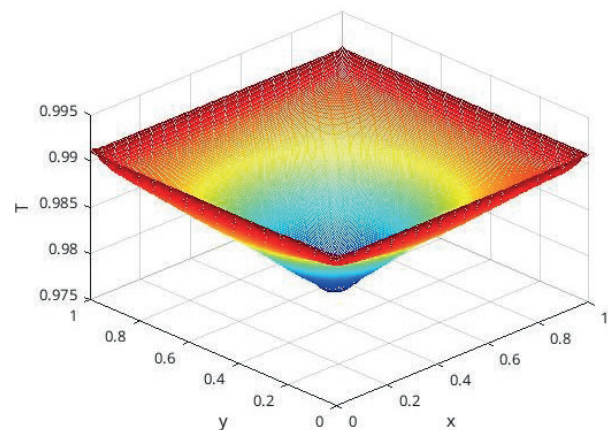


Рис. 19. Температура газа при $t = 30$ с

На следующих рисунках (рис. 20а – 20г), представляющих графическое изображение X -й компоненты скорости для четырех различных моментов времени, продемонстрировано возникновение закрутки течения воздуха в положительном направлении от нулевого значения.

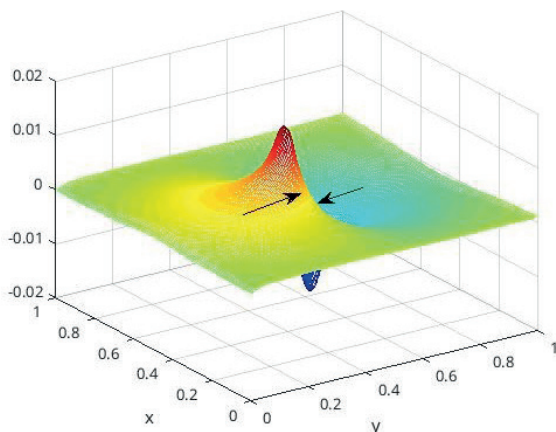


Рис. 20а. Вектор скорости при $t = 0.5$ с

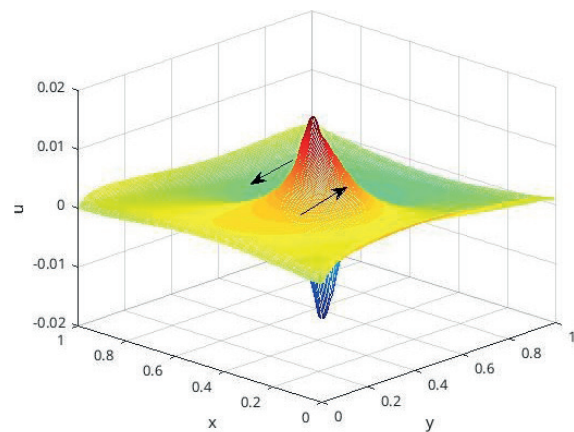


Рис. 20б. Вектор скорости при $t = 2$ с

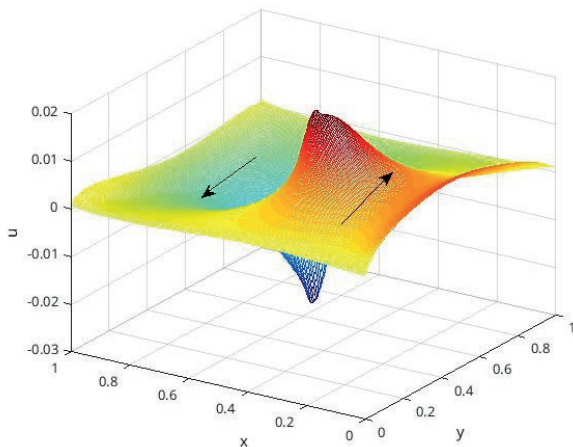


Рис. 20в. Вектор скорости при $t = 5$ с

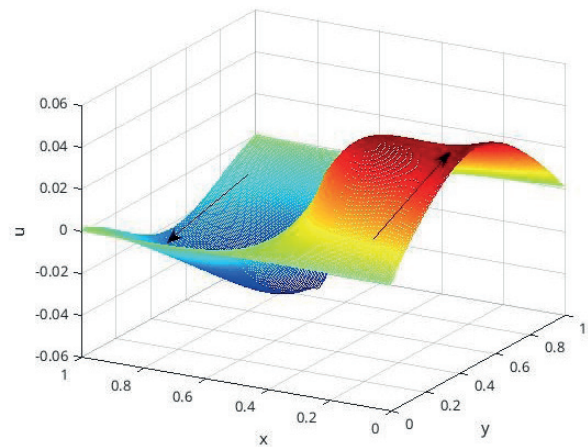


Рис. 20г. Вектор скорости при $t = 30$ с

Также представлены результаты трехмерных расчетов мгновенных линий тока частиц газа в области, близкой к вертикальной части ВЗП (рис. 21, 22).

Видно, как происходит закрутка газа вблизи нижней плоскости расчетного параллелепипеда и процесс передачи вращательного движения сплошной среды в вертикальную часть ВЗП [3, 6, 8–10, 13–14].

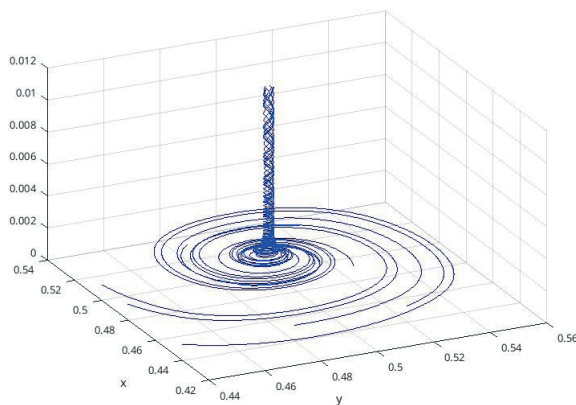


Рис. 21. Линии тока частиц газа

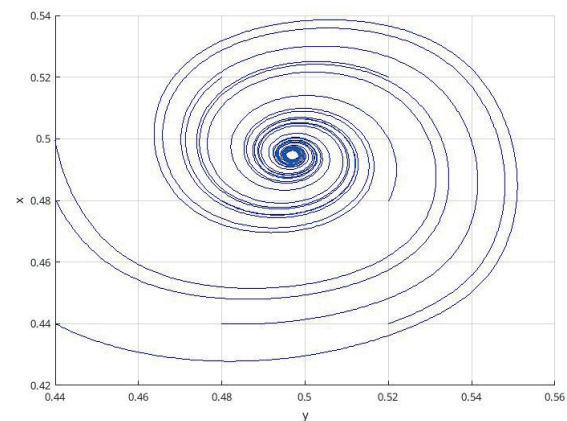


Рис. 22. Проекция линий тока частиц газа

Заключение

В работе проведена линейзация линейной системы уравнений с частными производными на точном решении – однородном покое. Для полученной линейризованной системы проведены численные исследования по созданию стабильного окружного движения воздуха в придонной части ВЗП с применением вертикальной трубы с вентилятором вытяжного действия, направляющим воздух по трубе снизу-вверх [8].

По результатам исследований можно сделать вывод, что численное решение линейризованной ПСУНС с поставленными начально-краевыми условиями описывает сложные течения вязкого сжимаемого теплопроводного газа. Установлено, что плотность и температура при таком сложном течении претерпевают заметные изменения на начальной стадии [6, 9]. При увеличении времени расчета термодинамические параметры и все течение в целом стабилизируются с постепенным выходом на стационарный режим.

Численный расчет скоростных характеристик трехмерного нестационарного течения вязкого теплопроводного газа в ВЗП, инициированном вертикальным продувом, показал, что закрутка газа в положительном направлении обусловлена наличием в уравнениях линейризованной ПСУНС дополнительных членов, описывающих ускорение Кориолиса. Таким образом, еще раз численно получила подтверждение схема возникновения ВЗП [2, 4, 5, 7, 8, 15].

Финансирование

Авторы заявляют об отсутствии источников финансирования.

Вклад авторов

Крутова И.Ю. – формулировка идеи и целей исследования, постановка задачи, выбор методов исследования; разработка концепции исследования, разработка методик измерения; анализ экспериментальных данных, выявление закономерностей, анализ полученных результатов; подбор литературных источников, редактирование текста статьи.

Бугаенко А.А. – выполнение измерений, первичная обработка результатов исследования, выявление закономерностей, проведение расчетов и подготовка заключения; подготовка текста статьи, участие в проведении исследования и обсуждении результатов.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Список литературы

1. *Баутин С.П., Крутова И.Ю.* Линеаризованная система уравнений газовой динамики при учете действия силы Кориолиса. Снежинск: СФТИ, 2019. 60 с.
2. *Баутин С.П., Крутова И.Ю., Обухов А.Г.* Газодинамическая теория восходящих закрученных потоков. Екатеринбург: УрГУПС, 2020. 400 с.
3. *Обухов А.Г.* Расчет скоростных характеристик восходящего закрученного потока газа в условиях бокового ветрового воздействия // Математические структуры и моделирование, 2020. № 3 (55). С. 61–71.
4. *Баутин С.П.* Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск: Наука, 2008. 96 с.
5. *Баутин С.П., Крутова И.Ю., Обухов А.Г., Баутин К.В.* Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты. Новосибирск: Наука; Екатеринбург: УрГУПС, 2013. 216 с.
6. *Абдубакова Л.В., Обухов А.Г.* Численный расчет термодинамических параметров закрученного потока газа, инициированного холодным вертикальным продувом // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. 2014. № 5 (107). С. 57–62.
7. *Баутин С.П., Дерябин С.Л., Крутова И.Ю., Обухов А.Г.* Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг оси. Екатеринбург: УрГУПС, 2017. 336 с.
8. *Баутин С.П., Крутова И.Ю.* Аналитическое и численное моделирование течений газа при учете действия силы Кориолиса. Екатеринбург: УрГУПС, 2019. 182 с.
9. *Абдубакова Л.В., Обухов А.Г.* Численный расчет плотности, температуры и давления закрученного потока газа при вертикальном продуве // Фундаментальные и прикладные исследования: проблемы и результаты, 2014. № 12. С. 108–112.
10. *Абдубакова Л.В., Обухов А.Г.* Расчет скоростей и линий тока трехмерного восходящего закрученного потока газа при вертикальном продуве // Инновации и инвестиции, 2014. № 9. С. 139–142.
11. *Баутин С.П., Обухов А.Г.* Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей. Новосибирск: Наука, 2012. 152 с.
12. *Баутин С.П.* Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.
13. *Баутин С.П., Обухов А.Г.* Численное моделирование трехмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Екатеринбург: УрГУПС, 2020. 287 с.
14. *Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н., Горбачев М.А.* Физическое моделирование воздушных смерчей: некоторые безразмерные параметры // ТВТ, 2011. Т. 49. № 2. С. 317.
15. *Rotunno R.* Numerical Simulation of a Laboratory Vortex // J. Atmos. Sci., 1977. V. 34. P. 1942.

Complete system of Navier – Stokes equations: linearization and construction of solutions

A. A. Bugaenko ^{1,2,✉}, I. Yu. Krutova ^{2,✉}

¹ Federal State Unitary Enterprise «Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Technical Physics named after Academician E.I. Zababakhin», Snezhinsk, 456776, Russia

² FSBEI HE «Snezhinsk Institute of Physics and Technology of the National Research Nuclear University MEPhI», Snezhinsk, 456776, Russia

✉ BugaenkoAA@vniitf.ru

✉ IYKrutova@mephi.ru

Received January 18, 2025; revised January 29, 2025; accepted January 31, 2025

Modeling of atmospheric phenomena is carried out on the basis of systems of ordinary differential equations and partial differential equations with their subsequent numerical study. As a result of discretization of these equations, we arrive at systems with millions and even billions of unknowns. Due to the nonlinearity of the complete system of Navier–Stokes equations, constructing its solutions is quite labor-intensive. As a consequence, the linearization procedure is applied on the exact solution (homogeneous rest). For the linearized system, taking into account the action of gravity and Coriolis forces, the emergence and development of ascending swirling flows of different intensity is numerically modeled using blowing up the pipe. Numerical calculation of the velocity characteristics of a three-dimensional unsteady flow of viscous heat-conducting gas in an ascending swirling flow initiated by vertical blowing showed that the gas swirl occurs in the positive direction and is due to the presence of terms in the linearized complete system of Navier–Stokes equations describing the Coriolis acceleration. Thus, the pattern of the occurrence of an ascending swirling flow is once again numerically confirmed. A conclusion is also made about the possibility of applying this approach to the study of ascending swirling flows such as tornadoes and tropical cyclones.

Keywords: complete Navier–Stokes system of equations, Coriolis force, linearization, numerical modeling, blowing.

References

1. *Bautin S.P., Krutova I.Yu.* Linearizovannaya sistema uravnenij gazovoj dinamiki pri uchete dejstviya sily Koriolisa. [Linearized system of gas dynamics equations taking into account the Coriolis force]. Snezhinsk, SFTI Publ., 2019. 60 p.
2. *Bautin S.P., Krutova I.Yu., Obukhov A.G.* Gazodinamicheskaya teoriya voskhodyashchih zakruchennykh potokov. [Gas-dynamic theory of ascending swirling flows]. Yekaterinburg, UrGUPS Publ., 2020. 400 p.
3. *Obukhov A.G.* Raschet skorostnykh harakteristik voskhodyashchego zakruchennogo potoka gaza v usloviyah bokovogo vetrovogo vozdeystviya. [Calculation of the velocity characteristics of an ascending swirling gas flow under lateral wind conditions]. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2020, no. 3 (55), pp. 61–71 (in Russian).
4. *Bautin S.P.* Tornado i sila Koriolisa. [Tornado and the Coriolis force]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2008. 96 p.
5. *Bautin S.P., Krutova I.Yu., Obukhov A.G., Bautin K.V.* Razrushitel'nye atmosferye vihri: teoremy, raschety, eksperimenty. [Destructive atmospheric vortices: theorems, calculations, experiments]. Novosibirsk, Nauka Publ., Ekaterinburg, UrGUPS Publ., 2013. 216 p.
6. *Abdubakova L.V., Obukhov A.G.* Chislennyj raschet termodinamicheskikh parametrov zakruchennogo potoka gaza, inicirovannogo holodnym vertikal'nym produvom. [Numerical calculation of thermodynamic parameters of swirling gas flow initiated by cold vertical blowing]. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenij. Neft' i gaz, 2014, no. 5 (107), pp. 57–62 (in Russian).
7. *Bautin S.P., Deryabin S.L., Krutova I.Yu., Obukhov A.G.* Razrushitel'nye atmosferye vihri i vrashchenie Zemli vokrug osi. [Destructive atmospheric vortices and the Earth's rotation around the axis]. Ekaterinburg, UrGUPS Publ., 2017. 336 p.

8. *Bautin S.P., Krutova I.Yu.* Analiticheskoe i chislennoe modelirovanie techenij gaza pri uchete dejstviya sily Koriolisa. [Analytical and numerical modeling of gas flows taking into account the Coriolis force]. Ekaterinburg, UrGUPS Publ., 2019. 182 p.
9. *Abdubakova L.V., Obukhov A.G.* Chislennyj raschet plotnosti, temperatury i davleniya zakruchennogo potoka gaza pri vertikal'nom produve [Numerical calculation of density, temperature and pressure of swirling gas flow during vertical blowing]. Fundamental'nye i prikladnye issledovaniya: problemy i rezul'taty, 2014, no. 12, pp. 108–112 (in Russian).
10. *Abdubakova L.V., Obukhov A.G.* Raschet skorostej i linij toka trekhmernogo voskhodyashchego zakruchennogo potoka gaza pri vertikal'nom produve. [Calculation of velocities and streamlines of three-dimensional ascending swirling gas flow during vertical blowing]. Innovacii i investicii, 2014, no. 9, pp. 139–142 (in Russian).
11. *Bautin S.P., Obukhov A.G.* Matematicheskoe modelirovanie razrushitel'nyh atmosferynyh vihref. [Mathematical modeling of destructive atmospheric vortices]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2012. 152 p.
12. *Bautin S.P.* Harakteristicheskaya zadacha Koshi i ee prilozheniya v gazovoj dinamike [Characteristic Cauchy problem and its applications in gas dynamics]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2009. 368 p.
13. *Bautin S.P., Obukhov A.G.* Chislennoe modelirovanie trekhmernykh nestacionarnykh techenij szhimaemogo vyazkogo teploprovodnogo gaza [Numerical modeling of three-dimensional unsteady flows of compressible viscous heat-conducting gas]. Ekaterinburg, Ural State Transport University Publ., 2020. 287 p.
14. *Varaksin A.Yu., Romash M.E., Kopeitsev V.N., Gorbachev M.A.* Fizicheskoe modelirovanie vozdushnykh smerchej: nekotorye bezrazmernye parametry. [Physical modeling of air tornadoes: some dimensionless parameters]. TVT, 2011, vol. 49, no. 2, pp. 317 (in Russian).
15. *Rotunno R.* Numerical Simulation of a Laboratory Vortex. J. Atmos. Sci., 1977, vol. 34, pp. 1942.

УДК 004.056:351.861

Анализ рисков и направлений их устранения для национальной критической информационной инфраструктуры в условиях роста угроз безопасности

И. А. Василенко

АНОО ВО «Университет «Сириус», федеральная территория «Сириус», 354349, Россия

Стремительный рост кибератак, направленных на ключевые компоненты критически важной информационной инфраструктуры России – от банковских систем и энергетических комплексов до сетей телекоммуникаций, – диктует необходимость создания комплексных и адаптивных мер киберзащиты. Основная цель данного исследования – разработка подходов, позволяющих не только эффективно распределять ресурсы для киберзащиты, но и оценивать угрозы с учетом их приоритетов, что особенно актуально для охраны наиболее уязвимых звеньев системы. В работе проведен детальный анализ уязвимостей инфраструктуры, благодаря которому выделены ключевые области риска, требующие первоочередной защиты. Особое внимание уделено необходимости координации между государственным и частным секторами, а также интеграции технологий искусственного интеллекта. Такие технологии позволяют не только повысить точность прогнозирования кибератак, но и улучшить оперативность в их пресечении. Результаты работы акцентируют значимость внедрения адаптивных стандартов и многоуровневого взаимодействия для эффективной защиты критически важных объектов. Именно такой гибкий и координированный подход к кибербезопасности способствует повышению устойчивости национальной инфраструктуры перед лицом растущих киберугроз. Помимо этого внедрение комплексных технологий в сочетании с унифицированными методами открывает возможности для создания гибкой системы защиты, настроенной на быструю адаптацию к возникающим угрозам и поддерживающей постоянное наблюдение за наиболее значимыми объектами.

Ключевые слова: киберугрозы, информационная безопасность, критическая инфраструктура, технологии, защита.

Введение

Государственная критическая информационная инфраструктура (КИИ) представляет собой комплекс взаимосвязанных систем, на которых держатся как стабильность экономики, так и общественный порядок, а вместе с ними – и общая безопасность страны. Эта инфраструктура включает стратегически значимые отрасли: энергетику, здравоохранение, транспортные сети, телекоммуникации и финансовый сектор. Из-за глубокой взаимозависимости, которая за последние годы лишь усилилась, защита этих компонентов стала требовать более интегрированного подхода, так как кибератаки на один из элементов способны привести к серьезным последствиям для всей системы [1].

По данным Центра стратегических разработок в отчете «Прогноз развития рынка кибербезопасности в Российской Федерации на 2023–2027 годы», рынок кибербезопасности за 2022 г. достиг объема 193.3 млрд руб., увеличившись на 4 % по сравнению с предыдущим годом. Важным аспектом является успешное импортозамещение: несмотря на значительные геополитические вызовы и уход зарубежных

✉ И.А. Василенко: iravas988@yandex.ru

Поступила в редакцию: 17.11.2024

После доработки: 27.01.2025

Принята к публикации: 31.01.2025

EDN UPLTPD

поставщиков, отечественные решения уверенно заняли до 70 % рынка, в то время как доля зарубежных продуктов снизилась до 30 % (в 2021 году показатели составляли 61 и 39 % соответственно).

На фоне учащающихся кибератак и растущей значимости рынка кибербезопасности вопрос анализа рисков для КИИ обрел новую актуальность. В этих условиях особое внимание обращается на разработку гибкой и адаптируемой системы защиты, способной оперативно реагировать на изменяющиеся угрозы [2]. Необходимость защиты уже не ограничивается крупными объектами инфраструктуры, поскольку локальные телекоммуникационные центры, коммунальные службы и региональные транспортные узлы представляют собой не менее важные, а порой и более уязвимые звенья в общей системе. Эти элементы могут стать «точками входа» для злоумышленников, что подчеркивает значимость их защиты.

Цель исследования – анализ актуальных рисков, с которыми сталкивается КИИ в условиях возросшей интенсивности кибератак. В рамках исследования планируется сформировать методы, способствующие оптимальному распределению защитных ресурсов и поддерживающие интеграцию межсекторального взаимодействия, включая разработку унифицированной системы классификации рисков.

Внутренние риски и поведенческий мониторинг в безопасности КИИ

Стратегически важные для государства системы и сети, образующие национальную КИИ, составляют сложный комплекс, от которого зависит как стабильность экономики, так и общественный порядок с обеспечением безопасности. Различные отрасли – от энергетики и здравоохранения до транспортных и телекоммуникационных систем, а также финансовых сетей, включая банковский сектор, – входят в ее состав. Эти системы оказались переплетены настолько тесно, что их взаимозависимость возрастает, обостряя общий риск [3]. Можно утверждать, что каждый из компонентов КИИ ныне подвержен высокой вероятности атак – как индивидуальных, на конкретные узлы, так и на весь связанный ряд объектов, что создает угрозу глобальных последствий при массированных кибератаках.

С учетом стремительного роста угроз, целенаправленно направленных на элементы национальной критической инфраструктуры, все более важными становятся вопросы углубленного многослойного анализа рисков, а также изучения внутренних факторов, представляющих угрозы. Не менее актуальной задачей остается межсекторальное взаимодействие, способствующее слаженной защите инфраструктурных объектов, – не говоря уже о необходимости адаптироваться к быстро меняющимся технологиям защиты, которые включают все более сложные инструменты [4, 5].

Изучение угроз требует внимания к уязвимостям, распределенным по различным уровням инфраструктуры – от крупных ключевых объектов до менее защищенных звеньев «среднего» и «второстепенного» порядка. В то время как распространенные подходы концентрируются на защите значимых элементов (например, на энергетических и транспортных узлах крупных масштабов), слабые места таких средних инфраструктур, как локальные телекоммуникационные центры, коммунальные службы или региональные транспортные системы, представляются не менее значимыми. Злоумышленники могут использовать эти элементы как «точки входа», предоставляющие доступ к важнейшим частям всей системы [6, 7].

Создание системы классификации рисков позволит повысить эффективность распределения ресурсов, акцентируя внимание и финансовую поддержку тех объектов, которые в настоящее время, предположительно, остаются недооцененными в общей системе обеспечения безопасности.

1. Внутренние риски: сложности мониторинга и предсказания поведения сотрудников. Ситуация с внутренними угрозами, напрямую зависящими от действий сотрудников, обладающих доступом к критически важным элементам инфраструктуры, настоятельно требует особого внимания. Сложности в предсказании таких рисков усиливаются из-за правовых и этических ограничений, связанных с необходимостью защиты конфиденциальности. Анализировать поведенческие паттерны сотрудников оказывается непростой задачей, особенно если конфиденциальность их данных продолжает оставаться приоритетной. Ключевым решением здесь может стать разработка поведенческих алгоритмов, способных не просто выявлять аномалии, но и прогнозировать потенциальные риски. Однако, как показывают существующие исследования, такая разработка пока недостаточно глубоко освещает возможности совмещения мониторинга и защиты приватности. Для преодоления этой проблемы была предложена концепция адаптивных моделей, использующих машинное обучение для фиксации аномальных отклонений в поведении сотрудников – при этом, важно подчеркнуть, не затрагивая их личное пространство.

Эти модели способны регистрировать нетипичные паттерны (например, повышенный доступ к данным или попытки передачи информации), но без прямого вмешательства в повседневные задачи сотрудников. Предполагается, что внедрение таких аналитических систем, ориентированных на поведенческие особенности, позволит значительно снизить риски внутренних угроз, не нарушая требований конфиденциальности [1, 3].

2. Кооперация между секторами: барьеры для совместной защиты инфраструктуры. Эффективная защита критически важных инфраструктур невозможна без координации между государственными и частными организациями, и, тем не менее, различия в правовых и организационных нормах существенно препятствуют такому сотрудничеству. Разобщенность ответственности за безопасность между многочисленными ведомствами и частными компаниями приводит к ослаблению общей структуры защиты. Отсутствие унифицированных стандартов для информационного обмена и взаимодействия при реагировании на угрозы снижает способность оперативно противостоять атакам, для нейтрализации которых требуется интеграция на межсекторальном уровне и скоординированные действия. Необходимость в согласовании законодательных и нормативных основ, регулирующих совместные меры безопасности, является, пожалуй, одной из наиболее актуальных и слабо освещенных проблем обеспечения безопасности КИИ. Введение единых протоколов и стандартов, регулирующих взаимодействие частных и государственных структур, а также организация защищенных платформ для оперативного обмена данными о кибератаках позволили бы укрепить систему защиты [8].

3. Адаптация к новым технологиям защиты: ответ на угрозы, основанные на искусственном интеллекте. С развитием искусственного интеллекта (ИИ) безопасность подвергается значительным изменениям – как в аспекте защиты, так и в вопросах новых угроз. ИИ позволяет злоумышленникам использовать методы, включающие фишинг, который базируется на анализе поведения пользователей, а также автоматизированное сканирование уязвимостей – эти технологии, очевидно, усложняют задачи специалистов по кибербезопасности. В ответ на подобные вызовы системы защиты также вынуждены эволюционировать, становясь более гибкими и способными к обучению. Отметим, что системы защиты, применяющие ИИ для анализа поведения атакующих, стали постепенно формировать новый стандарт для защиты КИИ. Не дожидаясь фактического проникновения в сети, эти системы не только улавливают действия злоумышленников, но и прогнозируют вероятные векторы атаки, что позволяет оперативно вносить коррективы в защитные механизмы [3, 9]. И хотя концепция адаптивной защиты от угроз, исходящих от ИИ, требует еще немало исследований и испытаний, ее потенциальная ценность бесспорна: она обеспечивает уникальный уровень защиты, позволяя реагировать на угрозы в реальном времени и создавая, по сути, динамическую среду безопасности, способную приспосабливаться к быстро меняющимся условиям [10].

4. Необходимость в разработке и внедрении новых стандартов. Необходимость разработки и внедрения усовершенствованных стандартов безопасности становится все более очевидной: вызовы современности требуют гибких и адаптивных решений. Следует признать, что скорость развития киберугроз нередко опережает обновление правовых норм и стандартов защиты, что требует не просто пересмотра, но и радикального переосмысления подходов к регулированию. Эффективность создаваемой системы защиты будет зависеть, прежде всего, от своевременности внедрения этих стандартов, их устойчивости к меняющимся условиям и способности учитывать межсекторальное взаимодействие – столь необходимое в современных условиях [11, 12].

Результаты

Для оценки влияния стандартов на безопасность КИИ и дальнейшей разработки модели рассмотрим шесть основополагающих критериев.

1. Гибкость и адаптивность стандарта. Ключевым фактором в современной кибербезопасности является способность к быстрой адаптации к новым типам угроз [11]. Долгосрочные стандарты, несмотря на их устойчивость, часто не успевают за темпом технологических изменений и разработок в сфере атакующих методов. Поэтому требуется создание гибких протоколов, которые будут позволять своевременно актуализировать защитные механизмы, избегая при этом необходимости в полной переработке существующих стандартов.

2. Интеграция стандартов с инновационными технологиями. Такие современные технологии, как ИИ, блокчейн и облачные вычисления, требуют разработки стандартов, которые могли бы объединить классические подходы с новыми цифровыми методами защиты. Например, внедрение протоколов на базе ИИ позволяет не только оценивать угрозы, но и задействовать модели, способные к самообучению, что открывает возможности для своевременного обнаружения аномалий и прогнозирования схем атак.

3. Поддержка межсекторального сотрудничества. Эффективность стандартов, регулирующих кибербезопасность, возрастает при их ориентации на обмен данными и согласование ответных действий между частными и государственными организациями. Протоколы такого рода должны отражать интересы всех участников КИИ, предусматривая оперативную координацию на каждом этапе – от момента обнаружения угрозы до ее устранения. Создание единой платформы, обеспечивающей защищенность и быстрый обмен информацией о киберугрозах, способно существенно сократить временные задержки, возникающие при принятии ответных мер, и минимизировать риск внешнего проникновения.

4. Разработка стандартов с акцентом на оценку рисков и приоритизацию ресурсов. Ключевой принцип в данном случае – распределение ресурсов пропорционально уровню угроз и значимости отдельных объектов инфраструктуры. Внедрение анализа рисков на разных уровнях позволит сосредоточить защитные усилия на элементах, которые более всего подвержены атакам, что приведет к значительному улучшению общего уровня защищенности.

5. Введение обязательных процедур для взаимодействия между государственными и частными структурами. Стандарты, закрепляющие процедуры кооперации, включая унифицированные методы обмена информацией и быстрого реагирования на инциденты, смогут сократить время, требуемое для координации. К тому же такой стандарт должен предусматривать систему обязательного обучения и сертификации сотрудников всех уровней для повышения их компетенции.

6. Стимулирование внедрения ИИ и иных современных технологий в защиту критически важной инфраструктуры. Разработка стандартов, использующих возможности ИИ для анализа поведения и прогнозирования угроз, позволит создавать автоматизированные системы реагирования, которые, будучи менее зависимыми от человеческого фактора, значительно повысят оперативность защиты [13].

Выводы

Проведенный анализ позволяет разработать в дальнейшем современную модель, которая обеспечит возможность объективно оценить стандарты, применяемые к защите критической инфраструктуры, по трем ключевым критериям: адаптивности, технологичности и поддержке межсекторального сотрудничества. Разработка гибких и адаптивных стандартов, ориентированных на всесторонние требования к работе КИИ, и обязательное внедрение взаимодействия между секторами помогут создать комплексную и надежную систему киберзащиты. Подводя итоги анализа, стоит отметить необходимость системного подхода в обеспечении безопасности критической инфраструктуры с акцентом на адаптивность и совместные меры. Реализация предложенных стандартов и мер укрепит устойчивость КИИ к современным угрозам, а также станет гарантией стабильности и безопасности национальной инфраструктуры.

Финансирование

Работа выполнена без привлечения внешних источников финансирования.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Список литературы

1. Maglaras L., Janicke H., Ferrag M.A. Cybersecurity of Critical Infrastructures: Challenges and Solutions // *Sensors*, 2022. V. 22. № 5105. 2022. <https://doi.org/10.3390/s22145105>.
2. Tsantikidou K., Sklavos N. Threats, Attacks, and Cryptography Frameworks of Cybersecurity in Critical Infrastructures. *Cryptography*, 2024. Vol. 8. № 7. <https://doi.org/10.3390/cryptography8010007>.

3. Корниенко А.А. Система требований к обеспечению безопасности автоматизированных систем и значимых объектов критической информационной инфраструктуры: электронное учебное пособие. СПб.: Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, 2022. 63 с. ISBN 978-5-7641-1837-6.
4. Govea J., Gaibor-Naranjo W., Villegas-Ch W. Transforming Cybersecurity into Critical Energy Infrastructure: A Study on the Effectiveness of Artificial Intelligence. *Systems*, 2024. V. 12. № 165. <https://doi.org/10.3390/systems12050165>.
5. Aktayeva A., Makatov Y., Tulegenovna A.K., Dautov A., Niyazova R., Zhamankarin M., Khan S. Cybersecurity Risk Assessments within Critical Infrastructure Social Networks // *Data*, 2023. Vol. 8. № 156. <https://doi.org/10.3390/data8100156>.
6. Alqudhaibi A., Albarrak M., Aloheel A., Jagtap S., Salonitis K. Predicting Cybersecurity Threats in Critical Infrastructure for Industry 4.0: A Proactive Approach Based on Attacker Motivations // *Sensors*, 2023. Vol. 23. № 4539. <https://doi.org/10.3390/s23094539>.
7. Шмунько М.С., Чуйкова В.В. Обеспечение защиты информации на объектах критической информационной инфраструктуры (КИИ) // *Современные информационные технологии и информационная безопасность: труды III Всероссийской научно-технической конференции* (Курск, 2 февраля 2024 г.). Курск: ЗАО «Университетская книга», 2024. С. 156–159.
8. Maglaras L., Kantzavelou I., Ferrag M.A. Digital Transformation and Cybersecurity of Critical Infrastructures. *Applied Sciences*, 2021. V. 11. № 8357. <https://doi.org/10.3390/app11188357>.
9. De Felice F., Baffo I., Petrillo A. Critical Infrastructures Overview: Past, Present and Future. *Sustainability*. V. 14. № 4. P. 2233. <https://doi.org/10.3390/su14042233>.
10. Akwetey H.M., Danquah P., Koi-Akrofi G.Y., Asampana I. Critical Infrastructure Cybersecurity Challenges: IoT In Perspective. *International Journal of Network Security & Its Applications (IJNSA)*, July 2021. V. 13. № 4. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2202.12970>.
11. Izonin I., Hovorushchenko T., Shandilya S.K. Quality and Security of Critical Infrastructure Systems. *Big Data and Cognitive Computing*, 2024. V. 8. № 10. <https://doi.org/10.3390/bdcc8010010>.
12. Науголнова И.А. Менеджмент 4.0: эволюция и инновации в управлении организацией в цифровую эпоху // *Теория и практика общественного развития*, 2023. № 6(182). С. 220–226. <https://doi.org/10.24158/tipor.2023.6.28>.
13. Костина Д.О., Владимиров Д.Т., Коновалов В.В. О возможности применения комплексного ИИ в кибербезопасности // *Труды II Всероссийской научной конференции «Искусственный интеллект в автоматизированных системах управления и обработки данных»* (27–28 апреля 2023 г., г. Москва). М.: Издательский дом КДУ, Добросвет, 2023. С. 400–404.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2025, vol. 14, no. 1, pp. 79–84

Risk analysis and mitigation strategies for national critical information infrastructure amidst growing security threats

I.A. Vasilenko 

Sirius University, Sirius Federal Territory, 354349, Russia

 iravas988@yandex.ru

Received November 17, 2024; revised January 27, 2025; accepted January 31, 2025

The rapid increase in cyberattacks targeting critical components of Russia's information infrastructure – from banking systems and energy complexes to telecommunications networks – underscores the need for comprehensive and adaptive cybersecurity measures. This study aims to develop approaches that enable not only the efficient allocation of cybersecurity resources but also the prioritization of threats based on their criticality, which is especially important for protecting the system's most vulnerable links. A detailed analysis of infrastructure vulnerabilities has been conducted, identifying key risk areas that require prioritized protection. Particular attention is given to the necessity of coordination between public and private sectors, as well as the integration of artificial intelligence technologies. Such technologies enhance both the accuracy of cyberattack forecasting and the efficiency of response actions. The study's findings emphasize the importance of implementing adaptive standards and multi-

level collaboration for the effective protection of critical assets. This flexible, coordinated approach to cybersecurity strengthens the resilience of national infrastructure in the face of escalating cyber threats. Additionally, the integration of comprehensive technologies alongside standardized methods creates the potential for a flexible defense system capable of swiftly adapting to emerging threats and enabling continuous monitoring of critical assets.

Keywords: cyber threats, information security, critical infrastructure, technologies, protection.

References

1. Maglaras L., Janicke H., Ferrag M.A. Cybersecurity of Critical Infrastructures: Challenges and Solutions. *Sensors*, 2022, vol. 22, no. 5105. <https://doi.org/10.3390/s22145105>.
2. Tsantikidou K., Sklavos N. Threats, Attacks, and Cryptography Frameworks of Cybersecurity in Critical Infrastructures. *Cryptography*, 2024, vol. 8, no. 7. <https://doi.org/10.3390/cryptography8010007>.
3. Korniyenko A.A. Sistema trebovaniy k obespecheniyu bezopasnosti avtomatizirovannykh sistem i znachimyykh ob"ektov kriticheskoy informatsionnoy infrastruktury: elektronnoe uchebnoe posobie [System of requirements for ensuring the security of automated systems and critical information infrastructure objects: electronic textbook]. St. Petersburg: St. Petersburg State University of Railway Transport of Emperor Alexander I, 2022, 63 p. ISBN 978-5-7641-1837-6. EDN GESBXD (in Russian).
4. Govea J., Gaibor-Naranjo W., Villegas-Ch W. Transforming Cybersecurity into Critical Energy Infrastructure: A Study on the Effectiveness of Artificial Intelligence. *Systems*, 2024, vol. 12, no. 165. <https://doi.org/10.3390/systems12050165>.
5. Aktayeva A., Makatov Y., Tulegenovna A.K., Dautov A., Niyazova R., Zhamankarin M., Khan S. Cybersecurity Risk Assessments within Critical Infrastructure Social Networks. *Data*, 2023, vol. 8, no. 156. <https://doi.org/10.3390/data8100156>.
6. Alqudhaibi A., Albarrak M., Aloheel A., Jagtap S., Saloniitis K. Predicting Cybersecurity Threats in Critical Infrastructure for Industry 4.0: A Proactive Approach Based on Attacker Motivations. *Sensors*, 2023, vol. 23, no. 4539. <https://doi.org/10.3390/s23094539>.
7. Shmunko M.S., Chuykova V.V. Obespechenie zashchity informatsii na ob"ektakh kriticheskoy informatsionnoy infrastruktury (KII) [Ensuring Information Security at Critical Information Infrastructure (CII) Facilities]. *Sovremennyye informatsionnyye tekhnologii i informatsionnaya bezopasnost'* [Modern Information Technologies and Information Security]. Proceedings of the 3rd All-Russian Scientific and Technical Conference, Kursk, February 2, 2024. Kursk: ZAO «Universitetskaya kniga», 2024, pp. 156–159 (in Russian).
8. Maglaras L., Kantzavelou I., Ferrag M.A. Digital Transformation and Cybersecurity of Critical Infrastructures. *Applied Sciences*, 2021, vol. 11, no. 8357. <https://doi.org/10.3390/app11188357>.
9. De Felice F., Baffo I., Petrillo A. Critical Infrastructures Overview: Past, Present and Future. *Sustainability*, vol. 14, no. 4. P. 2233. <https://doi.org/10.3390/su14042233>.
10. Akwetey H.M., Danquah P., Koi-Akrofi G.Y., Asampana I. Critical Infrastructure Cybersecurity Challenges: IoT In Perspective. *International Journal of Network Security & Its Applications (IJNSA)*, July 2021, vol. 13, no. 4. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2202.12970>.
11. Izonin I., Hovorushchenko T., Shandilya S.K. Quality and Security of Critical Infrastructure Systems. *Big Data and Cognitive Computing*, 2024, vol. 8, no. 10. <https://doi.org/10.3390/bdcc8010010>.
12. Naugolnova I.A. Menedzhment 4.0: evolyutsiya i innovatsii v upravlenii organizatsiy v tsifrovuyu epokhu [Management 4.0: evolution and innovations in organizational management in the digital era]. *Teoriya i praktika obshchestvennogo razvitiya* [Theory and Practice of Social Development], 2023, no. 6(182), pp. 220–226. <https://doi.org/10.24158/tipor.2023.6.28>. EDN KESNPN (in Russian).
13. Kostina D.O., Vladimirov D.T., Kononov V.V. O vozmozhnosti primeneniya kompleksnogo II v kiberbezopasnosti [On the possibility of applying integrated AI in cybersecurity]. *Trudy II Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii «Iskusstvennyy intellekt v avtomatizirovannykh sistemakh upravleniya i obrabotki dannykh»* (27–28 aprelya 2023 g., g. Moskva) [Proc. II All-Russian Scientific Conference «Artificial Intelligence in Automated Management Systems and Data Processing» (April 27–28, 2023, Moscow)]. Moscow, Izdatel'skiy dom KDU, Dobrosvet Publ., 2023, pp. 400–404. EDN QMRDWW (in Russian).

УДК 544.541

Исследования сбоеустойчивости электронных компонентов под действием отдельных частиц

П. А. Александров, А. В. Беклемишева, П. Ю. Макавеев, Е. И. Уксусов, С. С. Фанченко, Е. В. Ефименко

Национальный Исследовательский Центр «Курчатовский институт», Москва, 123182, Россия

Актуальной проблемой на сегодняшний день является обеспечение отказоустойчивости в системах управления, работающих в условиях воздействия высокоэнергетических частиц, например, космического излучения, состоящего главным образом из протонов, имеющих энергию до 10^{20} эВ. Таких частиц довольно мало, но они в результате взаимодействия с веществом производят нейтроны, часть из которых в результате упругих столкновений с атомами кремния (это основная составляющая современной микросхемы) дают первично выбитые атомы (ПВА) достаточной энергии для генерации электронно-дырочных пар в полупроводнике, и уже они, воздействуя на работающий транзистор, могут дать сбой в работе всего устройства. Сразу ясно, что теоретический расчет здесь сильно затруднен из-за сложности описанных выше процессов, и поэтому нужны эксперименты с реальным облучением и измерением количества сбоев. В данной работе экспериментально исследуется сбоеустойчивость при воздействии нейтронов Pu-Be источника со средней энергией около 3.8 МэВ, на интегральную микросхему. Разработан экспериментальный стенд, фиксирующий количество сбоев в микросхеме при облучении. Демонстрируется возможность повышения отказоустойчивости микросхем ПЛИС за счет использования резервирования (пространственного и временного троирования).

Ключевые слова: отказоустойчивость в системах управления, нейтроны, сбоеустойчивость, микроэлектроника, электронные компоненты, высокоэнергетические частицы, программируемые логические интегральные схемы, микросхемы.

Введение

Устойчивость полупроводниковых микросхем к радиационному воздействию можно условно поделить на две части. Одна из них – устойчивость к дозе облучения. При этом рассматривается относительно слабое воздействие, которое приводит к выходу атомов кремния (основного элемента микросхемы) из положения равновесия в кристаллической решетке, что дает уменьшение подвижности носителей заряда, постепенному ухудшению параметров транзисторов и выходу их из строя. Этот процесс известен, он исследуется теоретически и экспериментально и хорошо поддается экспериментальной проверке. Основные методы увеличения стойкости по отношению к этому процессу – технологические.

Большой интерес представляет устойчивость по отношению к действию отдельных частиц высокой энергии [1]. При этом происходит рождение первично выбитых атомов кремния (ПВА), которые в результате торможения в решетке полупроводника генерируют электрон-дырочные пары, и они уже заряжают конденсаторы, работающие в составе транзистора, до напряжения, сравнимого с напряжением питания,

✉ А.В. Беклемишева: annabekl@ya.ru

Поступила в редакцию: 31.10.2024

После доработки: 15.12.2024

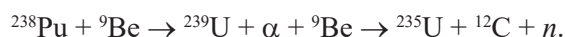
Принята к публикации: 24.12.2024

что и приводит к сбою, т.е. временной потере работоспособности [2, 3]. Понятно, что этот процесс носит пороговый характер по энергии ПВА. Также отсюда следует зависимость эффекта от размеров транзистора или от топологического размера, принятого при изготовлении микросхемы.

Ввиду того, что поток таких высокоэнергетичных частиц мал, будут в малом количестве и многократные сбои. В этом случае для борьбы с этим эффектом прибегают к резервированию и чаще всего к мажоритарному резервированию, где правильный результат определяется по наибольшему числу совпадений в вычислениях разными процессорами. Количество одинаковых процессоров должно быть нечетным, т.е. три и более.

Экспериментальная часть

Достаточно большая энергия ПВА получается при воздействии на микросхему тяжелых заряженных частиц (ТЗЧ) в космосе или быстрых нейтронов. Заметим здесь, что ТЗЧ, попадая на детали конструкции или в любое другое материальное тело генерируют быстрые нейтроны в довольно большом количестве, которые уже дают ПВА. Это основная причина, почему для дальнейших исследований был выбран Pu-Be источник нейтронов. Этот источник представляет собой механическую смесь наночастиц ^{238}Pu и ^9Be и работает по схеме



Он представляет интерес, так как получаемые нейтроны имеют энергию выше, чем от ядерного реактора [4, 5], выше, чем энергия нейтронов, возникающих при делении ядер при этом средняя энергия составляет около 3.8 МэВ, максимальная – 10 МэВ, и этого оказывается достаточно, чтобы возникали сбои от отдельных частиц. Энергетический спектр нейтронов был снят с использованием спектрометра-дозатора SDMF-1608.

Другое важное обстоятельство возникло при обсуждении количества необходимых микросхем при выполнении задачи управления летательным аппаратом в космосе, где и существует указанное выше радиационное воздействие. Таких систем управления требуется мало, поэтому целесообразно использовать программируемые логические интегральные схемы (ПЛИС). Современные ПЛИС позволяют программным образом организовать в составе одной микросхемы процессор, оперативную память и все остальное, необходимое для нормального функционирования системы управления. Кроме того, часто в составе ПЛИС имеется дополнительная флеш-память, которая имеет напряжение питания около 15 В и поэтому обладает большей стойкостью по отношению к стойкости логических элементов, которые имеют меньшее напряжение питания. Важным аргументом за использование ПЛИС является то, что современная технология позволяет иметь в составе ПЛИС достаточно большое количество логических элементов, и можно программным образом создать систему с различным образом резервирования и затем, проведя радиационные испытания, определить количество сбоев при разных способах резервирования.

Для проведения этой работы были использованы микросхемы Altera Cyclone III EP3C25F324C6 (24624 логических элементов; тактовая частота – 50 МГц; топологический размер – 65 нм; напряжение питания – 1.2 В; число входов/выходов – 324), а также отладочная плата Altera Max 10 10M08SAE144C8GES (8000 логических элементов; тактовая частота – 50 МГц; топологический размер – 55 нм; напряжение питания – 3.3 В; число входов/выходов – 144). Для программирования данных микросхем использовался программный пакет Quartus II.

Система на основе процессора Nios II состоит из двух отдельных частей: аппаратной и программной. Встроенный в платформу Quartus II инструмент Platform Designer используется для реализации аппаратной части (настройка конфигурации процессора и периферии). Платформа Nios II EDS используется для работы с программной частью проекта. Архитектура процессора Nios II определяет следующие функциональные блоки:

- файл регистров;
- арифметико-логическое устройство (АЛУ);
- интерфейс для логики пользовательских инструкций;
- контроллер исключений;

- внутренний или внешний контроллер прерываний;
- шину инструкций;
- шину данных;
- блок управления памятью (MMU);
- блок защиты памяти (MPU);
- блоки памяти для кэшей инструкций и данных;
- интерфейс тесно связанной памяти для инструкций и данных;
- модуль отладки JTAG;
- производительность процессора 51 млн операций в секунду (51 DMIPS) на частоте 50 МГц.

Для регистрации сбоев во время облучения был создан стенд с выводом информации о количестве сбоев (рис. 1) на компьютер, находящийся вне зоны облучения. Известно [6], что резервирование дает увеличение стойкости по отношению к сбоям примерно в 250 раз. Сначала проводились тестовые облучения микросхемы памяти 573 РФ2 без резервирования. Это четыре серии облучения, в ходе которых получено 47, 66, 61 и 24 сбоя при флюенсе в каждом случае в $8 \cdot 10^{11}$ Н/см², причем жестких сбоев (отказов) не было обнаружено.

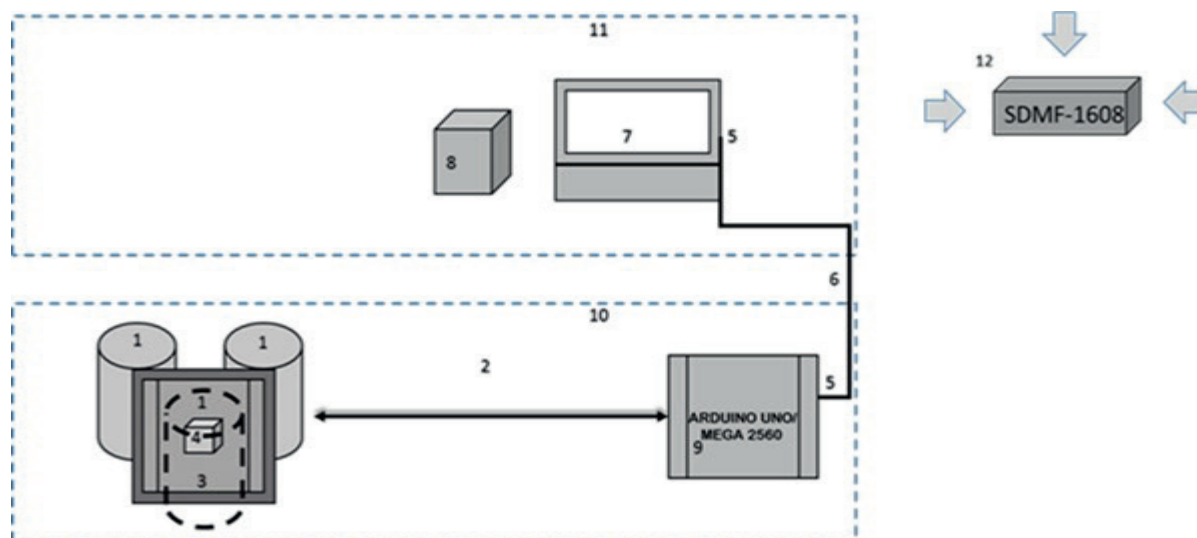


Рис. 1. Стенд для изучения количества сбоев во время облучения: 1) источники нейтронов с потоком, плотно прилегающие к кристаллу с трех сторон; 2) сигналы от трех процессоров (расстояние – 1 м); 3) отладочная плата, $S = 85 \times 75$ мм; 4) кристалл FPGA $S = 20 \times 20$ мм (10M08SAE144C8G); 5) USB-разъем, 6) кабель длиной 10 м; 7) ноутбук с программой; 8) программа регистрации; 9) микропроцессор ARDUINO UNO или MEGA 2560; 10) помещение, в котором происходит облучение микросхемы потоком нейтронов; 11) помещение без нейтронов; 12) спектрометр-дозиметр SDMF-1608 переносной

Микросхемы с памятью требуют при проектировании меньших ресурсов, чем с процессорами, поэтому радиационные испытания были проведены в первую очередь с ними. Микросхема FPGA EP4CE10F17C8N программировалась как память, в которую была записана информация. Память циклически опрашивалась, результаты опроса регистрировались в случае ошибки при облучении быстрыми нейтронами в течение недели и записывались в файл на внешний компьютер. В файле записывались вид ошибки и время ее возникновения. По результатам обработки число сбоев за время облучения составило ~ 0.3 % от зарегистрированных правильных чтений памяти.

Микросхема FPGA 10M08SAE144C8GES программировалась двумя способами: как процессор Nios II с оперативной памятью и последовательным интерфейсом UART для вывода результатов на внешний компьютер и как три процессора Nios II с оперативной памятью. Каждый из трех указанных процессоров соединялся с интерфейсом UART для вывода результатов на внешний компьютер.

Программа процессоров Nios II была также двух видов. Сначала процессоры записывали в память данные 10101010101010101010101010101010 и циклически опрашивали память, в случае сбоев выдавая

сигнал об ошибке на внешний компьютер. Во втором случае программа производила циклически арифметические вычисления с заведомо известным результатом и, в случае ошибки вычислений, выдавала сигнал на внешний компьютер. По результатам обработки число сбоев в случае работы трех процессоров за время облучения составило ~ 0.08 % от зарегистрированных правильных случаев обращений к памяти и вычислений арифметических выражений, см. также [7].

Для исследований использовались ПЛИС (FPGA) фирмы Altera Cyclon IV и MAX 10. По размерам они близки к отечественным ПЛИС 5578TC0 24 и программируются тоже в САПР Quartus II.

Выводы

Удалось разработать систему для тестирования сбоеустойчивости оборудования под воздействием высокоэнергетических частиц с энергией до 10^{20} эВ, показывающую высокие результаты по снижению сбоев при воздействии нейтронов на интегральную микросхему. Получены экспериментальные данные, демонстрирующие возможность повышения отказоустойчивости микросхем ПЛИС за счет использования резервирования (пространственного и временного троирования). Измерялось количество сбоев в одном запрограммированном процессоре, в системе с мажоритарным пространственным троированием и в случае, когда производится мажоритарное временное троирование. Количество сбоев уменьшается примерно в 250 раз, а при временном мажоритарном троировании уменьшается еще в 2.5 раза по сравнению со схемой, не использующей резервирование.

Благодарности

Авторы благодарят НИЦ «Курчатовский институт» за финансирование работы, выполняемой в соответствии с утвержденным тематическим планом НИОКР в рамках государственного задания по комплексной теме 17п «Выполнение научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ в целях обеспечения создания прототипов плазменных ракетных двигателей» по тематике 17п.2 «Разработка и экспериментальная верификация покомпонентного резервирования для управляющих систем плазменных ракетных двигателей».

Финансирование

Работа финансируется НИЦ «Курчатовский институт» в рамках НИОКТР ««Разработка и экспериментальная верификация покомпонентного резервирования для управляющих систем плазменных и ракетных двигателей», выполнявшейся в соответствии с приказом НИЦ «Курчатовский институт» от 16 января 2024 № 109.

Вклад авторов

Александров П.А. – формулировка идеи и целей исследования, постановка задачи, выбор методов исследования; разработка концепции исследования, разработка методик измерения; участие в проведении исследования и обсуждении результатов.

Фанченко С.С. – формулировка идеи и целей исследования, постановка задачи, выбор методов исследования; разработка концепции исследования, разработка методик измерения; анализ нормативной базы.

Макавеев П.Ю. – анализ нормативной базы; постановка эксперимента; выполнение экспериментальных работ, обработка результатов; проведение численных расчетов.

Уксусов Е.И. – формулировка идеи и целей исследования, постановка задачи, выбор методов исследования; разработка концепции исследования, разработка методик измерения; анализ нормативной базы.

Ефименко Е.В. – анализ нормативной базы; участие в проведении исследования и обсуждении результатов; разработка математической модели.

Беклемишева А.В. – формулировка идеи и целей исследования, постановка задачи, выбор методов исследования; разработка концепции исследования, разработка методик измерения; подготовка текста статьи.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Список литературы

1. Голяков А.Д., Ричняк А.М. Исследование отказоустойчивости оптико-электронной навигационной системы автономного космического аппарата // Труды МАИ, 2021. В. № 117. С. 20–42.
2. Ефименко Е.В., Фанченко С.С., Александров П.А. Исследование влияния облучения нейтронами на отказоустойчивость микросхемы // Известия НАН Армении. Физика, 2022, Т. 57. № 3. С. 457–462.
3. Александров П.А., Жук В.И., Литвино В.Л. Способы построения отказоустойчивых цифровых микросхем и оценки вероятностей их отказа, вызванного облучением М.: ПоРог, 2019.
4. Haider F.A., Chee F.P., Hassan H.A. Changes in electrical properties of MOS transistor induced by single 14 MeV neutron // AIP Conference Proceedings, 2016, 1704, 050015.
5. Petersen E.L. Single Event Effects in Aerospace New Jersey: IEEE Press, 2011, 520p. ISBN: 978-1-118-08431-1.
6. Mark W.L. Evaluation of the Leon3 Soft-Core Processor Within a Xilinx Radiation-Hardened Field-Programmable Gate Array. SANDIA REPORT, 2012, 0454.
7. Cannon M.J. Improving the Single Event Effect Response of Triple Modular Redundancy on SRAM FPGAs Through Placement and Routing. Brigham Young University: ProQuest Dissertations Publishing, 2019, 22616967.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2025, vol. 14, no. 1, pp. 85–90

Investigations into the failure tolerance of electronic components under the influence of individual particles

P. A. Alexandrov, A. V. Beklemisheva , P. Yu. Makaveev, E. I. Uksusov, S. S. Fanchenko, E. V. Efimenko

National Research Center «Kurchatov Institute», sq. Academician Kurchatova, 1, Moscow, 123182 Russia

 annabekl@ya.ru

Received October 31, 2024; revised December 15, 2024; accepted December 24, 2024

A pressing issue today is to ensure fault tolerance in control systems operating under conditions of high-energy particle impact, such as cosmic radiation, consisting mainly of protons with energies up to eV. There are quite a few such particles, but as a result of interaction with matter they produce neutrons, some of which, as a result of elastic collisions with silicon atoms (the main component of a modern microcircuit), produce primarily knocked-out atoms (PKAs) of sufficient energy to generate electron-hole pairs in a semiconductor, and they, acting on a working transistor, can cause a failure in the operation of the entire device. It is immediately clear that theoretical calculations here are greatly complicated by the complexity of the processes described above, and therefore experiments with real irradiation and measurement of the number of failures are needed. In this work, fault tolerance is experimentally investigated when an integrated circuit is exposed to Pu-Be source neutrons with an average energy of about 3.8 MeV. An experimental setup is developed that records the number of faults in the circuit when irradiated. The possibility of increasing the fault tolerance of FPGA circuits by using redundancy (spatial and temporal triplication) is demonstrated.

Keywords: fault tolerance in control systems, neutrons, fault tolerance, microelectronics, electronic components, high-energy particles, programmable logic integrated circuits, microcircuits.

References

1. *Golyakov A.D., Richnyak A.M.* Issledovanie otkazoustojchivosti optiko-elektronnoj navigacionnoj sistemy avtonomnogo kosmicheskogo apparata [Study of fault tolerance of the optical-electronic navigation system of an autonomous spacecraft]. Trudy MAI, 2021, no.117. pp. 20–42. (in Russian).
2. *Efimenko E.V., Fanchenko S.S., Aleksandrov P.A.* Issledovanie vliyaniya oblucheniya nejtronami na otkazoustojchivost' mikroskhemy [Study of the influence of neutron irradiation on the fault tolerance of a microcircuit]. Izvestiya NAN Armenii, Fizika, 2022, vol.57, no. 3, pp. 457–462. (in Russian).
3. *Aleksandrov P.A., Zhuk V.I., Litvino V.L.* Methods for constructing fault-tolerant digital microcircuits and assessing the probabilities of their failure caused by radiation. Moscow, Porog, 2019.
4. *Haider F.A., Chee F.P., Hassan H.A.* Changes in electrical properties of MOS transistor induced by single 14 MeV neutron AIP Conference Proceedings, 2016. 1704. 050015.
5. *Petersen E.L.* Single Event Effects in Aerospace. New Jercey, IEEE Press, 2011, 520 p. ISBN: 978-1-118-08431-1.
6. *Mark W.L.* Evaluation of the Leon3 Soft-Core Processor within a Xilinx Radiation-Hardened Field-Programmable Gate Array. SANDIA REPORT – SAND2012-0454, 2012.
7. *Cannon M.J.* Improving the Single Event Effect Response of Triple Modular Redundancy on SRAM FPGAs Through Placement and Routing. Brigham Young University ProQuest Dissertations Publishing, 2019. 22616967.