
СОДЕРЖАНИЕ

Том 8, номер 5, 2019

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

- Тепловой расчет контейнера аппаратного с блоком многокадровой системы регистрации линейного индукционного ускорителя электронов
А. А. Рякин, О. В. Койнов, М. В. Никульшин 397
- Экспериментальные устройства для проведения испытаний в реакторе БОР-60
И. Ю. Жемков, Н. С. Погляд, В. Ю. Анисимов, А. В. Боев 402
- Синтез полупроводника р-типа CuAlO_2
А. Г. Макогон, Е. А. Белая, А. М. Колмогорцев, В. В. Викторов 410
-

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

- Точные решения в неявном виде нелинейных уравнений конвективного массо- и теплопереноса с переменными коэффициентами
А. Д. Полянин 415
- Нелинейные дифференциальные уравнения третьего и четвертого порядка, имеющие точные решения, выраженные через эллиптическую функцию Вейерштрасса
С. Ф. Лаврова, Н. А. Кудряшов, А. А. Кутуков 428
- Функции Бесселя вещественного индекса и ряды Крейна
В. Б. Шерстюков, Е. В. Сумин 437
- Метод функционального разделения переменных может дать больше точных решений, чем методы, основанные на одной дифференциальной связи
А. Д. Полянин 445
- Точные решения нелинейных телеграфных уравнений с запаздыванием
В. Г. Сорокин 453
-

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

- Методика и программа расчета скорости звука в воде в условиях естественной конвекции у поверхности тепловыделяющих сборок ядерных реакторов
А. В. Воронина, С. В. Павлов 465
- Воксельный фантом для дозиметрической верификации планов облучения на установке гамма-нож *Perfection* методом Монте-Карло
Т. Меджадж, А. И. Ксенофонтов, А. В. Далечина 473
-

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

- Алгоритм построения полинома наилучшего равномерного приближения по экспериментальным данным
К. Я. Кудрявцев 480
-
-

Contents

Volume 8, Number 5, 2019

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI"

Technical Physics

Thermal Analysis of an Instrumentation Container for a Multi-Frame Recording System in a Linear Induction Accelerator of Electrons

A. A. Ryakin, O. V. Koinov, and M. V. Nikulshin 397

Experimental Devices for Testing in the BOR-60 Reactor

I. Yu. Zhemkov, N. S. Poglyad, V. Yu. Anisimov, and A. V. Boev 402

Synthesis of the p-Type Semiconductor CuAlO_2

A. G. Makogon, E. A. Belaya, A. M. Kolmogortsev, and V. V. Viktorov 410

Differential Equations and Dynamic Systems

Exact Solutions in the Implicit Form of Nonlinear Mass and Heat Transfer Equations with Variable Coefficients

A. D. Polyinin 415

Nonlinear Differential Equations of the Third and Fourth orders with Exact Solutions Expressed in terms of the Weierstrass Elliptic Function

S. F. Lavrova, N. A. Kudryashov, and A. A. Kutukov 428

Bessel Functions of a Real Order and Krein's Series

V. B. Sherstyukov and E. V. Sumin 437

Method of Functional Separation of Variables Can Give More Exact Solutions than Methods Based on a Single Differential Constraint

A. D. Polyinin 445

Exact Solutions of Nonlinear Telegraph Equations with Delay

V. G. Sorokin 453

Mathematical Modeling and Computer Simulation

Method and Program to Calculate the Speed of Sound in Water under the Conditions of Natural Convection along the Surface of Fuel Assemblies of Nuclear Reactors

A. V. Voronina and S. V. Pavlov 465

Creating a Voxel Phantom for Dosimetric Verification of Treatment Plans in the Gamma-Knife Perfexion using the Monte Carlo Method

T. Medjadj, A. I. Ksenofontov, and A. V. Dalechina 473

Applied Mathematics and Informatics

Algorithm for Constructing the Best Uniform Approximation Polynomial from Experimental Data

K. Ya. Kudryavtsev 480

УДК 621.314

ТЕПЛОВОЙ РАСЧЕТ КОНТЕЙНЕРА АППАРАТУРНОГО С БЛОКОМ МНОГОКАДРОВОЙ СИСТЕМЫ РЕГИСТРАЦИИ ЛИНЕЙНОГО ИНДУКЦИОННОГО УСКОРИТЕЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ

© 2019 г. А. А. Рякин^{1,2,*}, О. В. Койнов^{1,2}, М. В. Никульшин^{1,2}

¹ Снежинский физико-технический институт – филиал Национального исследовательского ядерного университета “МИФИ”, Снежинск, 456776, Россия

² Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики имени акад. Е.И. Забабахина, Снежинск, 456776, Россия

*e-mail: artemryakin@mail.ru

Поступила в редакцию 29.01.2019 г.

После доработки 29.03.2019 г.

Принята к публикации 09.04.2019 г.

В статье представлены результаты расчетных исследований температурных полей и полей скоростей воздуха внутри аппаратного контейнера. Цель работы: определение необходимого количества термоэлектрических кондиционеров OverFrost 40 и калорифера Schroff CR 027 для поддержания оптимального значения температуры воздуха внутри контейнера, при работе блока многокадровой системы регистрации линейного индукционного ускорителя электронов при отрицательных и положительных температурах окружающей среды. Расчетные исследования проводились в несколько этапов на трехмерной конечно-элементной модели, в газодинамическом модуле инженерной программы, реализующей метод конечных элементов. На первом этапе определялись температурные поля и поля скоростей воздуха внутри контейнера, для одного кондиционера и калорифера, расположенных на задней стенке внутри аппаратного контейнера. Расчеты проводились для режимов работы при отрицательной и положительной температуре внешней среды. На втором этапе определялось необходимое количество кондиционеров для достаточного охлаждения воздуха внутри контейнера до оптимального значения температуры на режиме работы блока при положительной температуре внешней среды. Результаты расчетных исследований показали, что при температуре среды минус 5°C применение шести кондиционеров и одного калорифера достаточно для поддержания температуры воздуха внутри объема служебного помещения $20 \pm 5^\circ\text{C}$. При работе с максимальной мощностью температура $20 \pm 5^\circ\text{C}$ будет достигнута через ≈ 5 минут. При работе блока, температура $20 \pm 5^\circ\text{C}$ поддерживается с помощью шести кондиционеров в течение 120 минут.

Ключевые слова: термоэлектрический нагреватель, калорифер температурное поле, поле скоростей

DOI: 10.1134/S2304487X19040096

Контейнер аппаратный предназначен для размещения регистрирующей аппаратуры и ее физической защиты и обеспечения требуемого температурного режима. Цель расчетных исследований: определение необходимого количества термоэлектрических кондиционеров Overfrost 40 и калориферов Schroff CR 027 для поддержания оптимального значения температуры воздуха внутри контейнера при работе блока многокадровой системы регистрации линейного индукционного ускорителя электронов при отрицательных и положительных температурах окружающей среды.

В аппаратном контейнере размещается многокадровая система регистрации для линейного

индукционного ускорителя электронов. Корпус АК представляет собой стальной ящик и выполнен в виде несущей рамы из стандартного металлопроката с приваренными к нему стальными листами.

Блок многокадровой системы регистрации устанавливается на закрепленный в стальной раме столик, рама крепится к корпусу АК на пружинных подвесках. МСР устанавливается параллельно измерительной оси таким образом, чтобы его центр совпадал с измерительной осью. Для уменьшения ударных воздействий между блоком и передней стенкой аппаратного контейнера предусмотрены амортизирующие прокладки.

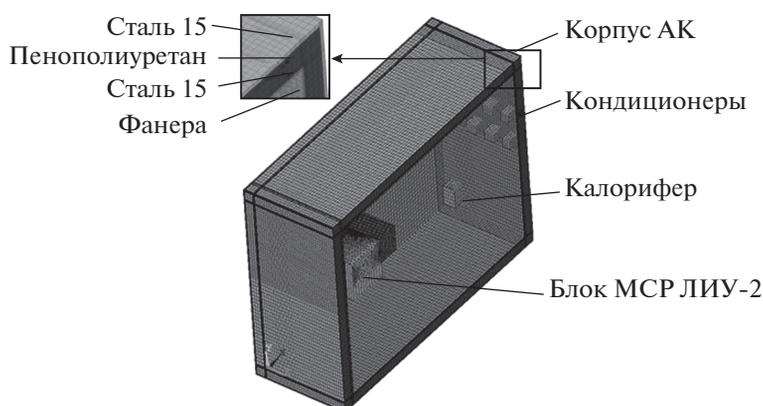


Рис. 1. Конечно-элементная модель аппаратного контейнера.

Для поддержания оптимальной рабочей температуры регистраторов (20 ± 5)°С контейнер аппаратный укомплектовывается термоэлектрическим кондиционером OverFrost 40 с датчиком температуры, обеспечивающим как охлаждение, так и обогрев объема аппаратного контейнера. Для нагрева также используется калорифер Schroff R 027. Калорифер и кондиционеры устанавливаются в задней части аппаратного контейнера.

Термоэлектрический кондиционер OverFrost представляет собой точечный источник для поддержания температуры -40 до $+60$ °С, осуществляющий теплообмен за счет различия значений температуры кондиционера и внутреннего объема воздуха.

Калорифер работает с постоянной скоростью обдува 1 м/с и значением температуры на нагревательном элементе до 150 °С. Калорифер также может работать в режиме без нагрева воздуха.

Аппаратный контейнер используется в диапазоне температур наружного воздуха минус $5...30$ °С. Оптимальное значение температуры воздуха внутри аппаратного контейнера 20 ± 5 °С.

При работе в режиме с температурой наружного воздуха минус 5 °С, с аппаратным контейнером производятся следующие действия:

1) При начальной температуре аппаратного контейнера минус 5 °С начинается нагрев воздуха внутри контейнера до значения температуры 20 ± 5 °С. Нагрев производится с использованием калорифера Schroff CR 027 и кондиционера OverFrost 40;

2) При достижении значения температуры воздуха внутри служебного помещения 20 °С происходит установка блока и извлечение калорифера;

3) Затем при помощи кондиционера производится нагрев воздуха внутри аппаратного контейнера до значения температуры 20 ± 5 °С;

4) При достижении необходимой температуры 20 ± 5 °С включается блок, обладающий тепловыделением 300 Вт. Далее при помощи кондиционера поддерживается значение температуры воздуха 20 ± 5 °С внутри контейнера аппаратного.

Время достижения значения температуры воздуха внутри аппаратного контейнера 20 ± 5 °С должно составлять не более двух часов. Время работы в режиме поддержания температуры 20 ± 5 °С должно составлять ≈ 4 часа.

Для расчетных исследований построена трехмерная конечно-элементная модель аппаратного контейнера. При подготовке конечно-элементной модели форма и конструкция калорифера и кондиционера, оптимизировались для получения ровной, регулярной конечно-элементной сетки.

Конструктивные элементы аппаратного контейнера моделировались твердотельным типом элемента. Для моделирования воздуха внутри контейнера использовался тип элемента, описывающий жидкие и газообразные среды.

На рис. 1 представлено изображение конечно-элементной модели аппаратного контейнера.

На задней стенке внутри контейнера располагаются термоэлектрические кондиционеры. На полу контейнера, вплотную к задней стенке, расположен калорифер. Нагревательной мощности калорифера Schroff CR 027 (350 Вт) достаточно для достижения необходимого значения температуры воздуха внутри контейнера при отрицательной температуре среды минус 5 °С.

Для поддержания значения температуры воздуха 20 ± 5 °С внутри контейнера при работе блока предполагалось использовать один термоэлек-

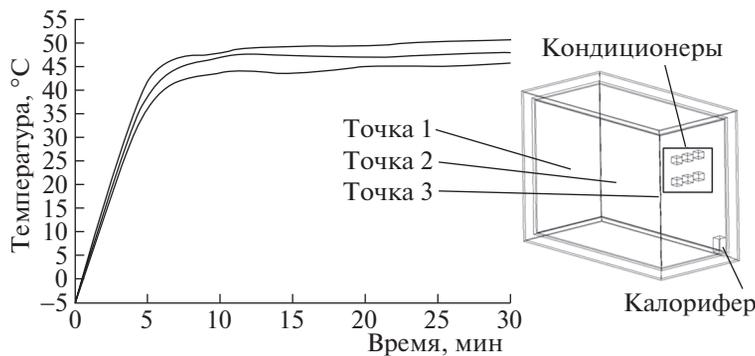


Рис. 2. Зависимость значения температуры ($^{\circ}\text{C}$) от времени для трех точек внутри воздушного объема при работе термоэлектрических кондиционеров и калорифера в режиме нагрева (температура среды минус 5°C).

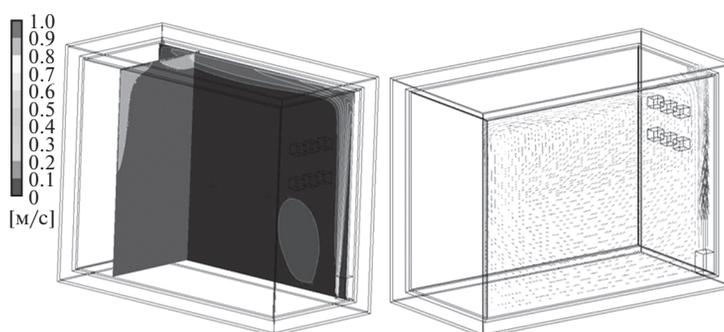


Рис. 3. Зависимость значения температуры ($^{\circ}\text{C}$) от времени для трех точек внутри воздушного объема при работе термоэлектрических кондиционеров и калорифера в режиме нагрева (температура среды минус 5°C).

трический кондиционер OverFrost 40, обладающий максимальной охлаждающей мощностью 93 Вт. Следует отметить, что блок выступает в качестве нагревательного элемента с мощностью тепловыделения 300 Вт, и скоростью потока воздуха 1.5 м/с. Термоэлектрический кондиционер мощностью 93 Вт является точечным источником температуры. Эти факты свидетельствуют о том, что для поддержания значения температуры воздуха $20 \pm 5^{\circ}\text{C}$ недостаточно одного термоэлектрического кондиционера, и было принято решение об увеличении количества кондиционеров до шести штук.

Для режима нагрева за начальную температуру контейнера и воздуха внутри него, а также температуры среды, окружающей контейнер, принималась постоянное значение, равное минус 5°C . На внешней поверхности аппаратного контейнера коэффициент теплоотдачи принимался равным $15 \text{ Вт/м}^2\text{K}$.

На рис. 2 представлена зависимость значения температуры от времени для трех точек внутри воздушного объема при работе термоэлектриче-

ских кондиционеров (6 штук) и калорифера в режиме нагрева (температура среды минус 5°C).

При значении температуры среды минус 5°C , значение температуры 20°C достигается внутри служебного помещения контейнера аппаратного РЭ1094 менее чем за 5 минут.

Представлено поле скоростей (рис. 3) и температурное поле (рис. 4) воздушного объема на момент времени 15 минут, в плоскостях проходящих через кондиционер и внутренний объем контейнера.

После достижения в воздушном объеме оптимального для работы блока значения температуры $20 \pm 5^{\circ}\text{C}$, из аппаратного контейнера извлекается калорифер и устанавливается блок.

На рис. 5 представлена графическая зависимость температуры от времени для трех точек внутри воздушного объема при работе блока и шести термоэлектрических кондиционеров (температура среды -5°C).

При значении температуры среды минус 5°C температура $20 \pm 5^{\circ}\text{C}$ поддерживается внутри служебного помещения контейнера аппаратного в

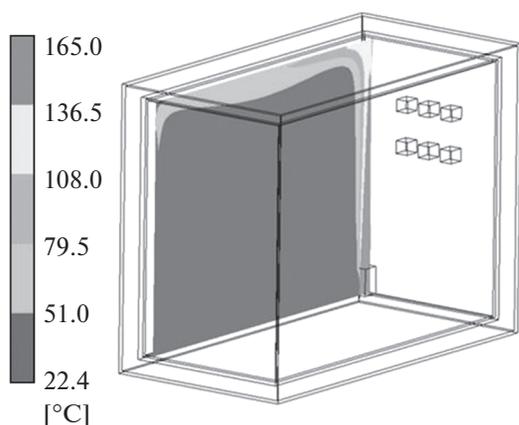


Рис. 4. Температурное поле ($^{\circ}\text{C}$) воздушного объема на момент времени 15 минут.

течение 165 минут при помощи шести термоэлектрических кондиционеров, работающих в режиме максимального охлаждения. Из представленной зависимости (рис. 5) следует, что в точке 1 (бли-

жайшей к блоку) спустя 4 часа от начала работы блока значение температуры воздуха внутри служебного помещения контейнера увеличивается не выше 28°C .

Представлено поле скоростей (рис. 6) и температурное поле (рис. 7) воздушного объема на момент времени 240 минут, в плоскостях, проходящих через кондиционер и внутренний объем контейнера.

Следует отметить, что температурное поле воздушного объема внутри служебного помещения контейнера аппаратного имеет неравномерный характер. Между блоком и передней стенкой аппаратного контейнера значение температуры воздуха достигает значения 34.3°C (рис. 7), в то время как вблизи кондиционеров значение температуры воздуха составляет минус 40°C .

Результаты расчетных исследований показали, что при температуре среды минус 5°C применение шести кондиционеров и одного калорифера достаточно для достижения значения температуры воздуха внутри объема служебного помещения $20 \pm 5^{\circ}\text{C}$. При работе с максимальной мощно-

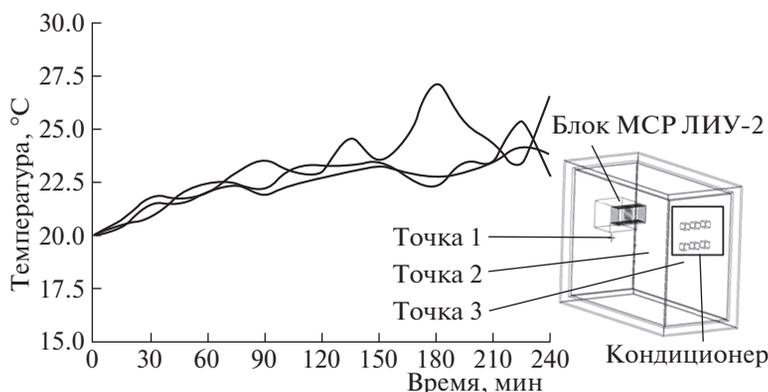


Рис. 5. Зависимость значения температуры ($^{\circ}\text{C}$) от времени для трех точек внутри воздушного объема при работе блока МСР ЛИУ-2 и шести термоэлектрических кондиционеров (температура среды минус 5°C).

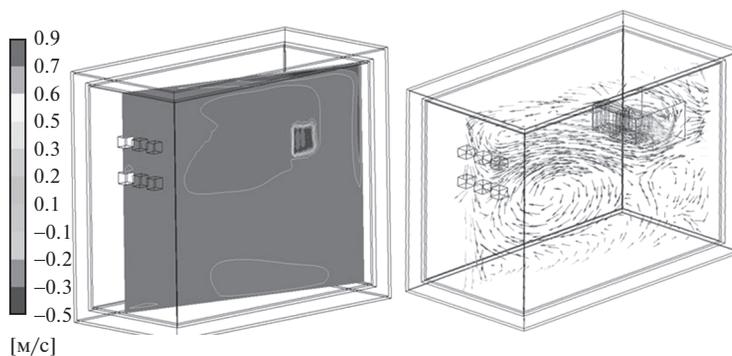


Рис. 6. Поле скоростей (м/с) воздушного объема на момент времени 240 минут (температура среды минус 5°C).

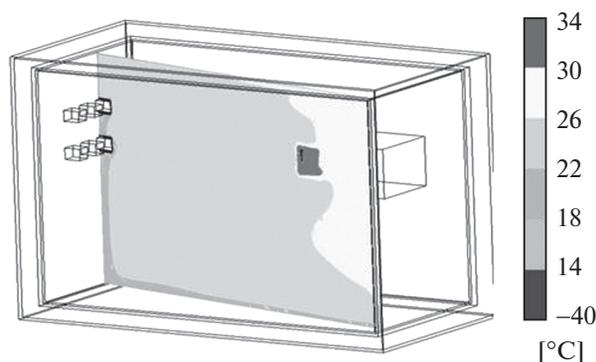


Рис. 7. Температурное поле ($^{\circ}\text{C}$) воздушного объема на момент времени 240 минут (температура среды минус 5°C).

стью температура $20 \pm 5^{\circ}\text{C}$ будет достигнута через ≈ 5 минут. При работе блока, температура $20 \pm 5^{\circ}\text{C}$ поддерживается с помощью шести кондиционеров в течение 120 минут.

Таким образом, для поддержания необходимого значения температуры $20 \pm 5^{\circ}\text{C}$, достаточно использовать шесть термоэлектрических кондиционеров OverFrost 40 и один калорифер Schroff CR 027.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2019, vol. 8, no. 5, pp. 397–401

Thermal Analysis of an Instrumentation Container for a Multi-Frame Recording System in a Linear Induction Accelerator of Electrons

A. A. Ryakin^{a,b,#}, O. V. Koinov^{a,b}, and M. V. Nikulshin^{a,b}

^a Snezhinsk Physics and technology Institute, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Snezhinsk, 456776 Russia

^b National Russian Federal Nuclear Centre All-Russian Scientific Research Institute of Technical Physics named after E.I. Zababakhin, Snezhinsk, 456776 Russia

[#]e-mail: artemryakin@mail.ru

Received January 19, 2019; revised March 29, 2019; accepted April 9, 2019

Abstract—Both temperature and air-velocity fields inside the instrumentation container have been calculated and results of these computational studies have been presented. The aim of this work is to determine the number of OverFrost 40 thermoelectric air conditioners and Schroff CR 027 air heaters needed to maintain the optimal air temperatures inside the container when the multi-frame recording system in the linear induction accelerator of electrons operates under the conditions of negative and positive ambient temperatures. Calculations have been carried out in several stages in the 3D finite element model, in the gas-dynamic module of the engineering program that implements the finite element method.

The temperature and air-velocity fields inside the container for one air conditioner and one heater, both located at the rear wall inside the instrumentation container have been determined in the first stage. Calculations have been performed for operational conditions of positive and negative ambient temperatures.

The number of conditioners needed to ensure the sufficient cooling of air inside the container down to the optimal temperature in the positive temperature operational environment has been determined in the second stage. Results of settlement studies have shown that six conditioners and one heater are enough to maintain an air temperature of $(20 \pm 5)^{\circ}\text{C}$ in the office accommodation volume at an environment temperature of -5°C . At the operation with the maximum capacity, a temperature of $(20 \pm 5)^{\circ}\text{C}$ will be reached in about 5 min. At the block operation, a temperature of $(20 \pm 5)^{\circ}\text{C}$ is supported by means of six conditioners during 120 min.

Keywords: thermoelectric air conditioners, heater, velocity fields, temperature fields

DOI: 10.1134/S2304487X19040096

УДК 621.039.526

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ИСПЫТАНИЙ В РЕАКТОРЕ БОР-60

© 2019 г. И. Ю. Жемков^{1,*}, Н. С. Погляд^{1,2}, В. Ю. Анисимов^{1,2}, А. В. Боев^{1,2}

¹ Научно-исследовательский институт атомных реакторов, Димитровград, 433507, Россия

² Димитровградский инженерно-технологический институт – филиал Национального исследовательского ядерного университета “МИФИ”, Димитровград, 433511, Россия

*e-mail: Vlasya.85@mail.ru

Поступила в редакцию 18.03.2019 г.

После доработки 13.08.2019 г.

Принята к публикации 03.09.2019 г.

В настоящее время в реакторе БОР-60 проводится широкий спектр испытаний материалов, применяемых в ядерной энергетике. Исследование изменений свойств материалов требует определения с высокой точностью температурных условий облучения. В работе представлена сводная информация о материалах, которые испытывались в реакторе БОР-60 с момента пуска по настоящее время. Каждое из направлений исследований требует индивидуального подхода и создания уникального экспериментального устройства. Экспериментальные устройства различаются по различным критериям, которые оказывают влияние на эффективность проводимых исследований. Геометрические параметры ячеек реактора и особенности устройства напорного коллектора приводят к необходимости внешнего подобию применяемых устройств, при этом внутреннее исполнение значительно различается в зависимости от типа проводимых исследований. В работе представлена различная классификация экспериментальных устройств реактора БОР-60, отличающаяся по способу получения информации, уровню температуры облучения, конструктивному исполнению и среде испытаний, а также описано проведение в инструментированной ячейке реактора БОР-60 методического эксперимента. Для каждого типа облучательных устройств приведено описание особенностей конструкции и применения для проведения испытаний. Отдельно в работе описан автономный петлевой канал, позволяющий проводить испытания в средах, отличающихся от реакторного теплоносителя.

Ключевые слова: реактор, экспериментальное устройство, материаловедческий пакет, образцы, твэл, термопара, ядерное топливо, теплоноситель

DOI: 10.1134/S2304487X19050092

ВВЕДЕНИЕ

В опытном реакторе на быстрых нейтронах БОР-60 проводятся экспериментальные исследования (ЭИ) совместного влияния радиационного воздействия и температуры на структуру и свойства используемых в ядерной энергетике материалов. Для проведения ЭИ и последующего переноса полученных результатов на другие реакторы необходимо тщательное моделирование условий облучения, соответствующих реальным условиям эксплуатации материалов. Для решения этой задачи применяются специальные ЭУ, обеспечивающие требуемые условия облучения в течение всего срока испытаний в реакторе. ЭУ могут быть установлены в любую ячейку активной зоны и бокового экрана реактора БОР-60 (см. рис. 1). ЭУ отличаются по способу получения информации,

уровню температур облучения, конструктивному исполнению и среде испытаний.

Принципиальным различием ЭУ, оказывающим непосредственное влияние на процесс проведения испытаний, является конструктивное исполнение. Использование ЭУ различной конструкции позволяет проводить испытания образцов в различных средах, таких как натрий, различные газы и их смеси и тяжелометаллические теплоносители.

В табл. 1 представлены материалы, испытанные в БОР-60 в составе специальных ЭУ.

По конструктивному исполнению ЭУ могут быть разборными, что позволяет использовать их для продолжения испытаний после частичной или полной замены исследуемых образцов, и неразборными, в которых извлечение образцов

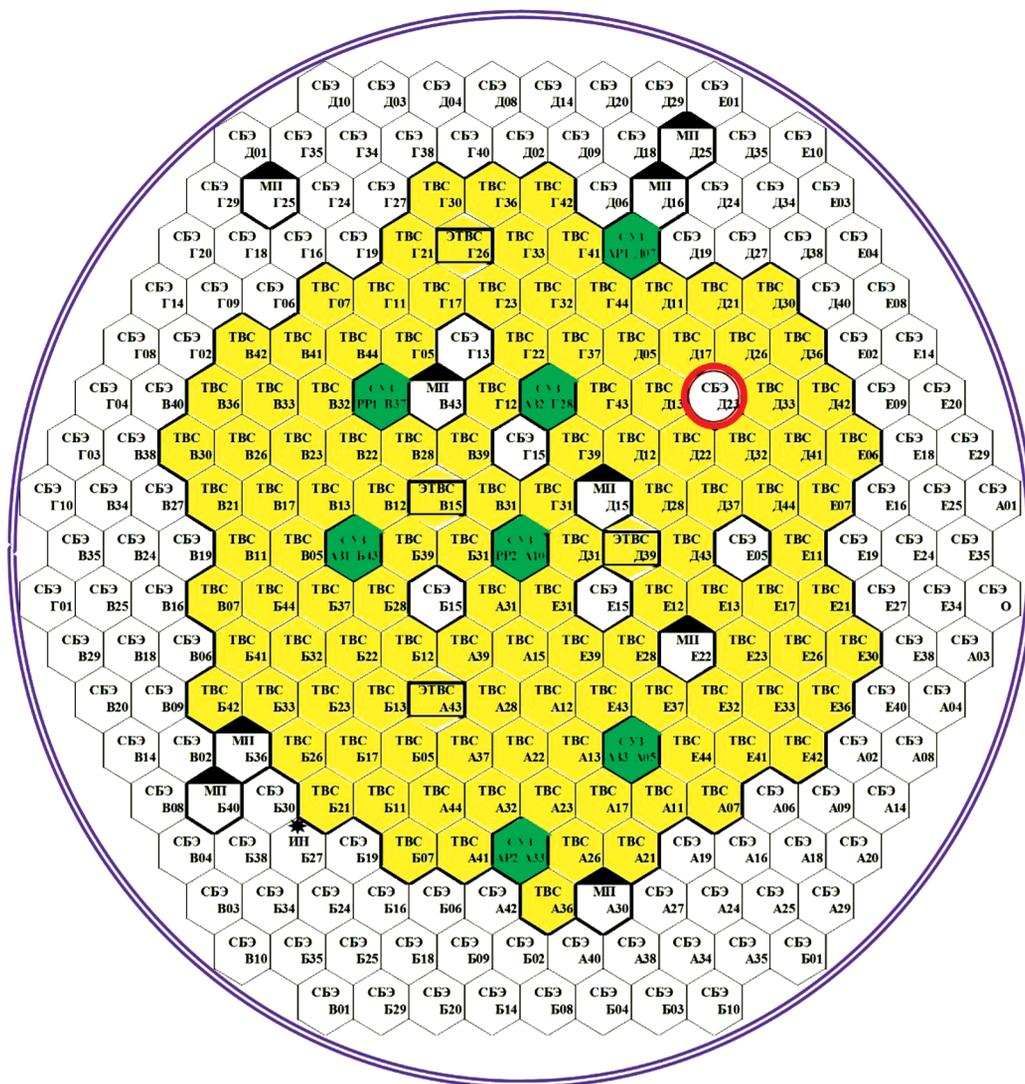


Рис. 1 – Картограмма загрузки реактора БОР-60.

ТВС– тепловыделяющая сборка, ЭТВС – экспериментальная ТВС, СУЗ – рабочий орган системы управления и защиты реактора, МП – материаловедческий пакет, СВЭ – стальная сборка бокового экрана.

предполагает нарушение целостности ЭУ и невозможность его дальнейшего использования.

Разборные ЭУ предполагают как дискретное, так и непрерывное облучение. В первом случае возможно получение информации в промежуточных точках облучения после разборки ЭУ, выгрузки части образцов и их исследований неразрушающими методами (с последующим возвратом в ЭУ) или разрушающими методами (без возврата на дооблучение). Результатом такого облучения является так называемая дозная зависимость исследуемого свойства испытываемого материала. При непрерывном облучении не предполагается получение промежуточной информа-

ции. Результатом такого облучения является сравнение исследуемого свойства материала в исходном состоянии и после облучения в реакторе.

Интерпретация данных, полученных в результате исследования образцов, зависит от условий облучения, определение которых является первоочередной задачей при подготовке и проведении реакторных испытаний. Существующая в реакторе БОР-60 информационно-измерительная система (ИИС) производит в режиме реального времени контроль нескольких сотен параметров реактора (расход, входная и выходная температура натрия, тепловая мощность реактора и др.). Все ЭУ перед началом облучения в реакторе проходят

Таблица 1. Материалы, испытанные в реакторе БОР-60

Материалы		Тип
Топливные	керамика	UO ₂ , UO ₂ -PuO ₂ , (U,Pu)O ₂ , UC, UN, UPuN, UPuCN, PuO ₂ -MgO, ЯТ + Np, Am
	металл	U, UPu, UZr, UPuZrNb, PuN-ZrN
	металлокерамика	PuO ₂ -U, UO ₂ -U, UO ₂ -PuO ₂ -U, UN-U
	композитное	(UPuZr)C, UO ₂ -NiCr
Поглощающие	образцы	B ₄ C, Ta, Hf, Dy, Sm, Gd, AlB ₆ , AlB ₁₂ , Eu ₂ O ₃ , HfH _x , Gd ₂ O ₃ , Dy ₂ O ₃ -HfO ₂
	стержни СУЗ	CrB ₂ , B ₄ C (¹⁰ B – 19–80%), Eu ₂ O ₃ , Eu ₂ O ₃ + ZrH ₂
Конструкционные	стали	OX18H9, X18H10T, ЭП450, ЭП823 03X16H9M2, ЭП912, ЭИ847, ЭП172, ЧС68, ВХ24, ЭП302Ш, 09Г2С, АРМКО, SS316, ODS-(12,14,18)Cr, Т91, Т92, S421 (HT9), 15-15Ti, 800H, 14YWT, 800H, ...
	тугоплавкие материалы	V, W, Mo, Nb, WC, SiC/SiC
	сплавы	PE-16, X20H45M4Б, ВЦУ, Э110, Э125, Э117, Э635, VCrTi, FeCr, ZrNbSnFeO
	замедлители	ГРП-2-125, МП6-6, ГР-280, АРВ, IG-11, ПГИ, ZrH _x
Теплоносители	источники нейтронов	Po-Be, Be, SbBe
	жидкометаллические	Na, Pb, Pb-Bi
Электротехнические	изоляция	Al ₂ O ₃ , SiO ₂ , Si, слюда
	кабели	КТМС, КНМС(Н)
	магниты	ЮНДК
Прочие материалы	спец. керамика	ГБ-7, ИФ-46, ЦТС, LiNbO ₃
	биологическая защита	Бетоны различных марок

гидравлические испытания на специальном стенде, результатом которых является обеспечение требуемого расхода натрия через ЭУ при его постановке в определенную ячейку реактора, а также определение зависимости расхода теплоносителя через ЭУ от давления. Эта зависимость позволяет однозначно определить, используя показания ИИС, значения расхода теплоносителя через ЭУ в течение всего процесса облучения.

По способу получения информации о распределении температуры в облучательном объеме ЭУ можно разделить на инструментированные и неинструментированные.

Инструментированные ЭУ предназначены для проведения испытаний с контролем исследуемых параметров в on-line режиме в процессе облучения. В реакторе БОР-60 есть одна инструментированная ячейка (см. рис. 1), которая позволяет организовать вывод информации по 50 независимым каналам, к которым могут быть подключены различные детекторы и датчики. В частности, размещение ЭУ в инструментированной ячейке

позволяет определять распределение температуры в процессе проведения испытаний при помощи измерения показаний термопар, размещенных в облучательном объеме ЭУ. Именно в этой ячейке при проведении испытаний размещаются инструментированные ЭУ. К подобным ЭУ относятся автономные петлевые каналы, термометрические пакеты и разборные ЭУ с установленным термометрическим зондом.

Неинструментированные ЭУ позволяют проводить облучение без текущего контроля исследуемых параметров. Этот тип ЭУ используется для определения пострadiaционных эффектов в процессе последующих вне реакторных материаловедческих исследований. Особенностью этих ЭУ является возможность размещения в них образцов различных размеров или предназначенных для различных видов испытаний. Отсутствие термопар позволяет заполнить облучательный объем ЭУ большим количеством образцов, достаточным для применения при обработке результатов материаловедческих исследований методов мате-

математической статистики (т.е. представление результата как минимум с указанием его вероятной вероятности). Неинструментированные ЭУ могут оснащаться наборами активационных детекторов для послереакторного определения флюенса нейтронов и температурных мониторов для определения температуры облучения. В качестве температурных мониторов могут использоваться такие материалы, как карбид кремния, так и сплавы металлов с различной температурой плавления (плавкие мониторы).

К подобным ЭУ относятся экспериментальные ТВС (ЭТВС) без подогрева или с твэльным подогревом, а также материаловедческие пакеты (МП), с проточной или непроточной (ампульной) подвеской.

На реакторе БОР-60 широко применяются методические эксперименты в инструментированной ячейке. Во время данного эксперимента ЭУ с установленным термометрическим зондом подвергается кратковременному облучению в инструментированной ячейке реактора с целью экспериментального определения (подтверждения) распределения температуры в облучательном объеме, затем термометрический зонд отсоединяется, а ЭУ переставляется для дальнейшего облучения в другую неинструментированную ячейку реактора. Таким образом, начало облучения исследуемых материалов проводится в инструментированном ЭУ, а дальнейшее облучение в неинструментированном ЭУ. Данный подход существенно расширяет экспериментальные возможности реактора БОР-60.

КОНСТРУКЦИЯ ЭУ

Несмотря на многообразие типов ЭУ, устанавливаемых на облучение в реактор БОР-60, в их конструкции есть общие элементы. В основу конструкции всех ЭУ положены принципы исключения возможности нарушения пределов и условий безопасной эксплуатации в процессе установки в реактор, проведения испытаний, извлечения ЭУ из реактора и образцов из ЭУ.

Для размещения в реакторе ЭУ должно внешними габаритами соответствовать штатной ТВС. В каждом ЭУ образцы различных классов исследуемых материалов, различных форм и размеров, скомпонованные определенным образом, размещаются в шестигранном чехле (корпус ЭУ) размером “под ключ” 44 мм, включающем в себя верхний и нижний переходники, хвостовик штатной конструкции. Все ЭУ оснащены транспортной головкой, которая имеет шесть отверстий для выхода теплоносителя из ЭУ, а также служит для захвата штангой разгрузочно-загрузочной машины или ручным инструментом. Крепление головки к верхнему переходнику шестигранного чехла —

разъемное байонетное. В зависимости от требуемого расхода теплоносителя через ЭУ его хвостовик может обеспечивать поступление теплоносителя (натрий) в устройство либо из камеры высокого давления напорного коллектора БОР-60 через отверстия на боковой поверхности, либо из камеры низкого давления напорного коллектора БОР-60 через торцевое отверстие. Величина расхода теплоносителя через ЭУ, необходимая для обеспечения требуемых температурных условий облучения, определяется расчетным путем. Затем на специальном стенде проводятся гидравлические испытания, в результате которых подбирается проходное сечение специальной дроссельной шайбы, устанавливаемой в хвостовик, соответствующее требуемому значению расхода теплоносителя через ЭУ при номинальном расходе теплоносителя через реактор. В зависимости от типа ЭУ используются различные подвески с исследуемыми образцами, которые размещаются внутри корпуса. Однако каждый из типов подвесок обеспечивает протекание теплоносителя через внутренний объем ЭУ в количестве, достаточном для надежного охлаждения элементов конструкции ЭУ.

В отдельных конструкциях корпус ЭУ может состоять из двух чехлов, образующих герметичную полость, заполненную смесью аргона и воздуха. При этом наружный чехол всегда выполняется из шестигранной трубы с размером “под ключ” 44 мм, а внутренний — либо из шестигранной трубы меньшего размера, либо из круглой трубы. Заполненная смесью газов полость служит в этом случае тепловой защитой для минимизации вклада соседних ТВС в температурный режим облучения исследуемых образцов. В результате полезный объем в облучательном устройстве существенно уменьшается, что является одним из основных факторов, ограничивающих экспериментальные возможности БОР-60.

Дополнительными ограничивающими факторами являются необходимость изготовления измерительных датчиков из термостойких материалов и невозможность проведения испытаний материалов при температуре ниже 320°C, что связано с эксплуатационными параметрами реактора БОР-60.

На рис. 2 представлена блок-схема типов ЭУ. Рассмотрим подробнее основные типы используемых ЭУ.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ТВС

ЭТВС реактора БОР-60 предназначена для облучения экспериментальных твэлов или макетов твэлов различных геометрических размеров и с различным ядерным топливом. В ЭТВС также возможно высокотемпературное облучение (390—

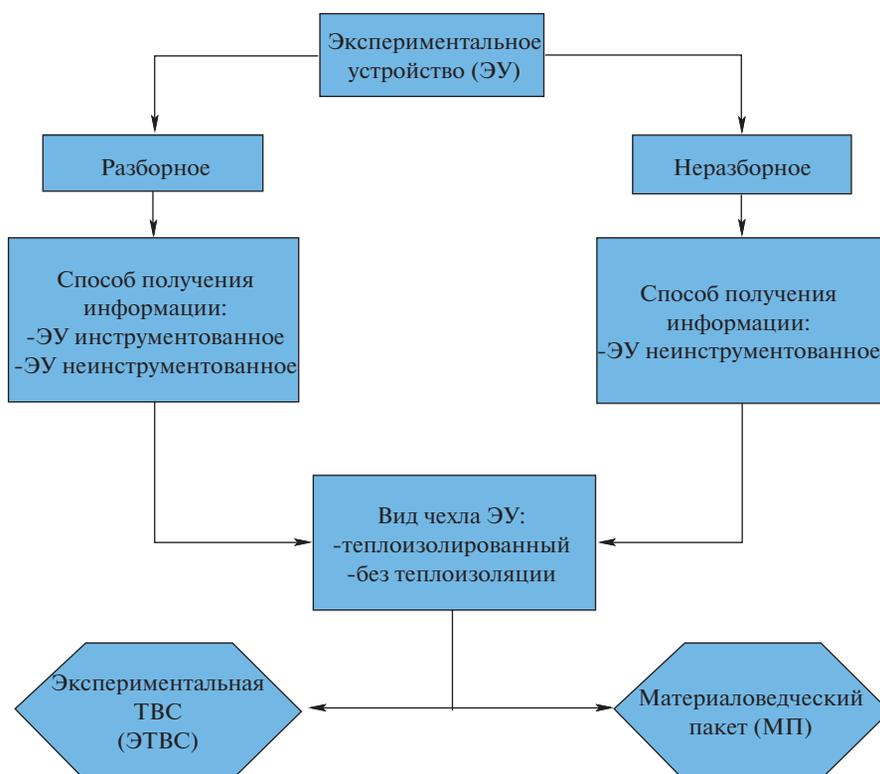


Рис. 2. Схема ЭУ реактора BOR-60.

650°C) образцов конструкционных материалов с применением твэльного подогрева [2, 3]. На рис. 3 приведена блок схема типов ЭТВС отличающихся по типу подвески.

ЭТВС состоит из чехла с переходником и хвостовиком, транспортной головки и дистанционирующей решетки, расположенной в верхней части устройства. Дистанционирующая решетка предназначена для сборки твэлов в пучок и установки в ЭТВС в условиях защитной камеры. В зависимости от температуры облучения и местоположения в реакторе возможно использовать чехол ЭТВС без теплоизоляции или двойной чехол, имеющий теплоизолирующую полость.

При проведении реакторных испытаний поток теплоносителя реактора, через отверстия в хвостовике, попадает во внутреннюю полость корпуса и образует поток, который омывает твэлы, охлаждая их до заданной температуры. Возможно разделение потока на два, что обеспечит разные температурные условия облучения. При наличии в подвеске твэльного нагревателя, который расположен в нижней части ЭТВС, теплоноситель подогревается до заданной температуры. Затем этот поток контактирует с поверхностью образцов или экспериментальных твэлов, обеспечивая требуемые температурные условия облучения. В

верхней части ЭТВС поток теплоносителя через отверстия в головке выходит из внутренней полости.

МАТЕРИАЛОВЕДЧЕСКИЙ ПАКЕТ (МП)

Материаловедческий пакет (МП) – вид ЭУ, предназначенный для облучения образцов сталей, сплавов, поглотителей, замедлителей и других материалов, не содержащих делящихся нуклидов. На рис. 4 приведена блок схема МП, различающихся по типу подвески.

МАТЕРИАЛОВЕДЧЕСКИЙ ПАКЕТ С ПРОТОЧНОЙ ПОДВЕСКОЙ

Подвеска проточного материаловедческого пакета собрана из нескольких кассет. В донных и боковых обечайках кассет выполнена перфорация для прохода теплоносителя. В кассетах размещаются образцы различных исследуемых материалов. Образцы конструкционных материалов при этом выполняются, в основном, в соответствии со стандартами для соответствующих механических испытаний (растяжение, излом, трещиностойкость, ударная вязкость и т.д.). Также в составе подвесок могут использоваться короткие трубчатые образцы, заполненные газовой

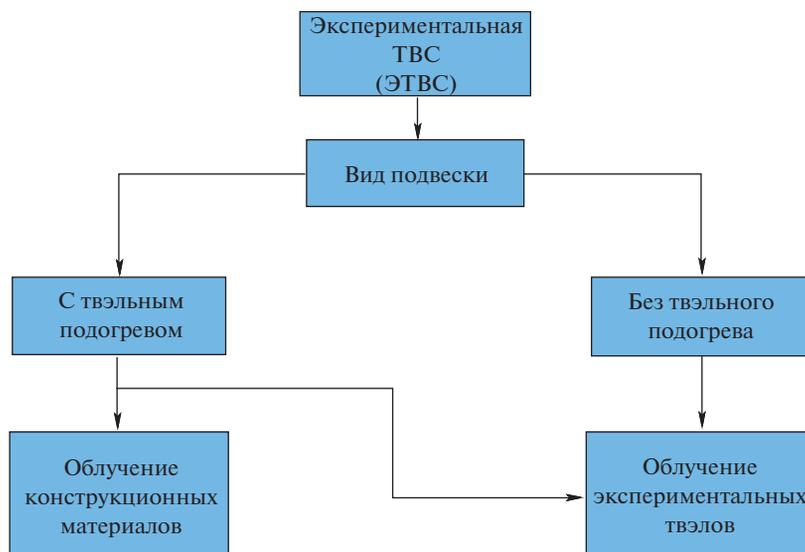


Рис. 3. Схема ЭТВС, различающихся по типу подвески.

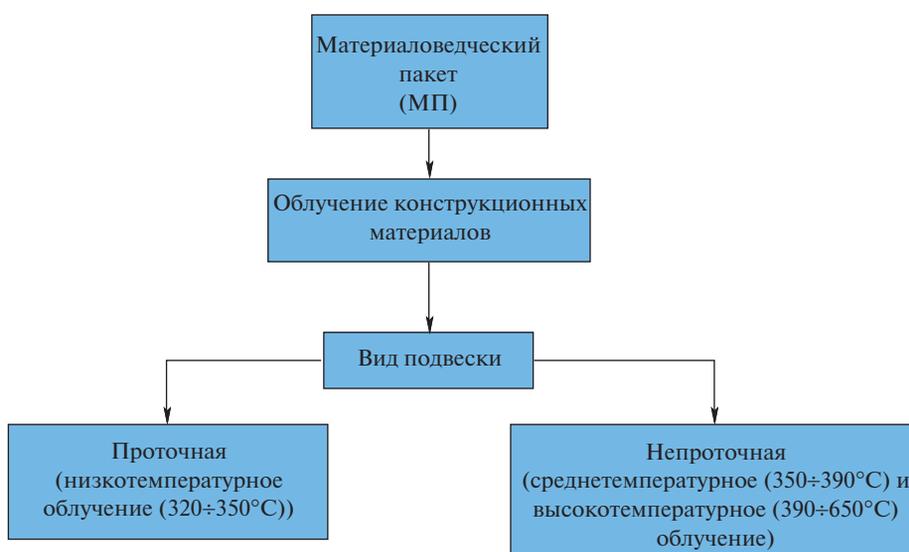


Рис. 4. Схема МП, различающихся по типу подвески.

средой под давлением, для испытаний под регулируемой нагрузкой.

При низкотемпературных испытаниях в реакторе подвеска устанавливается в корпус ЭУ с двойным чехлом и теплоизолирующей полостью.

При проведении реакторных испытаний поток теплоносителя первого контура реактора, через отверстия в хвостовике, попадает во внутреннюю полость корпуса и образует поток, который контактирует с поверхностью кассеты и образцами,

обеспечивая требуемые температурные условия облучения. В верхней части ЭУ поток теплоносителя через отверстия в головке выходит из внутренней полости.

МАТЕРИАЛОВЕДЧЕСКИЙ ПАКЕТ С НЕПРОТОЧНОЙ (АМПУЛЬНОЙ) ПОДВЕСКОЙ

Конструкция ампульного ЭУ дополнительно содержит, кроме внешнего штатного чехла, две

оболочки, коаксиально вложенные одна в другую и герметично соединенные в верхней части. Образованный двумя оболочками объем для обеспечения теплоизоляции заполняется газом [4]. Такая теплоизолированная ампула может быть изготовлена в двух вариантах — с открытым верхом и герметичным верхом. Геометрические параметры теплоизолирующего объема и состав газа или смеси определяются в результате специальных расчетов на стадии разработки конструкции ЭУ. Кассеты с образцами помещаются внутрь теплоизолированной ампулы. В случае открытого верха ампулы подвеска с образцами может извлекаться для проведения промежуточных исследований и такая конструкция ЭУ является разборной. В реализации герметичного верха ампулы ЭУ неразборное, однако герметичный верх позволяет снизить торцевую утечку тепла из внутреннего объема ампулы и таким образом проводить испытания при более высоких значениях температуры образцов.

Поток теплоносителя при облучении образцов в ЭУ не контактирует напрямую с исследуемыми образцами, что позволяет значительно уменьшить неравномерность распределения температуры по облучаемому объему. Недостатками ампульных ЭУ являются существенное усложнение конструкции и уменьшение облучаемого объема.

АВТОНОМНЫЙ ПЕТЛЕВОЙ КАНАЛ

Автономные петлевые каналы (АПК) можно отнести к отдельному классу ЭУ. АПК позволяют проводить испытания макетов твэлов быстрых реакторов в средах, соответствующих по типу и составу реальным условиям эксплуатации [1]. АПК представляет собой длинномерную ампулу, устанавливаемую в инструментированную ячейку реактора БОР-60 с выводом наружу из реактора коммуникаций и электродвигателя насоса. Конструкция канала обеспечивает разделение центрального и периферийного объемов теплоизолирующим зазором, который заполняется газовой смесью различного состава.

Центральный объем канала, предназначенный для размещения исследуемых макетов твэлов, представляет собой полость, герметично изолированную от реакторного теплоносителя. Эта полость заполнена теплоносителем, тип и состав которого могут быть различными. Циркуляция теплоносителя внутри центрального объема автономного канала осуществляется, как правило, по схеме Фильда и обеспечивается специальным насосом. Электродвигатель насоса размещается над верхней плитой поворотных пробок реактора.

Проточный периферийный объем АПК обеспечивает отведение теплоты от центрального объ-

ема реакторным теплоносителем для обеспечения требуемых условий облучения макетов твэлов.

Для обеспечения требуемых условий испытаний каждый АПК имеет уникальную конструкцию, создание которой является итерационным процессом из конструирования и расчетных исследований. Результатами этого процесса являются определение геометрических параметров элементов канала, числа исследуемых макетов твэлов, расход реакторного теплоносителя через периферийный объем и состав газовой смеси в теплоизолирующей полости.

В процессе испытаний расход теплоносителя в центральном объеме может варьироваться за счет изменения оборотов электродвигателя насоса. При этом термодары, размещенные по объему АПК, позволяют контролировать температурные условия облучения макетов твэлов в режиме реального времени. Использование подобного подхода делает возможными как стационарные, так и динамические испытания твэлов в условиях, наиболее точно моделирующих реальную эксплуатацию.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время в реакторе БОР-60 проводится широкий спектр испытаний различных типов конструкционных материалов, поглотителей, замедлителей и ядерного топлива. Каждое из направлений исследований требует индивидуального подхода и создания уникального ЭУ, обеспечивающих требуемые условия облучения.

Накопленный за многолетнюю историю эксплуатации опыт проведения облучения в реакторе БОР-60 делает возможным выбор наиболее подходящего типа ЭУ под каждую задачу, при этом надежность получаемых данных подтверждается расчетно-экспериментальными исследованиями.

Использование накопленного многолетнего опыта расчетно-экспериментальных исследований на реакторе БОР-60, разработанных и примененных конструкций ЭУ, а также создание новых типов ЭУ позволит максимально использовать экспериментальные возможности реактора и проводить новые исследования практически по всем перспективным направлениям развития ядерной энергетики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кордюков А.Г., Леонов В.Н., Пикалов А.А. Испытания макетов твэлов реактора БРЕСТ-ОД-300 в автономном свинцово-охлаждаемом канале БОР-60 // Атомная Энергия, 2004. Т. 97. № 2. С. 131–138.

2. Ерёмин С.Г., Жемков И.Ю., Плотников А.И. Устройство с твэльным подогревом теплоносителя для облучения материалов в ядерном реакторе // Патент РФ № 2524683. 2014. Бюл. № 22.
3. Varivtsev A.V., Zhemkov I.Yu., Boev A.V., Ishunina O.V., Naboyschikov Yu.V., Poglyad N.S., Sharonova M.G. Computational and experimental study of an irradiation rig with a fuel heater for the BOR-60 reactor // Nuclear Energy and Technology, 2016. № 2. P. 126–131.
4. Варивцев А.В., Жемков И.Ю., Козолуп А.Н., Погляд Н.С., Вострецов Д.Я. Расчетно-экспериментальные исследования в обоснование температурных условий облучения конструкционных материалов в реакторе БОР-60 // Известия Самарского научного центра РАН. 2012. Т. 14. № 4. С. 990–995.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2019, vol. 8, no. 5, pp. 402–409

Experimental Devices for Testing in the BOR-60 Reactor

I. Yu. Zhemkov^a, N. S. Poglyad^{a,b}, V. Yu. Anisimov^{a,b,#}, and A. V. Boev^{a,b}

^a Research Institute of Atomic Reactors, Dimitrovgrad, 433510 Russia

^b Dimitrovgrad Engineering and Technological Institute,

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Dimitrovgrad, 433510 Russia

[#]e-mail: Vlasya.85@mail.ru

Received March 18, 2019; revised August 2, 2019; accepted August 27, 2019

Abstract—At present, a wide range of tests of materials used in nuclear power engineering is carried out in the BOR-60 reactor. The study of changes in the properties of materials requires the determination of temperature irradiation conditions with high accuracy. The materials that have been tested in the BOR-60 reactor from the start up to the present are summarized in this work. Each of the research areas requires an individual approach and the creation of a unique experimental device. Experimental devices differ in various criteria that affect the efficiency of the research. The geometrical parameters of the cells of the reactor and the characteristics of the pressure collector require external similarity of the devices used, and the internal design varies considerably depending on the type of research conducted. Various classifications of experimental devices of the BOR-60 reactor differing in the method of obtaining information, in the irradiation temperature, and in the design and testing environment are presented. In addition, a methodical experiment conducted in the instrumented cell of the BOR-60 reactor is described. For each type of irradiation devices, the design features and test applications are discussed. An autonomous loop channel that allows testing in environments different from the reactor coolant is described separately.

Keywords: reactor, experimental device, material test rig, samples, fuel elements, thermocouple, nuclear fuel, coolant

DOI: 10.1134/S2304487X19050092

REFERENCES

1. Cordyukov A.G., Leonov V.N., Pikalov A.A. *Ispitaniya maketov tvelov reaktora BREST-OD-300 v avtonomnom svintsovo-ohlazhdaetom kanale BOR-60* [Studying of BREST-300 fuel pins into autonomic lead-cooled BOR-60 irradiation channel]. *Atomnaya energiya*. 2004, v. 97, № 2, pp. 131–138 (in Russian).
2. Eremin S.G., Zhemkov I.Yu., Plotnikov A.I. *Ustroistvo s tvelnim podogrevom teplonositelya dlya oblucheniya materialov v yadernom reaktore* [Irradiation rig with a fuel heater for irradiation materials in a nuclear reactor]. Patent RF, no. 2524683, 2014 (in Russian).
3. Varivtsev A.V., Zhemkov I.Yu., Boev A.V., Ishunina O.V., Naboyschikov Yu.V., Poglyad N.S., Sharonova M.G. Computational and experimental study of an irradiation rig with a fuel heater for the BOR-60 reactor. // Nuclear Energy and Technology. 2016, no. 2, pp. 126–131.
4. Varivtsev A.V., Zhemkov I.Yu., Kozolup A.N., Poglyad N.S., Vostretsov D.Ya. *Raschetno-eksperimental'nie issledovaniya v obosnovanie temperaturnih uslovij oblucheniya konstruktivnykh materialov v reaktore BOR-60* [Computational and experimental study of temperature irradiation condition of construction materials in the BOR-60 reactor]. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra RAN.*, 2012, vol. 14. № 4 (4), pp. 990–995 (in Russian).

УДК 546.05

СИНТЕЗ ПОЛУПРОВОДНИКА p-ТИПА CuAlO_2

© 2019 г. А. Г. Макогон¹, Е. А. Белая¹, А. М. Колмогорцев^{2,*}, В. В. Виктор³

¹ Челябинский государственный университет, Челябинск, 454021, Россия

² Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

³ Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, Челябинск, 454080, Россия

*e-mail: AMKolgortsev@mephi.ru

Поступила в редакцию 18.06.2019 г.

После доработки 18.06.2019 г.

Принята к публикации 16.07.2019 г.

CuAlO_2 – важный материал, имеющий широкие области применения, такие как термо- и фотоэлектричество, оптоэлектроника. Большинство известных и широко используемых прозрачных проводящих оксидов, таких как ZnO , SnO_2 и т.д., и их легированные версии представляют собой материал n-типа, в то же время не меньшего интереса заслуживают соответствующие прозрачные проводящие оксиды p-типа. Их уникальная кристаллографическая структура проявляет анизотропную среду для носителей заряда и фононов, что считается причиной увеличения термо-ЭДС.

В данной работе представлена схема золь-гель синтеза нанокристаллических порошков алюмината меди. Установлено, что в процессе синтеза энергия, выделяющаяся при сгорании лимонной кислоты, является “дополнительным топливом”, позволяющим преодолеть энергетический барьер реакции. Методами рентгенофазового, синхронного термического и электронно-микроскопического анализов показана возможность синтеза алюмината меди со структурой дельтафосфита при температуре 1000°C. Установлено, что режим нагрева существенно влияет на фазовый состав конечного продукта. При постепенном нагреве образуется алюминат меди со структурой шпинели, а при резком – дельтафосфит. Исследования, проведенные методом сканирующей электронной микроскопии, показали, что для образцов алюмината меди, прокаленных при 1000°C, характерные размеры частиц составляют до 100 мкм. Измерены температурные зависимости удельной проводимости, и определена энергия активации.

Ключевые слова: феррит никеля, ионообменный синтез, ферромагнетики

DOI: 10.1134/S2304487X19050043

1. АКТУАЛЬНОСТЬ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗНАЧИМОСТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Прозрачные проводящие оксиды, в том числе CuAlO_2 , широко используются в качестве прозрачных электродов в плоскостных дисплеях, солнечных элементах и сенсорных панелях [1]. CuAlO_2 со структурой дельтафосфита – полупроводник, относящийся к прозрачным проводящим оксидам с проводимостью p-типа, шириной запрещенной зоны ~3.5 эВ и с коэффициентом светопропускания в видимой области около 80%.

Большая часть существующих прозрачных проводящих оксидов (ТСО) является проводниками с проводимостью n-типа, тогда как очень трудно синтезировать бинарные оксиды металлов с проводимостью p-типа (p-ТСО). Kawazoe и др. [2] связали это с электронной структурой этих оксидов.

Структура дельтафосфита представляет собой слой M^I и M^{III}O_2 , разделяющих октаэдры $\text{M}^{III}-\text{O}_6$.

Каждый атом M^I линейно координируется с двумя атомами кислорода, образуя гантели $\text{O}-\text{M}^I-\text{O}$, расположенными параллельно оси c. Атомы кислорода данной гантели связывают все слои M^I с слоями M^{III}O_2 . С другой стороны, каждый оксидный ион в слое M^{III}O_2 образует “псевдотетраэдрическую координацию ($\text{M}_3^{\text{III}}\text{M}^I\text{O}_2$)” с соседними ионами M^I и M^{III} [3]. Подобная конфигурация уменьшает несвязывающий характер ионов оксида и делокализует отверстия на краю валентной зоны. А слоистая структура (слой гантели $\text{O}-\text{M}^I-\text{O}$ и слой M^{III}O_2) эффективно уменьшает размер сшивки ионов M^I , увеличивая запрещенную зону [2]. В-третьих, еще одним важным фактором в этой структуре будет являться низкое координационное число ионов M^I из-за отдаления от кислородных лигандов, что является следствием сильного кулоновского отталкивания между 2p электронами кислорода и d^{10} электронами M^I .

Из-за стремления к окислению ионов меди (Cu^+) до меди (Cu^{2+}) во время прокаливания трудно получить структуру чистого делафоссита исходя из смеси Cu_2O и Al_2O_3 , что приводит скорее к разложению, чем к образованию однофазного материала. Кроме того, если высокие температуры участвуют в образовании делафосситов, может происходить испарение ионов меди, что приводит к образованию CuAl_2O_4 , примесной шпинельной фазы. Присутствие вторичных фаз, возникающих в результате разложения CuAlO_2 во время цикла охлаждения при термической обработке или испарения ионов меди при высоких температурах, может существенно повлиять на электрические и диэлектрические свойства материала. Следовательно, правильный выбор температуры, времени и атмосферы при проведении реакции имеет первостепенное значение. В частности, следует контролировать валентное состояние ионов Cu в порошковой смеси во время циклов нагревания и охлаждения. Окисление ионов Cu^+ до ионов Cu^{2+} может происходить при нагревании в воздушной атмосфере при относительно низких температурах (200–500°C).

2. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Методика синтеза состояла в следующем: 7 ммоль соли меди(II) (нитрат или ацетат) и 7 ммоль нитрата алюминия смешивали с 30 мл изопропилового спирта при постоянном перемешивании на магнитной мешалке в течение 1 ч.

Затем к полученному раствору добавляли 15 мл раствора лимонной кислоты (28 ммоль) и снова перемешивали при 70°C до образования однородных гелей. Полученные гели прокаливали в муфельной печи при 1000°C в течение 3 и 6 ч как при постепенном, так и при резком термическом воздействии.

Термический анализ проводили с помощью Netzsch STA 449C Jupiter в интервале 20–1000°C. Для проведения анализа подготовили образцы согласно синтезу I и II. Предварительно их прокаливали при 300°C в течение 30 мин для предотвращения дальнейшего улетучивания, вследствие разложения органических соединений. Образцы помещали в корундовые тигли и проводили анализ в интервале температур 20–1000°C.

Кристаллическая структура полученных порошков определялась методом рентгенофазового анализа с использованием дифрактометра Rigaku Ultima IV с CuK_α -излучением. Для идентификации фаз использовали картотеку JCPDS. Средний размер кристаллитов и микродеформации рассчитан методом Вильямсона-Холла, который учитывает вклад данных параметров в размер области когерентного рассеяния.

Электронно-микроскопическое исследование проводили на сканирующем электронном микроскопе Jeol JSM 7001F.

Измерения проводимости проводили на импеданс-метре Elinx Z-1500J в диапазоне частот 10 Гц–1 МГц и интервале температур 298–423 К с шагом 10 К.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 1 показана дериватограмма полученного образца алюмината меди.

Как видно, на кривой ТГ имеются три стадии потери массы. На первом этапе наблюдалась потеря массы 5,5% между 100°C и 240°C, что связано с десорбцией воды. Вторая стадия потери веса (28,3%) находится в интервале 240–600°C, что объясняется удалением остаточных органических соединений. Третий участок кривой в диапазоне 600–1000°C характеризуется малой потерей массы (2%). В этом температурном интервале протекает твердофазная реакция. На кривой ДТА имеем два экзотермических пика при 264°C и 381°C, которые связаны с разложением органических остатков. В интервале 600–620°C наблюдается эндотермический эффект, который относится к прекращению горения органических реагентов.

Экзотермический пик при температуре 757°C, вероятно, можно отнести к реакции образования алюмината меди со структурой шпинели по следующей реакции:



Вероятно, лимонная кислота выступает в роли “дополнительного топлива” и позволяет проводить синтез при более низких температурах, в отличие от твердофазного синтеза, что согласуется с последними современными исследованиями [4].

Рентгенофазовый анализ показал, что при постепенном нагреве образуется алюминат меди состава CuAl_2O_4 со структурой шпинели и с примесью CuO , что подтверждается, в том числе, электронно-микроскопическими исследованиями (рис. 3b).

При резком нагреве получен алюминат меди со структурой делафоссита. Согласно электронно-микроскопическим снимкам, образующиеся кристаллы имеют выраженную огранку (рис. 3a), а картирование по элементам показывает равномерное распределение элементов по всему образцу.

В образце, содержащем чистую фазу CuAlO_2 , используя области когерентного рассеяния (ОКР) определили средний размер кристаллитов по уравнению Вильямсона-Холла, который составил ≈ 35 нм.

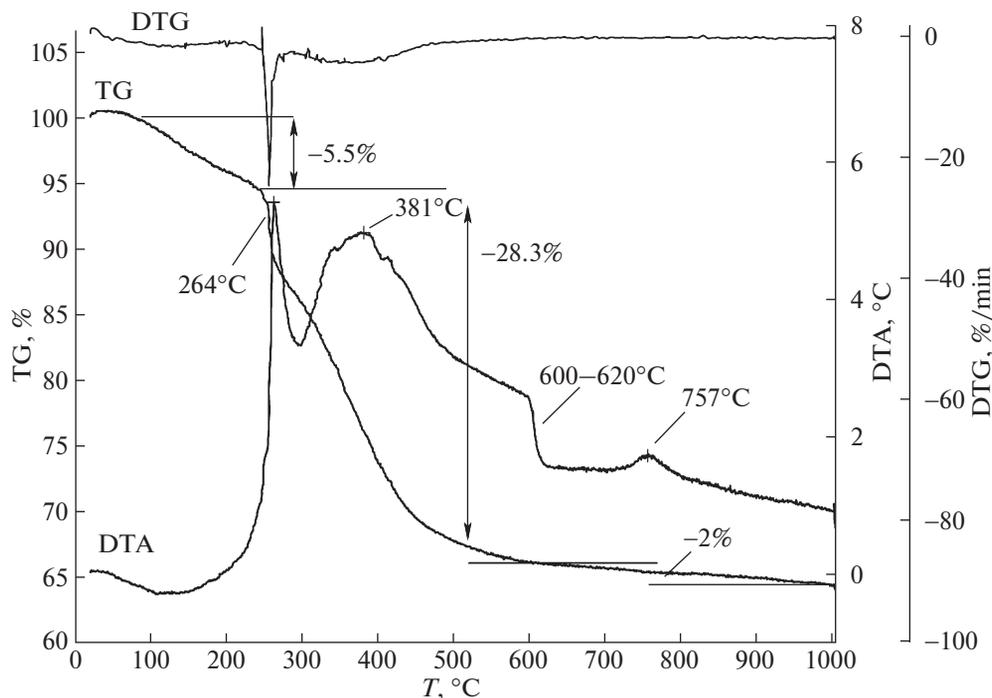


Рис. 1. Дериватограмма образца алюмината меди.

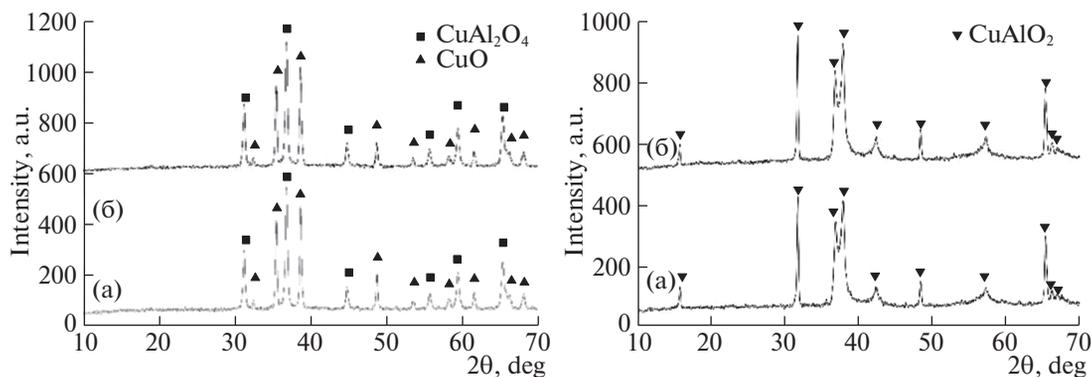


Рис. 2. Рентгенограммы образцов алюмината меди, полученные при условиях: (а) – постепенный нагрев; (б) – резкий нагрев.

Микрофотографии образцов показывают, что алюминат меди, полученный при резком нагреве, однороден, зерна, имеющие высокоразвитую поверхность с размером пор порядка 100 нм, имеют размер 10–15 мкм.

У образца, полученного при постепенном нагреве, наблюдаем поры (кратеры) диаметром 0.2–0.5 мкм, при размере зерен до 100 мкм.

На рис. 4 представлена температурная зависимость удельной проводимости.

По уравнению

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(\frac{\Delta E_a}{kT}\right)$$

Рассчитали энергию активации, которая составила ~0.262 эВ. Данное значение значительно меньше половины ширины запрещенной зоны, что может быть признаком переноса дырок в валентную зону. Вероятно, дырки термически активируются с акцепторного уровня, что согласуется с данными [5].

Заниженное значение электропроводности образцов, полученных в данной работе, по сравнению с другими методами синтеза [6] можно объяснить развитой пористой структурой (рис. 3), что, вероятно, затрудняет миграцию носителей заряда.

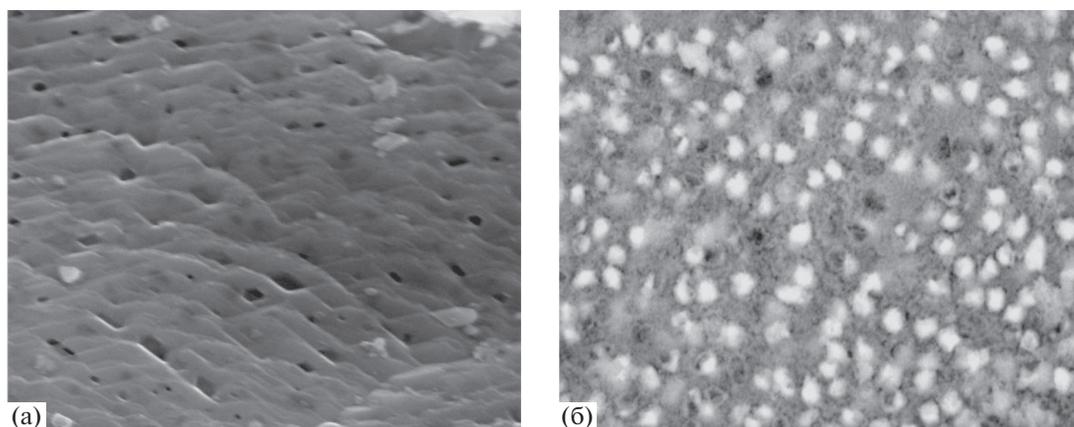


Рис. 3. Электронно-микроскопическое изображение образцов, полученных при: (а) – резкий нагрев; (б) – постепенный нагрев.

5. ВЫВОДЫ

Золь-гель синтезом получены образцы алюмината меди, как со структурой шпинели, так и делафоссита.

Чистую фазу делафоссита можно получить при использовании нитрата и ацетата меди(II) только при резком нагреве. В противном случае, в интервале температур до 1000°C , образуется алюминат со структурой шпинели, причем с примесью оксида меди.

Согласно электронно-микроскопическим исследованиям, образующиеся кристаллы CuAlO_2 имеют выраженную огранку, а картирование по элементам показывает равномерное распределение элементов по всему образцу.

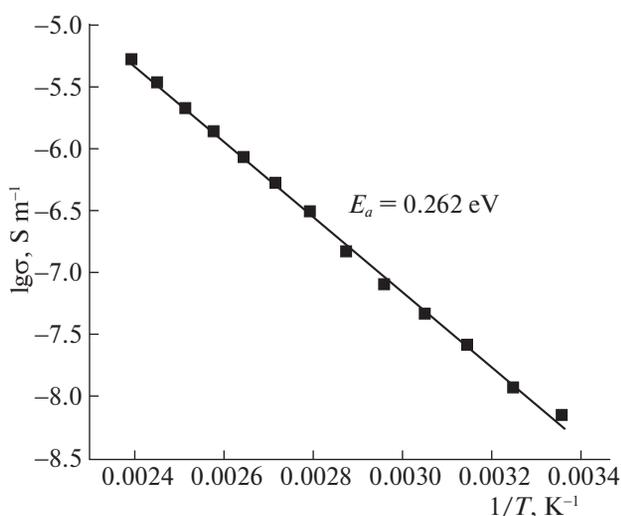


Рис. 4. Температурная зависимость удельной проводимости.

Размер областей когерентного рассеяния света, рассчитанный по методу Вильямсона-Холла, составляет около 35 нм.

Температурная зависимость электропроводности образцов описывается активационным законом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Valenzuela-Jáuregui J.J., Quintero-González R., Hernández-Torres J., Mendoza-Galván A. Ramírez-Bon R. Characterization of SnO_2 , In_2O_3 , and ITO films prepared by thermal oxidation of DC-sputtered Sn, In and In-Sn films // Vacuum. 2004. V. 76. P. 177–180.
2. Kawazoe H., Yasukawa M., Hyodo H., Kurita M., Yanagi H., Hosono H. P-type electrical conduction in transparent thin films of CuAlO_2 // Nature. 1997. V. 389. P. 939–942.
3. Kawazoe H., Yanagi H., Ueda K., Hosono H. Transparent p-Type Conducting Oxides: Design and Fabrication of p-n Heterojunctions // MRS Bull. 2000. V. 25. P. 28–36.
4. Ray N., Gupta V., Sarma L., Kush P., Nag J., Sapra S. Tuning the Electronic and Magnetic Properties of CuAlO_2 Nanocrystals Using Magnetic Dopants // ACS Omega. 2018. V. 3. № 1. P. 509–513.
5. Галимуллина С.И., Шарипова А.Р., Сафонова О.А., Ашихмин А.А., Погорельцев А.И., Матухин В.Л., Шмидт Е.В. Энергетические диаграммы в делафоссите CuAlO_2 // Структура и динамика молекулярных систем. 2018. С. 29.
6. Кульбачинский В.А., Кытин В.Г., Кондратьева Д.Ю., Григорьев А.Н., Каменев А.А., Амеличев В.А., Корсаков И.Е. Структура и свойства полупроводниковой керамики CuAlO_2 , синтезированной из прекурсоров с различной валентностью меди // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2017. № 1–2. С. 223–227.

Synthesis of the *p*-Type Semiconductor CuAlO₂

A. G. Makogon^a, E. A. Belaya^a, A. M. Kolmogortsev^{b,#}, and V. V. Viktorov^c

^a Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454021 Russia

^b National Research Nuclear University MPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

^c South Ural State Humanitarian Pedagogical University, Chelyabinsk, 454080 Russia

[#]e-mail: AMKolmogortsev@mephi.ru

Received June 18, 2019; revised June 18, 2019; accepted July 16, 2019

Abstract—CuAlO₂ is an important material having diverse applications in thermoelectricity, photoelectricity, and optoelectronics. Most of the well-known and widely used transparent conducting oxides such as ZnO and SnO₂ and their doped versions are *n*-type material, but corresponding *p*-type transparent conducting oxides were surprisingly missing for a long time. Its unique crystallographic structure manifests an anisotropic environment for charge carriers and phonons, which is a reason for the enhancement of the thermopower. The scheme for the sol–gel synthesis of nanocrystalline powders CuAlO₂ has been presented in this work. It has been found that the energy released by the combustion of citric acid in the process of synthesis is “extra fuel,” which allows overcoming the energy barrier of the reaction. X-ray diffraction analysis and simultaneous thermal and electron-microscopic analyzes have been used to demonstrate the possibility of copper aluminate synthesis with a delafossite structure at a temperature of 1000°C. It has been established that the heating mode significantly affects the phase composition of the final product: with the gradual heating, copper aluminate with a spinel structure is formed, and with the sharp heating, delafossite is formed. The scanning electron microscopy studies have also shown that the typical particle sizes in copper aluminate samples calcined at 1000°C are 35 nm. The temperature dependence of conductivity has been measured and activation energy has been determined.

Keywords: nickel ferrite, ion-exchange synthesis, ferromagnets

DOI: 10.1134/S2304487X19050043

REFERENCES

1. Valenzuela-Jáuregui J.J., Quintero-González R., Hernández-Torres J., Mendoza-Galván A. Ramírez-Bon R. Characterization of SnO₂, In₂O₃, and ITO films prepared by thermal oxidation of DC-sputtered Sn, In and In-Sn films. *Vacuum*, 2004, vol. 76, pp. 177–180.
2. Kawazoe H., Yasukawa M., Hyodo H., Kurita M., Yanagi H., Hosono H. P-type electrical conduction in transparent thin films of CuAlO₂. *Nature*, 1997, vol. 389, pp. 939–942.
3. Kawazoe H., Yanagi H., Ueda K., Hosono H. Transparent p-Type Conducting Oxides: Design and Fabrication of p-n Heterojunctions. *MRS Bull.*, 2000, vol. 25, pp. 28–36.
4. Ray N., Gupta V., Sarma L., Kush P., Nag J., Sapra S. Tuning the Electronic and Magnetic Properties of CuAlO₂ Nanocrystals Using Magnetic Dopants. *ACS Omega*, 2018, vol. 3, no. 1, pp. 509–513.
5. Galimullina S.I., Sharipova A.R., Safonova O.A., Ashihmin A.A., Pogorelcev A.I., Matuhin V.L., Shmidt E.V. Energeticheskie diagrammy v delafossite CuAlO₂ [Energy diagram in delafossite CuAlO₂]. Sbornik tezisev dokladov i soobshchenij na XXV vserossijskoj konferencii i 16-oj Shkoly molodyh uchenyh. “Struktura i dinamika molekulyarnyh sistem” [Collection of abstracts and reports at the XXV All-Russian Conference and the 16th School of Young Scientists “Structure and dynamics of molecular systems”]. Yalchik, 2018, pp. 29 (In Russian).
6. Kulbachinskiy V.A., Kytin V.G., Kondratyeva D.Y., Grigoriev A.N., Kamenev A.A., Amelichev V.A., Korsakov I.E. Struktura i svoystva poluprovodnikovoj keramiki CuAlO₂, sintezirovannoj iz prekursorov s razlichnoj valentnostyu medi [Structure and properties of CuAlO₂ semiconductor ceramics synthesized from precursors with different copper valent state]. *Mezhdunarodnyj zhurnal prikladnyh i fundamentalnyh issledovaniy*, 2017, no. 1-2, pp. 223–227 (In Russian).

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В НЕЯВНОМ ВИДЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
КОНВЕКТИВНОГО МАССО- И ТЕПЛОПЕРЕНОСА С ПЕРЕМЕННЫМИ
КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2019 г. А. Д. Полянин^{1,2,3,*}

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

² Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

³ Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*e-mail: polyanin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 30.01.2019 г.

После доработки 30.01.2019 г.

Принята к публикации 26.02.2019 г.

Рассматриваются различные классы нелинейных уравнений конвективного массо- и теплопереноса с переменными коэффициентами $c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u)u_x$, которые допускают точные решения. Основное внимание уделяется нелинейным уравнениям достаточно общего вида, которые содержат несколько произвольных функций, зависящих от искомой функции u и пространственной переменной x (важно отметить, что точные решения нелинейных уравнений математической физики, которые зависят от произвольных функций и поэтому обладают достаточной общностью, представляют наибольший практический интерес для тестирования различных численных и приближенных методов решения соответствующих начально-краевых задач). Используется метод поиска точных решений, который основан на представлении решения в неявной форме $\int h(u)du = \xi(t) + \eta(x)$, где $h(u)$, $\xi(t)$, $\eta(x)$ – искомые функции, конкретный вид которых определяется в ходе дальнейшего анализа возникающих функционально-дифференциальных уравнений. Приведены примеры конкретных нелинейных уравнений конвективной диффузии и их точных решений. Описан ряд новых точных решений типа обобщенной бегущей волны и решений с функциональным разделением переменных.

Ключевые слова: уравнения массо- и теплопереноса, нелинейные уравнения конвективной диффузии, уравнения с переменными коэффициентами, точные решения в неявном виде, решения с функциональным разделением переменных, решения типа обобщенной бегущей волны

DOI: 10.1134/S2304487X19040084

1. КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Будем рассматривать эволюционные уравнения, в которых x и t – независимые переменные, а $u = u(x, t)$ – искомая функция.

Преобразования, редукции и точные решения различных классов нелинейных уравнений диффузионного типа, которые содержат реакционные или/и конвективные члены и не зависят явно от переменных x и t , рассматривались во многих работах (см., например, [1–19] и цитируемую в них литературу). Для построения точных решений чаще всего использовались классический и неклассические методы исследования симметрий [1–3, 5, 7, 9, 14, 15, 17–19], методы обобщенного и функционального разделения переменных [6, 8, 10, 11, 14, 16, 17], метод дифференциальных связей [6, 10, 13, 14, 16, 17].

В [10, 17, 20–25] были описаны некоторые точные решения нелинейных уравнений реакционно-диффузионного типа с переменными коэффициентами автономного вида, зависящими от пространственной координаты x . В [26–31] исследовались симметрии и были приведены некоторые точные решения нелинейных уравнений конвективной диффузии с переменными коэффициентами автономного вида. Другие родственные и более сложные нелинейные эволюционные уравнения рассматривались в [17, 32–34]. В [17, 35] описано много систем уравнений реакционно-диффузионного типа, допускающих точные решения (в цитируемых книгах приведен обширный список публикаций на эту тему).

Отметим также, что в последнее время большое внимание уделяется изучению наследственных систем, которые моделируются реакционно-диффузионными уравнениями с запаздыванием.

Точные решения таких и более сложных родственных уравнений получены в [36–44].

В данной статье будут рассматриваться допускающие точные решения нелинейные уравнения конвективной диффузии достаточно общего вида, которые зависят от одной или нескольких произвольных функций. Важно отметить, что точные решения нелинейных уравнений математической физики, которые содержат произвольные функции и поэтому обладают значительной общностью, представляют наибольший практический интерес для тестирования численных и приближенных аналитических методов интегрирования соответствующих начально-краевых задач.

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ. МЕТОД ПОИСКА ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

2.1. Класс рассматриваемых нелинейных уравнений с переменными коэффициентами.

Предварительные замечания

Будем рассматривать одномерные нелинейные уравнения конвективного массо- и теплопереноса с переменными коэффициентами

$$c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u)u_x. \quad (1)$$

Отметим, что при $a(x) = c(x) = x^n$, где x – радиальная координата, уравнение (1) описывает конвективно-диффузионные процессы с радиальной симметрией в двумерном (при $n = 1$) и трехмерном (при $n = 2$) случаях.

Пример 1. Рассмотрим сначала более простое нелинейное уравнение без конвективного члена

$$u_t = [f(u)u_x]_x, \quad (2)$$

которое содержит произвольную функцию $f(u)$ и является частным случаем уравнения (1) при $a(x) = b(x) = c(x) = 1$, $g(u) = 0$. Поскольку коэффициенты этого уравнения не зависят явно от x и t , оно допускает точное решение типа бегущей волны

$$u = u(z), \quad z = x + kt, \quad (3)$$

где k – произвольная постоянная. Подставив (3) в (2), получим ОДУ $ku'_z = [f(u)u'_z]'_z$. Интегрируя, находим его решение в неявном виде

$$\int \frac{f(u)du}{ku + C_1} = x + kt + C_2, \quad (4)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. В правой части (4) была сделана замена z на исходные переменные с помощью (3).

Видно, что даже для простых функций, например, $f(u) = u$, $f(u) = e^u$, $f(u) = \sin u$, $f(u) = \cos u$, решение (4) не может быть выражено через эле-

ментарные функции в явном виде. Поэтому поиск точных решений в явном виде уравнения (1), значительно более сложного, чем (2), представляется малоперспективным.

Далее основное внимание будет уделено уравнениям достаточно общего вида (1), которые зависят от одной или двух произвольных функций. Для построения точных решений этого уравнения будет использован метод [25], основанный на обобщении решения (4).

Замечание 1. В [31] были описаны некоторые точные решения уравнения (1) при $f(u) = 1$, причем функция $g(u)$ считалась произвольной.

2.2. Общее описание метода поиска точных решений с функциональным разделением переменных в неявном виде

Точные решения уравнения (1) (или другого нелинейного дифференциального уравнения в частных производных) ищутся в неявном виде

$$\int h(u)du = \xi(t) + \eta(x), \quad (5)$$

где функции $h(u)$, $\xi(t)$, $\eta(x)$ определяются в ходе дальнейшего анализа. Представление решения в виде (5) основано на естественном обобщении решения (4), которое осуществляется следующим образом:

$$\frac{f(u)}{ku + C_1} \Rightarrow h(u), \quad kt \Rightarrow \xi(t), \quad x + C_2 \Rightarrow \eta(x).$$

Далее аргументы функций $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c = c(x)$, $f = f(u)$, $g = g(u)$, $h = h(u)$, $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(x)$, которые входят в уравнение (1) и решение (5), часто будут опускаться.

Опишем процедуру построения точного решения в неявном виде. Сначала, используя (5), вычисляются производные u_x , u_t , u_{xx} , ..., которые выражаются в терминах функций h , ξ , η и их производных. Затем полученные выражения для производных подставляются в уравнение (1) после чего исключается переменная t с помощью (5). В результате (при подходящем выборе функции ξ , см. далее) приходим к функционально-дифференциальному уравнению билинейного вида

$$\sum_{j=1}^N \varphi_j[x] \psi_j[u] = 0, \quad (6)$$

$$\varphi_j[x] \equiv \varphi_j(x, \eta, \eta'_x, \eta''_{xx} \dots),$$

$$\psi_j[u] \equiv \psi_j(u, h, h'_u, h''_{uu} \dots).$$

Здесь $\varphi_j[x]$ и $\psi_j[u]$ – дифференциальные формы (в некоторых случаях функциональные коэффициенты), зависящие соответственно только от x и u . Справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Функционально-дифференциальные уравнения вида (6) могут допускать решения только в тех случаях, когда формы $\psi_j[u]$ ($j = 1, \dots, N$) связаны линейными соотношениями [14, 17]:

$$\sum_{j=1}^{m_i} k_{ij} \psi_j[u] = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (7)$$

где k_{ij} – некоторые постоянные, $2 \leq m_i \leq N$, $1 \leq n \leq N - 1$. При этом надо рассматривать также вырожденные случаи, когда помимо линейных соотношений отдельные дифференциальные формы $\psi_j[u]$ обращаются в нуль.

Аналогичное утверждение справедливо также для форм $\phi_j[x]$.

В разд. 3 сформулированное утверждение будет использовано для построения точных решений некоторых функционально-дифференциальных уравнений вида (6), которые возникают при поиске решений соответствующих нелинейных уравнений реакционно-диффузионного типа (1).

Замечание 2. Поиск решения в неявном виде с интегральным членом в левой части (5) часто приводит к уравнениям для определения функции h более низкого порядка, чем при поиске точных решений в явном виде. Кроме того, неявная форма записи решения обычно приводит к более простым явным представлениям функций g и f через h (при поиске точных решений в явном виде функции g и f нередко выражаются через h в параметрической форме [17]). Отметим также, что различные линейные соотношения вида (7) в случае общего положения обычно соответствуют различным решениям рассматриваемого уравнения.

2.3. Вывод функционально-дифференциального уравнения. Процедура его решения

Будем искать точные решения нелинейных уравнений конвективной диффузии вида (1) в неявной форме (5). Дифференцируя (5) по t и x , имеем

$$hu_t = \xi'_t \Rightarrow u_t = \frac{\xi'_t}{h}; \quad hu_x = \eta'_x \Rightarrow u_x = \frac{\eta'_x}{h};$$

$$(afu_x)_x = \left[(a\eta'_x)' \frac{f}{h} \right]_x = (a\eta'_x)'_x \frac{f}{h} + a(\eta'_x)^2 \frac{1}{h} \left(\frac{f}{h} \right)'_u.$$

Подставив эти выражения в (1), получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\xi'_t = \frac{1}{c} \left[(a\eta'_x)'_x f + a(\eta'_x)^2 \left(\frac{f}{h} \right)'_u + b\eta'_x g \right]. \quad (8)$$

Уравнение (8), зависящее от x, t, u , с помощью дифференцирования по x можно свести к функ-

ционально-дифференциальному уравнению билинейного вида (6) при $N = 6$, а затем использовать метод решения, описанный в разд. 2.2. Однако такой путь достаточно сложно реализовать технически, поскольку после дифференцирования повышается порядок производных в редуцированном уравнении и для определения функции $\xi(t)$ на заключительном этапе все равно необходимо вернуться к анализу уравнения (8).

В данной работе для решения уравнения (8) будем применять прямой метод, основанный на использовании функций $\xi(t) = kt$, $\xi(t) = ke^{\lambda t}$, $\xi(t) = k \ln t$, которые были получены в [31] для уравнений (1) специального вида при $f(u) = 1$ и произвольной $g(u)$.

3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ РАЗДЕЛЕНИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ В НЕЯВНОМ ВИДЕ

3.1. Решения типа обобщенной бегущей волны при $\xi(t) = kt$

Функционально-дифференциальное уравнение (8) представляет собой уравнение с разделенными переменными (левая часть зависит только от t , а правая – от x и u). Поэтому можно положить $\xi'_t = k = \text{const}$, что дает $\xi(t) = kt$. Рассматриваемая ситуация соответствует решениям типа обобщенных бегущих волн, заданных в неявной форме

$$\int h(u) du = kt + \int \theta(x) dx. \quad (9)$$

Здесь подынтегральные функции $h(u)$ и $\theta(x) = \eta'_x(x)$ будут определяться в ходе дальнейшего анализа из функционально-дифференциального уравнения

$$(a\theta)'_x f + a\theta^2 \left(\frac{f}{h} \right)'_u + b\theta g - kc = 0, \quad (10)$$

которое получается в результате подстановки функций $\xi(t) = kt$ и $\theta(x) = \eta'_x(x)$ в (8). Уравнение (10) является функционально-дифференциальным уравнением билинейного вида (6) при $N = 4$.

Решение 1. Рассмотрим сначала вырожденный случай, когда дифференциальная форма $(f/h)'_u$ в (10) обращается в нуль. В этом случае уравнение (10) имеет решения, если выполняются соотношения

$$h = f, \quad g = A + Bf, \quad (a\theta)'_x + Bb\theta = 0, \quad (11)$$

$$Ab\theta - kc = 0,$$

где A и B – произвольные постоянные. Полагая $A = k$ в (11), приходим к уравнению

$$c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \frac{c(x)}{\theta(x)} [k + Bf(u)]u_x, \quad (12)$$

которое для произвольных функций $a(x)$, $c(x)$, $f(u)$ и

$$\theta(x) = -\frac{B}{a(x)} \int c(x) dx - \frac{C_1}{a(x)}, \quad (13)$$

имеет решение типа обобщенной бегущей волны

$$\int f(u) du = kt - B \int \frac{1}{a(x)} \left(\int c(x) dx \right) dx - C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2. \quad (14)$$

Здесь C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Пример 2. Полагая $c(x) = 1$, $B = 1$, $C_1 = C_2 = 0$ в (12)–(14), а затем переобозначая $a(x)$ на $xa(x)$, получим уравнение

$$u_t = [xa(x)f(u)u_x]_x - a(x)[k + f(u)]u_x,$$

которое допускает решение типа обобщенной бегущей волны в неявной форме

$$\int f(u) du = kt - \int \frac{dx}{a(x)}.$$

Здесь $a(x)$ и $f(u)$ – произвольные функции, k – произвольная постоянная.

Решение 2. Уравнению (10) можно удовлетворить, если имеют место соотношения

$$f = A, \quad g = \left(\frac{f}{h} \right)'_u, \quad (15)$$

$$A(a\theta)'_x - kc = 0, \quad b = -a\theta,$$

где A – произвольная постоянная.

Из формул (15) при $c(x) = 1$, $A = 1$, $k = 1$ можно получить нелинейное уравнение конвективной диффузии

$$u_t = [a(x)u_x]_x - xg(u)u_x, \quad (16)$$

где $a(x)$ – произвольная функция, а функция $g(u)$ следующим образом выражается через произвольную функцию $h = h(u)$:

$$g(u) = -h^{-2}h'_u. \quad (17)$$

Уравнение (16) при условии (17) имеет точное решение

$$\int h(u) du = t + \int \frac{x dx}{a(x)} + C_1. \quad (18)$$

Разрешая (17) относительно h , приходим к соотношению $h(u) = \left(\int g(u) du + C_2 \right)^{-1}$. Исключая h в (18), получим представление решения уравнения (16) в виде

$$\int \left(\int g(u) du + C_2 \right)^{-1} du = t + \int \frac{x dx}{a(x)} + C_1. \quad (19)$$

Здесь $a(x)$ и $g(u)$ – произвольные функции, C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Пример 3. Точное решение уравнения

$$u_t = (x^n u_x)_x - xg(u)u_x$$

определяется формулой (19) при $a(x) = x^n$.

Замечание 3. Уравнение (16) и его решение другим путем были получены в [31]. В [31] построен еще ряд точных решений уравнения (1), в котором полагалось $f(u) = 1$, а функция $g(u)$ считалась произвольной (эти решения здесь не приводятся).

Решение 3. Уравнению (10) можно удовлетворить, если положить

$$\left(\frac{f}{h} \right)'_u = A, \quad g = f, \quad (20)$$

$$(a\theta)'_x + b\theta = 0, \quad Aa\theta^2 - kc = 0,$$

где A – произвольная постоянная. Из первого соотношения (20), находим

$$h(u) = f(u)/(Au + C_1). \quad (21)$$

Полагая далее $c(x) = 1$, $A = 1$, $C_1 = 0$ в (20) и (21), получим нелинейное уравнение конвективной диффузии

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x - \frac{1}{2} a'_x(x)f(u)u_x, \quad (22)$$

которое имеет два решения типа обобщенной бегущей волны в неявном виде

$$\int \frac{f(u)}{u} du = kt \pm \sqrt{k} \int \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C_2. \quad (23)$$

Уравнение (22) и формулы (23) содержат произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$, а также произвольные постоянные k и C_2 .

Решение 4. Уравнение (10) удовлетворяется, если взять

$$Af = \left(\frac{f}{h} \right)'_u, \quad g = 1, \quad (24)$$

$$(a\theta)'_x + Aa\theta^2 = 0, \quad b\theta = kc,$$

где A – произвольная постоянная. Из уравнений (24), находим

$$h(u) = f(u) \left(A \int f(u) du + C_1 \right)^{-1} = \frac{1}{A} \frac{d}{du} \ln \left(A \int f(u) du + C_1 \right),$$

$$\theta(x) = \frac{1}{Aa(x)} \left(\int \frac{dx}{a(x)} + C_2 \right)^{-1}, \quad b(x) = \frac{kc(x)}{\theta(x)},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Полагая $c(x) = 1$ и $A = 1$, приходим к нелинейному уравнению конвективной диффузии

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + ka(x) \left(\int \frac{dx}{a(x)} + C_2 \right) u_x, \quad (25)$$

которое допускает точное решение

$$\int f(u)du + C_1 = e^{kt} \left(\int \frac{dx}{a(x)} + C_2 \right). \quad (26)$$

Уравнение (25) и формулы (26) содержат две произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$.

Пример 4. Подставляя $a(x) = 1$, $C_1 = C_2 = 0$ в (25) и (26), приходим к уравнению [17]:

$$u_t = [f(u)u_x]_x + kxu_x,$$

которое имеет решение $\int f(u)du = xe^{kt}$.

Пример 5. Полагая $a(x) = e^x$, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ в (25) и (26), получим уравнение конвективной диффузии

$$u_t = [e^x f(u)u_x]_x - ku_x,$$

которое имеет инвариантное решение типа бегущей волны $\int f(u)du = -e^{kt-x}$.

Решение 5. Уравнению (10) можно удовлетворить, если положить

$$g = A_1 f + A_2, \quad \left(\frac{f}{h} \right)'_u = A_3 f + A_4, \quad (27)$$

$$(a\theta)'_x + A_3 a\theta^2 + A_1 b\theta = 0, \quad (28)$$

$$A_4 a\theta^2 + A_2 b\theta - kc = 0,$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 – произвольные постоянные. Из второго уравнения (27) выразим функцию h через f :

$$h(u) = f(u) \left[A_3 \int f(u)du + A_4 u + C_1 \right]^{-1}, \quad (29)$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Уравнения (28) для заданных функций $a = a(x)$ и $c = c(x)$ позволяют найти две другие функции $b(x)$ и $\theta(x)$. Исключая $b(x)$ из уравнений (28), получим ОДУ первого порядка с квадратичной нелинейностью для функции $\theta(x)$ (уравнение Риккати [45]):

$$A_2 a\theta'_x + (A_2 A_3 - A_1 A_4) a\theta^2 + A_2 a'_x \theta + A_1 k c = 0. \quad (30)$$

Подстановка

$$\theta = \lambda \frac{\zeta'_x}{\zeta}, \quad \lambda = \frac{A_2}{A_2 A_3 - A_1 A_4} \quad (A_2 A_3 - A_1 A_4 \neq 0), \quad (31)$$

приводит его к линейному ОДУ второго порядка

$$A_2 \lambda (a\zeta'_x)'_x + A_1 k c \zeta = 0. \quad (32)$$

Точные решения уравнения (32) для некоторых функций $a = a(x)$ и $c = c(x)$ можно найти в [45].

Используя последнее соотношение (28), выразим функциональный коэффициент b через θ :

$$b = -\frac{1}{A_2 \theta} (A_4 a\theta^2 - kc). \quad (33)$$

Пример 6. При $a(x) = c(x) = 1$ общее решение уравнения (32) имеет вид

$$\zeta = \begin{cases} C_2 \cos(mx) + C_3 \sin(mx) & \text{при } A_1 k (A_2 A_3 - A_1 A_4) > 0, \\ C_2 \cosh(mx) + C_3 \sinh(mx) & \text{при } A_1 k (A_2 A_3 - A_1 A_4) < 0, \end{cases} \quad (34)$$

где C_2, C_3 – произвольные постоянные, $m = \sqrt{|A_1 k| / |A_2 \lambda|}$. В частности, подставляя $A_1 = A_2 = A_4 = 1$, $A_3 = 2$, $C_2 = 1$, $C_3 = 0$, $k = -1$ в формулы (31), (33), (34), находим $m = \lambda = 1$, $\zeta = \cosh x$, $\theta = \tanh x$, $b = -(\tanh x + \coth x)$.

Решение 6. Уравнение (10) также допускает решения, если имеют место соотношения

$$(a\theta)'_x = Ac, \quad a\theta^2 = Bc, \quad b\theta = c, \quad (35)$$

$$Af + B \left(\frac{f}{h} \right)'_u + g - k = 0,$$

где A и B – произвольные постоянные.

Подставив в (35) $a(x) = b(x) = c(x) = \theta(x) = 1$, $A = 0$, $B = 1$, получим решение типа бегущей волны (3), которое здесь опускается.

Решение 7. Полагая $c(x) = 1$ и $A = B = 1$ в первых трех уравнениях (35), имеем

$$a(x) = x^2, \quad b(x) = x, \quad \theta(x) = 1/x. \quad (36)$$

В результате получим уравнение

$$u_t = [x^2 f(u)u_x]_x + xg(u)u_x, \quad (37)$$

где

$$g(u) = k - f(u) - \frac{d}{du} \left[\frac{f(u)}{h(u)} \right], \quad (38)$$

которое допускает решение в неявном виде

$$\int h(u)du = kt + \ln x. \tag{39}$$

Отметим, что уравнение (37)–(38) зависит от двух произвольных функций $f = f(u)$ и $h = h(u)$. Из (38) можно выразить функцию $h(u)$ через $f(u)$ и $g(u)$.

Замечание 4. Инвариантное решение (39) уравнения (37) можно искать в явном виде $u = U(z)$, где $z = kt + \ln x$ (в этом случае не используется соотношение (38) между функциями g и h). Функция $U(z)$ определяется из автономного ОДУ

$$[f(U)U'_z]'_z + [f(U) + g(U) - k]U'_z = 0,$$

которое легко интегрируется.

Замечание 5. Более общее, чем (37), нелинейное уравнение конвективной диффузии с запаздыванием

$$u_t = [x^2 f(u, w)u_x]_x + xg(u, w)u_x, \quad w = u(x, t - \tau),$$

где τ – время запаздывания, также имеет точное решение вида $u = U(z)$, где $z = kt + \ln x$.

3.2. Решения с функциональным разделением переменных при $\xi(t) = ke^{\lambda t}$

Вернемся к уравнению (8). В разд. 3.1 рассматривался простейший случай линейной зависимости $\xi(t) = kt$, который сразу приводил к функционально-дифференциальному уравнению с двумя переменными вида (6).

Функция $\xi(t)$ входит в формулу (5) линейным образом. Если выбрать $\xi(t) = ke^{\lambda t}$ (k – произвольная постоянная), тогда решение принимает вид

$$H(u) = ke^{\lambda t} + \eta(x), \quad H(u) = \int h(u)du, \tag{40}$$

и экспоненту $e^{\lambda t}$ удается исключить из уравнения (8) с помощью (40). В результате приходим к функционально-дифференциальному уравнению вида (6) при $N = 5$:

$$\lambda\eta - \lambda H + \frac{(a\eta'_x)'_x}{c} f + \frac{a(\eta'_x)^2}{c} \left(\frac{f}{h}\right)'_u + \frac{b\eta'_x}{c} g = 0. \tag{41}$$

Замечание 6. Уравнение (41) можно вывести, используя другие соображения. Действительно, переписав (5) в виде

$$\xi/(H - \eta) = 1, \tag{42}$$

умножим правую часть уравнения (8) на $\xi/(H - \eta)$. В результате получим

$$\frac{\xi'_t}{\xi} = \frac{1}{c(H - \eta)} \left[(a\eta'_x)'_x f + a(\eta'_x)^2 \left(\frac{f}{h}\right)'_u + b\eta'_x g \right]. \tag{43}$$

В уравнении (43) переменные разделены: левая часть зависит только от t , а правая – от x и u . Приравняв обе части (43) константе λ , получим два уравнения. Левая часть (43) дает уравнение $\xi'_t/\xi = \lambda$, которое имеет решение $\xi = ke^{\lambda t}$. Правая часть (43) приводит к уравнению (41).

Решение 8. Уравнению (41) можно удовлетворить, если положить

$$f = C_1 u h + C_2 h, \quad g = \lambda H - C_1 C_3 u h - C_2 C_3 h, \tag{44}$$

$$b\eta'_x = c, \quad (a\eta'_x)'_x = C_3 c, \quad C_1 a(\eta'_x)^2 + \lambda c \eta = 0, \tag{45}$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные. Соотношения (44) и (45) включают две произвольные функции h и c , а функции f, g, a, b, η через них выражаются.

Общее решение системы, состоящей из двух последних уравнений (45), определяется формулами

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{C_5}{c(x)} \left[C_3 \int c(x)dx + C_4 \right]^{2+\lambda/(C_1 C_3)}, \\ \eta(x) &= -\frac{C_1}{C_5 \lambda} \left[C_3 \int c(x)dx + C_4 \right]^{-\lambda/(C_1 C_3)}, \end{aligned} \tag{46}$$

где C_4 и C_5 – произвольные постоянные.

Пример 7. Подставив $c(x) = 1, C_1 = C_3 = C_5 = 1, C_2 = C_4 = 0, \lambda = n - 2$ в (45) и (46), имеем

$$a(x) = x^n, \quad b(x) = x^{n-1}, \quad \eta(x) = x^{2-n}/(2-n).$$

Учитывая соотношения (44), приходим к нелинейному уравнению

$$\begin{aligned} u_t &= [x^n f(u)u_x]_x + x^{n-1} g(u)u_x, \\ f(u) &= u h(u), \quad g(u) = (n-2) \int h(u)du - u h(u), \end{aligned} \tag{47}$$

где $h(u)$ – произвольная функция, $n \neq 2$ – произвольная постоянная, которое допускает решение с функциональным разделением переменных в неявной форме

$$\int h(u)du = ke^{(n-2)t} + \frac{x^{2-n}}{2-n}; \tag{48}$$

k – произвольная постоянная.

Подставляя $h = f/u$ в (47), получим уравнение

$$u_t = [x^n f(u)u_x]_x + x^{n-1} \left[(n-2) \int \frac{f(u)}{u} du - f(u) \right] u_x,$$

решение которого записывается так:

$$\int \frac{f(u)}{u} du = ke^{(n-2)t} + \frac{x^{2-n}}{2-n}.$$

Решение 9. Уравнению (41) можно удовлетворить другим способом, если положить

$$f = 1, \quad g = \lambda H + C_1 \frac{h'_u}{h^2}, \quad (49)$$

$$b\eta'_x = c, \quad (a\eta'_x)'_x + \lambda c\eta = 0, \quad a(\eta'_x)^2 - C_1 c = 0,$$

где C_1 – произвольная постоянная. Соотношения (49) содержат две произвольные функции h и c , а остальные функции g , a , b , η через них выражаются.

Общее решение системы, состоящей из двух последних уравнений (49), имеет вид

$$a(x) = \frac{C_4^2}{C_1 c(x)} \exp\left(-\frac{\lambda}{C_1} \eta^2\right), \quad (50)$$

$$\int \exp\left(-\frac{\lambda}{2C_1} \eta^2\right) d\eta = \frac{C_1}{C_4} \int c(x) dx + C_5,$$

где C_4 и C_5 – произвольные постоянные (это решение можно выразить через обратную функцию к интегралу вероятностей).

Замечание 7. Если в двух последних уравнениях (49) функцию $\eta = \eta(x)$ считать заданной, то решение этих уравнений определяется формулами

$$a(x) = \frac{C_4}{\eta'_x(x)} \exp\left(-\frac{\lambda}{2C_1} \eta^2\right),$$

$$c(x) = \frac{C_4}{C_1} \eta'_x(x) \exp\left(-\frac{\lambda}{2C_1} \eta^2\right).$$

3.3. Решения с функциональным разделением переменных при $\xi(t) = k \ln t$

Подставляя логарифмическую функцию $\xi(t) = k \ln t$ в (5), ищем решения в виде

$$\int h(u) du = k \ln t + \eta(x). \quad (51)$$

Исключая t из (8) (при $\xi = k \ln t$) и (51), получим функционально-дифференциальное уравнение

$$(a\eta'_x)'_x f + a(\eta'_x)^2 \left(\frac{f}{h}\right)'_u + b\eta'_x g - kce^{\eta/k} e^{-H/k} = 0, \quad (52)$$

$$H = \int h(u) du.$$

Замечание 8. Уравнение (52) можно вывести, исходя из других соображений. Действительно, представив формулу (5) в виде

$$e^{(H-\eta-\xi)/k} = 1,$$

где k – некоторая постоянная, умножим правую часть уравнения (8) на $e^{(H-\eta-\xi)/k}$. В результате, после элементарных преобразований, имеем

$$e^{\xi/k} \xi'_t \frac{e^{(H-\eta)/k}}{c} \left[(a\eta'_x)'_x f + a(\eta'_x)^2 \left(\frac{f}{h}\right)'_u + b\eta'_x g \right]. \quad (53)$$

В уравнении (53) переменные разделены: левая часть зависит только от t , а правая – от x и u . Приравнявая обе части (53) константе λ , получим два уравнения. Левая часть (53) приводит к уравнению $e^{\xi/k} \xi'_t = \lambda$, которое имеет решение $\xi = k \ln(t + t_0) + k \ln(\lambda/k)$. Правая часть (53) при $\lambda = k$ приводит к уравнению (52).

Решение 10. Сначала рассмотрим вырожденный случай, когда дифференциальная форма $(f/h)'_u$ обращается в нуль. В этом случае уравнение (52) допускает решения, если выполняются соотношения

$$h = f, \quad g = Af + Be^{-F/k}, \quad (54)$$

$$(a\eta'_x)'_x + Ab\eta'_x = 0, \quad Bb\eta'_x - kce^{\eta/k} = 0,$$

где A и B – произвольные постоянные, $F = \int f(u) du$. Из (54) при $B = k$ следует, что уравнение

$$c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \frac{c(x)e^{\eta(x)/k}}{\eta'_x(x)} [Af(u) + ke^{-F(u)/k}] u_x, \quad (55)$$

где $a(x)$, $c(x)$, $f(u)$ – произвольные функции, а функция $\eta = \eta(x)$ является решением нелинейного ОДУ второго порядка

$$[a(x)\eta'_x]'_x + Ac(x)e^{\eta/k} = 0, \quad (56)$$

имеет решение с обобщенным разделением переменных

$$\int f(u) du = k \ln t + \eta(x). \quad (57)$$

Пример 8. При $a(x) = x^n$ ($n \neq 1, 2$), $c(x) = 1$, $A = -k(n-1)(n-2)$, уравнение (56) имеет точное решение $\eta = k(n-2) \ln x$. Поэтому уравнение

$$u_t = [x^n f(u)u_x]_x + x^{n-1} \left[-(n-1)f(u) + \frac{1}{n-2} e^{-F(u)/k} \right] u_x \quad (58)$$

допускает точное решение в неявной форме $\int f(u) du = k \ln t + k(n-2) \ln x$.

Пример 9. При $a(x) = e^{\lambda x}$, $c(x) = 1$, $A = -k\lambda^2$ уравнение (56) допускает точное решение $\eta = k\lambda x$. Поэтому уравнение конвективной диффузии

$$u_t = [e^{\lambda x} f(u)u_x]_x + e^{\lambda x} \left[-\lambda f(u) + \frac{1}{\lambda} e^{-F(u)/k} \right] u_x \quad (59)$$

имеет точное решение в неявной форме $\int f(u)du = k \ln t + k\lambda x$.

Решение 11. Уравнению (52) можно удовлетворить, если положить

$$Af = \left(\frac{f}{h}\right)'_u, \quad g = e^{-H/k}, \quad (60)$$

$$(a\eta'_x)'_x + Aa(\eta'_x)^2 = 0, \quad b\eta'_x = kce^{\eta/k},$$

где A – произвольная постоянная. Подставляя $c(x) = 1$ в (60), получим нелинейное уравнение конвективной диффузии

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \frac{Aka(x)}{C_1} \left(C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2 \right)^{(Ak+1)/(Ak)} g(u)u_x, \quad (61)$$

где $a(x)$ – произвольная функция, а функции $f(u)$ и $g(u)$ следующим образом выражаются через произвольную функцию $h = h(u)$:

$$f(u) = Bh \exp\left(A \int hdu\right), \quad (62)$$

$$g(u) = \exp\left(-\frac{1}{k} \int hdu\right).$$

Уравнение (61)–(62) имеет точное решение

$$\int h(u)du = k \ln t + \frac{1}{A} \ln \left(C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2 \right). \quad (63)$$

Формулы (62) и (63) зависят от произвольных функций $a(x)$ и $h(u)$ и произвольных постоянных A, B, C_1, C_2, k .

Пример 10. При $a(x) = 1, A = 1/k, C_1 = 1, C_2 = 0$ уравнение (61) принимает вид

$$u_t = [f(u)u_x]_x + x^2 g(u)u_x,$$

где функции $f(u)$ и $g(u)$ определяются формулами (62). Это уравнение имеет точное решение

$$\int h(u)du = k \ln t + k \ln x.$$

Решение 12. Уравнению (52) удовлетворяется, если выполняются соотношения

$$\left(\frac{f}{h}\right)'_u = Ae^{-H/k}, \quad g = f, \quad (64)$$

$$Aa(\eta'_x)^2 = kce^{\eta/k}, \quad (a\eta'_x)'_x = -b\eta'_x,$$

где A – произвольная постоянная. В результате приходим к нелинейному уравнению конвективной диффузии

$$c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)f(u)u_x, \quad (65)$$

где функция $f(u)$ следующим образом выражается через произвольную функцию $h = h(u)$:

$$f(u) = h(u) \left[A \int e^{-H(u)/k} du + B \right], \quad (66)$$

а функция $b(x)$ определяется формулами (возможны два варианта)

$$b(x) = -[a(x)\eta'_x]'_x / \eta'_x, \quad (67)$$

$$\eta = -2k \ln \left[C_1 \pm \frac{1}{2\sqrt{Ak}} \int \sqrt{\frac{c(x)}{a(x)}} dx \right].$$

Уравнения (65)–(67) допускают точные решения

$$\int h(u)du = k \ln t - 2k \ln \left[C_1 \pm \frac{1}{2\sqrt{Ak}} \int \sqrt{\frac{c(x)}{a(x)}} dx \right]. \quad (68)$$

Формулы (66) и (68) содержат произвольные постоянные A, B, C .

Решение 13. Уравнению (52) можно удовлетворить, если положить

$$f = Ae^{-H/k}, \quad g = \left(\frac{f}{h}\right)'_u, \quad (69)$$

$$A(a\eta'_x)'_x - kce^{\eta/k} = 0, \quad a\eta'_x + b = 0,$$

где A – произвольная постоянная.

Из первых двух уравнений (69), выразим g и h через f . В результате получим

$$H = -k \ln \frac{f}{A}, \quad h = -k \frac{f'_u}{f}, \quad g = -\frac{1}{k} \left(\frac{f^2}{f'_u} \right)'_u. \quad (70)$$

Будем считать, что в последних двух уравнениях (69) заданы функции $c = c(x)$ и $\eta = \eta(x)$. Тогда функциональные коэффициенты $a = a(x)$ и $b = b(x)$ определяются формулами

$$a(x) = \frac{k}{A\eta'_x} \left(\int ce^{\eta/k} dx + B \right), \quad b(x) = -a(x)\eta'_x,$$

где B – произвольная постоянная.

Решение 14. Уравнению (52) удовлетворяется, если наложить условия

$$(a\eta'_x)'_x = Ace^{\eta/k}, \quad (71)$$

$$a(\eta'_x)^2 = Bce^{\eta/k}, \quad b\eta'_x = ce^{\eta/k},$$

$$Af + B \left(\frac{f}{h}\right)'_u + g - k \exp(-H/k) = 0,$$

где A и B – произвольные постоянные, $H = \int h(u)du$.

Подставляя $c(x) = 1, A = 1/k, B = 1$ в первые три уравнения (71), находим

$$a(x) = b(x) = e^{\lambda x}, \quad \eta(x) = x, \quad \lambda = \frac{1}{k}. \quad (72)$$

В результате получим уравнение

$$u_t = [e^{\lambda x} f(u)u_x]_x + e^{\lambda x} g(u)u_x, \quad (73)$$

где

$$g(u) = \frac{1}{\lambda} \exp\left[-\lambda \int h(u) du\right] - \lambda f(u) - \frac{d}{du} \left[\frac{f(u)}{h(u)} \right], \quad (74)$$

которое допускает решение в неявном виде

$$\int h(u) du = x + \frac{1}{\lambda} \ln t. \quad (75)$$

Отметим, что уравнение (73)–(74) содержит две произвольные функции $f = f(u)$ и $h = h(u)$.

Замечание 9. Инвариантное решение (75) уравнения (73) можно искать в явном виде $u = U(z)$, где $z = x + (1/\lambda) \ln t$ (в этом случае связь (74) между функциями g и h не используется). Функция $U(z)$ определяется из ОДУ:

$$\frac{1}{\lambda} U'_z = [e^{\lambda z} f(U) U'_z]'_z + e^{\lambda z} g(U) U'_z.$$

Замечание 10. Более общее, чем (73), уравнение

$$u_t = [e^{\lambda x} f(u, u_x)]_x + e^{\lambda x} g(u, u_x),$$

также допускает точное решение вида $u = U(z)$, где $z = x + (1/\lambda) \ln t$.

Решение 15. Полагая $c(x) = 1$, $A = (1+k)/k$, $B = 1$ в первых трех уравнениях (71), получим

$$\begin{aligned} a(x) &= x^n, & b(x) &= x^{n-1}, \\ \eta(x) &= \ln x, & n &= 2 + \frac{1}{k}. \end{aligned} \quad (76)$$

В результате приходим к уравнению конвективной диффузии

$$u_t = [x^n f(u) u_x]_x + x^{n-1} g(u) u_x, \quad (77)$$

где $n \neq 2$ и

$$\begin{aligned} g(u) &= \frac{1}{(n-2)} \exp\left[-(n-2) \int h(u) du\right] - \\ &- (n-1) f(u) - \frac{d}{du} \left[\frac{f(u)}{h(u)} \right], \end{aligned} \quad (78)$$

которое допускает точное решение в неявном виде

$$\int h(u) du = \ln x + \frac{1}{n-2} \ln t. \quad (79)$$

Замечание 11. Автомодельное решение (79) уравнения (77) можно искать в обычном виде $u = U(z)$, где $z = xt^{1/(n-2)}$ (в этом случае связь (78) между функциями g и h не используется). Функция $U(z)$ определяется из ОДУ:

$$\frac{1}{n-2} z U'_z = [z^n f(U) U'_z]'_z + z^{n-1} g(U) U'_z.$$

Решение 16. Уравнению (52) можно удовлетворить, если положить

$$\left(\frac{f}{h}\right)'_u = Af, \quad \exp(-H/k) = Bf, \quad g = f, \quad (80)$$

$$(a\eta'_x)'_x + Aa(\eta'_x)^2 + b\eta'_x - Bkce^{\eta/k} = 0,$$

где A и B – произвольные постоянные, $H = \int h(u) du$.

Подставляя $A = -1/k = \lambda$ и $B = 1$ в первые три уравнения (80), имеем

$$f(u) = g(u) = e^{\lambda u}, \quad h(u) = 1. \quad (81)$$

Поэтому уравнение

$$c(x)u_t = [a(x)e^{\lambda u} u_x]_x + b(x)e^{\lambda u} u_x \quad (82)$$

допускает точное решение в неявном виде

$$u = -\frac{1}{\lambda} \ln t + \eta(x), \quad (83)$$

где функция $\eta = \eta(x)$ определяется из ОДУ:

$$[a(x)e^{\lambda \eta} \eta'_x]'_x + b(x)e^{\lambda \eta} \eta'_x + \frac{1}{\lambda} c(x) = 0. \quad (84)$$

Уравнения (82) и (84) содержат три произвольные функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$.

Решение 17. Полагая $A = n+1$, $B = 1$, $k = -1/n$ в первых трех уравнениях (80), получим

$$f(u) = u^n, \quad g(u) = u^n, \quad h(u) = 1/u. \quad (85)$$

В результате приходим к уравнению конвективной диффузии

$$c(x)u_t = [a(x)u^n u_x]_x + b(x)u^n u_x, \quad (86)$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ – произвольные функции, которое имеет точное решение $\ln u = -(1/n) \ln t + \eta(x)$. Это решение можно представить в явном виде

$$u = t^{-1/n} \zeta(x), \quad \zeta(x) = e^{\eta(x)}, \quad (87)$$

где функция η удовлетворяет ОДУ:

$$[a(x)\zeta^n \zeta'_x]'_x + b(x)\zeta^n \zeta'_x + \frac{1}{n} c(x)\zeta = 0. \quad (88)$$

4. КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Описаны различные классы нелинейных уравнений конвективной диффузии с переменными коэффициентами, которые допускают точные решения. Решения ищутся в виде неявной зависимости, которая содержит несколько свободных функций (эти функции определяются в ходе дальнейшего анализа). Особое внимание уделено нелинейным уравнениям общего вида, которые зависят от одной или нескольких произвольных функций. Получен ряд новых точных решений типа обобщенной бегущей волны и решений с функциональным разделением переменных.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310385-6) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10025).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // Доклады АН СССР. 1959. Т. 125. № 3. С. 492–495.
2. Дородницын В.А. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1982. Т. 22. № 6. С. 1393–1400.
3. Galaktionov V.A., Dorodnitsyn V.A., Yelenin G.G., Kurdyumov S.P., Samarskii A.A. A quasilinear equation of heat conduction with a source: peaking, localization, symmetry, exact solutions, asymptotic behavior, structures // J. Soviet Math. 1988. V. 41. № 5. P. 1222–1292.
4. Kudryashov N.A. On exact solutions of families of Fisher equations // Theor. Math. Phys. 1993. V. 94. № 2. P. 211–218.
5. Clarkson P.A., Mansfield E.L. Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations // Phys. D. 1994. V. 70. P. 250–288.
6. Galaktionov V.A. Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions // Nonlinear Anal. Theory. Methods. Appl. 1994. V. 23. P. 1595–1621.
7. Ibragimov N.H. (Editor). CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Symmetries, Exact solutions and Conservation Laws, Vol. 1. Boca Raton: CRC Press, 1994.
8. Doyle Ph. W., Vassiliou P. J. Separation of variables for the 1-dimensional non-linear diffusion equation // Int. J. Non-Linear Mech. 1998. V. 33. № 2. P. 315–326.
9. Hood S. On direct, implicit reductions of a nonlinear diffusion equation with an arbitrary function – generalizations of Clarkson’s and Kruskal’s method // IMA J. Appl. Math. 2000. V. 64. № 3. P. 223–244.
10. Pucci E., Saccomandi G. Evolution equations, invariant surface conditions and functional separation of variables // Physica D. 2000. V. 139. P. 28–47.
11. Estevez P.G., Qu C., Zhang S. Separation of variables of a generalized porous medium equation with nonlinear source // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 275. P. 44–59.
12. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2002.
13. Kaptsov O.V., Verevkin I.V. Differential constraints and exact solutions of nonlinear diffusion equations // J. Phys. A: Math. Gen. 2003. V. 36. P. 1401–1414.
14. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
15. Cherniha R.M., Pliukhin O. New conditional symmetries and exact solutions of nonlinear reaction–diffusion–convection equations // J. Physics A: Math. Theor. 2007. V. 40. № 33. P. 10049–10070.
16. Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.
17. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition. Boca Raton: CRC Press, 2012 (see also 1st Edition, 2004).
18. Cherniha R.M., Pliukhin O. New conditional symmetries and exact solutions of reaction–diffusion–convection equations with exponential nonlinearities // J. Math. Anal. Appl. 2013. V. 403. P. 23–37.
19. Cherniha R., Serov M., Pliukhin O. Nonlinear Reaction–Diffusion–Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2018.
20. Vaneeva O.O., Johnpillai, A.G., Popovych R.O., Sophocleous C. Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with power nonlinearities // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 330. № 2. P. 1363–1386.
21. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Enhanced group analysis and exact solutions of variable coefficient semilinear diffusion equations with a power source // Acta Applicandae Mathematicae. 2009. V. 106. № 1. P. 1–46.
22. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with exponential nonlinearities // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 396. P. 225–242.
23. Vaneeva O., Zhalij A. Group classification of variable coefficient quasilinear reaction–diffusion equations // Publications de L’Institute Mathématique (Nouvelle série). 2013. V. 94. № 108. P. 81–90.
24. Polyanin A.D. Functional separable solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with variable coefficients // Appl. Math. Comput. 2019. V. 347. P. 282–292.
25. Полянин А.Д. Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с переменными коэффициентами: Метод поиска точных решений в неявном виде // Вестник Национального исследовательского ядерного университета “МИФИ”. 2019. Т. 8. № 2.
26. Gandarias M.L., Romero J.L., Díaz J.M. Nonclassical symmetry reductions of a porous medium equation with convection // J. Phys. A: Math. Gen. 1999. V. 32. P. 1461–1473.
27. Popovych R.O., Ivanova N.M. New results on group classification of nonlinear diffusion–convection equations // J. Physics A: Math. General. 2004. V. 37. № 30. P. 7547–7565.
28. Ivanova N.M., Sophocleous C. On the group classification of variable-coefficient nonlinear diffusion–convection equations // J. Comput. Applied Math. 2006. V. 197. № 2. P. 322–344.
29. Ivanova N.M. Exact solutions of diffusion–convection equations // Dynamics of PDE. 2008. V. 5. № 2. P. 139–171.
30. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Group analysis of variable coefficient diffusion–convection

- equations. I. Enhanced group classification // *Lobachevskii J. Mathematics*. 2010. V. 31. № 2. P. 100–122.
31. *Polyanin A.D.* Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2019. V. 111. P. 95–105.
 32. *Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R.* The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations // *Acta Appl. Math.* 2001. V. 69. P. 43–94.
 33. *Лагно В.И., Спичак С.В., Стогний В.И.* Симметричный анализ уравнений эволюционного типа. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
 34. *Jia H., Zhao W.X.X., Li Z.* Separation of variables and exact solutions to nonlinear diffusion equations with x -dependent convection and absorption // *J. Math. Anal. Appl.* 2008. V. 339. P. 982–995.
 35. *Cherniha R., Davydovych V.* Nonlinear Reaction-Diffusion Systems: Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications in Biology. Springer, 2017.
 36. *Meleshko S.V., Moyo S.* On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay // *J. Math. Anal. Appl.* 2008. V. 338. P. 448–466.
 37. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact solutions of linear and non-linear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2013. V. 54. P. 115–126.
 38. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact separable solutions of delay reaction-diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2014. V. 19. № 3. P. 409–416.
 39. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2014. V. 19. № 3. P. 417–430.
 40. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* New generalized and functional separable solutions to non-linear delay reaction-diffusion equations // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2014. V. 59. P. 16–22.
 41. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions // *Appl. Math. Letters* 2014. V. 37. P. 43–48.
 42. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2014. V. 67. P. 267–277.
 43. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Nonlinear delay reaction-diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions // *Appl. Math. Letters*. 2015. V. 46. P. 38–43.
 44. *Polyanin A.D.* Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay and variable coefficients // *Appl. Math. Letters*. 2019. V. 90. P. 49–53.
 45. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. Boca Raton: CRC Press, 2018.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2019, vol. 8, no. 4, pp. 415–427

Exact Solutions in the Implicit Form of Nonlinear Mass and Heat Transfer Equations with Variable Coefficients

A. D. Polyanin^{a,b,c,#}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia*

^b *National Research Nuclear University MEPHI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

^c *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005 Russia*

[#]*e-mail: polyanin@ipmnet.ru*

Received January 30, 2019; revised January 30, 2019; accepted February 26, 2019

Abstract—Various classes of nonlinear mass and heat transfer equations with variable coefficients, $c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u)u_x$, which admit exact solutions, are considered. The main attention is focused on nonlinear equations of a sufficiently general form, which contain several arbitrary functions that depend on the unknown function u and the spatial variable x . It is important to note that the exact solutions of nonlinear partial differential equations that contain arbitrary functions and are, therefore, sufficiently general, are of the greatest practical interest for testing various numerical and approximate analytical methods to solve corresponding initial-boundary value problems. The method used to find exact solutions is based on the representation of the solution in the implicit form $\int h(u)du = \xi(t) + \eta(x)$, where the functions $h(u)$, $\xi(t)$, and $\eta(x)$ are determined further by analyzing resulting functional-differential equations. Examples of specif-

ic reaction–diffusion type equations and their exact solutions are given. Many new generalized traveling wave solutions and functional separable solutions are described.

Keywords: mass and heat transfer equations, nonlinear convection–diffusion, equations, PDEs with variable coefficients, exact solutions in implicit form, functional separable solutions, generalized traveling-wave solutions

DOI: 10.1134/S2304487X19040084

REFERENCES

- Ovsiannikov L.V. Gruppye svoystva uravneniy nelineynoy teploprovodnosti [Group properties of nonlinear heat equations]. *Doklady Acad. Nauk USSR*, 1959, vol. 125, no. 3, pp. 492–495 (in Russian).
- Dorodnitsyn V.A. Ob invariantnykh resheniyakh uravneniya nelineynoy teploprovodnosti s istochnikom [On invariant solutions of the nonlinear heat equation with a source]. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 1982, vol. 22, no. 6, pp. 1393–1400 (in Russian).
- Galaktionov V.A., Dorodnitsyn V.A., Yelenin G.G., Kurdyumov S.P., Samarskii A.A. A quasilinear equation of heat conduction with a source: peaking, localization, symmetry, exact solutions, asymptotic behavior, structures. *J. Soviet Math.*, 1988, vol. 41, no. 5, pp. 1222–1292.
- Kudryashov N.A. On exact solutions of families of Fisher equations. *Theor. Math. Phys.*, 1993, vol. 94, no. 2, pp. 211–218.
- Clarkson P.A., Mansfield E.L. Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations. *Phys. D*, 1994, vol. 70, pp. 250–288.
- Galaktionov V.A. Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions. *Nonlinear Anal. Theory. Methods. Appl.*, 1994, vol. 23, pp. 1595–1621.
- Ibragimov N.H. (Editor). *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Symmetries, Exact solutions and Conservation Laws, vol. 1*. Boca Raton: CRC Press, 1994.
- Doyle Ph. W., Vassiliou P. J. Separation of variables for the 1-dimensional non-linear diffusion equation. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1998, vol. 33, no. 2, pp. 315–326.
- Hood S. On direct, implicit reductions of a nonlinear diffusion equation with an arbitrary function – generalizations of Clarkson's and Kruskal's method. *IMA J. Appl. Math.*, 2000, vol. 64, no. 3, pp. 223–244.
- Pucci E., Saccomandi G. Evolution equations, invariant surface conditions and functional separation of variables. *Physica D*, 2000, vol. 139, pp. 28–47.
- Estevez P.G., Qu C., Zhang S. Separation of variables of a generalized porous medium equation with nonlinear source. *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, vol. 275, pp. 44–59.
- Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Spravochnik po nelineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki* [Handbook of nonlinear equations of mathematical physics]. Moscow, Fizmatlit, 2002 (in Russian).
- Kaptsov O.V., Verevkin I.V. Differential constraints and exact solutions of nonlinear diffusion equations. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2003, vol. 36, pp. 1401–1414.
- Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I. *Metody resheniya nelineinykh uravnenii matematicheskoi fiziki i mekhaniki* [Solution methods for nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2005 (in Russian).
- Cherniha R.M., Pliukhin O. New conditional symmetries and exact solutions of nonlinear reaction–diffusion–convection equations. *J. Physics A: Math. Theor.*, 2007, vol. 40, no. 33, pp. 10049–10070.
- Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. *Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2006.
- Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition*. Boca Raton: CRC Press, 2012 (see also 1st Edition, 2004).
- Cherniha R.M., Pliukhin O. New conditional symmetries and exact solutions of reaction–diffusion–convection equations with exponential nonlinearities. *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, vol. 403, pp. 23–37.
- Cherniha R., Serov M., Pliukhin O. *Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2018.
- Vaneeva O.O., Johnpillai, A.G., Popovycha R.O., Sophocleous C. Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with power nonlinearities. *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, vol. 330, no. 2, pp. 1363–1386.
- Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Enhanced group analysis and exact solutions of variable coefficient semilinear diffusion equations with a power source. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2009, vol. 106, no. 1, pp. 1–46.
- Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with exponential nonlinearities. *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, vol. 396, pp. 225–242.
- Vaneeva O., Zhalij A. Group classification of variable coefficient quasilinear reaction–diffusion equations. *Publications de L'Institute Mathématique (Nouvelle série)*, 2013, vol. 94, no. 108, pp. 81–90.
- Polyanin A.D. Functional separable solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with variable coefficients. *Appl. Math. Comput.*, 2019, vol. 347, pp. 282–292.
- Polyanin A.D. Nelineynyye reaktsionno-diffuzionnyye uravneniya s peremennymi koeffitsiyentami: Metod

- poiska tochnykh resheniy v neyavnom vide [Nonlinear reaction-diffusion equations with variable coefficients: Method for finding exact solutions in implicit form]. Vestnik NIYaU MIFI, 2019, vol. 8, no. 2 (in Russian).
26. Gandarias M.L., Romero J.L., Díaz J.M. Nonclassical symmetry reductions of a porous medium equation with convection. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1999, vol. 32, pp. 1461–1473.
 27. Popovych R.O., Ivanova N.M. New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2004, vol. 37, no. 30, pp. 7547–7565.
 28. Ivanova N.M., Sophocleous C. On the group classification of variable-coefficient nonlinear diffusion-convection equations. *J. Comput. Applied Math.*, 2006, vol. 197, no. 2, pp. 322–344.
 29. Ivanova N.M. Exact solutions of diffusion-convection equations. *Dynamics of PDE*, 2008, vol. 5, no. 2, pp. 139–171.
 30. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Group analysis of variable coefficient diffusion-convection equations. I. Enhanced group classification. *Lo-bachevskii J. Mathematics*, 2010, vol. 31, no. 2, pp. 100–122.
 31. Polyanin A.D. Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2019, vol. 111, pp. 95–105.
 32. Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations. *Acta Appl. Math.*, 2001, vol. 69, pp. 43–94.
 33. Lagno V.I., Spichak S.V., Stognii V.I. *Simmetriynyy analiz uravneniy evolyutsionnogo tipa* [Symmetry analysis of evolution type equations]. Moskva – Izhevsk, Institute of Computer Sciences, 2004 (in Russian).
 34. Jia H., Zhao W.X.X., Li Z. Separation of variables and exact solutions to nonlinear diffusion equations with x -dependent convection and absorption. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 339, pp. 982–995.
 35. Cherniha R., Davydovych V. *Nonlinear Reaction-Diffusion Systems: Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications in Biology*. Springer, 2017.
 36. Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 338, pp. 448–466.
 37. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of linear and non-linear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2013, vol. 54, pp. 115–126.
 38. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction-diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 409–416.
 39. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 417–430.
 40. Polyanin A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to non-linear delay reaction-diffusion equations. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 59, pp. 16–22.
 41. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions. *Appl. Math. Letters*, 2014, vol. 37, pp. 43–48.
 42. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 67, pp. 267–277.
 43. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nonlinear delay reaction-diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions. *Appl. Math. Letters*, 2015, vol. 46, pp. 38–43.
 44. Polyanin A.D. Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay and variable coefficients. *Appl. Math. Letters*, 2019, vol. 90, pp. 49–53.
 45. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems*. Boca Raton: CRC Press, 2018.

УДК 517.9

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ТРЕТЬЕГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА,
ИМЕЮЩИЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ, ВЫРАЖЕННЫЕ
ЧЕРЕЗ ЭЛЛИПТИЧЕСКУЮ ФУНКЦИЮ ВЕЙЕРШТРАССА

© 2019 г. С. Ф. Лаврова^{1,*}, Н. А. Кудряшов^{1,**}, А. А. Кутуков^{1,***}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

*e-mail: infuriatedot@gmail.com

**e-mail: nakudr@gmail.com

***e-mail: aakutukov@mephi.ru

Поступила в редакцию 19.07.19 г.

После доработки 31.07.2019 г.

Принята к публикации 27.08.2019 г.

Задача классификации обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих аналитические решения, является классической. В данной работе рассматривается задача классификации обыкновенных дифференциальных уравнений, точные решения которых выражаются через эллиптическую функцию Вейерштрасса. Алгоритм поиска таких уравнений следующий. Сначала выбирается порядок полюса при разложении решения уравнения в ряд Лорана в окрестности особой точки. Затем задается порядок обыкновенного дифференциального уравнения, которое хотим построить. После этого с помощью многоугольника Ньютона строится общий вид дифференциального уравнения, принимая во внимание порядок полюса и порядок уравнения. Затем ищутся ограничения на параметры построенного обыкновенного дифференциального уравнения в общем виде, при которых имеются решения, выраженные через эллиптическую функцию Вейерштрасса. Во втором разделе данной работы приведены теоремы, которые использованы для поиска ограничений на параметры. В последующих пяти разделах этой работы описанный алгоритм применяется для построения автономных нелинейных полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков. Кроме того, в этих разделах приведены нелинейные автономные обыкновенные дифференциальные уравнения и их решения, выраженные через эллиптическую функцию Вейерштрасса.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, эллиптическая функция Вейерштрасса, точные решения

DOI: 10.1134/S2304487X19050031

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача классификации обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих аналитические решения, является классической. Ей посвящены работы Фукса, Брио, Буке и Пуанкаре. Особенно яркий след в этой области оставил Пенлеве. Еще более века назад ему вместе со своими учениками удалось найти пятьдесят три канонических нелинейных дифференциальных уравнения второго порядка в полиномиальной форме, общие решения которых не имеют критических подвижных точек [1–3]. Про такие уравнения говорят, что они обладают свойством Пенлеве [5, 4]. Однако свойство Пенлеве является лишь необходимым условием интегрируемости дифференциального уравнения.

Данная работа посвящена классификации нелинейных автономных полиномиальных дифференциальных уравнений, точные решения которых выражаются через эллиптическую функцию Вейерштрасса. Эти уравнения имеют точные решения, но не все из них являются интегрируемыми в том смысле, что имеют общие решения, выраженные в аналитическом виде. Таким образом, нами делается попытка расширения класса дифференциальных уравнений, имеющих точные решения.

Работа построена следующим образом. Во втором разделе описан алгоритм построения уравнений, решения которых выражаются через эллиптическую функцию Вейерштрасса. В последующих разделах построены нелинейные автономные дифференциальные уравнения тре-

тьего и четвертого порядков в полиномиальной форме и их точные решения. Эти решения важны, так как ряд нелинейных эволюционных уравнений сводится к нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям с решениями в форме полученных в работе решений.

2. МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть задано автономное нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$E[y(z)] = 0, \tag{2.1}$$

где $E[y(z)]$ – полином по $y(z)$ и ее производным. Так как уравнение автономное, для каждого решения $y(z)$ существует семейство решений $y(z - z_0)$. Без ограничения общности опустим константу z_0 . Предположим, что уравнение (2.1) имеет N различных асимптотических разложений решения в ряд Лорана в окрестности полюса $z = 0$

$$y^{(i)}(z) = \sum_{k=1}^{p_i} \frac{c_k^{(i)}}{z^k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(i)} z^k, \quad 0 < |z| < \varepsilon_i, \tag{2.2}$$

$$i = 1, \dots, N.$$

Здесь p_i – порядок полюса $z = 0$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Все мероморфные эллиптические решения уравнения (2.1) при $N = 1$ имеют следующий вид:*

$$y(z) = \left\{ \sum_{k=2}^p \frac{(-1)^k c_{-k}}{(k-1)! dz^{k-2}} \right\} \wp(z, \omega_1, \omega_2) + h_0. \tag{2.3}$$

Необходимым условием существования такого решения является $c_1 = 0$.

Теорема 2. *Все мероморфные эллиптические решения уравнения (2.1) при $N > 1$ имеют следующий вид:*

$$y(z) = \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{k=2}^{p_i} \frac{(-1)^k c_{-k}^{(i)}}{(k-1)! dz^{k-2}} \right\} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{4} \left[\frac{\wp_z(z) + B_i}{2(\wp(z) - A_i)} \right]^2 - \wp(z) \right) + \sum_{i \in I} \frac{c_{-1}^{(i)} (\wp_z(z) + B_i)}{2(\wp(z) - A_i)} +$$

$$+ \left\{ \sum_{k=2}^{p_{i_0}} \frac{(-1)^k c_{-k}^{(i_0)}}{(k-1)!} \right\} \wp(z) + h_0. \tag{2.4}$$

Здесь $\wp(z, \omega_1, \omega_2) \stackrel{\text{def}}{=} \wp(z)$. Необходимым условием существования такого решения является

$$\sum_{i \in I} c_{-1}^{(i)} + c_{-1}^{(i_0)} = 0.$$

Доказательства этих теорем можно найти в работах [6–8].

В этой работе мы занимаемся поиском автономных полиномиальных дифференциальных уравнений с эллиптическими решениями. Применяемый в данной работе алгоритм состоит из следующих шагов [9, 10].

Первый шаг – построение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения в общем виде при помощи многоугольников Ньютона [10–12]. Для построения многоугольников Ньютона в данной работе использовалась программа [13].

В соответствии с книгой Брюно [14] введем некоторые определения. Выражения вида $C_1 z^{p_1} y^{p_2}$ называются мономами. C_1 здесь произвольная константа. Произведение монома и конечного числа производных $\frac{d^k y}{dz^k}$ ($k \in \mathbb{N}$) носит название дифференциального монома.

Предположим, что мы ищем точные решения дифференциального уравнения в полиномиальной форме (2.1). Каждому его моному можно поставить в соответствие точку на плоскости следующим образом

$$C_1 z^{p_1} y^{p_2} \rightarrow (q_1, q_2), \quad C_2 \frac{d^k y}{dz^k} \rightarrow (-k, 1).$$

C_1 и C_2 здесь – произвольные константы. При перемножении мономов их координаты складываются. Множество точек, соответствующее всем мономам дифференциального уравнения, образует носитель этого уравнения.

Соединив точки носителя в выпуклую фигуру, мы получим многоугольник Ньютона дифференциального уравнения (2.1). Углы и вершины многоугольника в основном определяют степенные или нестепенные асимптотики и разложение в ряд решения уравнения. Используя многоугольники Ньютона, можно легко найти общую форму нелинейного дифференциального уравнения с неизвестными параметрами.

Алгоритм поиска общей формы уравнения следующий. Сначала выбираются порядок дифференциального уравнения, которое хотим построить, и порядок полюса при разложении решения этого уравнения в ряд Лорана в окрестности особой точки. Одним из ведущих членов искомого уравнения выбирается производная высшего порядка. Мономы остальных ведущих членов ищутся из соображения, что они должны иметь ту же степень, что и моном высшей производной. В результате первого шага мы имеем нелинейное дифференциальное уравнение в полиномиальной форме.

Второй шаг – поиск ограничений на параметры построенного дифференциального уравнения общего вида, при которых это уравнение имеет точные решения. Существует очень много спосо-

бов построения решений нелинейных неинтегрируемых дифференциальных уравнений [15–17]. При выполнении этого шага для поиска решений уравнений общего вида мы пользуемся теоремами 3 и 4.

3. УРАВНЕНИЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С РЕШЕНИЕМ, ИМЕЮЩИМ ПОЛЮС ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка вида (2.1) с решением, имеющим полюс первого порядка. Предполагаем, что y_{zzz} является одним из ведущих членов этого уравнения. Тогда все остальные ведущие члены можно найти при помощи степенной геометрии. Мономы ведущих членов должны давать значение с тем же полюсом, что и моном третьей производной. Обозначим координаты мономов ведущих членов как (m, n) . В случае уравнения третьего порядка с решением, имеющим полюс первого порядка, получаем, что m и n являются корнями следующего уравнения

$$|m| + n = 4, \quad n \in \mathbb{N}^0, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad -3 < m \leq 0. \quad (3.1)$$

Отсюда получается, что координаты мономов других ведущих членов $(0, 4)$, $(-1, 3)$, $(-2, 2)$ и другими ведущими членами являются y^4 , $y_z y^2$, $y_{zz} y$, $y_z^2 y$. Построив многоугольник Ньютона уравнения с ведущими членами и заполнив его точками с целочисленными координатами (рис. 1), получим общий вид дифференциального уравнения третьего порядка типа (2.1) с решением, имеющим полюс первого порядка

$$y_{zzz} + a_1 y_z + a_2 y_{zz} + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + b_4 y^4 + c_1 y y_{zz} + c_2 y_z^2 + c_3 y y_z + c_4 y^2 y_z = 0, \quad (3.2)$$

где $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, c_4$ – параметры уравнения.

Без ограничения общности положим $c_4 = -6$. Также примем $b_4 = 0$ и будем рассматривать уравнение

$$y_{zzz} + a_1 y_z + a_2 y_{zz} + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + c_1 y y_{zz} + c_2 y_z^2 + c_3 y y_z - 6 y^2 y_z = 0. \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) имеет два разложения решения в ряд Лорана в окрестности полюса

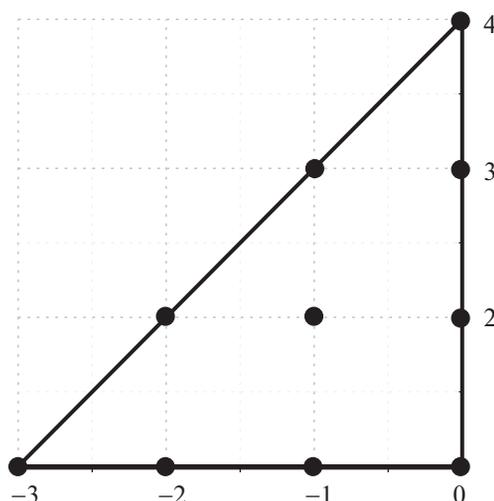


Рис. 1. Многоугольник Ньютона уравнения (3.2).

$$y(z) = \left(-\frac{c_1}{6} - \frac{c_2}{12} + \frac{\sqrt{4c_1^2 + 4c_1 c_2 + c_2^2 + 144}}{12} \right) \frac{1}{z} + \dots \quad (3.4)$$

$$y(z) = \left(-\frac{c_1}{6} - \frac{c_2}{12} - \frac{\sqrt{4c_1^2 + 4c_1 c_2 + c_2^2 + 144}}{12} \right) \frac{1}{z} + \dots$$

При $c_2 = -2c_1$ решение уравнения (3.3) можно искать в виде

$$y(z) = -\frac{\wp_z(z, g_2, g_3) + B_1}{2(\wp(z, g_2, g_3) - A_1)} + h_0. \quad (3.5)$$

При $h_0 = 0$ разложение (3.5) имеет вид

$$y(z) = \frac{1}{z} + A_1 z - \frac{B_1 z^2}{2} + \left(A_1^2 - \frac{6c_1 A_1^2 + 2a_2 B_1}{20c_1} \right) z^3 - \frac{B_1 A_1}{2} z^4 + o(z^5). \quad (3.6)$$

Подставив это разложение в (3.3) и последовательно приравняв коэффициенты при различных степенях z к нулю, получим значения параметров

$$\begin{aligned} c_3 &= 0, \quad A_1 = -\frac{b_2}{6c_1}, \quad B_1 = \frac{a_2 b_2 + b_1 c_1}{6c_1^2}, \\ g_2 &= \frac{2a_2^2 b_2 + 2a_2 b_1 c_1 + b_2^2 c_1}{12c_1^3}, \\ a_1 &= -\frac{b_2}{c_1}, \quad g_3 = \frac{6a_2 b_1 b_2 + 6b_1^2 c_1 + b_2^3}{216c_1^3}, \\ b_3 &= -2a_2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

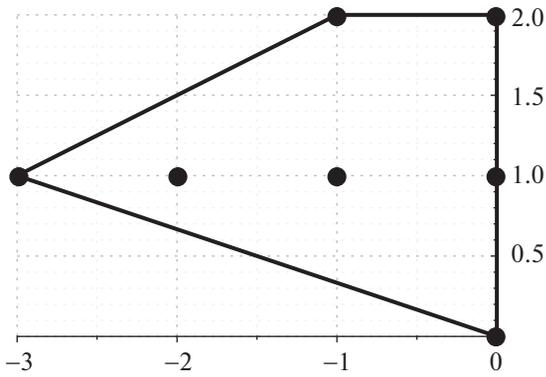


Рис. 2. Многоугольник Ньютона уравнения (4.2).

Итак, мы получили, что формула (3.5) является решением уравнения (3.3) при значениях параметров (3.7).

4. УРАВНЕНИЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С РЕШЕНИЕМ, ИМЕЮЩИМ ПОЛЮС ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка (2.1), которое имеет решение с полюсом второго порядка. Как и в предыдущем разделе, обозначим координаты мономов ведущих членов как (m, n) . В случае уравнения третьего порядка с решением, имеющим полюс второго порядка, получаем, что m и n являются корнями следующего уравнения

$$|m| + 2n = 5, \quad n \in \mathbb{N}^0, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad -3 < m \leq 0. \quad (4.1)$$

Отсюда получается, что координаты мономов других ведущих членов $(-1, 2)$ и второй ведущий

член $-uy_z$. Построив многоугольник Ньютона уравнения с ведущими членами и заполнив его точками с целочисленными координатами (рис. 2), получим общий вид дифференциального уравнения третьего порядка типа (2.1) с решением, имеющим полюс второго порядка

$$y_{zzz} + a_2y_{zz} + a_3y_z + a_4uy_z + a_5y^2 + a_6y + a_7 = 0. \quad (4.2)$$

Пусть $y = \frac{y'}{a_4}$, тогда, опуская штрихи, уравнение (4.2) запишем в виде

$$y_{zzz} + a_2y_{zz} + a_3y_z + uy_z + \tilde{a}_5y^2 + a_6y + a_7 = 0, \quad (4.3)$$

где $\tilde{a}_5 = \frac{a_5}{a_4}$. Уравнение, состоящее из ведущих членов уравнения (4.2), имеет вид

$$y_{zzz} + uy_z = 0. \quad (4.4)$$

Подстановка $y(z) = \frac{a_0}{(z-z_0)^p}$ в уравнение (4.3) приводит к $(a_0, p) = (0, 2)$ и $(a_0, p) = (-12, 2)$. При помощи подстановки $y(z) = \frac{-12}{(z-z_0)^2} + \beta(z-z_0)^{r-2}$ находят-ся индексы Фукса $r_1 = -1, r_2 = 4, r_3 = 6$. Подстановка

$$y(z) = \sum_{i=-2}^{\infty} c_i(z-z_0)^i \quad (4.5)$$

в уравнение (4.3) позволяет найти коэффициенты разложения в ряд Лорана решения уравнения. Необходимое условие существования эллиптических решений $c_{-1} = 0$ приводит к выражению $a_5 = \frac{a_2}{2}$. При нахождении коэффициентов c_i получается ограничение на параметры уравнения (4.3) $a_6 = a_2a_3$. Разложение решения уравнения (4.3) до десятого порядка включительно

$$y(z) = -\frac{12}{(z-z_0)^2} - a_3 - \frac{(a_3^2a_2 - 2a_7)}{20a_2} \times (z-z_0)^2 + c_4(z-z_0)^4 - \frac{(a_3^2a_2 - 2a_7)^2}{14400a_2^2} (z-z_0)^6 + \frac{(a_3^2a_2 - 2a_7)c_4}{880a_2} (z-z_0)^8 - \frac{(a_2^3a_3^6 - 6a_2^2a_3^4a_7 + 144000a_2^3c_4^2 + 12a_2a_3^2a_7^2 - 8a_7^3)}{22464000a_2^3} (z-z_0)^{10} \quad (4.6)$$

содержит две произвольные константы z_0 и c_4 и не проходит тест Пенлеве. После обозначения параметров $a_2 = b_1, a_3 = b_2, a_7 = b_3$ уравнение (4.3) с учетом ограничений на параметры принимает вид

$$y_{zzz} + b_1y_{zz} + b_2y_z + uy_z + \frac{b_1}{2}y^2 + b_1b_2y + b_3 = 0. \quad (4.7)$$

Ищутся точные решения уравнения (4.7), выраженные через эллиптическую функцию Вейерштрасса $\wp(z, g_2, g_3)$.

1. Пусть решение уравнения (4.7) имеет одно разложение в ряд Лорана в окрестности $z = 0$ (по-

скольку рассматривается автономное уравнение, то без ограничения общности константа z_0 опускается). Тогда точное решение уравнения (4.7) ищется в виде

$$y(z) = c_{-2}\wp(z, g_2, g_3) + h_0. \quad (4.8)$$

Подстановка выражения (4.8) в уравнение (4.7) позволяет найти точное решение уравнения (4.7)

$$y(z) = -12\wp\left(z, \frac{b_1b_2^2 - 2b_3}{12b_1}, g_3\right) - b_2. \quad (4.9)$$

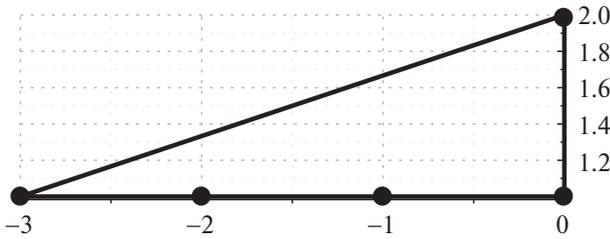


Рис. 3. Многоугольник Ньютона уравнения (5.2).

В случае, когда $g_2^3 - 27g_3^2 = 0$, эллиптическое решение вырождается, то есть условие вырождения выглядит следующим образом

$$g_3 = \pm \left(\frac{b_1 b_2^2 - 2b_3}{36b_1} \right)^{\frac{3}{2}}. \tag{4.10}$$

2. Пусть решение уравнения (4.7) имеет два разложения в ряд Лорана в окрестности $z = 0$. Тогда точное решение уравнения (4.7) ищется в виде

$$y(z) = \frac{c_{-2}}{4} \left(\frac{\wp_z(z, g_2, g_3) + B_1}{\wp(z, g_2, g_3) - A_1} \right)^2 + h_0. \tag{4.11}$$

Точное решение уравнения (4.7) вида (4.11) выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{-2} &= -12, & h_0 &= -b_2 + 48A_2, & A_1 &= A_2, & B_1 &= -B_2, \\ B_2 &= \frac{\sqrt{3}(144A_2^2 b_1 - b_1 b_2^2 + 2b_3)}{1296\sqrt{A_2} b_1}, & g_2 &= \frac{1440A_2^2 b_1 - b_1 b_2^2 + 2b_3}{108b_1}, \\ g_3 &= \frac{(-5246208A_2^4 + 5472A_2^2 b_2^2 - b_2^4) b_1^2 + (-10944A_2^2 b_3 + 4b_2^2 b_3) b_1 - 4b_3^2}{559872A_2 b_1^2}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Условие вырождения эллиптического решения $g_2^3 - 27g_3^2 = 0$ имеет вид

$$A_2 = \pm \frac{\sqrt{b_1(b_1 b_2^2 - 2b_3)}}{12b_1}, \quad A_2 = \pm \frac{\sqrt{b_1(b_1 b_2^2 - 2b_3)}}{36b_1}. \tag{4.17}$$

Таким образом, формулы (4.9), (4.12) при значениях параметров (4.13) и (4.16) при значениях параметров (4.16) являются решениями уравнения (4.7).

5. УРАВНЕНИЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С РЕШЕНИЕМ, ИМЕЮЩИМ ПОЛЮС ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка (2.1), которое имеет решение с полюсом третьего порядка. Снова обозначим координаты мономов ведущих членов как (m, n) . В случае уравнения третьего порядка с решением, имеющим полюс третьего порядка, получаем, что m и n являются корнями следующего уравнения

$$y(z) = -3 \left(\frac{\wp_z(z, g_2, g_3)}{\wp(z, g_2, g_3) - A_1} \right)^2 - b_2 + 24A_1, \tag{4.12}$$

где

$$g_2 = \frac{720A_1^2 b_1 - b_1 b_2^2 + 2b_3}{48b_1}, \tag{4.13}$$

$$g_3 = -\frac{A_1(528A_1^2 b_1 - b_1 b_2^2 + 2b_3)}{48b_1}.$$

Условие вырождения эллиптического решения $g_2^3 - 27g_3^2 = 0$ имеет вид

$$A_1 = \pm \frac{\sqrt{b_1(b_1 b_2^2 - 2b_3)}}{12b_1}. \tag{4.14}$$

3. Пусть решение уравнения (4.7) имеет три разложения в ряд Лорана в окрестности $z = 0$. Тогда точное решение уравнения (4.7) ищется в виде

$$y(z) = \frac{c_{-2}}{4} \left(\frac{\wp_z(z, g_2, g_3) + B_1}{\wp(z, g_2, g_3) - A_1} \right)^2 + \frac{c_{-2}}{4} \left(\frac{\wp_z(z, g_2, g_3) + B_2}{\wp(z, g_2, g_3) - A_2} \right)^2 - c_{-2} \wp(z, g_2, g_3) + h_0. \tag{4.15}$$

Уравнению (4.7) соответствует решение вида (4.16) с параметрами

$$|m| + 3n = 6, \quad n \in \mathbb{N}^0, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad -3 < m \leq 0. \tag{5.1}$$

Получаем, что координаты мономов других ведущих членов $(0, 2)$ и второй ведущий член $-y^2$. Построив многоугольник Ньютона уравнения с ведущими членами и заполнив его точками с целочисленными координатами (рис. 3), получим общий вид дифференциального уравнения третьего порядка типа (2.1) с решением, имеющим полюс третьего порядка

$$y_{zzz} = a_1 y_z + a_2 y_{zz} + b_1 y + b_2 y^2. \tag{5.2}$$

Без ограничения общности можем предположить, что $b_2 = -60$ и рассмотрим уравнение

$$y_{zzz} = a_1 y_z + a_2 y_{zz} + b_1 y - 60y^2. \tag{5.3}$$

У уравнения (5.3) есть одно разложение решения в ряд Лорана в окрестности полюса, которое выглядит следующим образом:

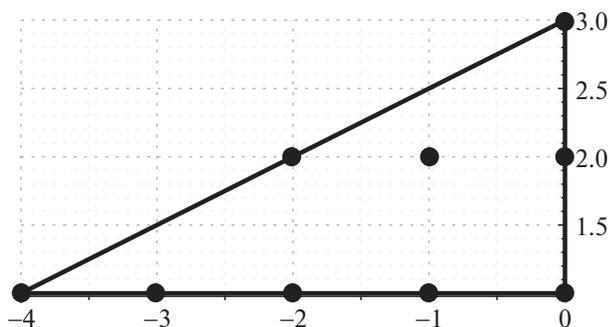


Рис. 4. Многоугольник Ньютона уравнения (6.2).

$$y(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{a_2}{8} \frac{1}{z^2} - \left(\frac{a_2^2}{608} + \frac{a_1}{38} \right) \frac{1}{z} + \frac{13}{72960} a_2^3 + \frac{7}{9120} a_1 a_2 + \frac{b_1}{120} + \dots \quad (5.4)$$

При $a_1 = -a_2^2/16$ решение уравнения (5.3) можно искать в виде

$$y(z) = h_0 + \frac{a_2}{8} \wp(z, g_2, g_3) - \frac{1}{2} \wp_z(z, g_2, g_3). \quad (5.5)$$

Разложим (5.5) в ряд Лорана

$$y(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{a_2}{8} 1z + \frac{a_2^3}{7680} + \frac{b_1}{120} - \frac{1}{61440} a_2^4 z + \dots \quad (5.6)$$

и подставим это разложение в (5.3). Приравняв к нулю коэффициенты при различных степенях z , получим

$$h_0 = \frac{a_2^3}{7680} + \frac{b_1}{120}, \quad g_2 = \frac{a_2^4}{3072}, \quad g_3 = \frac{13a_2^6}{4423680} - \frac{b_1^2}{2160}. \quad (5.7)$$

Таким образом, формула (5.5) является решением уравнения (5.3) при ограничениях на параметры (5.7).

$$a_3 = \frac{c_3(-51c_1^2 - 58c_1c_2 - 16c_2^2 - 5040c_1 - 3360c_2 - 100800)}{(-120 - 6c_1 - 4c_2)(2c_1 + 3c_2)}. \quad (6.4)$$

При выполнении всех перечисленных в разделе условий решение уравнения (6.2) можно искать в виде

$$y(z) = \frac{(\wp_z(z, g_2, g_3) + B_1)^2}{4(\wp(z, g_2, g_3) - A_1)^2} - \wp(z, g_2, g_3) - \frac{60 \wp(z, g_2, g_3)}{3c_1 + 2c_2 + 60} + h_0 - \frac{5c_3(3c_1 + 2c_2 + 120)(\wp_z(z, g_2, g_3) + B_1)^2}{4(3c_1 + 2c_2 + 60)(2c_1 + 3c_2)(\wp(z, g_2, g_3) - A_1)^2}. \quad (6.5)$$

6. УРАВНЕНИЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С РЕШЕНИЕМ, ИМЕЮЩИМ ПОЛЮС ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим дифференциальное уравнение четвертого порядка (2.1), которое имеет решение с полюсом второго порядка. Обозначим координаты мономов ведущих членов как (m, n) . В случае уравнения третьего порядка с решением, имеющим полюс второго порядка, получаем, что m и n являются корнями следующего уравнения

$$|m| + 2n = 6, \quad n \in \mathbb{N}^0, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad -4 < m \leq 0. \quad (6.1)$$

Отсюда получается, что координаты мономов других ведущих членов $(0, 3)$, $(-2, 2)$ и остальными ведущими членами являются y^3 , uy_{zz} . Построив многоугольник Ньютона уравнения с ведущими членами и заполнив его точками с целочисленными координатами (рис. 4), получим общий вид дифференциального уравнения четвертого порядка типа (2.1) с решением, имеющим полюс второго порядка

$$y_{zzzz} + a_1 y_z + a_2 y_{zz} + a_3 y_{zzz} + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + c_1 u y_{zz} + c_2 y_z^2 + c_3 u y_z = 0. \quad (6.2)$$

Без ограничения общности положим $b_3 = -120 - 6c_1 - 4c_2$. Уравнение (6.2) имеет два разложения решения в ряд Лорана в окрестности полюса

$$y^{(1)}(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{5c_3(3c_1 + 2c_2 + 120)}{4(3c_1 + 2c_2 + 60)(2c_1 + 3c_2)z} + \dots$$

$$y^{(2)}(z) = -\frac{60}{(3c_1 + 2c_2 + 60)z^2} + \frac{5c_3(3c_1 + 2c_2 + 120)}{4(3c_1 + 2c_2 + 60)(2c_1 + 3c_2)z} + \dots \quad (6.3)$$

Из условия $c_{-1}^{(1)} + c_{-1}^{(2)} = 0$ следует равенство

Разложение (6.5) в ряд выглядит следующим образом

$$y(z) = -\frac{60}{(3c_1 + 2c_2 + 60)z^2} + \frac{5c_3(3c_1 + 2c_2 + 120)}{2(3c_1 + 2c_2 + 60)(2c_1 + 3c_2)z} + 2A_1 + h_0 + \dots \quad (6.6)$$

Подставим (6.6) в уравнение (6.2) и, последовательно приравнявая коэффициенты при степенях z к нулю, получим значения параметров

$$c_2 = -\frac{3c_1}{2} - 60, \quad A_1 = -\frac{a_1}{2c_3}, \quad B_1 = 0, \quad g_2 = \frac{3a_1^2}{4c_3^2}, \quad (6.7)$$

$$b_1 = -\frac{12(a_2c_3 + 12a_1)a_1}{c_3^2}, \quad g_3 = -\frac{a_1^3}{8c_3^3}.$$

Итак, уравнение (6.2) имеет решение (6.5) при ограничениях на параметры (6.7).

7. УРАВНЕНИЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С РЕШЕНИЕМ, ИМЕЮЩИМ ПОЛЮС ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассмотрим дифференциальное уравнение четвертого порядка (2.1), которое имеет решение с полюсом третьего порядка. Обозначим координаты мономов ведущих членов как (m, n) . В случае уравнения третьего порядка с решением, имеющим полюс третьего порядка, получаем, что m и n являются корнями следующего уравнения

$$|m| + 3n = 7, \quad n \in \mathbb{N}^0, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad -4 < m \leq 0. \quad (7.1)$$

Отсюда получается, что координаты мономов других ведущих членов $(-1, 2)$ и вторым ведущим членом является $y_z y$. Построив многоугольник Ньютона уравнения с ведущими членами и заполнив его точками с целочисленными координатами (рис. 5), получим общий вид дифференциального уравнения четвертого порядка типа (2.1) с решением, имеющим полюс третьего порядка

$$y_{zzzz} + a_1 y_z + a_2 y_{zz} + a_3 y_{zzz} + b_1 y + b_2 y^2 + c_1 y y_z = 0. \quad (7.2)$$

Уравнение (7.2) имеет одно разложение решения в ряд Лорана в окрестности полюса:

$$y(z) = \frac{120}{c_1 z^3} - \frac{15(a_3 c_1 - 2b_2)}{c_1^2 z^2} + \frac{-15a_3^2 c_1^2 + 240a_2 c_1^2 - 420a_3 b_2 c_1 + 900b_2^2}{76c_1^3 z} + \dots \quad (7.3)$$

Для поиска эллиптических решений уравнения (7.2) необходимо выполнение условия $c_1 = 0$. Поэтому положим

$$a_2 = \frac{a_3^2 c_1^2 + 28a_3 b_2 c_1 - 60b_2^2}{16c_1^2}. \quad (7.4)$$

Тогда решение уравнения (7.2) можно искать в виде

$$y(z) = -\frac{15(a_3 c_1 - 2b_2)}{c_1^2} \wp(z, g_2, g_3) - \frac{60}{c_1} \wp_z(z, g_2, g_3) + h_0. \quad (7.5)$$

Разложение (7.5) в ряд имеет вид

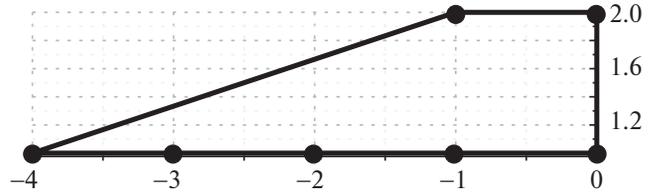


Рис. 5. Многоугольник Ньютона уравнения (7.2).

$$y(z) = \frac{120}{c_1 z^3} - \frac{15(a_3 c_1 - 2b_2)}{c_1^2 z^2} + h_0 - \frac{6g_2 z}{c_1} - \frac{3(a_3 c_1 - 2b_2)g_2 z^2}{4c_1^2} - \frac{60g_3 z^3}{7c_1} + \dots \quad (7.6)$$

Подставив (7.6) в (7.2) и последовательно приравняв коэффициенты при степенях z к нулю, получим следующие значения параметров

$$b_1 = -\frac{(a_3^3 c_1^3 - 6a_3^2 b_2 c_1^2 + 64c_1^4 h_0 + 12b_2^2 a_3 c_1 - 8b_2^3) b_2}{32c_1^4},$$

$$h_0 = \frac{(-a_3^3 - 64a_1) c_1^3 + 14a_3^2 b_2 c_1^2 - 44b_2^2 a_3 c_1 + 40b_2^3}{64c_1^4}, \quad (7.7)$$

$$g_2 = \frac{(a_3 c_1 - 2b_2)^4}{3072c_1^4}.$$

$$g_3 = (25a_3^6 c_1^6 - 300a_3^5 b_2 c_1^5 - 128a_3^3 c_1^7 h_0 + 1500a_3^4 b_2^2 c_1^4 + 768a_3^2 b_2 c_1^6 h_0 - 4096c_1^8 h_0^2 - 4000a_3^3 b_2^3 c_1^3 - 1536a_3 b_2^2 c_1^5 h_0 + 6000a_3^2 b_2^4 c_1^2 + 1024b_2^3 c_1^4 h_0 - 4800a_3 b_2^5 c_1 + 1600b_2^6) / 8847360c_1^6. \quad (7.8)$$

Итак, мы получили, что решение уравнения (7.2) задается формулой (7.5) при ограничениях на параметры (7.7) и (7.8).

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была рассмотрена задача классификации обыкновенных дифференциальных уравнений, точные решения которых выражаются через эллиптическую функцию Вейерштрасса.

Алгоритм построения таких дифференциальных уравнений и используемые теоремы были приведены во втором разделе работы. В последующих пяти разделах были построены некоторые дифференциальные уравнения третьего и четвертого порядков в полиномиальной форме, точные решения которых выражаются через эллиптическую функцию Вейерштрасса.

Исследование выполнено за счет средств гранта РФФИ (проект № 18-29-10039).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Painlevé P. Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme // Bulletin de la Société Mathématique de France. 1900. Т. 28. P. 201–261.
2. Painlevé P. et al. Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme // Acta mathematica. 1902. Т. 25. С. 1–85.
3. Painlevé P. Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes // CR Acad. Sci. Paris. 1906. Т. 143. С. 1111–1117.
4. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2010.
5. Ablowitz M.J. et al. Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering. Cambridge university press, 1991. Т. 149.
6. Лаврентьев М.А., Шабам Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951.
7. Demina M.V., Kudryashov N.A. Explicit expressions for meromorphic solutions of autonomous nonlinear ordinary differential equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2011. Т. 16. № 3. С. 1127–1134.
8. Demina M.V., Kudryashov N.A. From Laurent series to exact meromorphic solutions: The Kawahara equation // Physics Letters A. 2010. Т. 374. № 39. С. 4023–4029.
9. Kudryashov N.A. Nonlinear differential equations with exact solutions expressed via the Weierstrass function // Zeitschrift für Naturforschung A. 2004. Т. 59. № 7–8. С. 443–454.
10. Kudryashov N.A., Sinelshchikov D.I. Nonlinear differential equations of the second, third and fourth order with exact solutions // Applied Mathematics and Computation. 2012. Т. 218. № 21. С. 10454–10467.
11. Kudryashov N.A., Demina M.V. Polygons of differential equations for finding exact solutions // Chaos, Solitons & Fractals. 2007. Т. 33. № 5. С. 1480–1496.
12. Demina M.V., Kudryashov N.A., Sinel'shchikov D.I. The polygonal method for constructing exact solutions to certain nonlinear differential equations describing water waves // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2008. Т. 48. № 12. С. 2182.
13. Кудряшов Н.А., Кутуков А.А. Программа для построения многоугольников Ньютона, соответствующих обыкновенным дифференциальным уравнениям полиномиального вида // Свидетельство о государственной регистрации программы на ЭВМ № 2019617572 от 17.06.2019
14. Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука, 1998.
15. Parkes E.J., Duffy B.R., Abbott P.C. The Jacobi elliptic-function method for finding periodic-wave solutions to nonlinear evolution equations. 2002.
16. Parkes E.J., Duffy B.R. An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations // Computer physics communications. 1996. Т. 98. № 3. С. 288–300.
17. Кудряшов Н.А. Методы построения решений нелинейных неинтегрируемых дифференциальных уравнений // Вестник Национального исследовательского ядерного университета МИФИ. 2015. Т. 4. № 2. С. 127.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2019, vol. 8, no. 5, pp. 428–436

Nonlinear Differential Equations of the Third and Fourth orders with Exact Solutions Expressed in terms of the Weierstrass Elliptic Function

S. F. Lavrova^{a,#}, N. A. Kudryashov^{a,##}, and A. A. Kutukov^{a,###}

^a National Research Nuclear University MEPHI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: infuriatedot@gmail.com

^{##}e-mail: nakudr@gmail.com

^{###}e-mail: aakutukov@mephi.ru

Received July 19, 2019; revised July 31, 2019; accepted August 27, 2019

Abstract—The classification of ordinary differential equations with exact solutions is a classical mathematical problem. In this work, the classification problem is considered for ordinary differential equations with solutions expressed in terms of the Weierstrass elliptic function. The algorithm of search for such equations is as follows. First, the order of the singularity of the solution is chosen. Then, the order of the sought nonlinear differential equation is set. Next, Newton polygons are used to write the general form of the nonlinear differential equation taking into account the singularity of the solution and the given order for the nonlinear differential equation. After that, limitations for the parameters are found so that the general form of the nonlinear differential equation has an exact solution expressed in terms of the Weierstrass elliptic function. Theorems used to look for parameter limitations are presented. The nonlinear autonomous ordinary differential equa-

tions of the third and fourth orders are constructed using the described algorithm. Moreover, nonlinear autonomous differential equations and their solutions expressed in terms of the Weierstrass elliptic function are presented.

Keywords: nonlinear differential equations, Weierstrass elliptic function, exact solutions

DOI: 10.1134/S2304487X19050031

REFERENCES

1. Painlevé P. Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme // Bulletin de la Société Mathématique de France. 1900. V. 28. P. 201–261.
2. Painlevé P. et al. Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme // Acta mathematica. 1902. V. 25. P. 1–85.
3. Painlevé P. Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes // CR Acad. Sci. Paris. 1906. V. 143. P. 1111–1117.
4. Kudryashov N.A. Methods of Nonlinear Mathematical Physics // Publisher Ios Intellect – 2010 (in Russian).
5. Ablowitz M.J. et al. Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering. – Cambridge university press, 1991. V. 149.
6. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Methods of Theory of Functions of Complex Variables. – Nauka, 1965. P. 716 (in Russian).
7. Demina M.V., Kudryashov N.A. Explicit expressions for meromorphic solutions of autonomous nonlinear ordinary differential equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2011. V. 16. № 3. P. 1127–1134.
8. Demina M.V., Kudryashov N.A. From Laurent series to exact meromorphic solutions: The Kawahara equation // Physics Letters A. 2010. V. 374. № 39. P. 4023–4029.
9. Kudryashov N.A. Nonlinear differential equations with exact solutions expressed via the Weierstrass function // Zeitschrift für Naturforschung A. 2004. V. 59. № 7–8. P. 443–454.
10. Kudryashov N.A., Sinel'shchikov D.I. Nonlinear differential equations of the second, third and fourth order with exact solutions // Applied Mathematics and Computation. 2012. V. 218. № 21. P. 10454–10467.
11. Kudryashov N.A., Demina M.V. Polygons of differential equations for finding exact solutions // Chaos, Solitons & Fractals. 2007. V. 33. № 5. P. 1480–1496.
12. Demina M.V., Kudryashov N.A., Sinel'shchikov D.I. The polygonal method for constructing exact solutions to certain nonlinear differential equations describing water waves // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2008. V. 48. № 12. P. 2182.
13. Kudryashov N.A., Kutukov A.A. The program for constructing Newton polygons corresponding to ordinary differential equations of polynomial type // The certificate of state registration of software № 2019617572 issued on 17.06.2019
14. Bruno A.D. Power Geometry in Algebraic and Differential Equations – Nauka, 1998 (in Russian).
15. Parkes E.J., Duffy B.R., Abbott P.C. The Jacobi elliptic-function method for finding periodic-wave solutions to nonlinear evolution equations. 2002.
16. Parkes E.J., Duffy B.R. An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations // Computer physics communications. 1996. V. 98. № 3. P. 288–300.
17. Kudryashov N.A. Methods of solution construction of nonlinear nonintegrable differential equations // Vestnik NIYaU MIFI. 2015. V. 4. № 2. P. 127 (in Russian).

ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ ВЕЩЕСТВЕННОГО ИНДЕКСА И РЯДЫ КРЕЙНА¹

© 2019 г. В. Б. Шерстюков^{1,*}, Е. В. Сумин^{1,**}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

*e-mail: shervb73@gmail.com

**e-mail: sumevbir@gmail.com

Поступила в редакцию 20.06.2019 г.

После доработки 20.06.2019 г.

Принята к публикации 25.06.2019 г.

Предыдущие исследования авторов были посвящены функциям Бесселя I рода $J_\nu(z)$ и модифицированным функциям Бесселя I рода (функциям Инфельда) $I_\nu(z)$ при $\nu > -1$. В настоящей работе рассматриваются функции Бесселя I рода произвольного вещественного индекса ν . Все нули любой такой функции являются простыми, причем лишь конечное число нулей (регулируемое теоремой Гурвица) может располагаться вне вещественной прямой. Привлекается построенная по $J_\nu(z)$ и имеющая те же нетривиальные нули вспомогательная четная целая функция экспоненциального типа $L(z; \nu)$ с параметром $\nu \in \mathbb{R}$. Это позволяет подключить к исследованию хорошо развитый аппарат целых функций. Подробно изучается вопрос о разложении обратной величины $1/L(z; \nu)$ в ряд простых дробей специальной структуры (ряд типа Крейна). Указанное общее разложение используется при получении формул для точного вычисления бесконечных сумм, содержащих отрицательные степени нулей функции Бесселя $J_\nu(z)$. Особое внимание уделяется целым и полужелтым значениям индекса ν . Приведены примеры конкретных разложений величины $1/J_\nu(z)$ и соответствующих суммационных формул при различных значениях $\nu \in \mathbb{R}$.

Ключевые слова: разложение на простые дроби, ряд Крейна, функция Бесселя вещественного индекса, нули бесселевых функций, суммационные соотношения

DOI: 10.1134/S2304487X19040102

ВВЕДЕНИЕ

Некоторое время назад было обнаружено [1], [2], что классические ряды Крейна (см. [3], [4, гл. V, § 6]) могут эффективно применяться при исследовании специальных функций Бесселя. Так, в работе авторов [1] для функции Бесселя I рода $J_\nu(z)$ с вещественным индексом $\nu > -1$ решена задача о представлении величины $1/J_\nu(z)$ в виде ряда простых дробей (ряда Крейна фиксированного порядка) и найдены формулы для вычисления особых структурированных сумм, составленных по нулям функции $J_\nu(z)$. В последующей статье [2] утверждения [1] перенесены на модифицированные функции Бесселя $I_\nu(z)$ (функции Инфельда). Центральную роль в математических обоснованиях играет критерий разложимости в ряд Крейна, установленный в [5] (см. также [6]) для обратной величины целой функции экспоненциального типа с нулями в поллосе.

Целью настоящей работы является распространение результатов статьи [1] на функции Бесселя $J_\nu(z)$ произвольного вещественного индекса ν . По всей видимости, разработанный авторами технический аппарат позволит охватить общий случай функций Бесселя с комплексным индексом ν . Однако такое обобщение требует дополнительного учета обстоятельств, вызванных “комплексификацией” ситуации. В этой связи укажем, что в огромном количестве классических и современных работ по бесселевым функциям, как правило, ограничиваются значениями $\nu \in \mathbb{R}$. Нам не удалось найти в литературе строгого и обстоятельного изложения теории функций $J_\nu(z)$ с произвольным $\nu \in \mathbb{C}$. Например, в фундаментальной серии недавних обзоров [7–10], посвященных нулям бесселевых функций, случай комплексного индекса фактически не освещен; лишь самую общую информацию о функциях $J_\nu(z)$ при $\nu \in \mathbb{C}$ содержит современный справочник [11, гл. 10]. В то же время, функции Бесселя I рода с комплексным (в частности, чисто мнимым) индексом ν активно используются в физике плазмы и корпускулярной оптике (см., например,

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00236.

[12, 13] и ссылки в них), и поэтому развитие соответствующего математического аппарата представляется перспективным.

Определенная сложность предпринятого нами обобщения состоит в том, что при отказе от ограничения $\nu > -1$ нули функции $J_\nu(z)$, как известно, “выходят” с вещественной оси в комплексную плоскость. Здесь мы подробно разберем ситуацию $\nu \leq -1$. Тем самым, в рамках интересующей нас проблематики [1] случай $\nu \in \mathbb{R}$ будет полностью рассмотрен.

Для предметного обсуждения задачи и доказательства основного результата работы (теорема 3 из разд. 2) понадобятся некоторые сведения из теории бесселевых функций [7, 11, 14–16] и одно общее утверждение статьи [5]. Приведем их в следующем разделе.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассматриваем функцию Бесселя I рода

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

где Γ обозначает гамма-функцию, $\nu \in \mathbb{C}$. Множитель $(z/2)^\nu$ в (1) делает $J_\nu(z)$, вообще говоря, бесконечнозначной, однако при любом заданном $\nu \in \mathbb{C}$ функция

$$L(z; \nu) \equiv \left(\frac{z}{2}\right)^\nu J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, \quad (2)$$

является по переменной z четной целой функцией экспоненциального типа.

Обсудим нюансы перехода от (1) к (2). Исключая из рассмотрения точку $z = 0$, видим, что с такой оговоркой множества нулей функций (1) и (2) совпадают. Вопрос о возможных кратностях нулей снимается сразу, поскольку при любом $\nu \in \mathbb{C}$ все нетривиальные (т.е. отличные от $z = 0$) нули функции Бесселя $J_\nu(z)$ являются простыми. Для значений $\nu \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ имеем $L(0; \nu) = 1/\Gamma(\nu + 1) \neq 0$. В исключительных случаях $\nu = -n$, где $n \in \mathbb{N}$, точка $z = 0$ является кратным нулем функции $L(z; \nu)$. Действительно, согласно (2) получим

$$\begin{aligned} L(z; -n) &\equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-n + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-n + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} = (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} L(z; n), \end{aligned}$$

и при этом $L(0; n) = 1/n! \neq 0$, поскольку

$$L(z; n) \equiv \left(\frac{z}{2}\right)^n J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, \quad (3)$$

$n \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{C}.$

Поэтому при $\nu = -n$, где $n \in \mathbb{N}$, удобно работать с функциями $J_n(z)$, $L(z; n)$, учитывая соотношения

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4)$$

$$L(z; -n) = (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} L(z; n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Всюду в дальнейшем считаем, что $\nu \in \mathbb{R}$, и вместо функции Бесселя (1) рассматриваем целую функцию (2), в частности (при $\nu \in \mathbb{Z}$) – функцию (3). Четная целая функция экспоненциального типа $L(z; \nu)$ с параметром $\nu \in \mathbb{R}$ имеет бесконечное (счетное) множество нулей, и все они, за исключением $z = 0$ при $\nu \in -\mathbb{N}$, являются простыми. Возможны следующие случаи.

I. Пусть $\nu > -1$. Тогда все нули функции (2) расположены на вещественной прямой, образуя множество $\{\pm\gamma_{\nu,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, где

$$0 < \gamma_{\nu,1} < \gamma_{\nu,2} < \dots < \gamma_{\nu,k} < \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{\nu,k} = +\infty, \quad (6)$$

с асимптотикой

$$\gamma_{\nu,k} = \pi k - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi \nu}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \rightarrow \infty. \quad (7)$$

II. Пусть $\nu \in -\mathbb{N}$. Тогда в силу связи (5) множество нулей функции $L(z; \nu) = L(z; -n)$, где $n \in \mathbb{N}$, записывается в виде $\{0\} \cup \{\pm\gamma_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ с нулем $z = 0$ кратности $2n$ и простыми нулями $\pm\gamma_{n,k}$. Здесь $\{\pm\gamma_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ образует последовательность всех нулей функции $L(z; n)$ из пункта I, подчиненных соотношениям (6), (7). Поэтому

$$0 < \gamma_{n,1} < \gamma_{n,2} < \dots < \gamma_{n,k} < \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{n,k} = +\infty,$$

с асимптотикой

$$\gamma_{n,k} = \pi k - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \rightarrow \infty.$$

III. Пусть $\nu < -1$, $\nu \notin -\mathbb{N}$. Обозначим через $s = [-\nu]$ целую часть числа $-\nu \in (1, +\infty) \setminus \mathbb{N}$. Тогда согласно классической теореме Гурвица нули функции (2) структурируются в виде

$$\{\pm\gamma_{\nu,k}\}_{k=1}^s \cup \{\pm\gamma_{\nu,k}\}_{k=s+1}^{\infty},$$

где первые $2s$ нулей $\pm\gamma_{v,k}$ при $k = 1, \dots, s$ являются комплексными (невещественными), причем для нечетных s два из этих нулей лежат на мнимой оси. Далее,

$$0 < \gamma_{v,s+1} < \gamma_{v,s+2} < \dots < \gamma_{v,k} < \dots, \quad (8)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{v,k} = +\infty,$$

с той же асимптотикой вида (7), записанной для нецелого параметра $v < -1$. Все нули $\pm\gamma_{v,k}$, $k \in \mathbb{N}$, по-прежнему простые.

При любом $v \in \mathbb{R}$ действует асимптотическая формула (см. [16, гл. 15])

$$J_v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi v}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right), \quad (9)$$

$x \rightarrow +\infty,$

и рекуррентная связь

$$J'_v(z) = -J_{v+1}(z) + \frac{v}{z} J_v(z). \quad (10)$$

Воспользуемся ими для выяснения асимптотического поведения производной $L'(z; v)$ в точках $\gamma_{v,k}$ при $k \rightarrow \infty$ (здесь и далее штрих означает производную по z). Случай I разобран в статье [1], а случай II тривиально сводится к нему. Сосредоточимся на случае III.

Пусть $v < -1$, $v \notin -\mathbb{N}$. Как сказано выше, все достаточно большие по модулю нули функции $J_v(z)$ являются вещественными. Привлекая (9), (10) по схеме работы [1], получим для указанных v соотношение

$$|J'_v(\gamma_{v,k})| \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma_{v,k}}}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Но тогда с учетом (2) для тех же v имеем

$$|L'(\gamma_{v,k}; v)| = \left(\frac{2}{\gamma_{v,k}}\right)^v |J'_v(\gamma_{v,k})| \sim \frac{A_v}{\gamma_{v,k}^{v+1/2}}, \quad k \rightarrow \infty, \quad (11)$$

где $A_v = 2^{v+1/2}/\sqrt{\pi} > 0$. В дальнейшем потребуются знать наименьшее значение $p \in \mathbb{Z}_+$, при котором сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\gamma_{v,k}|^{2p+1} |L'(\gamma_{v,k}; v)|}, \quad (12)$$

или (см. случай III) – ряд

$$\sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{v,k}^{2p+1} |L'(\gamma_{v,k}; v)|}$$

Ввиду (11) вопрос сводится к анализу условия

$$\sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{v,k}^{2p+1/2-v}} < +\infty,$$

эквивалентного, как показывает (7), условию $2p + 1/2 - v > 1$. Поскольку $v < -1$, то последнее заведомо выполнено при любом $p \in \mathbb{Z}_+$. Следовательно, ряд (12) сходится уже при $p = 0$, т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\gamma_{v,k}| |L'(\gamma_{v,k}; v)|} < +\infty, \quad v < -1, \quad v \notin -\mathbb{N}. \quad (13)$$

Сформулируем, наконец, общий результат о разложении на простые дроби, извлеченный из [5] (см. также [6]).

Теорема 1. Пусть $L(z)$ – четная целая функция экспоненциального типа с множеством $\Lambda(L) = \{\pm z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ простых нулей, расположенных в некоторой полосе комплексной плоскости. Пусть при каком-либо $p \in \mathbb{Z}_+$ выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{2p+1} |L'(z_k)|} < +\infty. \quad (14)$$

Тогда функция $F(z) \equiv 1/L(z)$ допускает разложение в ряд Крейна

$$F(z) \equiv \frac{1}{L(z)} = P(z) + 2z^{2p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_k^{2p-1} L'(z_k)} \frac{1}{z^2 - z_k^2}, \quad (15)$$

сходящийся абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C} \setminus \Lambda(L)$. Здесь многочлен $P(z)$ определяется по правилу:

$$P(z) \equiv 0, \quad \text{если } p = 0;$$

$$P(z) = \sum_{m=0}^{p-1} \frac{1}{(2m)!} F^{(2m)}(0) z^{2m}, \quad \text{если } p \in \mathbb{N}.$$

Кроме того, справедливы суммационные соотношения

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_k^{2m+1} L'(z_k)} = -\frac{1}{2(2m)!} F^{(2m)}(0), \quad m \geq p. \quad (16)$$

После проделанной подготовительной работы приступим к доказательству основных результатов.

2. РАЗЛОЖЕНИЕ ОБРАТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ В РЯД КРЕЙНА

Функциям Бесселя $J_v(z)$ с $v > -1$ посвящена статья авторов [1]. В ней на основе теоремы 1 доказано следующее утверждение (по сравнению с оригинальной версией формулировка слегка модифицирована).

Теорема 2. Пусть $J_v(z)$ – функция Бесселя I рода с индексом $v > -1$, и $\gamma_{v,k}$ – ее положительные нули, образующие последовательность (6). Определим величины

$$a_{v,2m} = \left(\frac{z^v}{J_v(z)}\right)^{(2m)}(0), \quad m \in \mathbb{Z}_+. \quad (17)$$

Зададим число p формулой

$$p = \left[\frac{2v+1}{4} \right] + 1. \tag{18}$$

Пусть многочлен $P(z; v)$ определяется по правилу:

$$P(z; v) \equiv 0, \quad \text{если} \quad -1 < v < -\frac{1}{2};$$

$$P(z; v) = \sum_{m=0}^{p-1} \frac{1}{(2m)!} a_{v,2m} z^{2m}, \quad v \geq -\frac{1}{2}. \tag{19}$$

Тогда справедливо разложение в ряд

$$\frac{1}{J_v(z)} = z^{-v} P(z; v) - 2z^{2p-v} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{v,k}^{2p-v-1} J_{v+1}(\gamma_{v,k})} \frac{1}{z^2 - \gamma_{v,k}^2}, \tag{20}$$

сходящийся абсолютно и равномерно на любом компакте в \mathbb{C} , не содержащем точек $z = 0$ и $z = \pm \gamma_{v,k}$. При этом для любого $v > -1$ выполняются суммационные соотношения

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{v,k}^{2m-v+1} J_{v+1}(\gamma_{v,k})} = \frac{1}{2(2m)!} a_{v,2m}, \quad m \geq p. \tag{21}$$

Случай $v \in \mathbb{Z}_+$ в теореме 2 полезно выделить. При $v = 0$ в соответствии с формулами (17)–(20) получим представление

$$\frac{1}{J_0(z)} = 1 - 2z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{0,k} J_1(\gamma_{0,k})} \frac{1}{z^2 - \gamma_{0,k}^2},$$

найденное другим методом в работе [17]. Соотношение (21) дает

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{0,k}^{2m+1} J_1(\gamma_{0,k})} = \frac{1}{2(2m)!} \left(\frac{1}{J_0(z)} \right)^{(2m)} (0), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Несколько конкретных значений для подобных сумм выписано в [1, 17]. При $v \in \mathbb{N}$ возможны два варианта.

Если $v = 2r$, где $r \in \mathbb{N}$, то по формуле (18) имеем

$$p = \left[r + \frac{1}{4} \right] + 1 = r + 1, \quad 2p - v = 2,$$

и разложение (20) принимает вид

$$\frac{1}{J_{2r}(z)} = z^{-2r} P(z; 2r) - 2z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{2r,k} J_{2r+1}(\gamma_{2r,k})} \frac{1}{z^2 - \gamma_{2r,k}^2}, \quad r \in \mathbb{N},$$

с многочленом

$$P(z; 2r) = \sum_{m=0}^r \frac{1}{(2m)!} a_{2r,2m} z^{2m},$$

$$a_{2r,2m} = \left(\frac{z^{2r}}{J_{2r}(z)} \right)^{(2m)} (0), \quad r \in \mathbb{N}.$$

Если же $v = 2r - 1$, где $r \in \mathbb{N}$, то по формуле (18) имеем

$$p = \left[r - \frac{1}{4} \right] + 1 = r, \quad 2p - v = 1,$$

и разложение (20) принимает вид

$$\frac{1}{J_{2r-1}(z)} = z^{-2r+1} P(z; 2r-1) - 2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{J_{2r}(\gamma_{2r-1,k})} \frac{1}{z^2 - \gamma_{2r-1,k}^2}, \quad r \in \mathbb{N},$$

с многочленом

$$P(z; 2r-1) = \sum_{m=0}^{r-1} \frac{1}{(2m)!} a_{2r-1,2m} z^{2m},$$

$$a_{2r-1,2m} = \left(\frac{z^{2r-1}}{J_{2r-1}(z)} \right)^{(2m)} (0), \quad r \in \mathbb{N}.$$

В частности, справедливы представления

$$\frac{1}{J_1(z)} = \frac{2}{z} - 2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{J_2(\gamma_{1,k})} \frac{1}{z^2 - \gamma_{1,k}^2},$$

$$\frac{1}{J_2(z)} = \frac{8}{z^2} + \frac{2}{3} - 2z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{2,k} J_3(\gamma_{2,k})} \frac{1}{z^2 - \gamma_{2,k}^2},$$

$$\frac{1}{J_3(z)} = \frac{48}{z^3} + \frac{3}{z} - 2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{J_4(\gamma_{3,k})} \frac{1}{z^2 - \gamma_{3,k}^2}.$$

Пользуясь случаем, укажем, что разложения для обратных величин $1/J_2(z)$ и $1/J_3(z)$ даны в [1, с. 580] с досадной однотипной опечаткой во втором слагаемом: $1/3$ вместо правильного $2/3$ (для $1/J_2(z)$) и $3/(2z)$ вместо правильного $3/z$ (для $1/J_3(z)$).

Другое интересное множество значений $v > -1$ образуют полуцелые индексы: $v = 2r - 3/2$ и $v = 2r - 1/2$, где $r \in \mathbb{N}$.

Если $v = 2r - 3/2$, где $r \in \mathbb{N}$, то по формуле (18) имеем

$$p = \left[r - \frac{1}{2} \right] + 1 = r, \quad 2p - v = \frac{3}{2},$$

и разложение (20) принимает вид

$$\frac{1}{J_v(z)} = z^{-v} P(z; v) - 2z^{3/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{v,k}^{1/2} J_{v+1}(\gamma_{v,k})} \frac{1}{z^2 - \gamma_{v,k}^2}, \tag{22}$$

где $v = 2r - 3/2$, $r \in \mathbb{N}$, с многочленом

$$P(z; v) = \sum_{m=0}^{r-1} \frac{1}{(2m)!} a_{v,2m} z^{2m}, \quad a_{v,2m} = \left(\frac{z^v}{J_v(z)} \right)^{(2m)} (0),$$

$$v = 2r - \frac{3}{2}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Для рассматриваемых значений ν функция Бесселя $J_\nu(z)$ выражается через элементарные функции по формуле (см., например, [15, гл. VII, § 3])

$$J_{2r-3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} (Q_r(z) \sin z + R_r(z) \cos z), \quad r \in \mathbb{N},$$

где

$$Q_r(z) = (-1)^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(-1)^k (2r+2k-2)!}{(2k)!(2r-2k-2)!} \frac{1}{(2z)^{2k}}, \quad r \in \mathbb{N},$$

$$R_r(z) = (-1)^{r-1} \sum_{k=0}^{r-2} \frac{(-1)^k (2r+2k-1)!}{(2k+1)!(2r-2k-3)!} \frac{1}{(2z)^{2k+1}},$$

$r \geq 2; \quad R_1(z) \equiv 0.$

Так, например, разложение (22) для функции

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z$$

после элементарных преобразований приводится к известному разложению косеканса

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^2 - (\pi k)^2}.$$

Если же $\nu = 2r - 1/2$, где $r \in \mathbb{N}$, то по формуле (18) имеем

$$p = r + 1, \quad 2p - \nu = \frac{5}{2},$$

и разложение (20) принимает вид

$$\frac{1}{J_\nu(z)} = z^{-\nu} P(z; \nu) - 2z^{5/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{\nu,k}^{3/2} J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,k})} \frac{1}{z^2 - \gamma_{\nu,k}^2}, \quad (23)$$

где $\nu = 2r - 1/2$, $r \in \mathbb{N}$, с многочленом

$$P(z; \nu) = \sum_{m=0}^r \frac{1}{(2m)!} a_{\nu,2m} z^{2m}, \quad a_{\nu,2m} = \left(\frac{z^\nu}{J_\nu(z)} \right)^{(2m)}(0),$$

$\nu = 2r - \frac{1}{2}, \quad r \in \mathbb{N}.$

Для рассматриваемых сейчас значений ν функция Бесселя $J_\nu(z)$ также выражается через элементарные функции по формуле

$$J_{2r-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} (S_r(z) \cos z + T_r(z) \sin z), \quad r \in \mathbb{N},$$

где

$$S_r(z) = (-1)^r \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(-1)^k (2r+2k-1)!}{(2k)!(2r-2k-1)!} \frac{1}{(2z)^{2k}}, \quad r \in \mathbb{N},$$

$$T_r(z) = (-1)^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(-1)^k (2r+2k)!}{(2k+1)!(2r-2k-2)!} \frac{1}{(2z)^{2k+1}},$$

$r \in \mathbb{N}.$

Так, например, разложение (23) для функции

$$J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right)$$

после элементарных преобразований приводится к разложению

$$\frac{1}{\sin z - z \cos z} = \frac{3}{z^3} + \frac{3}{10z} + 2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{3/2,k} \sin \gamma_{3/2,k}} \frac{1}{z^2 - \gamma_{3/2,k}^2}.$$

Здесь $\gamma_{3/2,k}$, $k \in \mathbb{N}$, являются положительными корнями часто встречающегося трансцендентного уравнения $\text{tg} \tau = \tau$. При этом $\pi k < \gamma_{3/2,k} < \pi k + \pi/2$, $k \in \mathbb{N}$, с асимптотикой $\gamma_{3/2,k} = \pi k + \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right)$, $k \rightarrow \infty$.

Соотношение (21) дает возможность находить точные значения сумм абсолютно сходящихся рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{3/2,k}^{2m-1} \sin \gamma_{3/2,k}} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{1 + \gamma_{3/2,k}^2}}{\gamma_{3/2,k}^{2m}}, \quad m \geq 2,$$

составленных по таким корням. На этом мы завершим обсуждение результатов для функций Бесселя $J_\nu(z)$ с индексом $\nu > -1$.

Рассмотрим теперь функцию (1) с индексом $\nu \leq -1$. Начнем с простого случая $\nu = -n$, где $n \in \mathbb{N}$. На такие функции тривиальный перенос результатов, полученных для функций Бесселя натурального индекса, осуществляется через связь (4). Поэтому остановимся на содержательном случае $\nu < -1$, $\nu \notin -\mathbb{N}$. В разд. 1 мы показали, что функция $L(z; \nu)$, заданная формулой (2), удовлетворяет всем требованиям теоремы 1, причем ввиду (13) условие (14) выполнено со значением $p = 0$. Таким образом, для функции $1/L(z; \nu)$ имеет место представление (15), где $p = 0$ и многочлен $P(z) \equiv 0$. Точнее,

$$\frac{1}{L(z; \nu)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\gamma_{\nu,k}}{L'(\gamma_{\nu,k}; \nu)} \frac{1}{z^2 - \gamma_{\nu,k}^2}.$$

Кроме того, для $F(z) = 1/L(z; \nu)$ выполнены суммационные соотношения (16), т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{\nu,k}^{2m+1} L'(\gamma_{\nu,k}; \nu)} = -\frac{1}{2(2m)!} \left(\frac{1}{L(z; \nu)} \right)^{(2m)}(0), \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Поскольку еще

$$L'(\gamma_{\nu,k}; \nu) = \left(\frac{2}{\gamma_{\nu,k}} \right)^\nu J'_\nu(\gamma_{\nu,k}), \quad k \in \mathbb{N}$$

(см. (2), (11)), то справедлив следующий результат.

Теорема 3. Пусть $J_\nu(z)$ – функция Бесселя I рода с индексом $\nu < -1$, $\nu \notin -\mathbb{N}$, и множеством нулей $\{\pm\gamma_{\nu,k}\}_{k=1}^s \cup \{\pm\gamma_{\nu,k}\}_{k=s+1}^\infty$, где $s = [-\nu] \in \mathbb{N}$, причем $\gamma_{\nu,k} \in \mathbb{C}$ при $k = 1, \dots, s$ и $\gamma_{\nu,k}$ при $k = s + 1, s + 2, \dots$ упорядочены согласно (8). Тогда справедливо представление

$$\frac{1}{J_\nu(z)} = 2z^{-\nu} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\gamma_{\nu,k}^{-\nu-1} J'_\nu(\gamma_{\nu,k})} \frac{1}{z^2 - \gamma_{\nu,k}^2}$$

с абсолютной и равномерной сходимостью на компактах из множества $\mathbb{C} \setminus \{\pm\gamma_{\nu,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$. При этом

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\gamma_{\nu,k}^{2m-\nu+1} J'_\nu(\gamma_{\nu,k})} &= -\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\gamma_{\nu,k}^{2m-\nu+1} J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,k})} = \\ &= -\frac{1}{2(2m)!} \left(\frac{z^\nu}{J_\nu(z)} \right)^{(2m)}(0), \quad m \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Хорошей “тестовой” функцией, подпадающей под действие теоремы 3, является

$$J_{-3/2}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\sin z + \frac{\cos z}{z} \right)$$

с двумя чисто мнимыми нулями $\pm\gamma_{-3/2,1}$ и вещественными нулями $\pm\gamma_{-3/2,k}$, $k = 2, 3, \dots$, из формулы (8) при $\nu = -3/2$, $s = 1$. Числа $\gamma_{-3/2,k}$, $k \geq 2$, являются положительными корнями уравнения $\text{ctg} \tau = -\tau$ и подчинены асимптотике (7) при $\nu = -3/2$, т.е.

$$\gamma_{-3/2,k} = \pi(k-1) + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \rightarrow \infty.$$

По теореме 3 для $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm\gamma_{-3/2,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ справедливо представление

$$\frac{1}{J_{-3/2}(z)} = 2z^{3/2} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\gamma_{-3/2,k}^{1/2} J'_{-3/2}(\gamma_{-3/2,k})} \frac{1}{z^2 - \gamma_{-3/2,k}^2}. \quad (24)$$

Учтем явный вид функций $J_{-3/2}(z)$, $J_{-1/2}(z) = \sqrt{2/(\pi z)} \cos z$ и формулу

$$\begin{aligned} J'_{-3/2}(\gamma_{-3/2,k}) &= -J_{-1/2}(\gamma_{-3/2,k}) = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi \gamma_{-3/2,k}}} \cos \gamma_{-3/2,k} = (-1)^k \sqrt{\frac{2\gamma_{-3/2,k}}{\pi(1 + \gamma_{-3/2,k}^2)}}, \end{aligned}$$

действующую при $k \geq 2$. Обозначив

$$\gamma_{-3/2,1} = ia, \quad a > 0,$$

запишем

$$J'_{-3/2}(\gamma_{-3/2,1}) = -J_{-1/2}(ia) = \frac{i-1}{\sqrt{\pi a}} \text{ch } a.$$

Здесь число $a = 1.199678\dots$ является положительным корнем уравнения $\text{ctg} \tau = \tau$.

В результате формула (24) после некоторых упрощений примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{z \sin z + \cos z} &= \frac{2}{\text{ch } a} \frac{1}{z^2 + a^2} + \\ &+ 2 \sum_{k=2}^\infty (-1)^{k-1} \frac{\sqrt{1 + \gamma_{-3/2,k}^2}}{\gamma_{-3/2,k}} \frac{1}{z^2 - \gamma_{-3/2,k}^2}. \end{aligned}$$

Ясно, что полученное разложение есть также реализация формулы (15) из общей теоремы 1 для целой функции $L(z) = z \sin z + \cos z$. По теореме 3, примененной к функции $J_{-3/2}(z)$, или по теореме 1, примененной к функции $L(z) = z \sin z + \cos z$ (см. там формулу (16)), получим еще, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2 \text{ch } a} + \sum_{k=2}^\infty (-1)^k \frac{\sqrt{1 + \gamma_{-3/2,k}^2}}{\gamma_{-3/2,k}^{2m+3}} &= \\ = \frac{1}{2(2m)!} \left(\frac{1}{z \sin z + \cos z} \right)^{(2m)}(0), \quad m \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

В частности,

$$\frac{1}{a^2 \text{ch } a} + \sum_{k=2}^\infty (-1)^k \frac{\sqrt{1 + \gamma_{-3/2,k}^2}}{\gamma_{-3/2,k}^3} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, суммационная формула из теоремы 3 служит своеобразным “архивом” подобных соотношений.

В заключение подчеркнем, что теоремы 2 и 3 теоретически “закрывают” вопрос о разложении величины $1/J_\nu(z)$ с индексом $\nu \in \mathbb{R}$ в ряд Крейна.

Выражаем благодарность Д.Г. Цветкович за численную проверку расчетов, проведенных в данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сумин Е.В., Шерстюков В.Б. Применение рядов Крейна к вычислению сумм, содержащих нули функций Бесселя // *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.* 2015. Т. 55. № 4. С. 575–581.
2. Шерстюков В.Б., Сумин Е.В. Разложение на простые дроби обратной величины модифицированной функции Бесселя и получение общих суммационных соотношений, содержащих ее нули // *Вестник НИЯУ МИФИ.* 2017. Т. 6. № 5. С. 449–452.
3. Крейн М.Г. К теории целых функций экспоненциального типа // *Изв. АН СССР. Серия матем.* 1947. Т. 11. № 4. С. 309–326.
4. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
5. Шерстюков В.Б. Разложение обратной величины целой функции с нулями в полюсе в ряд Крейна // *Матем. сб.* 2011. Т. 202. № 12. С. 137–156.
6. Шерстюков В.Б. Асимптотические свойства целых функций с заданным законом распределения корней // *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее*

- прил. Темат. обз. Т. 161. М.: ВИНТИ РАН, 2019. С. 104–129.
7. Керимов М.К. Исследования о нулях специальных функций Бесселя и методах их вычисления // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2014. Т. 54. № 9. С. 1387–1441.
 8. Керимов М.К. Исследования о нулях специальных функций Бесселя и методах их вычисления. II. Свойства монотонности, выпуклости, вогнутости и др. // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2016. Т. 56. № 7. С. 1200–1235.
 9. Керимов М.К. Исследования о нулях специальных функций Бесселя и методах их вычисления. III. Некоторые новые работы о нулях, посвященные свойствам монотонности, выпуклости и др. // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2016. Т. 56. № 12. С. 1986–2030.
 10. Керимов М.К. Исследования о нулях специальных функций Бесселя и методах их вычисления. IV. Неравенства, оценки, разложения и др. для нулей функций Бесселя // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2018. Т. 58. № 1. С. 3–41.
 11. Olver F.W.J., Lozier D.W., Boisvert R.F., Clark C.W. Handbook of mathematical functions. Cambridge, New York: NIST and Cambridge University Press, 2010.
 12. Hall L.S. Bessel function $J_\nu(z)$ of complex order and its zeros // *Math. Proc. of Cambridge Phil. Soc.* 1967. Vol. 63. № 1. P. 141–146.
 13. Matyshev A.A., Fohitung E. On the computation and applications of Bessel functions with pure imaginary indices // arXiv: 0910.0365v1 [math-ph] 2 Oct 2009.
 14. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Т. 1, 2. М.: ИЛ, 1949.
 15. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
 16. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
 17. Forsyth A.R. The expression of Bessel functions of positive order as products, and of their inverse powers as sums of rational fractions // *Messenger of Math.* 1920–1921. Vol. L. P. 129–149.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2019, vol. 8, no. 4, pp. 437–444

Bessel Functions of a Real Order and Krein's Series

V. B. Sherstyukov^{a,#} and E. V. Sumin^{a,##}

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: shervb73@gmail.com

^{##}e-mail: sumevbir@gmail.com

Received June 20, 2019; revised June 20, 2019; accepted June 25, 2019

Abstract—Our previous studies were devoted to Bessel functions of the first kind $J_\nu(z)$ and modified Bessel functions of the first kind $I_\nu(z)$ (Infeld functions) with the parameter $\nu > -1$. In this work, Bessel functions of the first kind of an arbitrary real order ν are considered. All the zeros of any such function are simple, and only a finite number of zeros (regulated by the Hurwitz theorem) can be located outside the real line. An auxiliary even entire function of the exponential type $L(z, \nu)$ constructed with respect to $J_\nu(z)$ and having the same nontrivial zeros is involved, allowing the application of the well-developed entire function method. The problem of expanding the function $1/L(z, \nu)$ into a series of simple fractions with a special structure (Krein's type series) has been studied. This general representation is used to derive formulas for calculating special series containing negative powers of zeros of the Bessel function $J_\nu(z)$. Particular attention is focused on integer and semi-integer orders ν . Examples of specific expansions of $1/J_\nu(z)$ and the corresponding summation formulas for various parameters ν are given.

Keywords: simple fraction decomposition, Krein's series, Bessel function of a real order, zeros of Bessel functions, summation relations

DOI: 10.1134/S2304487X19040102

REFERENCES

1. Sherstyukov V.B., Sumin E.V. Application of Krein's series to calculation of sums containing zeros of the Bessel functions // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2015. V. 55. № 4. P. 572–579.
2. Sherstyukov V.B., Sumin E.V. Expansion of the inverse modified Bessel function in simple fractions and calculation of special infinite sums containing its zeros // *Vestnik Nat. Issl. Yad. Univ. "MIFI".* 2017. V. 6. № 5. P. 449–452.

3. Krein M.G. A contribution to the theory of entire function of exponential type // *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 1947. V. 11. № 4. P. 309–326.
4. Levin B.Ya. Distribution of zeros of entire functions. Gostexizdat, Moscow, 1956; Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964.
5. Sherstyukov V.B. Expanding the reciprocal of an entire function with zeros in a strip in a Krein series // *Sbornik: Mathematics.* 2011. V. 202. № 12. P. 1853–1871.
6. Sherstyukov V.B. Asymptotic properties of entire functions with given laws of distribution of zeros // *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.* V. 161. VINITI, Moscow, 2019. P. 104–129.
7. Kerimov M.K. Studies on the zeros of Bessel functions and methods for their computation // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2014. V. 54. № 9. P. 1337–1388.
8. Kerimov M.K. Studies on the zeros of Bessel functions and methods for their computation: 2. Monotonicity, convexity, concavity, and other properties // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2016. V. 56. № 7. P. 1175–1208.
9. Kerimov M.K. Studies on the zeros of Bessel functions and methods for their computation: 3. Some new works on monotonicity, convexity, concavity, and other properties // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2016. V. 56. № 12. P. 1949–1991.
10. Kerimov M.K. Studies on the zeros of Bessel functions and methods for their computation: IV. Inequalities, estimates, expansions, etc., for zeros of Bessel functions // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2018. V. 58. № 1. P. 1–37.
11. Olver F.W.J., Lozier D.W., Boisvert R.F., Clark C.W. Handbook of mathematical functions. Cambridge, New York: NIST and Cambridge University Press, 2010.
12. Hall L.S. Bessel function $J_\nu(z)$ of complex order and its zeros // *Math. Proc. of Cambridge Phil. Soc.* 1967. V. 63. № 1. P. 141–146.
13. Matyshev A.A., Fohitung E. On the computation and applications of Bessel functions with pure imaginary indices // arXiv: 0910.0365v1 [math-ph] 2 Oct 2009.
14. Watson G.N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions (2nd.ed.). Cambridge University Press, Cambridge, 1944; Inostrannaya Literatura, Moscow, 1949.
15. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Methods of the theory of functions in a complex variable. Nauka, Moscow, 1987.
16. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. The equation of mathematical physics. Nauka, Moscow, 1972.
17. Forsyth A.R. The expression of Bessel functions of positive order as products, and of their inverse powers as sums of rational fractions // *Messenger of Math.* 1920–1921. Vol. L. P. 129–149.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНОГО РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ МОЖЕТ ДАТЬ БОЛЬШЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ, ЧЕМ МЕТОДЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СВЯЗИ

© 2019 г. А. Д. Полянин^{1,2,3,*}

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

² Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия

³ Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*e-mail: polyanin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 04.03.2019 г.

После доработки 04.03.2019 г.

Принята к публикации 09.04.2019 г.

Показано, что в некоторых случаях прямой метод функционального разделения переменных позволяет построить больше точных решений нелинейных уравнений математической физики, чем метод дифференциальных связей (с одной связью) и метод поиска неклассических симметрий (основанный на условии инвариантной поверхности). Указанный факт иллюстрируется на нелинейных реакционно-диффузионных уравнениях, на уравнениях конвективной диффузии с переменными коэффициентами, на нелинейных уравнениях типа Клейна–Гордона и уравнениях гидродинамического пограничного слоя. Приведены некоторые новые точные решения.

Ключевые слова: прямой метод функционального разделения переменных, метод дифференциальных связей, метод поиска неклассических симметрий, прямой метод Кларксона–Крускала, точные решения

DOI: 10.1134/S2304487X19050067

1. ВВЕДЕНИЕ. МЕТОДЫ, КОТОРЫЕ ОБСУЖДАЮТСЯ

1.1. Прямой метод построения точных решений с функциональным разделением переменных в неявном виде

Будем рассматривать нелинейные уравнения с частными производными вида

F(x, u_x, u_t, u_xx, u_xt, u_tt, ...) = 0. (1)

Считаем, что левая часть уравнения (1) содержит одну или несколько произвольных функций, зависящих от u.

Для анализа уравнения (1) можно использовать прямой метод функционального разделения переменных, основанный на поиске точных решений в неявном виде [1, 2]:

∫ h(u)du = ξ(x)ω(t) + η(x), (2)

где функции h(u), ξ(x), η(x), ω(t) определяются далее в процессе исследования.

Процедура построения таких решений заключается в следующем. Сначала с помощью (2) находят частные производные u_x, u_t, u_xx, ..., которые выражаются через функции h, ξ, η, ω и их

производные. Затем эти частные производные подставляются в уравнение (1), после чего исключается переменная t с помощью (2). В результате (при подходящем выборе функции ω) приходим к билинейному функционально-дифференциальному уравнению вида

∑_{j=1}^N Φ_j[x]Ψ_j[u] = 0. (3)

Здесь Φ_j[x] ≡ Φ_j(x, ξ, η, ξ', η', ...) и Ψ_j[u] ≡ Ψ_j(u, h, h', ...) – дифференциальные формы (в некоторых случаях функциональные коэффициенты), которые зависят соответственно только от x и u. Имеет место следующее утверждение.

Утверждение (впервые сформулировано Д. Биркгофом [3]). Функционально-дифференциальные уравнения вида (3) могут иметь решения, только если формы Ψ_j[u] (j = 1, ..., N) связаны линейными соотношениями (см., например, [2, 4, 5]):

∑_{j=1}^{m_i} k_{ij}Ψ_j[u] = 0, i = 1, ..., n, (4)

где k_{ij} – некоторые константы, $1 \leq m_i \leq N - 1$, $1 \leq n \leq N - 1$. Необходимо также рассмотреть вырожденные случаи, когда, помимо линейных соотношений (4), отдельные дифференциальные формы $\Psi_j[u]$ равны нулю.

Аналогичное утверждение справедливо также для форм $\Phi_j[x]$.

Сформулированные выше утверждения позволяют находить точные решения функционально-дифференциальных уравнений вида (3) и соответствующих нелинейных уравнений математической физики (1). Отметим, что различные линейные соотношения вида (4) в случае общего положения соответствуют различным решениям исходного уравнения (1).

1.2. Метод дифференциальных связей

Покажем, что прямой метод построения точных решений с функциональным разделением переменных в неявном виде, основанный на формуле (2), тесно связан с методом дифференциальных связей (который основан на анализе совместности переопределенных систем уравнений с частными производными [6]).

Действительно, продифференцируем формулу (2) по t . В результате получим

$$u_t = \xi(x) \bar{\omega}(t) \varphi(u), \quad (5)$$

где $\bar{\omega}(t) = \omega'_t(t)$ и $\varphi(u) = 1/h(u)$. Соотношение (5) можно рассматривать как дифференциальную связь первого порядка, которую можно использовать для нахождения точных решений уравнения (1) путем анализа на совместность переопределенной пары уравнений (1) и (5) для одной искомой функции u . Дифференциальная связь (5) эквивалентна соотношению (2); на начальной стадии все функции, входящие в правые части (2) и (5), считаются произвольными, а конкретный вид этих функций определяется в процессе дальнейшего исследования.

Для построения точных решений уравнения (1) могут использоваться также дифференциальные связи второго и более высоких порядков; в общем случае любое уравнение с частными производными (или, в вырожденном случае, обыкновенное дифференциальное уравнение), которое зависит от таких же переменных, что и исходное уравнение, может рассматриваться как дифференциальная связь. Описание метода дифференциальных связей, связь этого метода с другими методами, а также ряд конкретных примеров его применения можно найти в [5–13]. Отметим, что для построения точных решений могут использоваться несколько дифференциальных связей (см., например, [5, 11]).

Построение точных решений методом дифференциальных связей основано на анализе сов-

местности нескольких дифференциальных уравнений и состоит из нескольких этапов, кратко описанных ниже.

1°. Два уравнения с частными производными (исходное уравнение с частными производными и дифференциальная связь) дифференцируются достаточное количество раз по x и t . Затем старшие производные исключаются из исходного уравнения, дифференциальной связи и полученных дифференциальных следствий этих уравнений. В результате получается уравнение, в котором остаются лишь степени младшей производной, например, u_x .

2°. Приравнявая в полученном уравнении коэффициенты при всех степенях производной u_x нулю, получаем условия совместности, связывающие функциональные коэффициенты исходного уравнения с частными производными и дифференциальной связи.

3°. Условия совместности представляют собой нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функциональных коэффициентов. На этом этапе необходимо найти решение (решения) этой системы в замкнутом виде.

4°. Полученные функциональные коэффициенты подставляются в дифференциальную связь, которую затем надо проинтегрировать, чтобы найти допустимый вид искомой функции u (на этом этапе получают промежуточные решения, которые содержат неопределенные функции).

5°. С учетом результатов, полученных в п. 4°, из исходного уравнения с частными производными определяется функция u .

Отметим, что на последних трех этапах метода дифференциальных связей необходимо решать различные дифференциальные уравнения (или системы таких уравнений). Если на каком-то из этих этапов не удастся получить решение, то и не удастся получить точное решение исходного уравнения.

В [2] отмечается, что с методом дифференциальных связей работать существенно труднее, чем с прямым методом функционального разделения переменных.

1.3. Метод поиска неклассических симметрий

Дифференциальная связь первого порядка (5) является частным случаем условия инвариантной поверхности (invariant surface condition) [14], которое характеризует метод поиска неклассических симметрий (nonclassical method of symmetry reduction). В общем случае условие инвариантной поверхности представляет собой квазилинейное уравнение с частными производными первого порядка общего вида. Поэтому метод поиска неклассических симметрий можно рассматривать

как важный специальный случай метода дифференциальных связей [5]; ряд конкретных примеров его применения для построения точных решений можно найти в [4, 5, 14–20].

Отметим, что решения вида (13) обычно не могут быть получены с помощью классического группового анализа дифференциальных уравнений, основанного на группах Ли [21–23].

1.4. *Вопрос: какой из указанных методов является более эффективным?*

Хотя дифференциальная связь (5) эквивалентна функциональному соотношению (2), но последующая процедура поиска точных решений прямым методом построения решений с функциональным разделением переменных в неявном виде (см. разд. 1.1) и методом дифференциальных связей (см. разд. 1.2) существенно различаются. Поэтому возникает естественный и очень важный вопрос: какой из этих методов является более эффективным?

Далее будет показано, что прямой метод функционального разделения переменных, основанный на представлении решения в неявном виде (1), может давать больше точных решений, чем метод дифференциальных связей (и соответственно метод поиска неклассических симметрий) с эквивалентной дифференциальной связью (5).

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

2.1. *Использование метода дифференциальных связей*

Рассмотрим нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с переменными коэффициентами вида

$$c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u). \tag{6}$$

Для построения точных решений этого уравнения используем более общую, чем (5), дифференциальную связь (условие инвариантной поверхности):

$$u_t = \theta(x, t)\varphi(u). \tag{7}$$

Разрешим уравнение (6) относительно старшей производной u_{xx} , а затем исключим u_t с помощью (7). В результате получим

$$u_{xx} = -\frac{f'_u}{f}u_x^2 - \frac{a'_x}{a}u_x - \frac{b}{af} + \frac{c\theta}{af}\varphi. \tag{8}$$

Дифференцируя (7) дважды по x и учитывая соотношение (8), имеем

$$\begin{aligned} u_t &= \theta\varphi, \quad u_{tx} = \theta\varphi'_u u_x + \theta_x\varphi, \\ u_{txx} &= \theta\varphi'_u u_{xx} + \theta\varphi''_{uu} u_x^2 + 2\theta_x\varphi'_u u_x + \theta_{xx}\varphi = \\ &= \theta \left(\varphi''_{uu} - \frac{f'_u}{f}\varphi'_u \right) u_x^2 + A_1(x, t, u)u_x + A_0(x, t, u). \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь A_1 и A_0 не зависят от u_x и выражаются через функции, входящие в уравнения (6) и (7).

Дифференцируя (8) по t и используя первые два соотношения (9), находим другим способом смешанную производную

$$\begin{aligned} u_{xxt} &= -\theta \left[\varphi \left(\frac{f'_u}{f} \right)'_u + 2\frac{f'_u}{f}\varphi'_u \right] u_x^2 + \\ &+ B_1(x, t, u)u_x + B_0(x, t, u). \end{aligned} \tag{10}$$

Приравнявая смешанные производные третьего порядка (9) и (10), получаем следующее выражение, квадратичное по u_x :

$$\begin{aligned} F_2 u_x^2 + F_1 u_x + F_0 &= 0, \\ F_2 &= \theta \left[\varphi''_{uu} + \varphi'_u \frac{f'_u}{f} + \varphi \left(\frac{f'_u}{f} \right)'_u \right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь функциональные коэффициенты F_0 и F_1 зависят от $a, b, c, f, g, \theta, \varphi$ и их производных и не зависят от u_x . Приравнявая функциональные коэффициенты F_n нулю (процедура расщепления по производной u_x), можно получить определяющую систему уравнений. Далее нам понадобится только первое уравнение этой системы (соответствующее $F_2 = 0$), которое после деления на θ принимает вид:

$$\varphi''_{uu} + \varphi'_u \frac{f'_u}{f} + \varphi \left(\frac{f'_u}{f} \right)'_u = 0. \tag{12}$$

Считая f произвольной функцией, а φ искомой величиной, находим общее решение уравнения (12):

$$\varphi = \frac{1}{f} \left(C_1 \int f du + C_2 \right), \tag{13}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Таким образом метод дифференциальных связей приводит к точным решениям, для которых функции f и φ (входящие в исходное уравнение и используемую дифференциальную связь) связаны соотношением (13).

Для дифференциальной связи (5), которая эквивалентна представлению решения в неявном виде (2), формула (13) преобразуется к виду

$$h = f \left(C_1 \int f du + C_2 \right)^{-1}. \tag{14}$$

2.2. Использование прямого метода функционального разделения переменных

В [2] с помощью метода, описанного в разд. 1.1, было получено много точных решений нелинейного уравнения вида (6). В частности, было показано, что уравнение

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \frac{a'_x(x)}{\sqrt{a(x)}}u, \quad (15)$$

которое зависит от двух произвольных функций $a(x) > 0$ и $f(u)$, допускает точное решение в неявном виде

$$\int \frac{f(u)}{u} du = 4t - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C, \quad (16)$$

где C – произвольная постоянная.

Решение (16) является частным случаем решения вида (2) при $h = f/u$. Это решение отличается от (14) и поэтому не может быть получено методом дифференциальных связей не только с использованием соотношения (5), но и дифференциальной связи более общего вида (7).

Решение вида (16), порождается двумя дифференциальными связями: одна из них (5), а другая (дополнительная) связь имеет вид $u_x = p(x)\psi(u)$ (точнее $\sqrt{af}u_x = -2u$). Важно отметить, что вторая связь определяется функциональными коэффициентами исходного уравнения (6) и не может быть получена из общих априорных соображений.

Помимо решения (16) в [2] были получены также несколько других точных решений вида (2), которые не удовлетворяют соотношению (14) и здесь не приводятся (эти решения также не могут быть построены методом дифференциальных связей, основанных на одной связи).

Можно показать, что решение (16) не может быть получено методом дифференциальных связей с помощью одной связи вида $u_t = \varphi(x, t, u)$ (эта связь является более общей, чем (5) и (7)).

3. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

3.1. Использование метода дифференциальных связей

Рассмотрим нелинейные уравнения конвективной диффузии

$$c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u)u_x. \quad (17)$$

Анализ совместности двух дифференциальных уравнений – исходного уравнения (17) и дифференциальной связи (7) – проводится также, как и в разд. 2.1. В результате получается квадратичное

по u_x соотношение, в котором функциональный коэффициент при u_x^2 совпадает с F_2 в (11).

Поэтому метод дифференциальных связей, основанный на одной связи (7), для уравнений конвективной диффузии вида (17) также приводит к соотношениям (13) и (14).

3.2. Использование прямого метода функционального разделения переменных

Можно показать, что нелинейное уравнение конвективной диффузии

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x - \frac{1}{2}a'_x(x)f(u)u_x, \quad (18)$$

где $a(x)$ и $f(u)$ – произвольные функции, имеет точные решения

$$\int \frac{f(u)}{u} du = kt \pm \sqrt{k} \int \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C; \quad (19)$$

C и k – произвольные постоянные.

Решения (19) являются специальными случаями решения вида (2) при $h = f/u$. Эти решения не удовлетворяют соотношению (14) и поэтому не могут быть получены методом дифференциальных связей, основанным на одной связи (5) (эти решения можно получить, если использовать две дифференциальные связи).

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА КЛЕЙНА–ГОРДОНА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

4.1. Использование метода дифференциальных связей

Рассмотрим теперь нелинейные уравнения типа Клейна–Гордона с переменными коэффициентами

$$c(x)u_{tt} = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u). \quad (20)$$

Для построения точных решений этого уравнения также используем более общую, чем (5), дифференциальную связь (7). Дифференцируя (7) по t , имеем

$$u_t = \theta\varphi \Rightarrow u_{tt} = \theta\varphi'_u u_t + \theta_t\varphi = \theta^2\varphi''_u + \theta_t\varphi. \quad (21)$$

Разрешим далее уравнение (20) относительно u_{xx} , а затем исключим u_{tt} с помощью (21). В результате получим

$$u_{xx} = -\frac{f'_u}{f}u_x^2 - \frac{a'_x}{a}u_x - \frac{b}{af}g + \frac{c}{af}(\theta^2\varphi''_u + \theta_t\varphi). \quad (22)$$

Дифференцируя (7) дважды по x и учитывая соотношение (22), находим u_{txx} . Дифференцируя (22) по t и используя первые два соотношения (9), находим смешанную производную u_{xxt} . Приравняв смешанные производные третьего порядка

$u_{xx} = u_{xx}$, получим выражение, квадратичное по u_x , в котором функциональный коэффициент при u_x^2 совпадает с F_2 в (11). Рассуждая далее, как в разд. 2.1, приходим к зависимости (14) между функциями f и h , которые входят в уравнение (20) и дифференциальную связь (7).

4.2. Использование прямого метода функционального разделения переменных

Рассмотрим нелинейное уравнение типа Клейна–Гордона специального вида

$$u_{tt} = [a(x)f(u)u_x]_x + \frac{x^2}{a(x)}g(u), \quad (23)$$

где $a(x)$ – произвольная функция, а функции $f(u)$ и $g(u)$ следующим образом выражаются через произвольную функцию $h = h(u)$:

$$f(u) = \frac{h'_u}{h^2}, \quad g(u) = -\frac{1}{h} \left(\frac{h'_u}{h^3} \right)'_u. \quad (24)$$

Используя метод, описанный в разд. 1.1, можно построить точное решение уравнения (23)–(24) в неявном виде:

$$\int h(u)du = t - \int \frac{x dx}{a(x)} + C. \quad (25)$$

Из первого соотношения (24) следует, что для этого решения не выполняется соотношение (14). Поэтому решение (25) не может быть получено методом дифференциальных связей с использованием одной дифференциальной связи (5).

5. УРАВНЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

5.1. Решения с функциональным разделением переменных в явном виде

Система уравнений ламинарного осесимметричного пограничного слоя [24] путем введения функции тока w (и подходящей новой независимой переменной z) сводится к одному нелинейному уравнению с частными производными третьего порядка с переменными коэффициентами [25]:

$$w_{tz} + w_z w_{xz} - w_x w_{zz} = \nu r^2(x) w_{zzz} + F(t, x), \quad (26)$$

где ν – кинематическая вязкость жидкости, функция $r = r(x)$ описывает форму обтекаемого тела (эта функция здесь считается произвольной), а функция $F(t, x)$ задает градиент давления.

Точные решения с функциональным разделением переменных уравнения (26) ищутся в явном виде [25]

$$w = fu(\xi) + gz + h, \quad \xi = \varphi z + \psi, \quad (27)$$

где $f = f(t, x)$, $g = g(t, x)$, $h = h(t, x)$, $\varphi = \varphi(t, x)$, $\psi = \psi(t, x)$, $u = u(\xi)$ – функции, которые надо найти. Подставляя (27) в уравнение (26) и заменяя z на $(\xi - \psi)/\varphi$, приходим к функционально-дифференциальному уравнению

$$\sum_{n=1}^6 \Phi_n[t, x] \Psi_n[\xi] = \Psi_7[\xi]. \quad (28)$$

Здесь $\Phi_n[t, x]$ – дифференциальные формы, зависящие от функциональных коэффициентов (и их производных), входящих в (27) и (26) (все Φ_n не зависят от u), а $\Psi_n = \Psi_n[\xi]$ определяются так [25]:

$$\Psi_1 = 1, \quad \Psi_2 = u'_\xi, \quad \Psi_3 = (u'_\xi)^2, \quad \Psi_4 = u''_{\xi\xi}, \quad (29)$$

$$\Psi_5 = \xi u''_{\xi\xi}, \quad \Psi_6 = u u''_{\xi\xi}, \quad \Psi_7 = u'''_{\xi\xi\xi}.$$

Переменные в уравнении (28) можно разделить, если предположить, что все $\Phi_n[t, x]$ в левой части (28) равны константам. В этом случае получим переопределенную систему уравнений с частными производными

$$\Phi_n[t, x] = a_n, \quad n = 1, \dots, 6 \quad (a_n = \text{const}), \quad (30)$$

и нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $u = u(\xi)$:

$$\sum_{n=1}^6 a_n \Psi_n = \Psi_7. \quad (31)$$

Если для некоторых a_n удастся найти частные решения нелинейной системы (28), тогда соответствующие решения уравнения (31) порождают точные решения исходного уравнения пограничного слоя (26).

5.2. Использование нескольких дифференциальных связей

Можно показать, что наиболее интересные решения вида (27), содержащие несколько произвольных функций, получаются при наличии двух или трех дифференциальных связей, которые являются линейными комбинациями функций Ψ_n , определенных в (29).

В табл. 1 приведены функции $u = u(\xi)$, которые порождают две или три дифференциальные связи между дифференциальными формами (29). Дифференциальные связи №№ 1–10 были описаны в [25]. Дифференциальные связи №№ 11–14 являются новыми, они порождают новые точные решения вида (27) уравнения (26).

Важно отметить, что дифференциальные связи в табл. 1 нельзя угадать априорно на начальной стадии исследования. Они выводятся в процессе анализа, основанном на представлении решения в виде (27) и уравнении (31).

Таблица 1. Порождающие функции u и соответствующие линейные связи между Ψ_n .

№	Порождающие функции u	Линейные связи между Ψ_n
1	$u = \xi^2$	$\Psi_4 = 2\Psi_1, \Psi_5 = \Psi_2, \Psi_6 = \frac{1}{2}\Psi_3$
2	$u = \xi^3$	$\Psi_5 = 2\Psi_2, \Psi_6 = \frac{2}{3}\Psi_3, \Psi_7 = 6\Psi_1$
3	$u = \xi^4$	$\Psi_5 = 3\Psi_2, \Psi_6 = \frac{3}{4}\Psi_3$
4	$u = \xi^{-1}$	$\Psi_5 = -2\Psi_2, \Psi_6 = 2\Psi_3, \Psi_7 = -6\Psi_3$
5	$u = \xi^n$	$\Psi_5 = (n-1)\Psi_2, \Psi_6 = \frac{n-1}{n}\Psi_3$ ($n \neq -1, 0, 1, 2, 3$)
6	$u = \exp \xi$	$\Psi_2 = \Psi_4 = \Psi_7, \Psi_6 = \Psi_3$
7	$u = \cosh \xi$	$\Psi_6 = \Psi_1 + \Psi_3, \Psi_7 = \Psi_2$
8	$u = \sinh \xi$	$\Psi_6 = \Psi_3 - \Psi_1, \Psi_7 = \Psi_2$
9	$u = \cos \xi$	$\Psi_6 = \Psi_3 - \Psi_1, \Psi_7 = -\Psi_2$
10	$u = \sin \xi$	$\Psi_6 = \Psi_3 - \Psi_1, \Psi_7 = -\Psi_2$
11	$u = \tanh \xi$	$\Psi_6 = -2\Psi_2 + 2\Psi_3, \Psi_7 = -2\Psi_2 - 3\Psi_6$
12	$u = \coth \xi$	$\Psi_6 = -2\Psi_2 + 2\Psi_3, \Psi_7 = -2\Psi_2 - 3\Psi_6$
13	$u = \tan \xi$	$\Psi_6 = -2\Psi_2 + 2\Psi_3, \Psi_7 = 2\Psi_2 + 3\Psi_6$
14	$u = \cot \xi$	$\Psi_6 = 2\Psi_2 + 2\Psi_3, \Psi_7 = 2\Psi_2 - 3\Psi_6$

Аналогичные точные решения, основанные на использовании нескольких дифференциальных связей, для других нелинейных уравнений гидродинамики были получены в [26, 27].

6. ЗАМЕЧАНИЯ О ПРЯМОМ МЕТОДЕ КЛАРКСОНА–КРУСКАЛА

Прямой метод Кларксона–Крускала [28] (см. также [5, 9, 19, 20, 29]) основан на поиске точных решений в виде $u = U(x, t, w(z))$, где $z = z(x, t)$. Функции $U(x, t, w)$ и $z(x, t)$ выбираются таким образом, что $w = w(z)$ должна удовлетворять одному обыкновенному дифференциальному уравнению для $w = w(z)$. Накладываемое условие, что функция w должна удовлетворять одному обыкновенному дифференциальному уравнению, является жестким и сильно ограничивает возможности данного метода, не позволяя его использовать для построения точных решений, обсуждаемых в данной статье.

Эффективность прямого метода Кларксона–Крускала может быть значительно увеличена, если допустить, что функция w может удовлетворять переопределенной системе нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений

(или, другими словами, иметь несколько дифференциальных связей). Хорошей иллюстрацией сказанному являются результаты, приведенные в разд. 5.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310385-6) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10025).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полянин А.Д. Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с переменными коэффициентами: Метод поиска точных решений в неявной форме // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2019. Т. 8. № 4. С. 321–334.
2. Polyanin A.D. Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients // Int. J. Non-Linear Mech. 2019. V. 111. P. 95–105.
3. Биркгоф Г. Гидродинамика. М.: Иностранная литература, 1963.
4. Pucci E., Saccomandi G. Evolution equations, invariant surface conditions and functional separation of variables // Physica D. 2000. V. 139. P. 28–47.
5. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.
6. Яненко Н.Н. Теория совместности и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных. Труды IV Всесоюзного математического съезда. Ленинград: Наука. 1964. Т. 2. С. 247–252.
7. Meleshko S.V. Differential constraints and one-parameter Lie–Bäcklund groups // Sov. Math. Dokl. 1983. V. 28. P. 37–41.
8. Galaktionov V.A. Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions // Nonlinear Anal. Theor. Meth. Appl. 1994. V. 23. P. 1595–621.
9. Olver P.J. Direct reduction and differential constraints // Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. 1994. V. 444. P. 509–523.
10. Kaptsov O.V. Determining equations and differential constraints // Nonlinear Math. Phys. 1995. V. 2. № 3–4. P. 283–291.
11. Сидоров А.Ф., Шанеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.
12. Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov A.A. Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics. Dordrecht: Kluwer, 1998.
13. Kaptsov O.V., Verevkin I.V. Differential constraints and exact solutions of nonlinear diffusion equations // J. Phys. A: Math. Gen. 2003. V. 36. P. 1401–1414.
14. Bluman G.W., Cole J.D. The general similarity solution of the heat equation // J. Math. Mech. 1969. V. 18. P. 1025–1042.

15. *Levi D., Winternitz P.* Nonclassical symmetry reduction: Example of the Boussinesq equation // *J. Phys. A.* 1989. V. 22. P. 2915–2924.
16. *Nucci M.C., Clarkson P.A.* The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions. An example of the Fitzhugh–Nagumo equation // *Phys. Lett. A.* 1992. V. 164. P. 49–56.
17. *Clarkson P.A.* Nonclassical symmetry reductions for the Boussinesq equation // *Chaos, Solitons & Fractals.* 1995. V. 5. P. 2261–2301.
18. *Olver P.J., Vorob'ev E.M.* Nonclassical and conditional symmetries. In: *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*, Vol. 3 (ed. *N.H. Ibragimov*). Boca Raton: CRC Press, 1996, P. 291–328.
19. *Clarkson P.A., Ludlow D.K., Priestley T.J.* The classical, direct and nonclassical methods for symmetry reductions of nonlinear partial differential equations // *Methods Appl. Anal.* 1997. V. 4. № 2. P. 173–195.
20. *Saccomandi G.* A personal overview on the reduction methods for partial differential equations // *Note di Matematica.* 2004/2005. V. 23. № 2. P. 217–248.
21. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
22. *Ibragimov N.H.* (ed.), *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Symmetries, Exact solutions and Conservation Laws*, vol. 1. Boca Raton: CRC Press, 1994.
23. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Изд. Дом “Интеллект”, 2010.
24. *Schlichting H.* *Boundary Layer Theory.* New York: McGraw-Hill, 1981.
25. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Unsteady axisymmetric boundary-layer equations: Transformations, properties, exact solutions, order reduction and solution method // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2015. V. 74. P. 40–50.
26. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Direct functional separation of variables and new exact solutions to axisymmetric unsteady boundary-layer equations // *Commun. Non-linear Sci. Numer. Simulat.* 2016. V. 31. P. 11–20.
27. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* One-dimensional reductions and functional separable solutions to unsteady plane and axisymmetric boundary-layer equations for non-Newtonian fluids // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2016. V. 85. P. 70–80.
28. *Clarkson P.A., Kruskal M.D.* New similarity reductions of the Boussinesq equation // *J. Math. Phys.* 1989. V. 30. P. 2201–2213.
29. *Ludlow D.K., Clarkson P.A., Bassom A.P.* New similarity solutions of the unsteady incompressible boundary-layer equations // *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* 2000. V. 53. P. 175–206.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta “MIFI”, 2019, vol. 8, no. 5, pp. 445–452

Method of Functional Separation of Variables Can Give More Exact Solutions than Methods Based on a Single Differential Constraint

A. D. Polyanin^{a,b,c,#}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia*

^b *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

^c *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005 Russia*

[#]*e-mail: polyanin@ipmnet.ru*

Received March 3, 2019; revised March 3, 2019; accepted April 9, 2019

Abstract—It is shown that the direct method of functional separation of variables can sometimes provide a larger number of exact solutions of nonlinear partial differential equations than the method of differential constraints (with a single constraint) and the nonclassical method of symmetry reduction (based on the invariant surface condition). This fact is illustrated on nonlinear reaction–diffusion and convection–diffusion equations with variable coefficients, nonlinear Klein–Gordon type equations, and hydrodynamic boundary layer equations. Some new exact solutions are given.

Keywords: direct method of functional separation of variables, method of differential constraints, nonclassical method of symmetry reduction, direct method of Clarkson and Kruskal, exact solutions

DOI: 10.1134/S2304487X19050067

REFERENCES

1. Polyanin A.D., *Nelineynyye reaktsionno-diffuzionny-*

ye uravneniya s peremennymi koeffitsiyentami: Metod poiska tochnykh resheniy v neyavnoy forme [Nonlinear reaction-diffusion equations with variable coefficients:

- Method for finding exact solutions in implicit form] *Vestnik NIYaU MIFI*, 2019, vol. 8, no. 4, pp. 321–334.
2. Polyanin A.D., Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2019, vol. 111, pp. 95–105.
 3. Birkhoff G., *Hydrodynamics*, Princeton: Princeton University Press, 1960.
 4. Pucci E., Saccomandi G., Evolution equations, invariant surface conditions and functional separation of variables, *Physica D*, 2000, vol. 139, pp. 28–47.
 5. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed.*, Boca Raton: CRC Press, 2012.
 6. Yanenko N.N., *Teoriya sovместnosti i metody integrirvaniya sistem nelineynykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [The compatibility theory and methods of integration of systems of nonlinear partial differential equations], *Proc. All-Union Math. Congress*, Leningrad: Nauka, 1964, vol. 2, pp. 247–252 (in Russian).
 7. Meleshko S.V., Differential constraints and one-parameter Lie–Bäcklund groups, *Sov. Math. Dokl.*, 1983, vol. 28, pp. 37–41.
 8. Galaktionov V.A., Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions, *Nonlinear Anal. Theor. Meth. Appl.*, 1994, vol. 23, pp. 1595–621.
 9. Olver P.J., Direct reduction and differential constraints, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 1994, vol. 444, pp. 509–523.
 10. Kaptsov O.V., Determining equations and differential constraints, *Nonlinear Math. Phys.*, 1995, vol. 2, no. 3–4, pp. 283–291.
 11. Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N., *Method of Differential Constraints and its Applications in Gas Dynamics*, Novosibirsk: Nauka, 1984 (in Russian).
 12. Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov A.A., *Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics*, Dordrecht: Kluwer, 1998.
 13. Kaptsov O.V., Verevkin I.V., Differential constraints and exact solutions of nonlinear diffusion equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2003, vol. 36, pp. 1401–1414.
 14. Bluman G.W., Cole J.D., The general similarity solution of the heat equation, *J. Math. Mech.* 1969. vol. 18. pp. 1025–1042.
 15. Levi D., Winternitz V., Nonclassical symmetry reduction: Example of the Boussinesq equation, *J. Phys. A*, 1989, vol. 22, pp. 2915–2924.
 16. Nucci M.C., Clarkson P.A., The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions. An example of the Fitzhugh–Nagumo equation, *Phys. Lett. A*, 1992, vol. 164, pp. 49–56.
 17. Clarkson P.A., Nonclassical symmetry reductions for the Boussinesq equation, *Chaos, Solitons and Fractals*, 1995, vol. 5, pp. 2261–2301.
 18. Olver P.J., Vorob'ev E.M., Nonclassical and conditional symmetries. In: *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 3* (ed. N. H. Ibragimov), Boca Raton: CRC Press, 1996, pp. 291–328.
 19. Clarkson P.A., Ludlow D.K., Priestley T.J., The classical, direct and nonclassical methods for symmetry reductions of nonlinear partial differential equations, *Methods Appl. Anal.*, 1997, vol. 4, no. 2, pp. 173–195.
 20. Saccomandi G., A personal overview on the reduction methods for partial differential equations, *Note di Matematica*, 2004/2005, vol. 23, no. 2, pp. 217–248.
 21. Ovsiannikov L.V., *Group Analysis of Differential Equations*, Boston: Academic Press, 1982.
 22. Ibragimov N.H. (ed.), *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Symmetries, Exact solutions and Conservation Laws, vol. 1*, Boca Raton: CRC Press, 1994.
 23. Kudryashov N.A., *Metody nelineynoy matematicheskoy fiziki* [Methods of Nonlinear Mathematical Physics], Dolgoprudnyi: Izd. Dom Intellect, 2010 (in Russian).
 24. Schlichting H., *Boundary Layer Theory*, New York: McGraw-Hill, 1981.
 25. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Unsteady axisymmetric boundary-layer equations: Transformations, properties, exact solutions, order reduction and solution method, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2015, vol. 74, pp. 40–50.
 26. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Direct functional separation of variables and new exact solutions to axisymmetric unsteady boundary-layer equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2016, vol. 31, pp. 11–20.
 27. Polyanin A.D., Zhurov A.I., One-dimensional reductions and functional separable solutions to unsteady plane and axisymmetric boundary-layer equations for non-Newtonian fluids, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2016, vol. 85, pp. 70–80.
 28. Clarkson P.A., Kruskal M.D., New similarity reductions of the Boussinesq equation, *J. Math. Phys.*, 1989, vol. 30, pp. 2201–2213.
 29. Ludlow D.K., Clarkson P.A., Bassom A.P., New similarity solutions of the unsteady incompressible boundary-layer equations, *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 2000, vol. 53, pp. 175–206.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.929+519.633

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2019 г. В. Г. Сорокин*

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

*e-mail: vsesor@gmail.com

Поступила в редакцию 28.08.2019 г.

После доработки 28.08.2019 г.

Принята к публикации 03.09.2019 г.

Рассматриваются два класса нелинейных телеграфных уравнений с запаздыванием:

$$u_{tt} + H(u)u_t = (G(u)u_x)_x + F(u, w),$$
$$u_{tt} = (G(u)u_x)_x + P(u)u_x + F(u, w),$$

где $u = u(x, t)$, $w = u(x, t - \tau)$, τ – постоянное время запаздывания. Уравнения содержат нелинейный коэффициент переноса $G(u)$ степенного или экспоненциального вида, а также коэффициенты $H(u)$ и $P(u)$, которые либо являются постоянными, либо являются нелинейными и имеют вид, аналогичный виду $G(u)$. Кинетические функции F всех рассматриваемых уравнений состоят из одной или нескольких произвольных функций одного аргумента. С помощью модифицированного метода функциональных связей для рассматриваемых уравнений получены новые точные решения с обобщенным и функциональным разделением переменных, а также решения типа бегущей волны $u = U(z)$, $z = kx + \lambda t$. Все решения выражаются в элементарных функциях, содержат свободные параметры и могут быть использованы для формулировки тестовых задач, которые можно применять для оценки точности численных методов интегрирования нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием. Проведен обзор публикаций, содержащих точные решения уравнений с запаздыванием и описывающих методы построения точных решений.

Ключевые слова: телеграфные уравнения с запаздыванием, нелинейные дифференциально-разностные уравнения, точные решения, решения с разделяющимися переменными, решения типа бегущей волны

DOI: 10.1134/S2304487X19050079

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения с запаздыванием в частных производных используются в динамике популяций, биологии, биохимии, биомедицине, экологии, механике, физике, химии, теории управления и других областях (см., например, [1–14] и ссылки в них), а также встречаются в математической теории искусственных нейронных сетей, результаты которой применяются для обработки сигналов и изображений и в задачах о распознавании образов [15–17]. Такими уравнениями описываются явления и процессы, в которых скорости изменения искомого величин зависят не только от состояния системы в данный момент времени, но и от предыдущей эволюции процесса, в частности, от состояния системы в некоторый момент времени в прошлом.

Дифференциальные уравнения с запаздыванием обладают рядом качественных особенно-

стей (см. обзор [18]), существенным образом осложняющих получение адекватных численных решений и тестирование численных методов. Дело в том, что теоретические оценки точности численных решений нелинейных уравнений в частных производных даже при отсутствии запаздывания содержат константы, которые обычно не могут быть вычислены априорно (особенно это касается типичных для уравнений с запаздыванием негладких решений). Практическая сходимость численных методов, основанная на измельчении расчетной сетки, также не может в полной мере гарантировать надежность используемых схем и точность расчетов (особенно вблизи значений параметров задачи, соответствующих неустойчивым решениям).

Во многих случаях наиболее эффективным способом оценки области применимости и точности численных методов является прямое срав-

нение численных и точных решений тестовых задач. Термин “точное решение” нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием мы применяем в случаях, когда решение выражается:

(i) в элементарных функциях или через определенные/неопределенные интегралы;

(ii) через решения обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием или без него (или систем таких уравнений);

(iii) через решения линейных уравнений в частных производных (или систем таких уравнений).

Допустимы комбинации решений (i)–(iii). Данное определение обобщает термин “точное решение”, используемый в [19] для нелинейных уравнений в частных производных без запаздывания.

Вторая часть статьи посвящена обзору публикаций, содержащих точные решения уравнений в частных производных с запаздыванием или описывающих методы их построения. В третьей части статьи приводятся решения типа бегущей волны, а в четвертой – решения с обобщенным и функциональным разделением переменных, полученные с помощью модифицированного метода функциональных связей, для двух классов нелинейных телеграфных уравнений с запаздыванием:

$$u_{tt} + H(u)u_t = (G(u)u_x)_x + F(u, w), \quad (1)$$

$$u_{tt} = (G(u)u_x)_x + P(u)u_x + F(u, w), \quad (2)$$

где $u = u(x, t)$, $w = u(x, t - \tau)$, τ – постоянное время запаздывания. Все полученные решения выражаются в элементарных функциях и содержат свободные параметры. Полученные точные решения могут быть использованы для формулировки тестовых задач, которые можно применять для оценки точности численных методов интегрирования уравнений в частных производных с запаздыванием.

2. ПУБЛИКАЦИИ ПО ТОЧНЫМ РЕШЕНИЯМ

Многие публикации содержат выраженные в элементарных функциях точные решения с обобщенным или функциональным разделением переменных различных классов нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием. Решения строятся методом функциональных связей [2, 20] или его модификациями [21–23]. Метод функциональных связей заключается в поиске решений с обобщенным

$$u = \sum_{n=1}^N \varphi_n(x) \psi_n(t)$$

или функциональным

$$u = U(z), \quad z = \sum_{n=1}^N \varphi_n(x) \psi_n(t),$$

разделением переменных, которые должны удовлетворять одной из двух функциональных связей:

$$z(u, w) = p(x), \quad w = u(x, t - \tau);$$

$$z(u, w) = q(x), \quad w = u(x, t - \tau).$$

Таким образом находится допустимый вид точного решения, а окончательный вид определяется после подстановки полученного в исходное уравнение.

В [2, 10, 20, 24–26] построены точные решения с обобщенным и функциональным разделением переменных нелинейных уравнений реакционно-диффузионного типа

$$u_t = au_{xx} + F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (3)$$

в которых кинетическая функция F зависит от одной или нескольких произвольных функций одного/двух аргументов, либо от свободных параметров; приводятся также решения более сложных уравнений с запаздыванием более высокого порядка:

$$L[u] = M[u] + F(u, w), \quad L[u] = \sum_{i=1}^n b_i(t) \frac{\partial^i u}{\partial t^i},$$

$$M[u] = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} k_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{m=1}^m c_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i};$$

$$u = u(\mathbf{x}, t), \quad w = u(\mathbf{x}, t - \tau), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m).$$

Решения типа бегущей волны для уравнений вида (3) приводятся в [27, 28].

Работа [29] содержит точные решения с обобщенным разделением переменных (обобщенная бегущая волна) вида $u = u(z)$, $z = t + \theta(x)$ нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием и переменными коэффициентами

$$c(x)u_t = [a(x)u_x]_x + b(x)F(u, w),$$

$$w = u(x, t - \tau);$$

описан метод построения таких решений, основанный на группировке коэффициентов уравнения с целью сведения его к обыкновенному дифференциальному уравнению с запаздыванием второго порядка. Точные решения подобных уравнений рассматриваются также в [30, 31].

Точные решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с несколькими запаздываниями рассматриваются в [10], а с переменным во времени запаздыванием – в [10, 20]. В [22, 23, 32, 33] приводятся точные решения уравнений с нелинейным коэффициентом переноса

$$u_t = [G(u)u_x]_x + F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau).$$

Работа [34] содержит точные решения нелинейных уравнений с запаздыванием типа Клейна–Гордона

$$u_{tt} = au_{xx} + F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (4)$$

Работы [35–37] содержат точные решения гиперболических уравнений с запаздыванием вида (1) при $H(u) \equiv \text{const}$ (с нелинейным коэффициентом переноса $G(u)$ и с $G(u) \equiv \text{const}$).

В [38–40] содержится большое число точных решений нелинейных систем реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием. Метод “генерирующих уравнений” построения таких решений предложен в [40].

В [25, 41] содержатся точные решения дифференциально-разностных уравнений теплопроводности и диффузии вида

$$v_t = \text{div}[f(u)\nabla u] + g(v), \quad v = u(\mathbf{x}, t + \tau),$$

а в [42] – дифференциально-разностных моделей типа Навье–Стокса для описания движения вязкой несжимаемой жидкости вида

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – вектор скорости жидкости, $\mathbf{v} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t + \tau)$, τ – время релаксации, p – отношение давления к плотности жидкости, ν – кинематическая вязкость, ∇ – оператор градиента, Δ – оператор Лапласа.

Ряд работ посвящен поиску точных решений уравнений в частных производных с запаздыванием методами группового анализа. В [43] исследовались нелинейные реакционно-диффузионные уравнения вида (3); было получено четыре уравнения, которые допускают инвариантные решения (для двух из них были найдены только вырожденные решения, линейные по x). В [44] удалось установить восемь нелинейных и два линейных уравнения типа Клейна–Гордона (4), допускающих инвариантные решения. Одно линейное и семь нелинейных уравнений типа Клейна–Гордона с переменным запаздыванием удалось отыскать в [45].

3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ТИПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

3.1. Предварительные замечания

В данном разделе приводятся выраженные в элементарных функциях точные решения типа бегущей волны $u = U(z)$, $z = kx + \lambda t$ телеграфных уравнений вида (1) с нелинейным коэффициентом переноса $G(u)$ степенного или экспоненциального вида. При этом коэффициент $H(u)$ либо является постоянным, $H(u) \equiv \sigma > 0$, либо является нелинейным и имеет вид, аналогичный виду коэффициента $G(u)$. Из полученных в этом разделе решений можно легко получить решения соответствующих уравнений вида (2), если произвести небольшие изменения в некоторых формулах. Покажем это.

Подставляя $u = U(z)$ в уравнения (1) и (2), получаем обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\lambda^2 U'' + \lambda H(U)U' = k^2(G(U)U')' + F(U, W), \quad (5)$$

$$\lambda^2 U'' = k^2(G(U)U')' + kP(U)U' + F(U, W), \quad (6)$$

где $W = U(z - \lambda\tau)$, штрих обозначает производную по z . Если положить $H(U) \equiv P(U)$, то оба уравнения (5) и (6) можно записать в виде одного уравнения:

$$\lambda^2 U'' + \epsilon H(U)U' = k^2(G(U)U')' + F(U, W),$$

в котором $\epsilon = \lambda$ для уравнения (5) и $\epsilon = -k$ для уравнения (6). Таким образом, вид решений типа бегущей волны будет одинаковым для уравнений (1) и (2) с точностью до значения коэффициента ϵ . Описанные далее в этом разделе решения получены для уравнения (1), но записаны с использованием коэффициента ϵ , что позволяет легко получить решения и для уравнения (2).

Во всех уравнениях функции f , g и h являются произвольными; параметры a , σ , τ – любые положительные числа; остальные параметры, если не указано иное, могут принимать любые значения.

3.2. Решения типа бегущей волны, выраженные в элементарных функциях

Уравнение 1. Уравнение

$$u_{tt} + \sigma u_t = a(u^n u_x)_x + u^{1-2n} f(u^n - w^n) \quad (7)$$

допускает решение типа бегущей волны степенного вида

$$u = (n\beta z + C_1)^{1/n}, \quad z = kx + \lambda t, \quad \beta = \frac{\epsilon\sigma}{ak^2}. \quad (8)$$

Параметр λ – корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$(n-1)\beta^2 \lambda^2 + f(n\beta \lambda \tau) = 0.$$

Выбирая $\epsilon = \lambda$ в выражении для β из (8), получаем решение уравнения (7), которое является частным случаем уравнения (1). Выбирая $\epsilon = -k$, получаем решение уравнения

$$u_{tt} = a(u^n u_x)_x + \sigma u_x + u^{1-2n} f(u^n - w^n),$$

которое является частным случаем уравнения (2).

Для краткости далее приводятся только уравнения из класса (1), а соответствующие уравнения из класса (2) опускаются.

Уравнение 2. Уравнение

$$u_{tt} + \sigma u_t = a(u^n u_x)_x + u^{n+1} f(w/u) + w^{n+1} g(w/u)$$

допускает решение типа бегущей волны экспоненциального вида

$$u = C_1 \exp(\beta z), \quad z = kx + \lambda t, \quad \beta = -\frac{\epsilon\sigma}{\lambda^2}.$$

Параметр k (или λ) определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$ak^2(n+1)\beta^2 + f(e^{-\beta\lambda\tau}) + e^{-(n+1)\beta\lambda\tau}g(e^{-\beta\lambda\tau}) = 0.$$

Уравнение 3. Уравнение

$$u_{tt} + u^n u_t = a(u^n u_x)_x + u^{n+1} f(w/u) + w^{n+1} g(w/u) + uh(w/u),$$

допускает решение типа бегущей волны экспоненциального вида

$$u = C_1 \exp(\beta z), \quad z = kx + \lambda t.$$

Параметры k и λ определяются из алгебраических (трансцендентных) уравнений:

$$ak^2(n+1)\beta^2 - \epsilon\beta + f(e^{-\beta\lambda\tau}) + e^{-(n+1)\beta\lambda\tau}g(e^{-\beta\lambda\tau}) = 0, \\ \lambda^2\beta^2 - h(e^{-\beta\lambda\tau}) = 0.$$

Уравнение 4. Уравнение

$$u_{tt} + u^m u_t = a(u^n u_x)_x + u^{2m-2n+1} f(u^{n-m} - w^{n-m}) + u^{2m-n+1} g(u^{n-m} - w^{n-m})$$

допускает решение типа бегущей волны степенного вида

$$u = ((n-m)\beta z + C_1)^{1/(n-m)}, \quad z = kx + \lambda t.$$

Параметры k и λ определяются из алгебраических (трансцендентных) уравнений:

$$ak^2\beta^2(m+1) - \epsilon\beta + g((n-m)\beta\lambda\tau) = 0, \\ (n-m-1)\beta^2\lambda^2 + f((n-m)\beta\lambda\tau) = 0.$$

Уравнение 5. Уравнение

$$u_{tt} + \sigma u_t = a(uu_x)_x - \epsilon\sigma\lambda^2 e^{-\beta u} + u e^{-2\beta u} f(e^{\beta u} - e^{\beta w}) + e^{-2\beta u} g(e^{\beta u} - e^{\beta w}), \\ \beta = -ak^2/\lambda^2,$$

допускает решение типа бегущей волны логарифмического вида

$$u = \frac{1}{\beta} \ln(-\beta\lambda^2 z + C_1), \quad z = kx + \lambda t. \quad (9)$$

Параметр k (или λ) – корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$a^2 k^4 \lambda^2 + f(ak^2 \lambda \tau) = 0.$$

Уравнение 6. Уравнение

$$u_{tt} + u e^{-\beta u} u_t = a(uu_x)_x + u e^{-2\beta u} f(e^{\beta u} - e^{\beta w}), \\ \beta = -ak^2/\lambda^2,$$

допускает решение типа бегущей волны (9), для которого параметр k (или λ) определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$(a^2 k^4 + \epsilon)\lambda^2 + f(ak^2 \lambda \tau) = 0.$$

Уравнение 7. Уравнение

$$u_{tt} + \sigma u_t = a(e^{\beta u} u_x)_x + bu + e^{\beta u} u^2 f(w/u) + e^{\beta u} wg(w/u)$$

допускает решение типа бегущей волны экспоненциального вида

$$u = C_1 \exp(\gamma z), \quad z = kx + \lambda t. \quad (10)$$

Параметры k , λ , γ определяются из системы трех алгебраических (трансцендентных) уравнений:

$$b - \gamma^2 \lambda^2 - \epsilon \gamma \sigma = 0, \\ ak^2 \gamma^2 \beta + f(e^{-\gamma \lambda \tau}) = 0, \\ ak^2 \gamma^2 e^{\gamma \lambda \tau} + g(e^{-\gamma \lambda \tau}) = 0.$$

Уравнение 8. Уравнение

$$u_{tt} + e^{\beta u} u_t = a(e^{\beta u} u_x)_x + bu + e^{\beta u} u^2 f(w/u) + e^{\beta u} wg(w/u)$$

допускает решение типа бегущей волны (10), параметры k , λ и γ которого находятся из системы трех алгебраических (трансцендентных) уравнений:

$$b - \gamma^2 \lambda^2 = 0, \\ ak^2 \gamma^2 \beta + f(e^{-\gamma \lambda \tau}) = 0, \\ (ak^2 \gamma^2 - \epsilon \gamma) e^{\gamma \lambda \tau} + g(e^{-\gamma \lambda \tau}) = 0.$$

Уравнение 9. Уравнение

$$u_{tt} + \sigma e^{n\beta u} u_t = a(e^{\beta u} u_x)_x + e^{(n-1)\beta u} f(e^{\beta u} - e^{\beta w}) + e^{-2\beta u} g(e^{\beta u} - e^{\beta w})$$

допускает решение типа бегущей волны логарифмического вида

$$u = \frac{1}{\beta} \ln(\gamma z + C_1), \quad z = kx + \lambda t.$$

Параметры λ и γ находятся из системы алгебраических (трансцендентных) уравнений:

$$\gamma^2 \lambda^2 + \beta g(\gamma \lambda \tau) = 0, \\ \gamma \epsilon \sigma - \beta f(\gamma \lambda \tau) = 0.$$

Уравнение 10. Уравнение

$$u_{tt} + \ln u u_t = [(a \ln u + b)u_x]_x + uf(w/u) + wg(w/u),$$

допускает решение типа бегущей волны экспоненциального вида

$$u = \exp(\gamma z), \quad z = kx + \lambda t, \quad \gamma = \frac{\epsilon}{ak^2}.$$

Параметр k (или λ) – корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$(a+b)k^2 - \lambda^2 + \frac{a^2 k^4}{\epsilon^2} [f(e^{-\gamma \lambda \tau}) + e^{-\gamma \lambda \tau} g(e^{-\gamma \lambda \tau})] = 0.$$

4. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

4.1. Решения нелинейных телеграфных уравнений вида (1)

Далее приводятся точные решения телеграфных уравнений вида (1) с нелинейным коэффициентом переноса $G(u)$ степенного или экспоненциального вида; коэффициент $H(u)$ либо является постоянным, $H(u) \equiv \sigma > 0$, либо является нелинейным и имеет вид, аналогичный виду коэффициента $G(u)$.

Во всех уравнениях функции f , g и h являются произвольными; параметры a , σ , τ – любые положительные числа; остальные параметры, если не указано иное, могут принимать любые значения.

Уравнение 11. Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} + \sigma u_t = a(u^n u_x)_x + uf(w/u) + wg(w/u) + u^{n+1}h(w/u). \quad (11)$$

Уравнение (11) допускает решение с разделяющимися переменными

$$u = e^{\beta t} \varphi(x),$$

где параметр β определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\beta^2 + \sigma\beta = f(e^{-\beta\tau}) + e^{-\beta\tau}g(e^{-\beta\tau}), \quad (12)$$

функция $\varphi(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$a(\varphi^n \varphi') + \varphi^{n+1}h(e^{-\beta\tau}) = 0. \quad (13)$$

Здесь и далее штрих обозначает полную производную функции по соответствующей переменной.

При $n \neq -1$ замена $\theta = \varphi^{n+1}$ позволяет свести уравнение (13) к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами. При $n = -1$ применяем замену $\theta = \ln \varphi$.

При $h(w/u) \equiv b = \text{const}$ уравнение (11) допускает решение с разделяющимися переменными

$$u = \varphi(x)\psi(t). \quad (14)$$

Здесь функция $\varphi(x)$ определяется по формулам:

$$\varphi(x) = \begin{cases} (C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x))^{\frac{1}{n+1}} & \text{при } \lambda > 0; \\ (C_1 \exp(-\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \exp(\sqrt{-\lambda}x))^{\frac{1}{n+1}} & \text{при } \lambda < 0; \\ C_1 \exp\left(-\frac{b}{2a}x^2 + C_2 x\right) & \text{при } n = -1, \end{cases}$$

где $\lambda = b(n+1)/a$, а функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\psi''(t) + \sigma\psi'(t) = \psi(t)f(\psi(t-\tau)/\psi(t)) + \psi(t-\tau)g(\psi(t-\tau)/\psi(t)). \quad (15)$$

Уравнение (15) допускает частное решение $\psi(t) = Ae^{\beta t}$, где A – произвольная постоянная, параметр β определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения (12).

При $h(w/u) \equiv 0$ уравнение (11) допускает решение с разделяющимися переменными вида (14), в котором функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ определяются, соответственно, из обыкновенного дифференциального уравнения и обыкновенного дифференциального уравнения с запаздыванием:

$$a(\varphi^n \varphi') = s\varphi, \quad (16)$$

$$\psi''(t) + \sigma\psi'(t) = s\psi^{n+1}(t) + \psi(t)f(z) + \psi(t-\tau)g(z), \quad z = \psi(t-\tau)/\psi(t). \quad (17)$$

При $s = 0$ уравнение (17) переходит в уравнение (15), а уравнение (16) имеет решение

$$\varphi(x) = \begin{cases} (C_1 x + C_2)^{1/(n+1)} & \text{при } n \neq -1, \\ C_1 \exp(C_2 x) & \text{при } n = -1. \end{cases}$$

При $n \neq -2, n \neq 0$ уравнение (16) имеет частное решение

$$\varphi(x) = Ax^{2/n}, \quad A = \left[\frac{sn^2}{2a(n+2)} \right]^{1/n}.$$

Уравнение 12. Уравнение

$$u_{tt} + \sigma u_t = a(u^{-1/2} u_x)_x + u^{1/2} f(z) + w^{1/2} g(z) + h(z), \\ z = u^{1/2} - w^{1/2},$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = [t\varphi(x) + \psi(x)]^2,$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$2a\varphi'' + \varphi[f(\tau\varphi) + g(\tau\varphi)] - 2\sigma\varphi^2 = 0, \\ 2a\psi'' + \psi[f(\tau\varphi) + g(\tau\varphi)] - 2\sigma\varphi\psi = \\ = 2\varphi^2 + \tau\varphi g(\tau\varphi) - h(\tau\varphi).$$

Частное решение этой системы имеет вид

$$\varphi = A, \quad \psi = \frac{2A^2 + \tau Ag(\tau A) - h(\tau A)}{4a} x^2 + C_1 x + C_2,$$

где константа A определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$f(\tau A) + g(\tau A) - 2\sigma A = 0.$$

Уравнение 13. Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} + \sigma u_t = a(e^{\beta u} u_x)_x + b e^{\beta u} + f(u - w). \quad (18)$$

При $b = 0$ уравнение (18) допускает решение в виде суммы функций разных аргументов

$$u = \frac{1}{\beta} \ln(C_1 x^2 + C_2 x + C_3) + \psi(t),$$

где функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\psi''(t) + \sigma \psi'(t) = \frac{2aC_1}{\beta} e^{\beta \psi(t)} + f(\psi(t) - \psi(t - \tau)).$$

При $b\beta > 0$ уравнение (18) допускает другое решение в виде суммы функций разных аргументов

$$u = \frac{1}{\beta} \ln[C_1 + C_2 \cos(\lambda x) + C_3 \sin(\lambda x)] + \psi(t),$$

$$\lambda = \sqrt{b\beta/a},$$

где функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\psi''(t) + \sigma \psi'(t) = bC_1 e^{\beta \psi(t)} + f(\psi(t) - \psi(t - \tau)). \quad (19)$$

При $b\beta < 0$ уравнение (18) также допускает решение в виде суммы функций разных аргументов

$$u = \frac{1}{\beta} \ln[C_1 + C_2 \exp(-\lambda x) + C_3 \exp(\lambda x)] + \psi(t),$$

$$\lambda = \sqrt{-b\beta/a},$$

где функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием (19).

Уравнение 14. Уравнение

$$u_{tt} + \sigma u_t = [(a \ln u + b)u_x]_x - cu \ln u + uf(w/u),$$

$$c > 0,$$

допускает решение с разделяющимися переменными

$$u = \exp(\lambda x)\psi(t), \quad \lambda = \pm\sqrt{c/a},$$

где функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\psi''(t) + \sigma \psi'(t) = (a + b)\lambda^2 \psi(t) + \psi(t)f(\psi(t - \tau)/\psi(t)). \quad (20)$$

Уравнение (20) допускает частное решение $\psi(t) = Ae^{\beta t}$, где A — произвольная постоянная, а β определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\beta^2 + \sigma\beta - (a + b)\lambda^2 - f(e^{-\beta\tau}) = 0.$$

Уравнение 15. Уравнение

$$u_{tt} + \sigma u_t = a[g'(u)u_x]_x + b + \left[-A^2 \frac{g''(u)}{(g'(u))^3} + \sigma A \frac{1}{g'(u)} \right] f(g(u) - g(w))$$

допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде

$$g(u) = At - \frac{b}{2a} x^2 + C_1 x + C_2,$$

где константа A определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $f(A\tau) = 1$.

Уравнение 16. Уравнение

$$u_{tt} + u^n u_t = a(u^n u_x)_x + bu^{n+1} + uf(w/u) + wg(w/u)$$

допускает решение с разделяющимися переменными

$$u = e^{(b+\lambda)t} \varphi(x).$$

Здесь функция $\varphi(x)$ определяется по формулам:

$$\varphi(x) = \begin{cases} C_1 (\cosh(\sqrt{\lambda(n+1)/a} x + C_2))^{1/(n+1)} & \text{при } \lambda(n+1) > 0; \\ C_1 (\cos(\sqrt{-\lambda(n+1)/a} x + C_2))^{1/(n+1)} & \text{при } \lambda(n+1) < 0; \\ C_1 \exp\left(\frac{\lambda x^2}{2a} + C_2 x\right), & \text{при } n = -1, \end{cases} \quad (21)$$

где параметр λ определяется из трансцендентного (алгебраического) уравнения

$$(b + \lambda)^2 - f(e^{-(b+\lambda)\tau}) - e^{-(b+\lambda)\tau} g(e^{-(b+\lambda)\tau}) = 0.$$

Уравнение 17. Уравнение

$$u_{tt} + u^n u_t = a(u^n u_x)_x + bu + u^{n+1} f(w/u) + w^{n+1} g(w/u),$$

$$b > 0,$$

допускает решение с разделяющимися переменными

$$u = e^{\pm\sqrt{b}t} \varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ определяется по формулам (21), в которых параметр λ имеет вид:

$$\lambda = \pm\sqrt{b} - f(e^{\mp\sqrt{b}\tau}) - e^{\mp(n+1)\sqrt{b}\tau} g(e^{\mp\sqrt{b}\tau}).$$

Здесь и далее в аналогичных ситуациях берутся одновременно либо только верхние, либо только нижние знаки.

Уравнение 18. Уравнение

$$u_{tt} + u^{-1/2}u_t = a(u^{-1/2}u_x)_x + u^{1/2}f(z) + w^{1/2}g(z) + h(z),$$

$$z = u^{1/2} - w^{1/2},$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = [t\varphi(x) + \psi(x)]^2,$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$2a\varphi'' + \varphi[f(\tau\varphi) + g(\tau\varphi)] = 0,$$

$$2a\psi'' + \psi[f(\tau\varphi) + g(\tau\varphi)] =$$

$$= 2\varphi^2 + 2\varphi + \tau\varphi g(\tau\varphi) - h(\tau\varphi).$$

Частное решение этой системы имеет вид

$$\varphi = A,$$

$$\psi = \frac{1}{4a}[2A^2 + 2A + \tau Ag(\tau A) - h(\tau A)]x^2 + C_1x + C_2,$$

где константа A определяется из трансцендентного (алгебраического) уравнения

$$f(\tau A) + g(\tau A) = 0.$$

Уравнение 19. Уравнение

$$u_{tt} + u^{-2/3}u_t = a(u^{-2/3}u_x)_x + u^{1/3}f(z) + w^{1/3}g(z) + h(z),$$

$$z = u^{1/3} - w^{1/3},$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = [t\varphi(x) + \psi(x)]^3,$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$3a\varphi'' - 6\varphi^3 + \varphi[f(\tau\varphi) + g(\tau\varphi)] = 0,$$

$$3a\psi'' + \psi[f(\tau\varphi) + g(\tau\varphi)] - 6\varphi^2\psi =$$

$$= 3\varphi + \tau\varphi g(\tau\varphi) - h(\tau\varphi).$$

Частное решение этой системы имеет вид

$$\varphi = A,$$

$$\psi = \frac{1}{6a}[3A + \tau Ag(\tau A) - h(\tau A)]x^2 + C_1x + C_2,$$

где константа A определяется из трансцендентного (алгебраического) уравнения

$$f(\tau A) + g(\tau A) = 6A^2.$$

Уравнение 20. Уравнение

$$u_{tt} + e^{\beta u}u_t = a(e^{\beta u}u_x)_x - be^{-2\beta u} + e^{-\beta u}f(e^{\beta u} - e^{\beta w}),$$

$$b\beta > 0,$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{\sqrt{b\beta}}{2a} x^2 + C_1x + \sqrt{b\beta}t + C_2 \right),$$

где параметр b определяется из условия

$$f(\sqrt{b\beta}\tau) = 0.$$

Уравнение 21. Уравнение

$$u_{tt} + e^{-\beta u}u_t = a(e^{\beta u}u_x)_x + b + e^{-2\beta u}f(e^{\beta u} - e^{\beta w})$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = \frac{1}{\beta} \ln \left(-\frac{b\beta}{2a} x^2 + C_1x + \lambda t + C_2 \right),$$

где параметр λ определяется из трансцендентного (алгебраического) уравнения

$$\beta f(\lambda\tau) + \lambda^2 - \lambda = 0.$$

4.2. Решения нелинейных телеграфных уравнений вида (2)

Далее приводятся точные решения телеграфных уравнений вида (2) с нелинейным коэффициентом переноса $G(u)$ степенного или экспоненциального вида; коэффициент $P(u)$ либо является постоянным, $P(u) \equiv \sigma > 0$, либо является нелинейным и имеет вид, аналогичный виду коэффициента $G(u)$.

Во всех уравнениях функции f , g и h являются произвольными; параметры a , σ , τ – любые положительные числа; остальные параметры, если не указано иное, могут принимать любые значения.

Уравнение 22. Уравнение

$$u_{tt} = a(u^n u_x)_x + \sigma u_x - bu^{n+1} + uf(w/u) + wg(w/u),$$

$$b(n+1) > 0,$$

допускает решение с разделяющимися переменными

$$u = e^{\lambda x} \psi(t), \quad \lambda = \pm \sqrt{\frac{b}{a(n+1)}},$$

где функция $\psi(t)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения с запаздыванием

$$\psi''(t) - \psi(t)f(\psi(t-\tau)/\psi(t)) -$$

$$- \psi(t-\tau)g(\psi(t-\tau)/\psi(t)) - \sigma\lambda\psi(t) = 0.$$

Уравнение 23. Уравнение

$$u_{tt} = a(u^n u_x)_x + u^n u_x + bu^{n+1} + uf(w/u) + wg(w/u)$$

допускает решение с разделяющимися переменными

$$u = \varphi(x)\psi(t).$$

Здесь функция $\varphi(x)$ определяется по формулам:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \theta(x)[C_1 \exp(-\sqrt{\lambda}x) + C_2 \exp(\sqrt{\lambda}x)]^{\frac{1}{n+1}} & \text{при } \lambda > 0, \quad n \neq -1; \\ \theta(x)[C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)]^{\frac{1}{n+1}} & \text{при } \lambda < 0, \quad n \neq -1; \\ \theta(x)(C_1x + C_2)^{\frac{1}{n+1}} & \text{при } \lambda = 0, \quad n \neq -1, \\ C_1 \exp(-bx + C_2 \exp(-x/a)) & \text{при } n = -1, \end{cases} \quad (22)$$

где $\lambda = \frac{1 - 4ab(n+1)}{4a^2}$, $\theta(x) = \exp\left(-\frac{x}{2a(n+1)}\right)$, а функция $\psi(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению с запаздыванием

$$\psi''(t) - \psi(t)f(\psi(t - \tau)/\psi(t)) - \psi(t - \tau)g(\psi(t - \tau)/\psi(t)) = 0. \quad (23)$$

Уравнение (23) допускает частное решение $\psi(t) = Ae^{\beta t}$, где A – произвольная постоянная, а параметр β определяется из трансцендентного (алгебраического) уравнения

$$\beta^2 - f(e^{-\beta\tau}) - e^{-\beta\tau}g(e^{-\beta\tau}) = 0.$$

Уравнение 24. Уравнение

$$u_{tt} = a(u^n u_x)_x + u^n u_x + bu + u^{n+1}f(w/u) + w^{n+1}g(w/u), \quad b > 0 \quad (24)$$

при любом n допускает решение с разделяющимися переменными

$$u = e^{\pm\sqrt{bt}}\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ определяется по формулам (22), а параметр b определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$b - f(e^{\mp\sqrt{bt}}) - e^{\mp(n+1)\sqrt{bt}}g(e^{\mp\sqrt{bt}}) = 0.$$

Уравнение (24) при $n \neq -1$ допускает другое решение с разделяющимися переменными:

$$u = C_1 \exp(\pm\sqrt{bt})[\exp(-x/a) + C_2]^{\frac{1}{n+1}},$$

а при $n = -1$ имеет также решение

$$u = C_1 \exp(\pm\sqrt{bt} + C_2 \exp(-x/a)).$$

В обоих случаях параметр b определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$f(e^{\mp\sqrt{bt}}) + e^{\mp(n+1)\sqrt{bt}}g(e^{\mp\sqrt{bt}}) = 0.$$

Уравнение 25. Уравнение

$$u_{tt} = a(u^{-1/2}u_x)_x + u^{-1/2}u_x + u^{1/2}f(z) + w^{1/2}g(z) + h(z), \\ z = u^{1/2} - w^{1/2},$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = [t\varphi(x) + \psi(x)]^2,$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$2a\varphi'' + 2\varphi' + \varphi[f(\tau\varphi) + g(\tau\varphi)] = 0, \\ 2a\psi'' + 2\psi' + \psi[f(\tau\varphi) + g(\tau\varphi)] = \\ = 2\varphi^2 + \tau\varphi g(\tau\varphi) - h(\tau\varphi).$$

Частное решение этой системы имеет вид

$$\varphi = A,$$

$$\psi = \frac{x}{2}[2A^2 + \tau Ag(\tau A) - h(\tau A)] + C_1 \exp(-x/a) + C_2,$$

где константа A определяется из трансцендентного (алгебраического) уравнения

$$f(\tau A) + g(\tau A) = 0.$$

Уравнение 26. Уравнение

$$u_{tt} = a(u^{-2/3}u_x)_x + u^{-2/3}u_x + u^{1/3}f(z) + w^{1/3}g(z) + h(z), \\ z = u^{1/3} - w^{1/3},$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = [t\varphi(x) + \psi(x)]^3,$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$3a\varphi'' + 3\varphi' - 6\varphi^3 + \varphi[f(\tau\varphi) + g(\tau\varphi)] = 0, \\ 3a\psi'' + 3\psi' + \psi[f(\tau\varphi) + g(\tau\varphi)] - 6\varphi^2\psi = \\ = \tau\varphi g(\tau\varphi) - h(\tau\varphi).$$

Частное решение этой системы имеет вид

$$\varphi = A,$$

$$\psi = \frac{x}{3}[\tau Ag(\tau A) - h(\tau A)] + C_1 \exp(-x/a) + C_2,$$

где константа A определяется из трансцендентного (алгебраического) уравнения

$$f(\tau A) + g(\tau A) = 6A^2.$$

Уравнение 27. Уравнение

$$u_{tt} = a(e^{\beta u} u_x)_x + e^{\beta u} u_x - be^{-2\beta u} + e^{-\beta u} f(e^{\beta u} - e^{\beta w}),$$

$$b\beta > 0,$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = \frac{1}{\beta} \ln(C_1 e^{-x/a} \pm \sqrt{b\beta} t + C_2),$$

где параметр b определяется из условия

$$f(\pm\sqrt{b\beta}t) = 0.$$

Уравнение 28. Уравнение

$$u_{tt} = a(e^{\beta u} u_x)_x + e^{\beta u} u_x - be^{-2\beta u} + f(e^{\beta u} - e^{\beta w}),$$

$$b\beta > 0,$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = \frac{1}{\beta} \ln(C_1 e^{-x/a} - \beta x f(\pm\sqrt{b\beta}t) \pm \sqrt{b\beta} t + C_2).$$

5. КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Рассмотрены телеграфные уравнения с запаздыванием, содержащие степенные или экспоненциальные нелинейности, а также произвольные функции одного аргумента. Построены точные решения типа бегущей волны, а также решения с обобщенным и функциональным разделением переменных. Все полученные решения выражены в элементарных функциях, содержат свободные параметры и могут быть использованы для формулировки тестовых задач, которые можно применять для оценки точности численных методов решения нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием.

Автор благодарит А.Д. Полянина за внимание к работе и полезные замечания.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310385-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брацун Д.А., Захаров А.П. К вопросу о численном расчете пространственно-распределенных динамических систем с запаздыванием по времени // Вестник Пермского универ. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2012. Вып. 4. № 12. С. 32–41.
2. Полянин А.Д., Журов А.И. Метод функциональных связей: Точные решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием // Вестник Национального исследовательского ядерного университета “МИФИ”. 2013. Т. 2. № 4. С. 425–431.
3. Vocharov G.A., Rihan F.A. Numerical modelling in biosciences using delay differential equations // J. Comput. Appl. Math. 2000. V. 125. P. 183–199.
4. Faria T., Trofimchuk S. Nonmonotone travelling waves in a single species reaction–diffusion equation with delay // J. Differ. Equ. 2006. V. 228. P. 357–376.
5. Herz A.V.M. et al. Viral dynamics in vivo: limitations on estimates of intracellular delay and virus decay // Proc. Nat. Acad. Sci. 1996. V. 93. P. 7247–7251.
6. Huang J., Zou X. Traveling wavefronts in diffusive and cooperative Lotka–Volterra system with delays // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 271. P. 455–466.
7. Kyrychko Y.N., Hogan S.J. On the use of delay equations in engineering applications // J. of Vibration and Control. 2010. V. 16. № 7–8.
8. Mittler J.E. et al. Influence of delayed viral production on viral dynamics in HIV-1 infected patients // Math. Biosci. 1998. V. 152. P. 143–163.
9. Nelson P.W., Perelson A.S. Mathematical analysis of delay differential equation models of HIV-1 infection // Math. Biosci. 2002. V. 179. P. 73–94.
10. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2014. V. 19. P. 409–416.
11. Shakeri F., Dehghan M. Solution of delay differential equations via a homotopy perturbation method // Math. Comput. Model. 2008. V. 48. P. 486–498.
12. Walter H.O. Topics in Delay Differential Equations // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 2014. V. 116. № 2. P. 87–114.
13. Wu J., Zou X. Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay // J. Dyn. Differ. Equ. 2001. V. 13. № 3. P. 651–687.
14. Wu J.H. Introduction to neural dynamics and signal transmission delay. Berlin: de Gruyter, 2002.
15. Lu J.G. Global exponential stability and periodicity of reaction-diffusion delayed recurrent neural networks with Dirichlet boundary conditions // Chaos, Solitons and Fractals. 2008. V. 35. P. 116–125.
16. Wang L., Gao Y. Global exponential robust stability of reaction-diffusion interval neural networks with time-varying delays // Phys. Lett. A. 2006. V. 350. P. 342–348.
17. Wu J., Campbell S.A., Bélair J. Time-Delayed Neural Networks: Stability and Oscillations // Encyclopedia of Computational Neuroscience. New York: Springer, 2014. P. 1–8.
18. Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: математические модели и качественные особенности // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2017. Т. 6. № 1. С. 41–55.
19. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition. Boca Raton: CRC Press, 2012.
20. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2014. V. 19. № 3. P. 417–430.
21. Полянин А.Д., Журов А.И. Некоторые методы построения точных решений нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздывающим аргументом и переменными коэффициентами пе-

- реноса // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2015. Т. 4. № 2. С. 107–118.
22. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2014. V. 67. P. 267–277.
 23. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Nonlinear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions // *Appl. Math. Lett.* 2014. V. 37. P. 43–48.
 24. *Полянин А.Д.* Точные решения с обобщенным разделением переменных нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием // *Теор. осн. хим. техн.* 2015. Т. 49. № 1. С. 112–119.
 25. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2013. V. 54. P. 115–126.
 26. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction–diffusion equations // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2014. V. 59. P. 16–22.
 27. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Nonlinear delay reaction–diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions // *Appl. Math. Lett.* 2015. V. 46. P. 38–43.
 28. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г.* Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: Точные решения типа бегущей волны // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2015. Т. 4. № 2. С. 119–126.
 29. *Polyanin A.D.* Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay and variable coefficients // *Appl. Math. Lett.* 2019. Vol. 90. P. 49–53.
 30. *Polyanin A.D.* Functional separable solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with variable coefficients // *Appl. Math. Comput.* 2019. V. 347. P. 282–292.
 31. *Polyanin A.D.* Functional separable solutions of nonlinear convection–diffusion equations with variable coefficients // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2019. V. 73. P. 379–390.
 32. *Полянин А.Д.* Точные решения новых классов реакционно-диффузионных уравнений, содержащих запаздывание и произвольные функции // *Теор. осн. хим. техн.* 2015. Т. 49. № 2. С. 175–181.
 33. *Полянин А.Д., Журов А.И.* Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием и переменными коэффициентами переноса: решения с обобщенным и функциональным разделением переменных // *Математическое моделирование и численные методы.* 2015. № 8. С. 3–37.
 34. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Generalized and functional separable solutions to non-linear delay Klein – Gordon equations // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2014. V. 19. № 8. P. 2676–2689.
 35. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г.* Точные решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений гиперболического типа с запаздыванием // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2014. Т. 3. № 2. С. 141–148.
 36. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Вязьмин А.В.* Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения гиперболического типа с запаздыванием: точные решения, глобальная неустойчивость // *Математическое моделирование и численные методы.* 2014. № 4. С. 53–73.
 37. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Вязьмин А.В.* Точные решения и качественные особенности нелинейных гиперболических реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием // *Теор. осн. хим. техн.* 2015. Т. 49. № 5. С. 527–541.
 38. *Сорокин В.Г.* Точные решения некоторых нелинейных уравнений и систем уравнений в частных производных с запаздыванием // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2016. Т. 5. № 3. С. 199–219.
 39. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Non-linear instability and exact solutions to some delay reaction–diffusion systems // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2014. V. 62. P. 33–40.
 40. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* The generating equations method: Constructing exact solutions to delay reaction–diffusion systems and other non-linear coupled delay PDEs // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2015. V. 71. P. 104–115.
 41. *Полянин А.Д.* Точные решения дифференциально-разностных уравнений тепло-и массопереноса с конечным временем релаксации // *Теор. осн. хим. техн.* 2014. Т. 48. № 2. С. 182–189.
 42. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact solutions of nonlinear differential-difference equations of a viscous fluid with finite relaxation time // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2013. V. 57. P. 116–122.
 43. *Meleshko S.V., Moyo S.* On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay // *J. Math. Anal. Appl.* 2008. V. 338. № 1. P. 448–466.
 44. *Long F.-S., Meleshko S.V.* On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein – Gordon equation with a delay // *Math. Methods Appl. Sci.* 2016. V. 39. № 12. P. 3255–3270.
 45. *Long F.-S., Meleshko S.V.* Symmetry analysis of the nonlinear two-dimensional Klein – Gordon equation with a time-varying delay // *Math. Methods Appl. Sci.* 2017. V. 40. № 13. P. 4658–4673.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta “MIFI”, 2019, vol. 8, no. 5, pp. 453–464

Exact Solutions of Nonlinear Telegraph Equations with Delay

V. G. Sorokin[#]

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia

[#]*e-mail: vsesor@gmail.com*

Received August 28, 2019; reviaed August 28, 2019; accepted September 3, 2019

Abstract—The following nonlinear telegraph equations with delay are considered:

$$\begin{aligned}u_{tt} + H(u)u_t &= (G(u)u_x)_x + F(u, w), \\u_{tt} &= (G(u)u_x)_x + P(u)u_x + F(u, w),\end{aligned}$$

where $u = u(x; t)$, $w = u(x; t - \tau)$, and τ is the constant delay time. The equations contain the nonlinear transfer coefficient $G(u)$ of the power-law or exponential type, as well as the coefficients $H(u)$ and $P(u)$ that either are constant or are nonlinear and have the form similar to the form of $G(u)$. The kinetic functions F of all the equations consist of one or several arbitrary functions of one argument. For the equations under consideration, new exact travelling-wave solutions, as well as new exact solutions with generalized and functional separation of variables, have been obtained by means of the modified method of functional constraints. All the solutions are expressed in terms of elementary functions, contain free parameters, and can be used for the formulation of test problems to assess the accuracy of numerical methods for solving nonlinear partial differential equations with delay. Publications presenting exact solutions of equations with delay and describing methods for constructing exact solutions have been reviewed.

Keywords: telegraph equations with delay, nonlinear differential-difference equations, exact solutions, travelling-wave solutions, separable solutions

DOI: 10.1134/S2304487X19050079

REFERENCES

- Bratsun D.A., Zakharov A.P. K voprosu o chislennom raschete prostranstvenno-raspredelennykh dinamicheskikh sistem s zapazdyvaniem po vremeni [On the numerical calculation of spatially extended dynamical systems with time delay]. *Vestnik Permskogo Universiteta. Ser. Matematika, Mekhanika, Informatika*, 2012, vol. 4, no. 12, pp. 32–41 (in Russian).
- Polyanin A.D., Zhurov A.I. Metod funktsional'nykh svyazey: Tochnye resheniya nelinejnykh reakcionno-diffuzionnykh uravnenij s zapazdyvaniem [Method of functional relations: Exact solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay] *Vestnik NIYaU MIFI*, 2013, vol. 2, no. 4, pp. 425–431 (in Russian).
- Bocharov G.A., Rihan F.A. Numerical modelling in biosciences using delay differential equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 2000, vol. 125, pp. 183–199.
- Faria T., Trofimchuk S. Nonmonotone travelling waves in a single species reaction–diffusion equation with delay. *J. Differ. Equ.*, 2006, vol. 228, pp. 357–376.
- Herz A.V.M. et al. Viral dynamics in vivo: limitations on estimates of intracellular delay and virus decay. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1996, vol. 93, pp. 7247–7251.
- Huang J., Zou X. Traveling wavefronts in diffusive and cooperative Lotka–Volterra system with delays. *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, vol. 271, pp. 455–466.
- Kyrychko Y.N., Hogan S.J. On the use of delay equations in engineering applications. *J. of Vibration and Control*, 2010, vol. 16, no. 7–8.
- Mittler J.E. et al. Influence of delayed viral production on viral dynamics in HIV-1 infected patients. *Math. Biosci.*, 1998, vol. 152, pp. 143–163.
- Nelson P.W., Perelson A.S. Mathematical analysis of delay differential equation models of HIV-1 infection. *Math. Biosci.*, 2002, vol. 179, pp. 73–94.
- Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, pp. 409–416.
- Shakeri F., Dehghan M. Solution of delay differential equations via a homotopy perturbation method. *Math. Comput. Model.*, 2008, vol. 48, pp. 486–498.
- Walter H.O. Topics in Delay Differential Equations. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 2014, vol. 116, no. 2, pp. 87–114.
- Wu J., Zou X. Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay. *J. Dyn. Differ. Equ.*, 2001, vol. 13, no. 3, pp. 651–687.
- Wu J.H. *Introduction to neural dynamics and signal transmission delay*. Berlin: de Gruyter, 2002.
- Lu J.G. Global exponential stability and periodicity of reaction-diffusion delayed recurrent neural networks with Dirichlet boundary conditions. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, vol. 35, pp. 116–125.
- Wang L., Gao Y. Global exponential robust stability of reaction-diffusion interval neural networks with time-varying delays. *Phys. Lett. A*, 2006, vol. 350, pp. 342–348.
- Wu J., Campbell S.A., Bélair J. Time-Delayed Neural Networks: Stability and Oscillations. *Encyclopedia of Computational Neuroscience*. New York: Springer, 2014, pp. 1–8.
- Polyanin A. D., Sorokin V.G. Reakcionno-diffuzionnye uravneniya s zapazdyvaniem: matematicheskie modeli i kachestvennye osobennosti [Reaction-diffusion equations with delay: mathematical models and qualitative features]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2017, vol. 6, no. 1, pp. 41–55 (in Russian).
- Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition*. Boca Raton: CRC Press, 2012.
- Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction–diffusion equations and more complex nonlinear equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 417–430.
- Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nekotorye metody postroyeniya tochnykh reshenij nelinejnykh reakcionno-diffuzionnykh uravnenij s zapazdyvayushchim argumentom i

- peremennymi koefitsientami perenosy [Some methods for the construction of exact solutions of nonlinear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2015, vol. 4, no. 2, pp. 107–118 (in Russian).
22. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 67, pp. 267–277.
 23. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nonlinear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions. *Appl. Math. Lett.*, 2014, vol. 37, pp. 43–48.
 24. Polyanin A. D. Exact generalized separable solutions to nonlinear delay reaction–diffusion equations. *Theor. Found. Chem. En+*, 2015, vol. 49, no. 1, pp. 107–114.
 25. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2013, vol. 54, pp. 115–126.
 26. Polyanin A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction–diffusion equations. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 59, pp. 16–22.
 27. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nonlinear delay reaction–diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions. *Appl. Math. Lett.*, 2015, vol. 46, pp. 38–43.
 28. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nelinejnye reakcionno-diffuzionnye uravneniya s zapazdyvaniem: Tochnye resheniya tipa begushchej volny [Nonlinear delay reaction–diffusion equations: Exact traveling wave solutions]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2015, vol 4, no. 2, pp. 119–126 (in Russian).
 29. Polyanin A.D. Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay and variable coefficients. *Appl. Math. Lett.*, 2019, vol. 90, pp. 49–53.
 30. Polyanin A.D. Functional separable solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with variable coefficients. *Appl. Math. Comput.*, 2019, vol. 347, pp. 282–292.
 31. Polyanin A. D. Functional separable solutions of nonlinear convection–diffusion equations with variable coefficients. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2019, vol. 73, pp. 379–390.
 32. Polyanin A.D. Exact solutions to new classes of reaction–diffusion equations containing delay and arbitrary functions. *Theor. Found. Chem. En+*, 2015, vol. 49, no. 2, pp. 169–175.
 33. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nelinejnye reakcionno-diffuzionnye uravneniya s zapazdyvaniem i peremennymi koefitsientami perenosy: resheniya s obobshchennym i funktsional'nym razdeleniem peremennykh [Non-linear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients: generalized and functional separable solutions]. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 8, pp. 3–37 (in Russian).
 34. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Generalized and functional separable solutions to non-linear delay Klein – Gordon equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 8, pp. 2676–2689.
 35. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Tochnye resheniya nelinejnykh reakcionno-diffuzionnykh uravnenij giperbolicheskogo tipa s zapazdyvaniem [Exact solutions to nonlinear delay reaction–diffusion equations of hyperbolic type]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2014, vol.3, no 2, pp. 141–148 (in Russian).
 36. Polyanin A.D., Sorokin V.G., and Vyazmin A.V. Nelinejnye reakcionno-diffuzionnye uravneniya giperbolicheskogo tipa s zapazdyvaniem: tochnye resheniya, global'naya neustojchivost' [Nonlinear delay reaction–diffusion equations of hyperbolic type: Exact solutions and global instability]. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 4, pp. 53–73 (in Russian).
 37. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Vyazmin A.V. Exact solutions and qualitative features of nonlinear hyperbolic reaction–diffusion equations with delay. *Theor. Found. Chem. En+*, 2015, vol. 49, no. 5, pp. 622–635.
 38. Sorokin V.G. Tochnye resheniya nekotorykh nelinejnykh uravnenij i sistem uravnenij v chastnykh proizvodnykh s zapazdyvaniem [Exact solutions of some nonlinear partial differential equations with delay and systems of such equations]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2016, vol. 5, no. 3, pp. 199–219 (in Russian).
 39. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Non-linear instability and exact solutions to some delay reaction–diffusion systems. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 62, pp. 33–40.
 40. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The generating equations method: Constructing exact solutions to delay reaction–diffusion systems and other non-linear coupled delay PDEs. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2015, vol. 71, pp. 104–115.
 41. Polyanin A.D. Exact solutions to differential-difference heat and mass transfer equations with a finite relaxation time. *Theor. Found. Chem. En+*, 2014, vol. 48, no 2, pp. 167–174.
 42. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of nonlinear differential-difference equations of a viscous fluid with finite relaxation time. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2013, vol. 57, pp. 116–122.
 43. Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 338, no. 1, pp. 448–466.
 44. Long F.-S., Meleshko S.V. On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein – Gordon equation with a delay. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2016, vol. 39, no. 12, pp. 3255–3270.
 45. Long F.-S., Meleshko S.V. Symmetry analysis of the nonlinear two-dimensional Klein – Gordon equation with a time-varying delay. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2017, vol. 40, no. 13, pp. 4658–4673.

МЕТОДИКА И ПРОГРАММА РАСЧЕТА СКОРОСТИ ЗВУКА В ВОДЕ В УСЛОВИЯХ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ У ПОВЕРХНОСТИ ТЕПЛО ВЫДЕЛЯЮЩИХ СБОРОК ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ

© 2019 г. А. В. Воронина^{1,*}, С. В. Павлов¹

¹ Димитровградский инженерно-технологический институт –
филиал Национального исследовательского ядерного университета “МИФИ”, Димитровград, 433511, Россия

*e-mail: AVVoronina@mephi.ru

Поступила в редакцию 05.06.2019 г.

После доработки 02.08.2019 г.

Принята к публикации 27.08.2019 г.

Рассмотрен принцип ультразвукового метода определения формоизменения ТВС в бассейнах выдержки АЭС. Показано, что вызванная остаточным тепловыделением естественная конвекция влияет на увеличение погрешности измерений при использовании ультразвукового метода. Предложена методика расчета процесса теплообмена при свободной конвекции с граничными условиями II рода. Проверка разработанной методики проводилась путем проведения расчетов в условиях экспериментов, в которых исследовалось изменение температуры в воде внутри свободноконвективного ламинарного и турбулентного теплового пограничного слоя. Анализ экспериментальных и расчетных данных показывает, что используемая методика достаточно адекватно описывает процесс теплообмена при естественной конвекции. На ее основе разработан алгоритм и создана программа для расчета скорости звука в воде в ламинарном и турбулентном пограничном слое у поверхности вертикальной нагретой пластины, моделирующей в первом приближении нагретую поверхность ТВС ВВЭР-1000. Разработанная программа вычисляет также параметры пограничного слоя, температуру подогрева, профиль температуры вдоль акустической оси ультразвукового датчика. Программа может быть использована для приближенных оценок влияния конвекции на результаты измерений и для верификации CFD-кодов применительно к расчету параметров естественной конвекции у поверхности ТВС ВВЭР-1000 с учетом наличия остаточного тепловыделения.

Ключевые слова: ультразвуковой метод, ТВС, свободная конвекция, пограничный слой, скорость звука

DOI: 10.1134/S2304487X19050080

ВВЕДЕНИЕ

Геометрическая стабильность тепловыделяющих сборок (ТВС) ядерных реакторов, характеризующаяся не превышением определенных значений параметров формоизменения на протяжении всего срока эксплуатации, является залогом надежной и безопасной работы, как самой сборки, так и энергоблока в целом. Для наиболее распространенного в России энергетического реактора ВВЭР-1000 параметрами, определяющими формоизменение сборки, являются величина и форма прогиба вертикальной оси ТВС, угол скручивания. Последний определяется по углу поворота дистанционирующей решетки (ДР) вокруг вертикальной оси относительно своего исходного положения до эксплуатации ТВС.

Эти параметры определяются в результате измерений геометрических характеристик ТВС с помощью неразрушающих методов либо на стен-

дах инспекции и ремонта ТВС на АЭС [1], либо в защитных камерах в исследовательских центрах [2].

Наличие воды в бассейнах выдержки АЭС дает возможность использовать при инспекциях ТВС на стендах инспекции и ремонта ультразвуковые методы (УЗ-методы), которые широко используются в других областях промышленности. Привлекательность использования УЗ-методов разрабатываемой инспекции объясняется отсутствием контакта датчиков с измеряемой ТВС. Это в значительной мере снижает вероятность повреждения ТВС при измерениях и существенно упрощает конструкцию измерительных узлов стенда [3].

Для определения величины прогиба и угла скручивания ТВС ВВЭР-1000 определяются координаты точек поверхности ободов ДР в заранее определенной системе координат, связанной или с самой ТВС, или со стендом инспекции. Зная

эти координаты, с помощью простых формул вычисляются искомые величины [4].

При использовании ультразвукового эхо-импульсного метода координаты точек поверхности исследуемой ТВС определяются следующим образом. Измеряется время τ распространения ультразвуковых волн от датчика до поверхности ТВС и обратно. Затем, задавшись соответствующим данной температуре значением скорости звука в воде c , определяют расстояние от датчика до поверхности ТВС X :

$$X = \frac{c\tau}{2}, \quad (1)$$

где c – скорость звука в среде распространения, м/с², τ – время распространения ультразвуковой волны от датчика до объекта и обратно, с.

Вдоль акустической оси датчика откладывает-ся вычисленное по формуле (1) расстояние и определяются координаты точки поверхности ТВС. Для каждого геометрического параметра установлен определенный набор точек поверхности ТВС, знание пространственного положения которых относительно друг друга позволяет определить данный параметр.

В настоящей статье рассматривается влияние естественной конвекции у поверхности ТВС на результаты измерений геометрических характеристик ТВС ультразвуковым методом с учетом остаточного тепловыделения. Предложена методика определения параметров теплообмена в воде внутри свободноконвективного теплового пограничного слоя и разработана программа расчета скорости звука в воде в условиях естественной конвекции у поверхности тепловыделяющих сборок ядерных реакторов.

ВЛИЯНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ НА РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

На результаты ультразвуковой размеромерии влияют параметры воды, в которой распространяются ультразвуковые волны, и особенно масштаб их изменений вдоль траектории распространения волн. Вследствие наличия остаточного тепловыделения у облученной ТВС, вдоль ее поверхности образуется конвективный слой, существенно влияющий на распространение ультразвуковых волн: температура у поверхности ТВС медленно изменяется вдоль акустической оси датчика (рис. 1).

В нижней части ТВС возникает ламинарный пограничный слой, который затем в верхней части ТВС переходит в турбулентный (степень турбулизации потока напрямую зависит от температуры) [6].

Вследствие того, что скорость звука увеличивается при увеличении температуры воды до

74°С, а затем незначительно уменьшается [7], скорость звука уменьшается при удалении от стенки (рис. 2) и за пределами пограничного слоя имеет постоянное значение $c(T_\infty)$.

Таким образом, время распространения ультразвуковой волны от датчика до плоскости зависит от изменения скорости звука у поверхности ТВС:

$$\tau = \frac{x_0 - \delta_t}{c(T_\infty)} + \int_0^{\delta_t} \frac{dx}{c(T(x))}, \quad (2)$$

где x_0 – координата расположения датчика; δ_t – толщина теплового пограничного слоя.

На рис. 3 показаны экспериментальные данные методической погрешности измерения диаметра макета ТВС от произведения δ , на температурный перепад ΔT в пограничном слое [6]. Видно, что свободная конвекция у поверхности ТВС оказывает значительное влияние на результаты измерений параметров формоизменения ТВС УЗ-методом.

МЕТОДИКА РАСЧЕТА СКОРОСТИ ЗВУКА В УСЛОВИЯХ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ У ПОВЕРХНОСТИ ТВС

Для изучения влияния естественной конвекции у поверхности ТВС на результаты ультразвуковых измерений используют численное и натуральное моделирование [8]. Методика расчета процесса теплообмена строится на предположении, что поверхность ТВС можно представить вертикальной пластиной с постоянным тепловым потоком через нее. Для пластины существуют достаточно простые аналитические зависимости, описывающие естественную конвекцию у ее поверхности.

В результате проведенного изучения характеристик теплообмена при естественной конвекции авторами разработана программа для расчета скорости звука и профиля температур в области ламинарного и турбулентного режимов теплообмена при свободной конвекции с граничными условиями второго рода в приближении плоской стенки [9].

Режим течения при свободной конвекции определяется произведением чисел Грасгофа Gr и Прандтля Pr , которое называется числом Релея Ra . Следует отметить различную форму записи числа Gr при разных граничных условиях. При граничных условиях II рода ($q = \text{constant}$) выражение для Gr принимает вид (3):

$$Gr_y^* = \frac{g\beta q y^4}{\lambda\nu^2}, \quad (3)$$

где β – коэффициент объемного теплового расширения жидкости, 1/К; q – плотность теплового

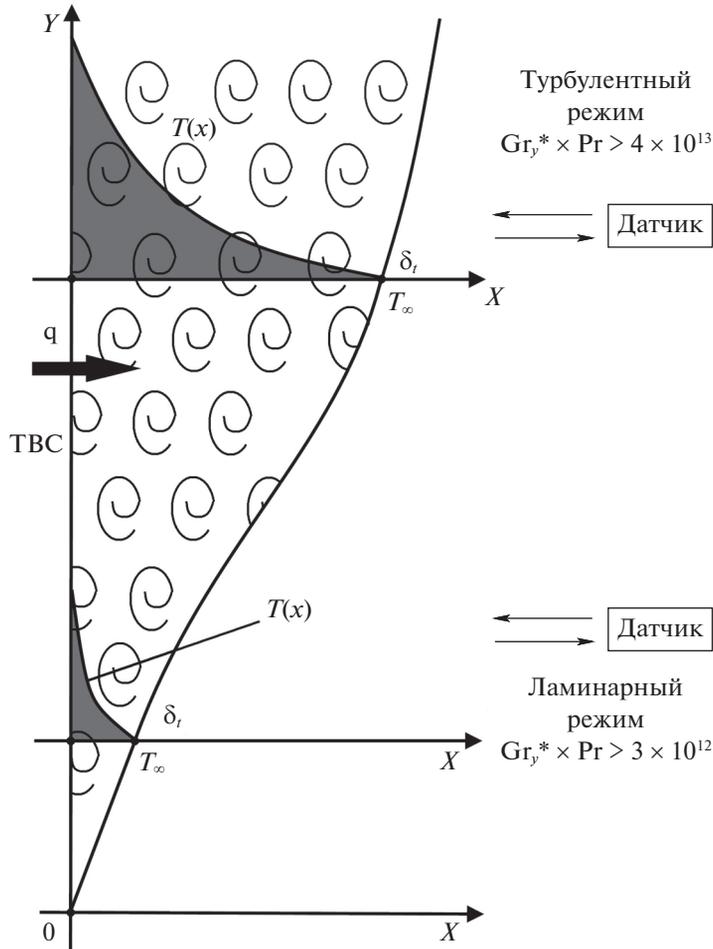


Рис. 1. Изменение профиля температуры в зависимости от режима течения при естественной конвекции [5].

потока, Вт/м²; y – координата вдоль вертикальной оси, м; λ – коэффициент теплопроводности жидкости, Вт/(м °С); ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости, м²/с.

Теплофизические свойства воды определяются при средней температуре пограничного слоя. Для расчета по данным, полученным с помощью функций пакета WaterSteamPro [10], в диапазоне температур от 10°С до 100°С в Microsoft Excel были построены графики зависимостей свойств (c , β , λ и ν) от температуры воды T . Аппроксима-

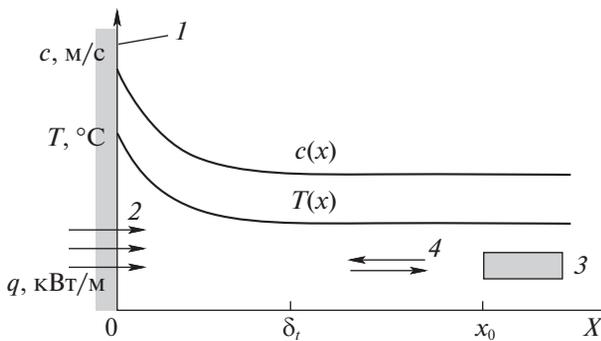


Рис. 2. Схема расположения датчика: 1 – поверхность ТВС; 2 – направление теплового потока; 3 – датчик; 4 – направления распространения ультразвуковых волн; $c(x)$, $T(x)$ – профиль скорости звука и температуры вдоль акустической оси датчика соответственно.

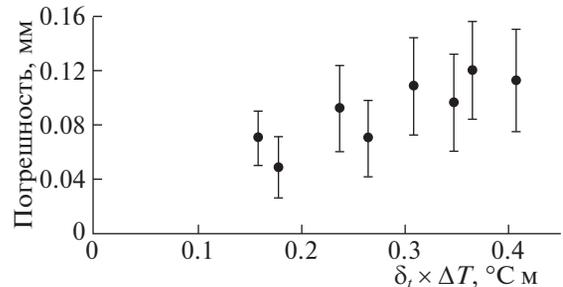


Рис. 3. Зависимость методической погрешности измерения поперечного размера макета ТВС от произведения $\delta_t \times \Delta T$: • – экспериментальные данные [6].

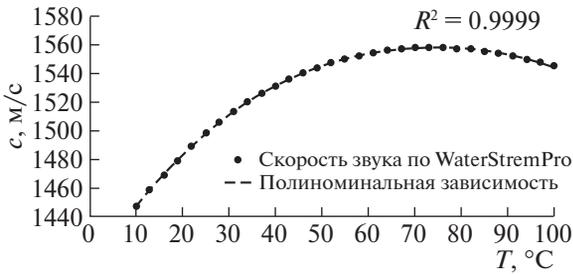


Рис. 4. Зависимость скорости звука в воде от температуры.

ция зависимостей была произведена стандартным методом анализа Excel полиномиальной линией тренда шестой степени для получения требуемой (максимальной) величины достоверности аппроксимации R^2 . Пример построения линии тренда для графика скорости звука представлен на рис. 4. Теплофизические свойства воды, используемые для расчета, представляют вид (4):

$$f(T) = A_1 + A_2T + A_3T^2 + A_4T^3 + A_5T^4 + A_6T^5 + A_7T^6. \quad (4)$$

Изменение температуры вдоль акустической оси датчика для ламинарного режима естественной конвекции определяют по выражению (5) [11]:

$$T(x) = T_V + \Delta T \left(1 - \frac{x}{\delta_t}\right)^2, \quad (5)$$

где T_V — температура воды на большом расстоянии от ТВС, °C; ΔT — температурный перепад, °C; δ_t — толщина теплового пограничного слоя, м.

Толщина теплового пограничного слоя δ_t и температурный перепад ΔT при ламинарном режиме определяются следующими выражениями (6) и (7) [12]:

$$\delta_t = (360)^{1/5} \left[\frac{0.8 + \text{Pr}}{\text{Pr}^2} \right]^{1/5} y (\text{Gr}_y^*)^{-1/5}, \quad (6)$$

$$\Delta T = \frac{(360)^{1/5} q_y}{2 \lambda} (\text{Gr}_y^*)^{-1/5} \left[\frac{0.8 + \text{Pr}}{\text{Pr}^2} \right]^{1/5}. \quad (7)$$

Переход ламинарного режима в турбулентный начинается в области, описанной неравенством (8) [13]:

$$3 \times 10^{12} < \text{Gr}_y^* \text{Pr} < 4 \times 10^{13}. \quad (8)$$

Толщина потери энергии δ_h в тепловом пограничном слое для турбулентного режима естественной конвекции определяется выражением (9) [13]:

$$\delta_h = 2.16 \text{Nu}_y^{-1} y, \quad (9)$$

$$\text{Nu}_y = 0.568 (\text{Gr}_y^* \text{Pr})^{0.22}, \quad (10)$$

где Nu_y — число Нуссельта.

Профили температур вдоль акустической оси датчика для турбулентного режима рассчитывают по формулам (11), (12):

$$T(x) = \Delta T \left(1 - \left(\frac{x}{12\delta_h}\right)^{1/15}\right) + T_V, \quad \text{при } \frac{x}{\delta_h} > 1.6, \quad (11)$$

$$T(x) = \Delta T \left(1 - \left(\frac{x}{4\delta_h}\right)^{1/7}\right) + T_V, \quad \text{при } \frac{x}{\delta_h} \leq 1.6, \quad (12)$$

где

$$\Delta T = \frac{qy}{\text{Nu}_y \lambda}.$$

Как отмечалось ранее, теплофизические свойства воды определяются при средней температуре T_{cp} . Поскольку при граничных условиях $q = \text{constant}$ температура $T_{стен}$ неизвестна, то расчет проводится методом итераций, задаваясь начальной величиной T_{cp} из интервала $[T_V; T_{стен}]$. Выполнив расчет параметров теплообмена естественной конвекции по формулам (5)–(12), определяют T_{cp} по формуле (13):

$$T_{cp} = T_V + \frac{\Delta T}{2}. \quad (13)$$

Если вычисленное и принятое значения T_{cp} не равны, то расчет повторяется, приняв новую T_{cp} , вычисленную по формуле (13), в качестве исходной. Таким образом, итерационный процесс реализуется рекуррентной формулой (14):

$$\begin{cases} T_{cp}^1 = f(T_{cp}^0); \\ T_{cp}^2 = f(T_{cp}^1); \\ \dots \\ T_{cp}^n = f(T_{cp}^{n-1}). \end{cases} \quad (14)$$

Процесс прекращается, как только выполняется условие (15):

$$T_{cp}^n - T_{cp}^{n-1} \leq \varepsilon, \quad (15)$$

где ε — заданная точность, равная 0,001.

При расчете параметров теплообмена высота пластины H разбивается с шагом $Step$ на m частей. Проводится цикл вычислений по высоте пластины H таким образом, что при каждом значении $y_m = y_{m-1} + Step$ выполняется итерационный процесс расчета для поиска T_{cp} . В зависимости от режима теплообмена с помощью условного оператора *if* выбираются формулы для расчета чисел подобия, ΔT и др. Средней температуре T_{cp} , вычисленной по формуле (13), в рамках данного расчета присваивается имя **ТЕМР**. Если условие $|ТЕМР - T_{cp}| \leq \varepsilon$ не выполняется, то цикл вычислений повторяется.

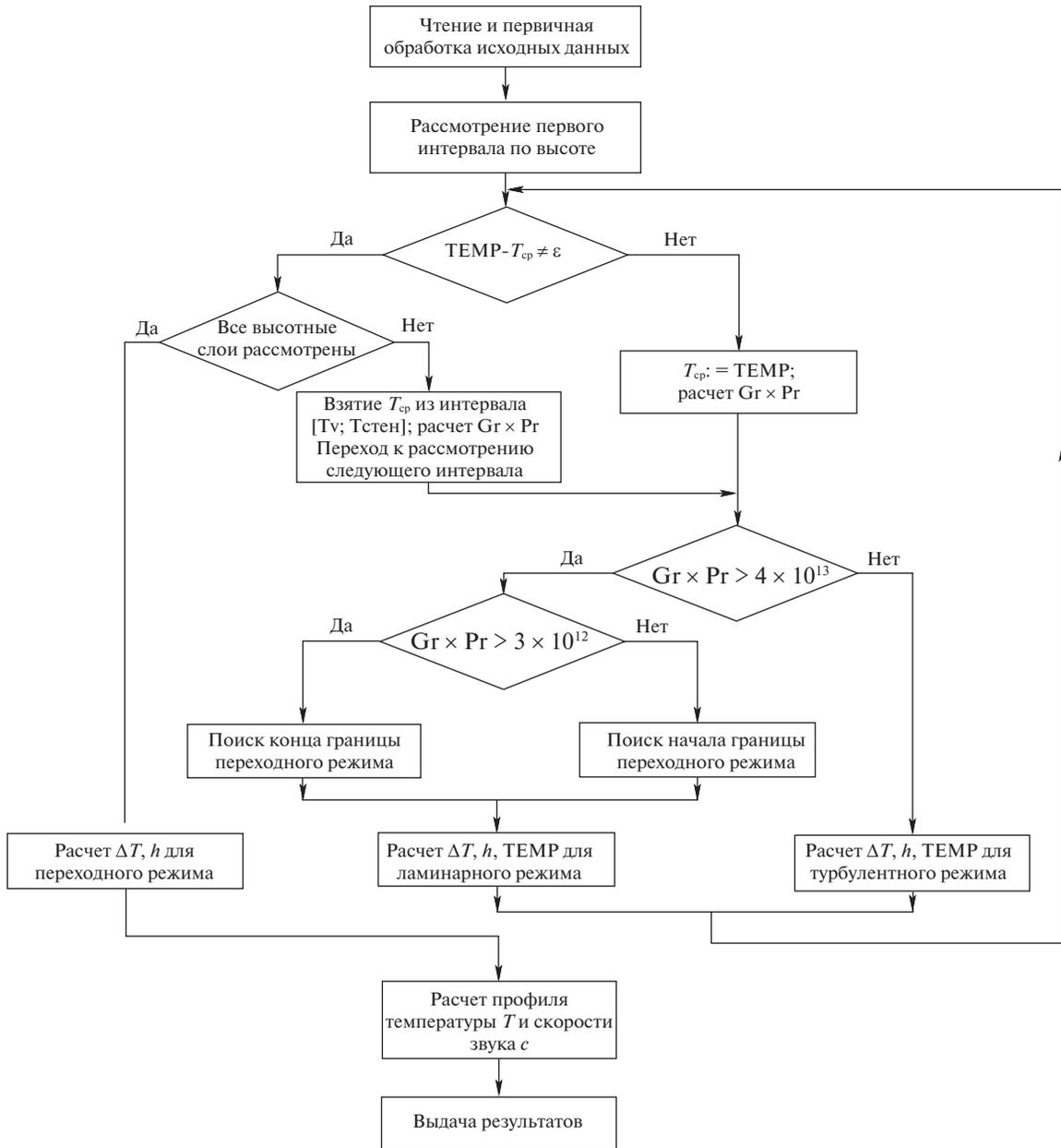


Рис. 5. Блок-схема программы расчета скорости звука в воде.

При проведении расчета определяются координаты границ переходного режима: конца ламинарного $y_{\text{лам}}$ и начало турбулентного $y_{\text{турб}}$ режимов. Для графика температуры подогрева ΔT в области переходного режима составляется уравнение по двум точкам (16):

$$f(y) = \frac{(y - y_{\text{лам}})(f(y_{\text{турб}}) - f(y_{\text{лам}}))}{y_{\text{турб}} - y_{\text{лам}}} + f(y_{\text{лам}}). \quad (16)$$

После выполнения расчета параметров теплообмена производится цикл вычислений профиля температуры T и скорости звука c вдоль акустиче-

ской оси датчика для указанной пользователем координаты Y положения датчика вдоль ТВС.

ПРОГРАММА РАСЧЕТА СКОРОСТИ ЗВУКА У ПОВЕРХНОСТИ ТЕПЛО ВЫДЕЛЯЮЩИХ СБОРОК И ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Расчет процесса теплообмена при свободной конвекции с граничными условиями II рода проводился в соответствии с представленной на рис. 5 блок-схемой.

Программа была написана в среде Turbo Delphi и выполнена в виде исполняемого файла, который запускается из операционной системы.

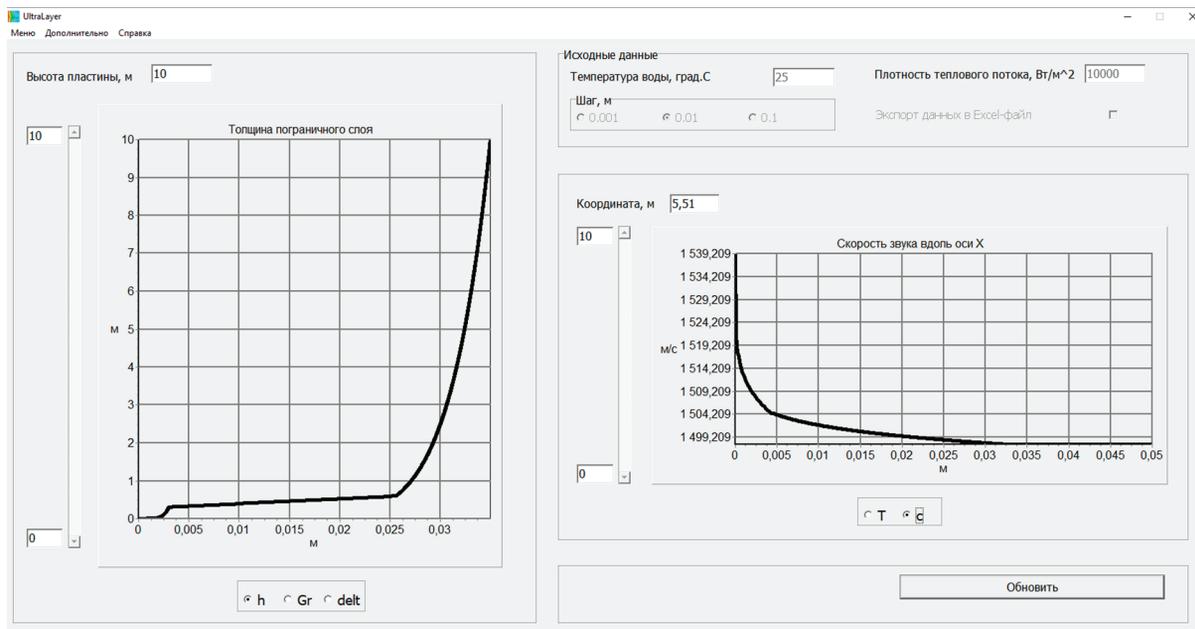


Рис. 6. Вид главного окна с результатами расчета.

Разработанный программный продукт [9] позволяет рассчитать скорость ультразвука и изменение температуры вдоль акустической оси датчика, расположенного на заданной координате, а также параметры теплообмена при ламинарном и турбулентном режиме вдоль вертикальной оси ТВС. Результаты вычислений представляются в виде графиков на главном окне программы (рис. 6).

В качестве примера работы программы на рис. 7 представлены результаты расчета профилей скорости звука вдоль акустической оси датчика при температуре воды, равной 25°C, на высоте 3 м для разных значений плотности теплового потока.

Для проверки разработанной методики были выполнены расчеты в условиях экспериментов [14], в которых исследовалось изменение температуры в воде внутри свободноконвективного ламинарного и турбулентного теплового пограничного слоя.

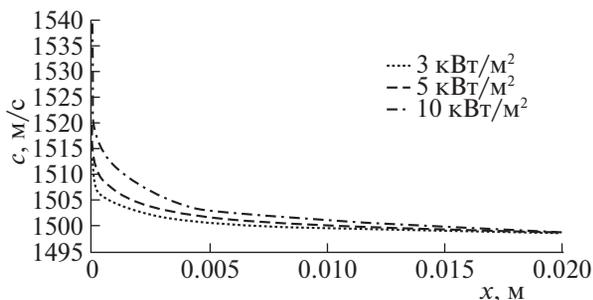


Рис. 7. Изменение скорости звука вдоль акустической оси датчика.

На рис. 8–9 приведены экспериментальные данные Гехарта-Куреши [14], а также результаты расчетов, проведенных для условий этих экспериментов. Как видно из графиков, расчетные данные с высокой точностью совпадают с результатами экспериментов.

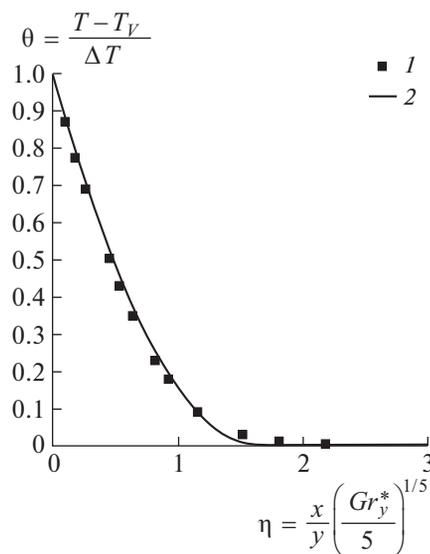


Рис. 8. Профиль избыточной температуры в ламинарном пограничном слое в условиях экспериментов [14] с плотностью теплового потока на стенке 919 Вт/м²: 1 – экспериментальные значения, 2 – расчетные значения.

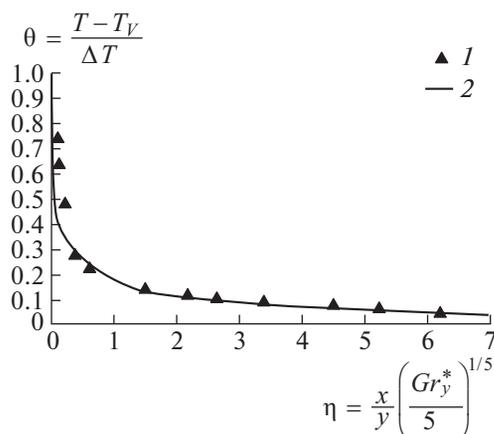


Рис. 9. Профиль избыточной температуры в турбулентном пограничном слое в условиях экспериментов [14] с плотностью теплового потока на стенке 3639 Вт/м^2 : 1 – экспериментальные значения, 2 – расчетные значения.

ВЫВОД

Совместный анализ экспериментальных и расчетных данных позволяет говорить о том, что рассмотренная программа может быть использована как для приближенных оценок влияния конвекции на результаты измерений, так и для верификации CFD-кодов применительно к расчету параметров естественной конвекции у поверхности ТВС ВВЭР-1000 с учетом наличия остаточного тепловыделения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов Н.А., Бромирский И.А., Сувор Д.В., Первушин Л.А., Тишков А.Н., Семенов А.В., Павлов С.В., Амосов С.В. Стенд инспекции и ремонта тепловыделяющих сборок для проекта АЭС-2006 // Тяжелое машиностроение (ISSN: 1024-7106), 2017. № 4. С. 25–28.
2. Павлов С.В., Сухих А.В., Сахаров С.С. Неразрушающая диагностика состояния элементов активных зон ядерных реакторов: монография. Димитровград: ДИТИ НИЯУ МИФИ, 2015. 320 с.
3. Воронина А.В. Анализ эффективности, надежности и безопасности методов определения формоизменения ТВС ВВЭР-1000 на АЭС // Всероссийская молодежная конференция “Научные исследования и технологические разработки в обеспечении развития ядерных технологий нового поколения”: тезисы докладов. Димитровград: АО “ГНЦ–НИИАР”, 2018. С. 62–64.
4. Дворецкий В.Г., Иванов В.Б., Глушак Н.С. Методики измерения геометрических размеров и формы чехла ТВС: препринт. Димитровград: НИИАР, 1991. 19 с.
5. Павлов С.В. Неразрушающие ультразвуковые методы исследований облученного топлива ядерных реакторов. Димитровград: ОАО “ГНЦ НИИАР”, 2013. 256 с.
6. Павлов С.В. Методы и средства исследований ТВС ВВЭР для экспериментального сопровождения внедрения нового топлива на АЭС: дис. д-р техн. наук: 05.14.03 / Павлов Сергей Владленович. Димитровград, 2015. 339 с.
7. Бражников Н.И. Ультразвуковые методы; под общ. ред. Н.Н. Шумиловского. М.; Л.: Энергия, 1965. 248 с.
8. Павлов С.В., Шалагинова Т.М., Михайлов С.В., Прокуданов Д.Л. Исследование влияния естественной конвекции на результаты измерения геометрических характеристик твэлов и тепловыделяющих сборок ультразвуковыми методами в условиях бассейнов выдержки: препринт. Димитровград: НИИАР, 1991. 28 с.
9. Павлов С.В., Воронина А.В. Программа для расчета скорости звука в воде у поверхности вертикальной нагретой пластины. Свидетельство РФ № 2018660777 о государственной регистрации программы для ЭВМ, 2018.
10. Орлов К.А., Александров А.А., Очков А.В., Очков В.Ф. Свидетельство РФ № 2000610803 об официальной регистрации программы для ЭВМ WaterSteamPro, 2011.
11. Лыков А.В. Тепломассообмен: Справочник. 2-е изд., перераб. и доп. Москва: Энергия, 1978. 480 с.
12. Джалурия И. Естественная конвекция. Тепло- и массообмен. М.: Мир, 1983. 399 с.
13. Vliet G.C., Liv C.K., An Experimental Study of Turbulent Natural Convection Boundary Layers // Journal of Heat Transfer. 1969. № 4. P. 73–96.
14. Gebhart B. Transition and transport in a buoyancy driven flow in water adjacent to a vertical uniform flux surface // Int. J. Heat Mass Transform. 1978. V. 21. P. 1467–1479.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta “MIFI”, 2019, vol. 8, no. 5, pp. 465–472

Method and Program to Calculate the Speed of Sound in Water under the Conditions of Natural Convection along the Surface of Fuel Assemblies of Nuclear Reactors

A. V. Voronina^{a,#} and S. V. Pavlov^a

^a Dimitrovgrad Engineering and Technological Institute,
National Research Nuclear University MEPHI (Moscow Engineering Physics Institute),
Dimitrovgrad, Ulyanovsk oblast, 433510 Russia

[#]e-mail: AVVoronina@mephi.ru

Received June 5, 2019; revised August 2, 2019; accepted August 27, 2019

Abstract—The principle of the ultrasonic method for determining fuel assemblies forming in cooling pond of nuclear power plants is considered. It is shown that natural convection caused by residual heat generation affects the increase in the measurement error of the ultrasonic method. A method is proposed for calculating the convective heat transfer with the boundary condition of the second kind. The developed method has been tested by performing calculations under the conditions of experiments in which temperature change in water inside a free convective laminar and turbulent thermal boundary layer has been studied. Analysis of experimental and calculated data shows that the method used adequately describes natural-convection heat transfer. Using this method, an algorithm and a program are developed for calculating the speed of sound in water in a laminar and turbulent boundary layer near the surface of a vertical heated plate, simulating in the first approximation the heated surface of a WWER-1000 FA. The developed program also computes the parameters of the boundary layer, heating temperature, and temperature profile along the acoustic axis of the ultrasonic sensor. The program can be used to approximately estimate the influence of convection on measurement results and to verify CFD codes as applied to the calculation of the parameters of natural convection at the surface of the WWER-1000 FA, taking into account the decay heat.

Keywords: ultrasonic method, fuel assembly, free convection, boundary layer, speed of sound

DOI: 10.1134/S2304487X19050080

REFERENCES

- Ivanov N.A., Bromirskii I.A., Surov D.V., Pervushin L.A., Tishkov A.N., Sementsov A.V., Pavlov S.V., Amosov S.V., Stend inspekcii i remonta teplovy' delyayushhix sborok dlya proekta AE'S – 2006 [Fuel repair and inspection equipment for AES-2006 NPP design]. *Tyazheloe mashinostroenie* (ISSN: 1024-7106), 2017, no. 4, pp. 25–28 (in Russian).
- Pavlov S.V., Sukhikh A.V., Sakharov S.S. *Nerazrushayushchaya diagnostika sostoyaniya elementov aktivnykh zon yadernykh reaktorov* [Non-destructive diagnostics of the state of core elements of nuclear reactors]. Dimitrovgrad: DITI MIFI, 2015. 320 p.
- Voronina A.V. *Analiz effektivnosti, nadezhnosti i bezopasnosti metodov opredeleniya formoizmeneniya TVS VVER-1000 na AE'S* [Analysis of the effectiveness, reliability and safety of methods for determining the forming WWER-1000 NPP]. Vserossiyskaya molodyozhnaya konferenciya “Nauchny'e issledovaniya i tekhnologicheskie razrabotki v obespechenii razvitiya yaderny'x tekhnologiy novogo pokoleniya” [All-Russian Youth Conference “Scientific research and technological development to ensure the development of nuclear technologies of new generation”]. Dimitrovgrad: JSC “SSC RIAR”, 2018, pp. 62–64 (in Russian).
- Dvoreczkij V.G., Ivanov V.B., Glushak N.S. *Metodiki izmereniya geometricheskij razmerov i formy' chexla TVS* [Methods for measuring the geometric dimensions and shape of fuel assembly outer jacket]. Dimitrovgrad: RIAR, 1991. 19 p.
- Pavlov S.V. *Nerazrushayushchie ultrazvukovie metodi issledovaniya obluchennogo topliva yadernih reaktorov* [Non-destructive ultrasonic research methods of irradiated fuel of nuclear reactors]. Dimitrovgrad: JSC “SSC RIAR”, 2013. 256 p.
- Pavlov S.V. *Metody' i sredstva issledovaniya TVS VVER dlya eksperimental'nogo soprovozhdeniya vnedreniya novogo topliva na AE'S* [Methods and tools for research of VVER fuel assemblies for experimental support of the introduction of new fuel at nuclear power plants. Dr. eng. sci. diss.]. Dimitrovgrad, 2015. 339 p.
- Brazhnikov N.I. *Ul'trazvukovy'e metody'* [Ultrasonic methods]. In Shumilovskogo N.N. (ed.), Moscow, Leningrad: Energiya, 1965. 248 p.
- Pavlov S.V., Shalaginova T.M., Mikhailov S.V., Prokudanov D.L. *Issledovanie vliyaniya ekstestvennoj konvekcii na rezul'taty' izmereniya geometricheskix xarakteristik tve'lov i teplovy' delyayushhix sborok ul'trazvukovy' mi metodami v usloviyax bassejnov vy'derzhki* [Investigation of the effect of natural convection on the results of measuring the geometric characteristics of fuel rods and fuel assemblies by ultrasonic methods in conditions of cooling pond]. Dimitrovgrad: RIAR, 1991. 28 p.
- Pavlov S.V., Voronina A.V. *Programma dlya rascheta skorosti zvuka v vode u poverkhnosti vertikal'noj nagretoj plastiny'* [The program for calculating the speed of sound in water at the surface of a vertical heated plate]. The certificate of the Russian Federation no. 2018660777 about the state registration of the computer program, 2018.
- Orlov K.A., Aleksandrov A.A., Ochkov A.V., Ochkov V.F. The certificate of the Russian Federation no. 2000610803 about official registration of the computer program WaterSteamPro, 2011.
- Lykov A.V. *Teplomassoobmen: Spravochnik* [Heat and Mass Transfer: A Handbook]. 2-e izd.: Moscow: Energiya, 1978. 480 p.
- Dzhaluriya I. *Estestvennaya konvekciya. Teplo- i massoobmen* [Natural convection. Heat and mass transfer]. Moscow: Mir, 1983. 399 p.
- Vliet G.C., Liv C.K. An Experimental Study of Turbulent Natural Convection Boundary Layers, *Journal of Heat Transfer*, 1969, no. 4, pp. 73–96.
- Gebhart B. Transition and transport in a buoyancy driven flow in water adjacent to a vertical uniform flux surface, *Int. J. Heat Mass Transform.*, 1978, vol. 21, pp. 1467–1479.

ВОКСЕЛЬНЫЙ ФАНТОМ ДЛЯ ДОЗИМЕТРИЧЕСКОЙ ВЕРИФИКАЦИИ ПЛАНОВ ОБЛУЧЕНИЯ НА УСТАНОВКЕ ГАММА-НОЖ *PERFEXION* МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

© 2019 г. Т. Меджадж^{1,*}, А. И. Ксенофонтов¹, А. В. Далечина²

¹ Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

² АО “Деловой центр нейрохирургии” (Центр “Гамма-нож”), Москва, 125047, Россия

*e-mail: toufik.medjadj@yahoo.fr

Поступила в редакцию 26.06.2019 г.

После доработки 26.06.2019 г.

Принята к публикации 16.07.2019 г.

Целью данной работы является создание воксельного фантома с использованием изображений DICOM (Digital Imaging and Communications in Medicine) для верификация дозиметрических расчетов методом Монте-Карло установки Гамма-нож *Perfexion*.

Воксельный фантом создан с помощью программы Labview, а моделирование проводилось методом Монте-Карло с помощью программы Penelope/PenEasy. Для моделирования переноса излучения с помощью программы Penelope указываются количество и размер вокселей вдоль осей x , y , z , а также материал и плотность в каждом вокселе.

Итогом работы стало создание воксельного фантома с использованием изображений в формате DICOM.

Ключевые слова: DICOM, шкала единиц Хаунсфильда, воксельный фантом, Labview, Penelope/penEasy

DOI: 10.1134/S2304487X19050055

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование методом Монте-Карло (ММК) все чаще используется в планировании радиотерапии. Однако мало работ посвящено моделированию аппарата Гамма-нож *Perfexion* [1–4], более того, эти работы сфокусированы на расчете выходных факторов и дозовых профилей аппарата Гамма-нож, а полное исследование по моделированию реальных клинических случаев отсутствует.

Для того, чтобы оценить поглощенную дозу излучения в теле пациента, изображение компьютерной томографии пациента в формате DICOM (Digital Imaging and Communications in Medicine) [5] должно быть введено в процедуру моделирования ММК. Однако универсальные коды ММК не могут справиться с этим изображением, поскольку необходимы данные по материалу и плотностям. Поэтому для конвертации изображений DICOM в воксельный фантом необходимо указать материал и плотность в каждом вокселе. Геометрия такого фантома состоит из крошечных параллелепипедов (вокселей), формирующих объем в трехмерном пространстве.

Размер, материал и плотность вокселя извлекаются из изображений DICOM (рис. 1).

Таким образом, целью настоящей работы является создание воксельного фантома с использованием изображения компьютерной томографии реального пациента в формате DICOM для верификации методом Монте-Карло дозиметрических расчетов, выполненных системой дозиметрического планирования аппарата Гамма-нож *Perfexion*.

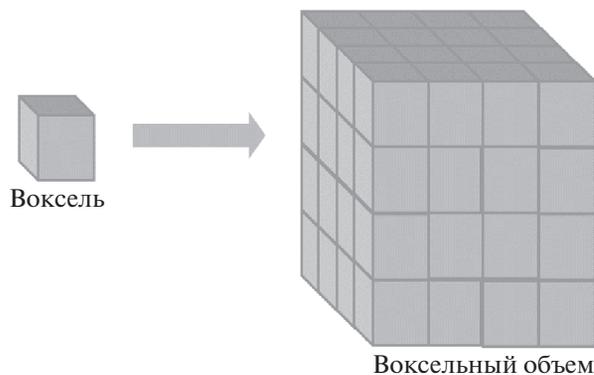


Рис. 1. Принцип воксельного фантома.

```
[SECTION VOXELS HEADER v.2008-04-13]
3 3 3      Количество вокселей на X, Y, Z
0.5 0.5 0.5  Размер вокселя (см) вдоль X, Y, Z
1          Номер столбца, в котором находится код материала
2          Номер столбца, в котором находится плотность массы
0          Пустые строки в конце циклов X, Y (1: Да, 0: Нет)
[END OF VXH SECTION]
#Мат. код : Плотность (г/см^3)
1 1.0
1 1.0
1 1.0
. .
. .
. .
#>>>END OF FILE>>>
```

Рис. 2. Пример файла воксельного фантома.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Файл воксельного фантома создан в допустимой форме для кода PenEasy [6], который является модулем основной программы общего назначения PENELOPE.

PenEasy: воксельная геометрия

Файл в воксельной геометрии для *penEasy* состоит из двух частей. Первая часть – заголовок файла, в котором нужно указать количество и размер вокселей вдоль осей x , y , z . Во второй части нужно назначить материал и плотность на каждый воксель. На рис. 2 показан пример файла воксельного фантома, используемый в коде PenEasy. Для создания этого файла были импортированы численные данные из изображений DICOM.

DICOM (Digital Imaging and Communications in Medicine)

DICOM (Цифровые Изображения и Коммуникации в Медицине) – это стандарт обработки, хранения, печати и передачи информации в системах медицинской визуализации. В задаче использовался модуль DICOM-RT (Radiation Therapy), который эффективно описывает большинство данных, необходимых для лучевой терапии [7].

DICOM-RT включает в себя 4 основных объекта:

1. RT изображение (RT Image) содержит информацию об изображениях, связанных с лучевой терапией.

2. RT доза (RT Dose) содержит данные по величинам доз, которые должны быть назначены в соответствии с системами планирования лечения.

3. RT структура набора (RT Structure Set) содержит информацию, связанную с анатомией пациента.

4. RT план (RT Plan) содержит геометрические и дозиметрические данные, относящиеся к дистанционному облучению.

Наибольший интерес представляет объект *RT Изображение*, так как он содержит все необходимые данные для построения воксельного фантома.

Упрощенная структура файла DICOM

В файлах DICOM одновременно содержатся и непосредственно изображения (данные пикселей), и дополнительная информация о пациенте (метаданные) (рис. 3).

Метаданные DICOM подразделяются на несколько категорий:

- Данные пациента: включают в себя имя, идентификатор, пол и дату рождения пациента.

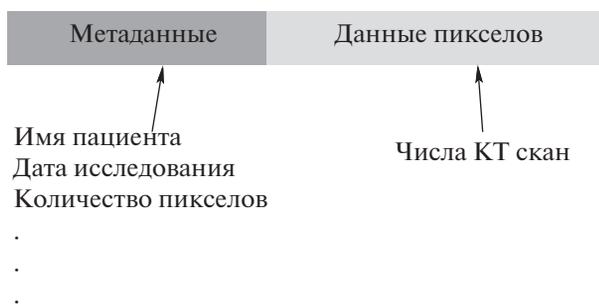


Рис. 3. Упрощенная структура файла DICOM.

- Дата исследования: включает идентификатор исследования, имя врача-консультанта, дату и время исследования, комментарии.
- Датировка серии: включает в себя номер серии, метод исследования, дату и время серии, комментарии.
- Сведения об оборудовании: включают в себя сведения о владельце и производителе оборудования.
- Данные об изображении: включают в себя структуру данных, фотометрическую интерпретацию, данные о ширине и высоте изображения, количестве бит на пиксел, кадры. Эти поля не редактируются.

Данные пикселей приводятся в единицах Hounsfield [8] (H) (Шкала единиц Хаунсфилда):

$$H_x = \frac{\mu_x - \mu_{H_2O}}{\mu_{H_2O}} \times 1000,$$

где μ_x и μ_{H_2O} – линейные коэффициенты ослабления для материала x и воды.

Единицы H обычно изменяются от -1000 до 3000 . Значение, равное -1000 , соответствует воздуху, а нулевое значение соответствует воде [9].

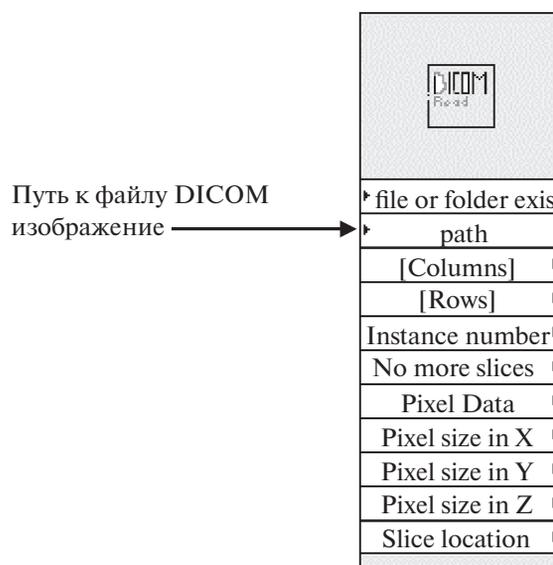


Рис. 4. Подпрограмма DICOM read.

Каждое число по шкале Хаунсфилда соответствует определенному типу вещества.

Любой DICOM объект состоит из множества атрибутов, которые в стандарте называются тегами (tag) и каждому тегу присвоен свой номер, состоящий из двух полей, – номера группы и номера элемента. В табл. 1 показаны атрибуты, теги и описание атрибутов, используемых в настоящей работе.

Используя программное обеспечение LabVIEW [10] была создана подпрограмма “DICOM read” (рис. 4), которая ищет эти теги в файле изображения DICOM и извлекает нужные данные. Подпрограмма “DICOM read” позволяет получить все данные, необходимые для файла воксельного фантома. Однако данные пикселей, которые составляют изображение, представлены в единицах Хаунсфильда, а для моделирования ме-

Таблица 1. Объекты для записи файла воксельного фантома

Атрибут	Тег	Описание атрибута
Строки	(0028, 0010)	Количество строк на изображениях
Столбцы	(0028, 0011)	Количество столбцов в изображениях
Расстояние между пикселями	(0028, 0030)	Физическое расстояние в пациенте между центром каждого пикселя
Толщина среза	(0018, 0050)	Номинальная толщина среза, мм
Номер экземпляра	(0020, 0013)	Номер, идентифицирующий данное изображение
Расположение среза	(0020, 1041)	Относительное положение плоскости изображения, мм
Данные пикселей	(7FE0, 0010)	Поток данных образцов пикселей, составляющих изображение

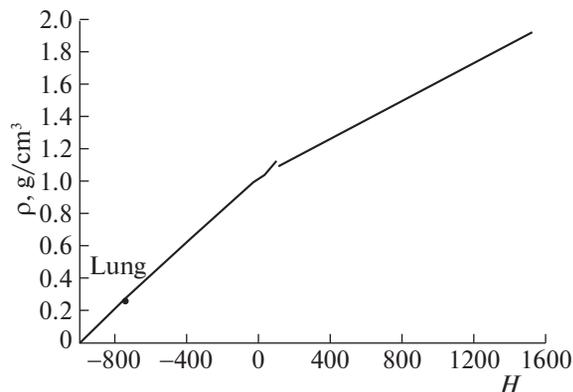


Рис. 5. Конверсия числа H в массовую плотность.

тодом Монте-Карло нужны материалы и их плотности. Поэтому нужно найти разумный компромисс между числом различных значений H (3000 ~ 5000) и материалами, используемыми в ММК. Возникает проблема памяти и скорости вычислений при обработке каждого числа H как отдельный материал. После чего нужно выбрать реальные параметры для тканей человека (материалы) и их плотности для расчета ММК.

В работе Schneider [9] показано, что соотношение между числом H и плотностью ткани ρ определяется следующими выражениями.

$$\begin{aligned}
 -1000 < H < -98 & \quad \rho = 1.031 + 1.031 \times 10^{-3} \times H \\
 -98 < H < 14 & \quad \rho = 1.018 + 0.893 \times 10^{-3} \times H \\
 14 < H < 23 & \quad \rho = 1.03 \\
 23 < H < 100 & \quad \rho = 1.003 + 1.169 \times 10^{-3} \times H \\
 H > 100 & \quad \rho = 1.017 + 0.592 \times 10^{-3} \times H
 \end{aligned}$$

На рис. 5 показана связь между числами H и плотностью ткани ρ , как представлено в работе [9].

С целью конверсии числа H в массовую плотность в настоящей работе была разработана подпрограмма “H to density” (рис. 6).

Шнейдер в работе [9] разделил шкалу единиц Хаунсфилда на 24 группы, где каждая группа соответствует определенному материалу. Однако представленных данных слишком много для моделирования ММК. Обычно определяют не больше 6 различных материалов (например, воздух, легкие, жир, вода, мышцы и кости) [11].

Для экономии вычислительных затрат в работе шкала единиц Хаунсфилда разделена на 4 группы. Для расчета распределения дозы в голове точка калибровки в легких была исключена из нашей конверсии, и шкала единиц Хаунсфилда воздуха была увеличена до -800 , а в жировой ткани была уменьшена до -799 . Первая группа (от -1000 до -800 Н) предназначена для воздуха, вторая груп-

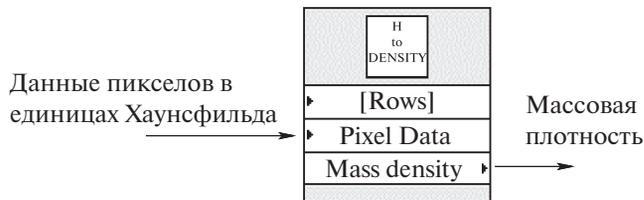


Рис. 6. Подпрограмма “H to density”.

па (от -799 до -53 Н) для жировой ткани, а третья группа (от -52 до 200 Н) для мягких тканей. Четвертая группа предназначена для скелетной ткани (более 200 единиц Хаунсфилда) (табл. 2).

Подпрограмма “H to ID MAT” (рис. 7) написана в LabView, чтобы назначить каждый пиксел одному из материалов в табл. 2.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Выходные данные подпрограмм “H to density” и “H to ID MAT”, т.е. массовая плотность и код материала каждого пикселя, собирались вместе в двумерном (2D) массиве с помощью функции “Insert into array” (рис. 8).

После сборки всех данных, необходимых для создания воксельного фантома, была написана подпрограмма “2 vox file” (рис. 9), которая записывает данные воксельного фантома в допустимой форме для кода PenEasy и сохраняет их в файле “Phantom.vox”.

На рис. 10 показаны изображения пациента в формате карт плотности, данных тканей и изображений КТ, предназначенных для моделирования ММК. Рис. 10, а (А) показывает карту данных тканей. Рис. 10, б показывает карту плотности каждого пикселя независимо от его материала, т.е. один и тот же материал может иметь разные плотности. На рис. 10, в показано КТ изображение, созданное в единицах Хаунсфилда.

Таблица 2. Группы материалов для создания воксельного фантома

Код материала	Шкала единиц Хаунсфилда	Состав материала
1	-1000 — 800	Воздух
2	-799 — 53	Жировая ткань
3	-52 — 200	Мягкая ткань
4	> 200	Скелетная ткань

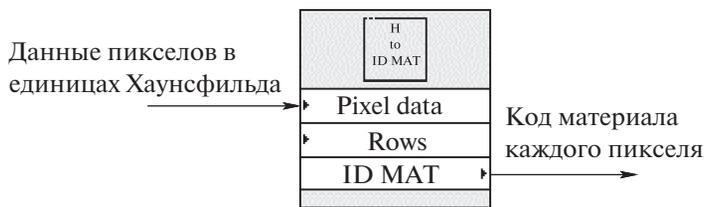


Рис. 7. Подпрограмма “H to ID MAT”.

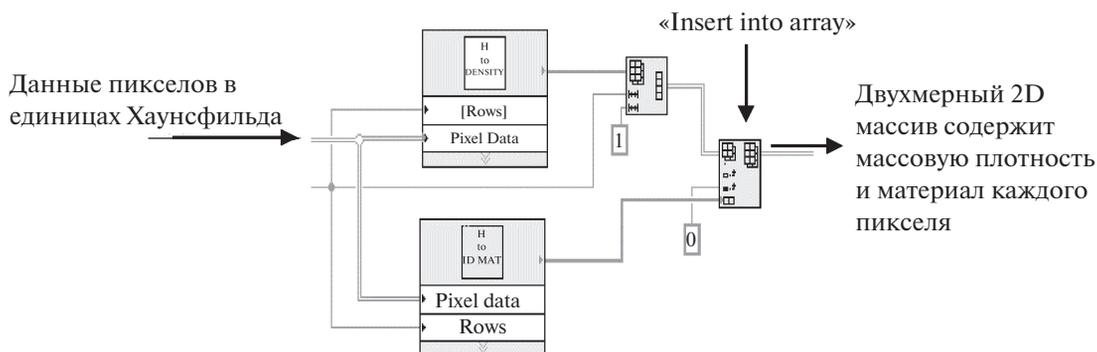


Рис. 8. Часть программы, создающая двухмерный массив материалов и массовых плотностей.

Следует отметить, что в работе был проведен сдвиг шкалы единиц Хаунсфильда с -1000 на 0 , так как обычно шкала единиц Хаунсфильда начинается с -1000 , а в нашем случае она начинается с 0 .

На рис. 11 показаны изодозные кривые коллиматоров 16, 8 и 4 мм в воксельном фантоме в центральной точке (80, 80, 80) см, для которой величина дозы составляет 100% и затем резко уменьшается до 25% на расстояниях от центра 1.5, 0.6 и 0.4 см для коллиматоров 16, 8 и 4 мм соответственно.

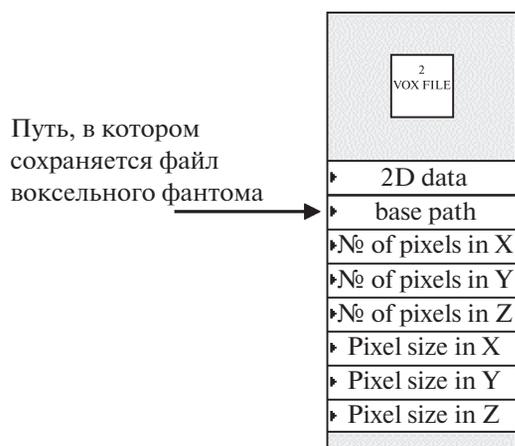


Рис. 9. Подпрограмма “2 vox file”.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе был создан воксельный фантом с использованием изображений DICOM с помощью программы Labview. Для моделирования методом Монте-Карло необходимые данные для penEasy извлекались в единицах Хаунсфильда из изображений DICOM и конвертировались в плотности и материалы.

- первый этап работы состоял в импортировании данных о пикселях для создания заголовка файла фантома;
- второй этап заключался в назначении материалов и плотностей в единицах HU.

Единицы HU были конвертированы в плотность, затем разделены на 5 групп, и для каждой группы был назначен материал для моделирования методом Монте-Карло.

Для экономии вычислительных затрат разрешение изображений 512×512 пикселей было уменьшено до 256×256 пикселей, это было сделано с помощью удаления одной единицы HU четных строк и столбцов из исходной матрицы для увеличения скорости расчетов методом Монте-Карло.

Созданный фантом не учитывает контуры. Однако это можно сделать, если добавить внешний контур каждого изображения и считать все наружное окружение воздухом, что позволяет удалить стереотаксическую раму, которая использу-

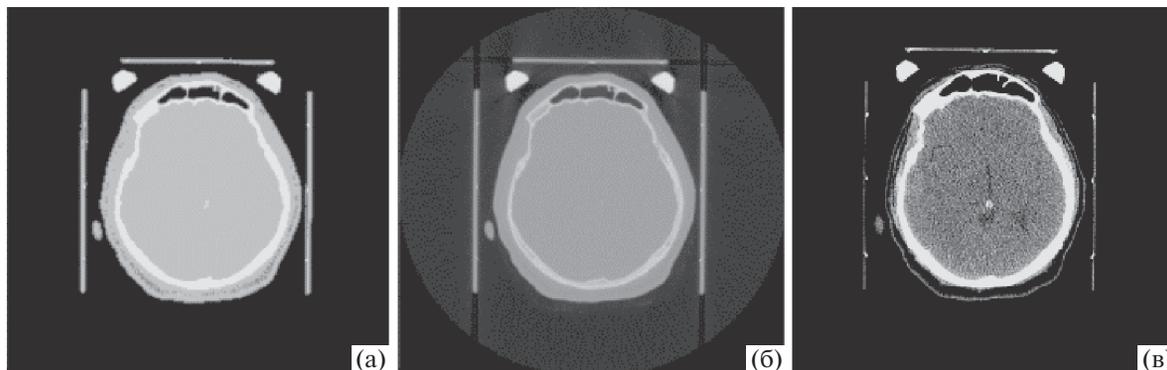


Рис. 10. Сравнение изображения пациента. (а) Карта данных тканей. (б) Карта плотности. (в) Изображение КТ.

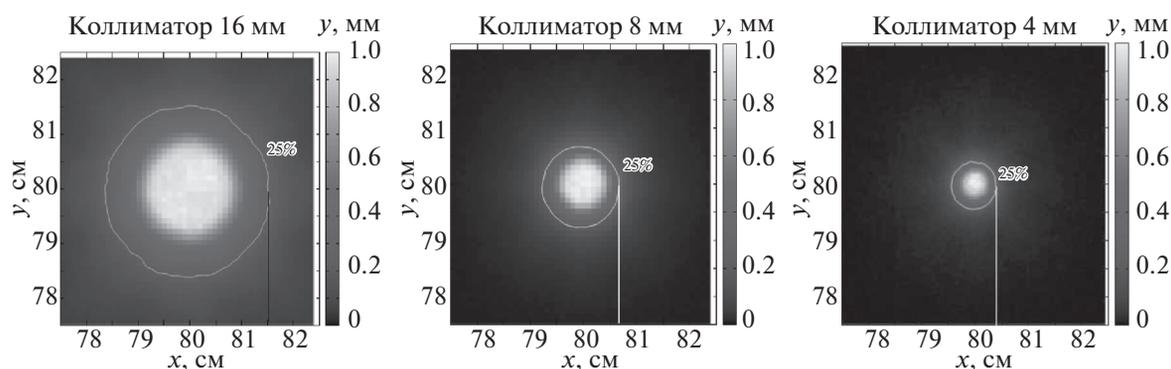


Рис. 11. Изодозные кривые коллиматоров 16, 8 и 4 мм.

ется для фиксации пациента, и увеличить скорость расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Best R.C.* Monte Carlo Modeling of the Gamma Knife Perfexion, Wake Forest University, PhD thesis 2012.
2. *Battistoni G., Cappucci F., Bertolino N., Brambilla M.G., Mainardi H.S., Torresin A.* FLUKA Monte Carlo simulation for the Leksell Gamma Knife Perfexion radiosurgery system: Homogeneous media // *Physica Medica*. 2013. V. 29. № 6. P. 656–661.
3. *Pipek J., Novotný J., Kozubíková P.* A modular Geant4 model of Leksell Gamma Knife Perfexion // *Phys Med Biol*. December 2014. V. 59. № 24. P. 7609–7623.
4. *Pappas E.P., Moutsatsos A., Pantelis E., Zoros E., Georgiou E., Torrens M., Karaiskos P.* On the development of a comprehensive MC simulation model for the Gamma Knife Perfexion radiosurgery unit // *Physics in Medicine & Biology*. 2016. V. 61. P. 1182–1203.
5. DICOM Standard [Электронный ресурс] // DICOM® (Digital Imaging and Communications in Medicine): [сайт]. URL: <https://www.dicomstandard.org/>
6. *Sempau J., Badal A., Brualla L.* A PENELOPE-based system for the automated Monte Carlo simulation of clinacs and voxelized geometries—application to far-from-axis fields // *Med. Phys.* November 2011. V. 38. № 11. P. 5887–5895.
7. IEC Subcommittee 62C Working. Digital Imaging and Communications in Medicine (DICOM) Supplement 11 Radiotherapy Objects, DICOM RT Supplement 4, June 1997.
8. *Lev M.H., Gonzalez R.G.* Hounsfield Scale [Электронный ресурс] // ScienceDirect: [сайт]. URL: <https://www.sciencedirect.com/topics/medicine-and-dentistry/hounsfield-scale> (дата обращения: 07.05.2019).
9. *Schneider W., Bortfeld T., Schlegel W.* Correlation between CT numbers and tissue parameters needed for Monte Carlo simulations of clinical dose distributions // *Phys. Med. Biol*. February 2000. V. 45. № 2. P. 459–478.
10. What Is LabVIEW? [Электронный ресурс] // National instruments: [сайт]. URL: <http://www.ni.com/dadk/shop/labview.html> (дата обращения: 21.April.2019).
11. *Vanderstraeten B., Pik Wai C., Fix M., Leal A., Mora G., Reynaert N., Seco J., Soukup M., Spezi E., De Neve W., Thierens H.* Conversion of CT numbers into tissue parameters for Monte Carlo dose calculations: a multi-centre study // *Physics in Medicine & Biology*. 2007. T. 52. № 3.

Creating a Voxel Phantom for Dosimetric Verification of Treatment Plans in the Gamma-Knife Perfexion using the Monte Carlo Method

T. Medjadj^{a, #}, A. I. Ksenofontov^a, and A. V. Dalechina^b

^a National Research Nuclear University MEPHI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

^b Neurosurgery Business Center (Moscow Gamma Knife Center), Moscow, 125047 Russia

[#]e-mail: toufik.medjadj@yahoo.fr

Received June 26, 2019; revised June 26, 2019; accepted July 16, 2019

Abstract—The aim of this work is to create a voxel phantom with the use of DICOM (Digital Imaging and Communications in Medicine) images for verification of dosimetric Monte Carlo calculations of the Gamma Knife Perfexion. The voxel phantom has been created using the Labview program, and the Monte Carlo simulation has been carried out using the Penelope/PenEasy program. To simulate the radiation transfer using Penelope, it is required to specify the number and size of voxels along the x , y , and z axes, as well as the material and density in each voxel. The data used are computed tomography files of a real patient in the DICOM format with information about the type of study, the size of pixels, and the distance between them, etc., as well as the value of pixels in Hounsfield Units (HU). To create the voxel phantom, data from DICOM images have been imported and converted into a file readable by penEasy step by step:

– the first step involves importing information about the pixels to create the header of the file,

– the second step is to assign materials and densities to the HU units.

HU units are converted into the density, then are divided into four groups, and a material is assigned to each group for Monte Carlo simulation.

To save the computational time, the image resolution of 512×512 pixels is reduced to 256×256 pixels by removing one HU unit of even rows and columns from the original matrix. As a first result, the voxel phantom has been created using images in the DICOM format.

Keywords: DICOM, Hounsfield unit scale, voxel phantom, Labview program, Penelope/penEasy program

DOI: 10.1134/S2304487X19050055

REFERENCES

1. Best R.C. Monte Carlo Modeling of the Gamma Knife Perfexion™, Wake Forest University, PhD thesis 2012.
2. Battistoni G., Cappucci F., Bertolino N., Brambilla M.G., Mainardi H.S., Torresin A. FLUKA Monte Carlo simulation for the Leksell Gamma Knife Perfexion radiosurgery system: Homogeneous media // *Physica Medica*, 2013, vol. 29, no. 6, pp. 656–661.
3. Pipek J., Novotný J., Kozubíková P. A modular Geant4 model of Leksell Gamma Knife Perfexion // *Phys Med Biol.*, December 2014, vol. 59, no. 24, pp. 7609–7623.
4. Pappas E.P., Moutsatsos A., Pantelis E., Zoros E., Georgiou E., Torrens M., Karaikos P. On the development of a comprehensive MC simulation model for the Gamma Knife Perfexion radiosurgery unit // *Physics in Medicine & Biology*, 2016, vol. 61, pp. 1182–1203.
5. DICOM Standard [Electronic resource] // DICOM® (Digital Imaging and Communications in Medicine): Available at: <https://www.dicomstandard.org/>
6. Sempau J., Badal A., Brualla L. A PENELOPE-based system for the automated Monte Carlo simulation of clinacs and voxelized geometries—application to far-from-axis fields // *Med. Phys.*, November 2011, vol. 38, no. 11, pp. 5887–5895.
7. IEC Subcommittee 62C Working. Digital Imaging and Communications in Medicine (DICOM) Supplement 11 Radiotherapy Objects, DICOM RT Supplement 4 June 1997.
8. Lev M.H., Gonzalez R.G. Hounsfield Scale [Electronic resource] // ScienceDirect: Available at: <https://www.sciencedirect.com/topics/medicine-and-dentistry/hounsfield-scale> (дата обращения: 07.05.2019).
9. Schneider W., Bortfeld T., Schlegel W. Correlation between CT numbers and tissue parameters needed for Monte Carlo simulations of clinical dose distributions // *Phys. Med. Biol.*, February 2000, vol. 45, no. 2, pp. 459–478.
10. What Is LabVIEW? [Electronic resource] // National instruments: Available at: <http://www.ni.com/da-dk/shop/labview.html> (Day accessed: 21.April.2019).
11. Vanderstraeten B., Pik Wai C., Fix M., Leal A., Mora G., Reynaert N., Seco J., Soukup M., Spezi E., De Neve W., Thierens H. Conversion of CT numbers into tissue parameters for Monte Carlo dose calculations: a multi-centre study // *Physics in Medicine & Biology*, 2007, vol. 52, no. 3.

УДК 004.421

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ПОЛИНОМА НАИЛУЧШЕГО РАВНОМЕРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

© 2019 г. К. Я. Кудрявцев*

Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия

*e-mail: KYKudryavtsev@mephi.ru

Поступила в редакцию 10.02.2019 г.

После доработки 20.06.2019 г.

Принята к публикации 25.06.2019 г.

Аппроксимация множества экспериментальных точек с помощью множества функций является актуальной во многих инженерно-технических исследованиях. Для решения таких задач вводится понятие линейного нормированного пространства, элементами которого являются ограниченные вещественные функции, а также вводится понятие метрики (нормы) — меры близости между элементами пространства. Во многих случаях требуется аппроксимировать сложную функцию полиномом заданного порядка и при этом обеспечить максимальное отклонение полинома от функции на величину, не большую некоторой заданной погрешности. В этом случае целесообразно использовать чебышевскую норму и искать полином наилучшего равномерного приближения. Однако для отыскания полинома наилучшего равномерного приближения не существует универсальных эффективных алгоритмов. В данной статье предлагается простой и эффективный алгоритм построения полинома наилучшего равномерного приближения для непрерывно дифференцируемых функций. Алгоритм состоит из трех этапов. На первом строится полином степени n с помощью метода наименьших квадратов. На втором строится специальная система нелинейных уравнений. На третьем этапе в результате решения системы нелинейных уравнений любым итерационным методом находятся коэффициенты полинома наилучшего равномерного приближения и точки чебышевского альтернанса. В статье приводится реализация данного алгоритма в системе SciLab 6.0 и проводится его экспериментальное исследование.

Ключевые слова: аппроксимация функций, полином наилучшего равномерного приближения, точки чебышевского альтернанса

DOI: 10.1134/S2304487X1905002X

ВВЕДЕНИЕ

Задача, связанная с приближением заданной функции (или множества экспериментальных точек) с помощью другого, более простого множества функций, является актуальной во многих инженерно-технических исследованиях. Для решения данной задачи вводится понятие линейного нормированного пространства [1], элементами которого являются ограниченные вещественные функции, определенные на отрезке $[a, b]$ вещественной оси, а также вводится понятие метрики (нормы) — меры близости между элементами пространства. Наиболее часто используемыми нормами являются — чебышевская:

$$\|f\|_c = \max_{[a,b]} |f(x)| \quad (1)$$

и гильбертова

$$\|f\|_{L_2} = \left[\int_a^b [f(x)]^2 dx \right]^{1/2}. \quad (2)$$

Наилучшее приближение будем искать в виде полинома степени n :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i. \quad (3)$$

При использовании гильбертовой нормы коэффициенты полинома (полином наилучшего среднеквадратического приближения) вычисляются по известной формуле [1]:

$$\mathbf{a} = [F^T F]^{-1} F^T \vec{f}, \quad (4)$$

где $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_n]^T$ – вектор размерности $n + 1$ искомым коэффициентов полинома, $F^T =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_N^n \end{pmatrix} \text{ – матрица размерности } (n + 1) \times N,$$

(N – количество точек аппроксимации), $\bar{f} = [f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N)]^T$ – вектор размерности N , где $f(x_i)$ – значение функции f в точках x_i .

Аппроксимация на основе гильбертовой нормы (также известная как аппроксимация на основе метода наименьших квадратов) обеспечивает хорошее приближение полиномом аппроксимируемой функции на большей части отрезка $[a, b]$, но может сильно отличаться от нее на небольших участках. При решении ряда задач (например, в задачах на прочность материалов) такой подход может оказаться недопустимым, т.к. существенное отклонение даже на небольшом участке может привести к разрушению конструкции.

Поэтому для подобных задач целесообразно использовать чебышевскую норму и искать полином наилучшего равномерного приближения. Однако получение аналитического выражения, подобного (4) для чебышевской нормы, не представляется возможным. В настоящее время работ, посвященных нахождению полиномов наилучшего равномерного приближения, относительно немного. Как правило, они посвящены решению частных задач. В [1] приводится несколько примеров построения полиномов наилучшего равномерного приближения. Так, для функции $f(x) = Ax^n + p_{n-1}(x)$ ($A \neq 0$, $p_{n-1}(x)$ – заданный многочлен степени $n - 1$), среди многочленов степени $n - 1$ ($q_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$) наименее отклоняющимся является многочлен вида

$$q_{n-1}^0(x) = A \left(x^n - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \right) + p_{n-1}(x),$$

где $T_n(x)$ – полином Чебышева степени n .

П.Л. Чебышев внес огромный вклад в построение полиномов равномерного приближения. Многочлены Чебышева 1-го рода определяются итерационно:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

или в явном виде:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad |x| \leq 1; \\ T_n(x) = \operatorname{ch}(n \operatorname{arccsh} x), \quad |x| \geq 1;$$

Доказано [1], что для произвольного n и произвольной функции $f(x)$, интегрируемой со вто-

рой степенью на интервале $[-1, 1]$ с весом $w = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, многочлен

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j(f) T_j(x),$$

где

$$a_j(f) = \gamma_j \int_{-1}^1 f(x) T_j(x) (1 - x^2)^{-1/2} dx, \\ \gamma_0 = 1/\pi, \quad \gamma_j = 2/\pi, \quad j = 1, 2, \dots$$

является многочленом наилучшего приближения.

Среди всех многочленов степени n вида $P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j T_j(x)$ наименее отклоняющимся от него многочленом степени $n - 1$ на интервале $[-1, 1]$ будет многочлен $\sum_{j=0}^{n-1} a_j T_j(x)$.

В [1] описывается “телескопический” метод нахождения полинома наилучшего равномерного приближения. Представляя функцию $f(x)$ на интервале $[-1, 1]$ в виде ряда Тейлора $f(x) \approx P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ и считая, что известно такое n , при котором погрешность представления меньше заданной, предлагается получить новое приближение в виде многочлена степени $n - 1$ в виде

$$f(x) \approx P_{n-1}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j + a_n \left(x^n - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \right).$$

Если погрешность нового приближения оказывается снова меньше заданной, то можно повторить процесс понижения порядка полинома.

В работе [2] предлагается искать наилучшее равномерное приближение на основе сплайнов. В [3] подробно рассмотрена теория Чебышева равномерного приближения функций, даны описание и доказательство сходимости алгоритма Е.А. Ремеза. В монографиях [4, 5] затрагиваются практические аспекты реализации алгоритмов построения полиномов наилучшего равномерного приближения.

В работе [6] рассмотрены базовые положения, которым должен удовлетворять полином наилучшего равномерного приближения, но отсутствует простой и эффективный алгоритм вычисления коэффициентов полинома.

В данной статье предлагается достаточно простой, универсальный алгоритм построения полинома наилучшего равномерного приближения для непрерывно дифференцируемых функций. Приводится реализация данного алгоритма в системе SciLab 6.0 и примеры экспериментального

исследования алгоритма, иллюстрирующие его эффективность.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Известно [1, 3, 6], что полином наилучшего среднеквадратического приближения (4) обладает тем свойством, что разность

$$\Delta(x) = f(x) - \sum_{i=0}^n a_i x^i \tag{5}$$

имеет не менее $n + 1$ нуля.

В самом деле, предположив обратное, т.е. что количество нулей $m \leq n$, составим многочлен

$$Q_m(x) = \prod_{j=1}^m (x - x_j) = \sum_{k=0}^m b_k x^k,$$

где x_j – нули функции $\Delta(x)$. Так как $\Delta(x)$ и $Q_m(x)$ имеют одни и те же нули, то их произведение $[f(x) - \sum_{i=0}^n a_i x^i] Q_m(x)$ не меняет знак и, следовательно, скалярное произведение в гильбертовом пространстве отлично от нуля, т.е.

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{i=0}^n a_i x^i \right] \sum_{k=0}^m b_k x^k dx \neq 0.$$

Выполняя преобразование подынтегрального выражения, можно записать

$$\sum_{k=0}^m b_k \left[\int_a^b f(x) x^k dx - \sum_{i=0}^n a_i \int_a^b x^i x^k dx \right] \neq 0.$$

Но для полинома наилучшего среднеквадратического приближения коэффициенты a_i выбираются таким образом, чтобы выражение в квадратной скобке обращалось в ноль. Полученное противоречие доказывает утверждение, что разность $\Delta(x)$ имеет не менее $n + 1$ нуля и, по крайней мере, не менее $n + 2$ раза меняет знак.

С другой стороны, согласно теореме Чебышева [1], полином наилучшего равномерного приближения степени n должен иметь, по крайней мере, $n + 2$ точки альтернанса, в которых для полинома

$$C_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$$

выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} f(x_i) - C_n(x_i) &= (-1)^i \|f - C_n\|_c = \\ &= (-1)^i \max_{[a,b]} |f(x) - C_n(x)| \end{aligned} \tag{6}$$

Поэтому для построения полинома наилучшего равномерного приближения предлагается на

первом этапе воспользоваться полиномом наилучшего среднеквадратического приближения и далее на втором этапе “улучшить” его коэффициенты и добиться равномерного приближения.

Получим основные соотношения, которые будут использованы для построения полинома наилучшего равномерного приближения $C_n(x)$. Обозначим неизвестные $n + 2$ точки чебышевского альтернанса как $\xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n < \xi_{n+1}$ и введем обозначение максимального отклонения полинома наилучшего равномерного приближения от аппроксимируемой функции

$$L = \max_{[a,b]} |f(x) - C_n(x)|.$$

Следует отметить, что для выпуклых функций крайние точки альтернанса совпадают с концами отрезка $[a, b]$, т.е. $\xi_0 = a, \xi_{n+1} = b$

Для $n + 2$ точек чебышевского альтернанса справедливы соотношения:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=0}^n c_i a^i - f(a) + L &= 0; \\ \sum_{i=0}^n c_i \xi_1^i - f(\xi_1) - L &= 0; \\ \sum_{i=0}^n c_i \xi_2^i - f(\xi_2) + L &= 0; \\ &\dots \\ \sum_{i=0}^n c_i \xi_n^i - f(\xi_n) + (-1)^n L &= 0; \\ \sum_{i=0}^n c_i b^i - f(b) + (-1)^{n+1} L &= 0. \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Кроме того, для внутренних точек альтернанса $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, если функция $f(x)$ является непрерывно дифференцируемой, можно записать:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^n i c_i \xi_1^{i-1} - \frac{df}{dx}(\xi_1) &= 0; \\ \sum_{i=1}^n i c_i \xi_2^{i-1} - \frac{df}{dx}(\xi_2) &= 0; \\ &\dots \\ \sum_{i=1}^n i c_i \xi_n^{i-1} - \frac{df}{dx}(\xi_n) &= 0. \end{aligned} \right. \tag{8}$$

Объединяя системы нелинейных уравнений (7) и (8), получим систему из $2n + 2$ уравнений с $2n + 2$ неизвестными: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – n точек чебышевского альтернанса, c_0, c_1, \dots, c_n – $n + 1$ коэффициент полинома наилучшего равномерного приближения $C_n(x)$, L – значение максимального отклонения. Вводя унифицированные обозначения,

перепишем объединенную систему уравнений в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n+1} x_i x_{n+2}^i - f(x_{n+2}) + x_{2n+2} = 0; \\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i x_{n+3}^i - f(x_{n+3}) - x_{2n+2} = 0; \\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i x_{2n+1}^i - f(x_{2n+1}) + x_{2n+2} = 0; \\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i a^i - f(a) - x_{2n+2} = 0; \\ \sum_{i=1}^n i x_i x_{n+2}^{i-1} - \frac{df}{dx}(x_{n+2}) = 0; \\ \sum_{i=1}^n i x_i x_{n+3}^{i-1} - \frac{df}{dx}(x_{n+3}) = 0; \\ \sum_{i=1}^n i x_i x_{2n+1}^{i-1} - \frac{df}{dx}(x_{2n+1}) = 0; \\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i b^i - f(b) + x_{2n+2} = 0, \end{array} \right. \quad (9)$$

где x_1, x_2, \dots, x_{n+1} соответствуют c_0, c_1, \dots, c_n ; $x_{n+2}, x_{n+3}, \dots, x_{2n+1}$ соответствуют $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$; x_{2n+2} соответствует L .

Решая систему уравнений (9) каким-либо численным итерационным методом [2], найдем коэффициенты полинома наилучшего равномерного приближения, а также точки чебышевского альтернанса и максимальное отклонение полинома от аппроксимируемой функции.

Для успешного решения системы (9) желательно иметь хорошее начальное приближение. Для этого предлагается построить полином наилучшего среднеквадратического приближения согласно формуле (5) и использовать его коэффициенты в качестве начальных значений для x_1, x_2, \dots, x_{n+1} , точки максимального отклонения полинома от функции $f(x)$ в качестве начальных точек альтернанса $x_{n+2}, x_{n+3}, \dots, x_{2n+1}$ и отклонение в точке a в качестве начального значения x_{2n+2} .

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ПОЛИНОМА

Исходя из вышеизложенного, алгоритм построения полинома представим в виде последовательности следующих этапов:

Этап 1. Построение полинома наилучшего среднеквадратического приближения.

Задавая на интервале $[a, b]$ N точек, вычислим значения аппроксимируемой функции $f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ (или используем множеств из N экспериментальных точек). Используя формулу (4),

найдем коэффициенты a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) полинома наилучшего среднеквадратического приближения $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$.

Этап 2. Построение системы нелинейных уравнений (9).

Для построения системы нелинейных уравнений (9) необходимо вычислить производную аппроксимируемой функции (или полинома $P_n(x)$, полученного на этапе 1) и задать начальные условия переменным $x_1, x_2, \dots, x_{2n+2}$. Для непрерывно дифференцируемых функций вычисление производной в точках альтернанса является довольно простой задачей. В крайнем случае, можно воспользоваться приближенным вычислением производных [6]. Задание начальных значений основано на результатах этапа 1.

В качестве начальных значений для x_1, x_2, \dots, x_{n+1} используем коэффициенты полинома a_0, a_1, \dots, a_n полученные на первом этапе.

Для переменных $x_{n+2}, x_{n+3}, \dots, x_{2n+1}$ в качестве начальных значений желательно выбрать точки максимального отклонения $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ от функции $f(x)$. Это можно сделать, построив, например, с помощью системы SciLab [7] график функции $\Delta(x)$ (5).

Начальное значение x_{2n+2} положим равным $\Delta(a)$.

Этап 3. Решение системы нелинейных уравнений (9).

Решение системы нелинейных уравнений проводится любым итерационным методом с использованием или без использования матрицы Якоби (если ее вычисление оказывается громоздким). В системе SciLab [7] для решения нелинейных уравнений имеется функция `fsolve`. Успешное решение системы уравнений (9) позволяет найти коэффициенты полинома наилучшего равномерного приближения, точки чебышевского альтернанса и максимальное отклонение полинома от аппроксимируемой функции.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА

Экспериментальное исследование предложенного алгоритма проводилось в системе SciLab 6.0. В качестве аппроксимируемой была выбрана функция $f(x) = \sqrt{x}$ на интервале $[1, 64]$.

Для простоты выберем в качестве аппроксимирующего полинома полином второго порядка.

На первом этапе построим полином наилучшего среднеквадратического приближения. Задав

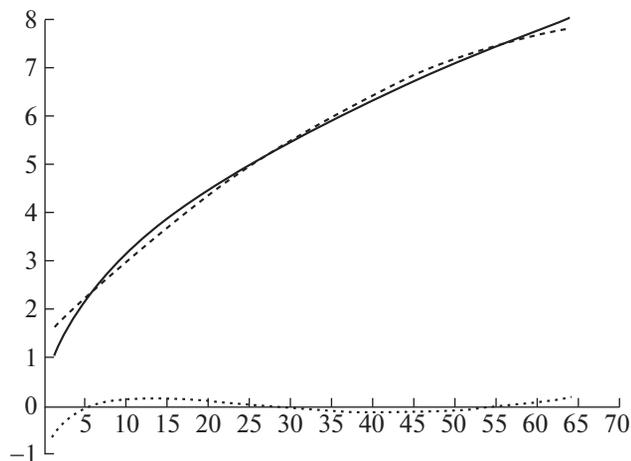


Рис. 1. Полином наилучшего среднеквадратического приближения.

$N = 64$, ($x_i = i, i = 1, 2, \dots, 64$), по формуле (4) найдем полином:

$$P_2(x) = 1.45 + 0.166x - 0.00104x^2.$$

На рис. 1 представлены графики функции $f(x) = \sqrt{x}$ (сплошная линия), полинома $P_2(x)$ (пунктирная линия), и функции $\Delta(x) = P_2(x) - \sqrt{x}$ (точечная линия) на интервале $[1, 64]$.

Как видно, полином $P_2(x)$ достаточно хорошо аппроксимирует функцию \sqrt{x} и наибольшее отклонение наблюдается в точках (приблизительно) 1, 12, 45, 64. Легко видеть, что построенный полином не является полиномом равномерного приближения, наибольшее отклонение имеется в начале интервала и составляет более 0.5.

На втором этапе необходимо построить систему нелинейных уравнений и задать начальные значения переменным. В данном случае система нелинейных уравнений содержит 6 переменных: x_1, x_2, x_3 – коэффициенты полинома наилучшего равномерного приближения, x_4, x_5 – внутренние точки чебышевского альтернанса, x_6 – максимальное отклонение.

$$\begin{cases} x_1 + x_2x_4 + x_3x_4^2 - \sqrt{x_4} + x_6 = 0; \\ x_1 + x_2x_5 + x_3x_5^2 - \sqrt{x_5} - x_6 = 0; \\ x_1 + x_2a + x_3a^2 - \sqrt{a} - x_6 = 0; \\ x_2 + 2x_3x_4 - \frac{0.5}{\sqrt{x_4}} = 0; \\ x_2 + 2x_3x_5 - \frac{0.5}{\sqrt{x_5}} = 0; \\ x_1 + x_2b + x_3b^2 - \sqrt{b} + x_6 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

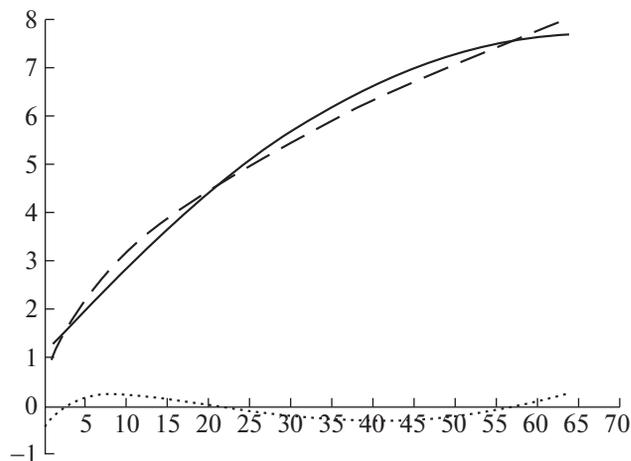


Рис. 2. Полином наилучшего равномерного приближения.

По результатам первого этапа начальными значениями выберем следующие: $x_1 = 1.45$, $x_2 = 0.166$, $x_3 = 0.00104$ – коэффициенты полинома $P_2(x)$; $x_4 = 12$, $x_5 = 45$ – точки наибольшего отклонения полинома $P_2(x)$ от функции \sqrt{x} ; $x_6 = 0.5$ – максимальное отклонение $P_2(x)$ от \sqrt{x} .

Третий этап состоит в решении системы (10) каким-либо численным методом. В системе SciLab была выбрана функция `fsolve`, которая позволяет находить решение систем нелинейных уравнений методом итераций с использованием и без использования якобиана.

На рис. 2 представлены графики функции $f(x) = \sqrt{x}$ (сплошная линия), полинома $C_2(x)$ (пунктирная линия), и функции $\Delta(x) = C_2(x) - \sqrt{x}$ (точечная линия) на интервале $[1, 64]$.

Как видно, полином $C_2(x)$ обеспечивает равномерное приближение функции $f(x) = \sqrt{x}$ на интервале $[1, 64]$. Величина максимального отклонения составляет 0.2775. Для полинома $P_2(x)$ максимальное отклонение равнялось 0.6151.

Аналогично можно построить полиномы более высоких порядков. В приложении приведена реализация данного алгоритма в системе SciLab 6.0 для полинома 3-го порядка.

Таким образом, экспериментальной проверкой подтверждена корректность предложенного алгоритма, который позволяет достаточно просто строить полином наилучшего равномерного приближения.

ВЫВОДЫ

В работе предложен алгоритм построения полинома наилучшего равномерного приближения, который позволяет находить коэффициенты полинома, точки чебышевского альтернанса и максимальное отклонение. Алгоритм основан на идее “улучшения” полинома наилучшего среднеквадратического отклонения и требует применения какого-либо численного метода решения систем нелинейных уравнений. Реализация алгоритма в системе SciLab и его экспериментальное исследование подтвердили корректность и эффективность предложенного подхода.

ПРИЛОЖЕНИЕ

```
// Полиномам 3 порядка
N=64;
a=1;
b=64;
function y=f(z)
y=sqrt(z)
endfunction
function [y]=f1(z)
y1(1)=z(1)+z(2)*z(5)+z(3)*z(5)^2+z(4)*z(5)^3-
sqrt(z(5))-z(8)
y1(2)=z(1)+z(2)*z(6)+z(3)*z(6)^2+z(4)*z(6)^3-
sqrt(z(6))+z(8)
y1(3)=z(1)+z(2)*z(7)+z(3)*z(7)^2+z(4)*z(7)^3-
sqrt(z(7))-z(8)
y1(4)=z(1)+z(2)*a+z(3)*a^2+z(4)*a^3-sqrt(a)+z(8)
y1(5)=z(2)+2*z(3)*z(5)+3*z(4)*z(5)^2-0.5/sqrt(z(5))
y1(6)=z(2)+2*z(3)*z(6)+3*z(4)*z(6)^2-0.5/sqrt(z(6))
y1(7)=z(2)+2*z(3)*z(7)+3*z(4)*z(7)^2-0.5/sqrt(z(7))
y1(8)=z(1)+z(2)*b+z(3)*b^2+z(4)*b^3-sqrt(b)+z(8)
y=y1'
endfunction
// Количество точек
x=[a:1:b];
x2=x^2;
x3=x^3;
Ft=[ones(1,N);
x;
x2;
x3];
F=Ft';
FF=Ft*F;
FF1=inv(FF);
```

```
Fun=f(x);
B=FF1*Ft*Fun';
// Полином MNK
pMNK = poly(B, "x", "c");
PolMNK=horner(pMNK,x);
DeltaMNK=Fun-PolMNK;
del=-DeltaMNK(1);
normDeltaMNK=norm(DeltaMNK)
// Полином наилучшего равномерного приближения
[ch,v,info]=fsolve([B(1), B(2), B(3), B(4), 6, 24, 50, del], f1);
pCheb = poly([ch(1),ch(2),ch(3), ch(4)], "x", "c");
disp(v);
disp(info);
PolCheb=horner(pCheb,x);
DeltaCheb=Fun-PolCheb;
normDeltaCheb=norm(DeltaCheb)
plot(x, DeltaMNK, x, DeltaCheb)
A1=gca();
A1.x_location="origin";
A1.title.text='Полином'; // подпись графика
a.grid=[0 0]; // включение сетки и задание ее цвета
(черный)
```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 296 с. ISBN 5-9221-0092-0.
2. Babenko V.F. On best uniform approximations by splines in the presence of restrictions on their derivatives. Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR December 1991. V. 50. Issue 6. P. 1227–1232.
3. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 512 с.
4. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев, Наукова думка, 1969.
5. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. М.: МИР, 1975.
6. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 636 с.: ил.
7. Scilab – free and open source software. [Электронный ресурс] URL: <https://www.scilab.org/>. (Дата обращения 10.02.2019.)

Algorithm for Constructing the Best Uniform Approximation Polynomial from Experimental Data

K. Ya. Kudryavtsev[#]

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: KYKudryavtsev@mephi.ru

Received February 10, 2019; revised June 20, 2019; accepted June 25, 2019

Abstract—Approximation of a set of experimental points using a set of functions is actual for many engineering studies. To solve such problems, the concept of a linear normed space, whose elements are bounded real functions, is introduced, and the concept of a metric (norm), i.e., a measure of proximity between the elements of the space is used. In many cases, it is required to approximate a complex function by a polynomial of a given order and, at the same time, to ensure the maximum deviation of the polynomial from the function by no more than a certain specified error. In this case, it is reasonable to use the Chebyshev norm and look for a polynomial of the best uniform approximation. However, there are no universal effective algorithms for finding the best-dimensional approximation polynomial. In this work, a simple and efficient algorithm is proposed for constructing the best uniform approximation polynomial for continuously differentiable functions. The algorithm consists of three stages. At the first stage, a polynomial of the degree n is constructed using the least squares method. At the second stage, a special system of nonlinear equations is obtained. At the third stage, the coefficients of the best uniform approximation polynomial and the Chebyshev alternance point are found by solving a system of nonlinear equations by any iterative method. This algorithm is implemented in the SciLab 6.0 system and is experimentally tested.

Keywords: approximation of functions, polynomial of the best uniform approximation, points of the Chebyshev alternance

DOI: 10.1134/S2304487X1905002X

REFERENCES

1. Lebedev V.I. *Funktsionalnyy analiz i vychislitel'naya matematika* [Functional analysis and computational mathematics]. M.: FIZMATLIT, 2005. 296 p. — ISBN 5-9221-0092-0
2. Babenko V.F. On best uniform approximations by splines in the presence of restrictions on their derivatives. — Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR December 1991, Volume 50, Issue 6, pp. 1227–1232.
3. Dzyadyk V.K. *Vvedenie v teoriyu ravnomernogo priblizheniya funktsiy polinomami* [Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials]. M.: Science, 1977. 512 p.
4. Remez E.Ya. *Osnovy chislennykh metodov chebyshevskogo priblizheniya* [Fundamentals of numerical methods for the Chebyshev approximation]. — Kiev, Naukova Dumka, 1969.
5. Laurent P.-J. *Approksimatsiya i optimizatsiya* [Approximation and optimization]. M.: MIR, 1975.
6. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Chislennyye metody* [Numerical methods]. M.: BINOM. Laboratory of Knowledge, 2008. 636 pp.
7. Scilab — free and open source software. Available at: <https://www.scilab.org/> (accessed 18.01.2019)