

Том 14, номер 4

ISSN 2304-487X

ИЮЛЬ – АВГУСТ 2025

<https://vestnikmephi.elpub.ru>

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ»



Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ»

Том 14 № 4 2025 ИЮЛЬ – АВГУСТ

Основан в июле 2012 г.

Выходит 6 раз в год

ISSN: 2304-487X

ПИ № ФС 77-41948

Главный редактор

Михаил Николаевич Стриханов, д. ф.-м. наук, профессор, НИЯУ МИФИ, г. Москва (Россия)

Заместитель главного редактора

Николай Алексеевич Кудряшов, д.ф.-м.н., профессор, НИЯУ МИФИ, г. Москва (Россия)

Выпускающий редактор

Наталья Вячеславовна Ермолаева, к.т.н., НИЯУ МИФИ, г. Москва (Россия)

Ответственный секретарь

Михаил Александрович Чмыхов, к.ф.-м.н., доцент, НИЯУ МИФИ, г. Москва (Россия)

Редакционная коллегия:

Аксёнов Александр Васильевич – д.ф.-м.н., профессор, МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва (Россия)

Бедриковецкий Павел – д.ф.-м.н., профессор, Университет Аделаиды, Аделаида, (Австралия)

Гаранин Сергей Григорьевич – чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор,

Институт лазерно-физических исследований РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров (Россия)

Евтихий Николай Николаевич – д.ф.-м.н., профессор, НИЯУ МИФИ, г. Москва (Россия)

Калашников Николай Павлович – д.ф.-м.н., профессор, НИЯУ МИФИ, г. Москва (Россия)

Каргин Николай Иванович – д.т.н., профессор, НИЯУ МИФИ, г. Москва (Россия)

Кашенко Сергей Александрович – д.ф.-м.н., профессор,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, г. Ярославль (Россия)

Лазаров Райчо – доктор наук, профессор математики, Техасский университет А&М,
г. Колледж-Стейшен (США)

Нагорнов Олег Викторович – д.ф.-м.н., профессор, НИЯУ МИФИ, г. Москва (Россия)

Полянин Андрей Дмитриевич – д.ф.-м.н., профессор,

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва (Россия)

Цегельник Владимир Владимирович – д.ф.-м.н., профессор,

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск (Белорусь)

Четверушкин Борис Николаевич – член РАН, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва (Россия)

Эфендиев Ялчин – д.ф.-м.н., профессор, Техасский университет А&М, г. Колледж-Стейшен (США)

Компьютерная верстка: Девятилова Светлана Константиновна

Учредитель и издатель: Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Адрес редакции: 115409, Москва, Каширское шоссе, д. 31, Вестник НИЯУ МИФИ

Сайт: <https://vestnikmephi.elpub.ru>

Электронная почта: vestnik@mephi.ru

**Москва
НИЯУ МИФИ**

СОДЕРЖАНИЕ

Том 14, № 4, 2025

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

- Влияние молибдена на взаимодействие уран-молибденовых сплавов с железом и коррозионно-стойкой сталью**
С. Н. Никитин, Б. А. Тарасов, Д. П. Шорников, А. С. Юрлова 279
- Аналоговый оптический тракт с внешней модуляцией и с цифровым выходом для радиосигналов L -диапазона: экспериментальная оценка эффективного числа бит**
М. И. Казьмин, В. А. Небавский, Р. С. Стариков, Д. А. Третьяков, П. А. Черемхин 291
-

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

- Уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса с нелинейным источником: редукция, тест Пенлеве, первые интегралы и аналитические решения**
Н. А. Кудряшов 298
- Исследование процессов самоорганизации в бактериальных колониях, описываемых моделью Чави-Вадди – Колокольникова**
А. Г. Головков, П. Н. Рябов, Н. А. Кудряшов 318
- Гибридный подход на основе когнитивного картирования и регрессионного анализа для прогнозирования в сложных слабо формализованных системах**
Р. М. Романов, А. И. Гусева 332
-

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

- Генеративно-сопоставительная нейронная сеть для моделирования шумовых характеристик источников тока**
А. Г. Попов 339
- Автомодельное решение задачи о растворении льда гидрофильной жидкостью**
О. В. Нагорнов, Т. И. Бухарова 352
-

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

- Решение обобщенного сравнения степенных выражений с помощью W -функции Ламберта**
А. Е. Дубинов 357
-

ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

- Методика определения электрофизических характеристик светодиодов**
К. Н. Орлова, А. В. Градобоев, А. В. Беклемишева, А. Р. Аванесян 368

CONTENTS

Volume 14, Number 4, 2025

THEORETICAL AND EXPERIMENTAL PHYSICS

The effect of molybdenum on the interaction of uranium-molybdenum alloys with iron and corrosion-resistant steel

S. N. Nikitin, B. A. Tarasov, D. P. Shornikov, A. S. Yurlova 279

Analog optical link with external modulation and digital output for L-band signals: experimental evaluation of the effective number of bits

M. I. Kazmin, V. A. Nebavskiy, R. S. Starikov, D. A. Tretyakov, P. A. Cheremkhin 291

MATHEMATICAL MODELS AND NUMERICAL METHODS

The Korteweg – de Vries – Burgers equation: with nonlinear source, reduction, the Painlevé test, first integrals and analytical solutions

N. A. Kudryashov 298

Investigation of self-organization processes in bacterial colonies described by the Chavi-Waddy – Kolokolnikov model equation

A. G. Golovkov, P. N. Ryabov, N. A. Kudryashov 318

Hybrid approach based on cognitive mapping and regression analysis for forecasting in complex weakly formalized systems

R. M. Romanov, A. I. Guseva 332

COMPUTER SIMULATION OF PHYSICAL AND TECHNOLOGICAL PROCESSES

Generative adversarial network for power sources' noise characteristics modeling

A. G. Popov 339

Self-similar solution of the problem on dissolution of ice by hydrophilic liquid

O. V. Nagornov, T. I. Bukharova 352

APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Solving a generalized comparison of power expressions using the Lambert W function

A. E. Dubinov 357

CONDENSED MATTER PHYSICS

Determining method for LEDs electrophysical characteristics

K. N. Orlova, A. V. Gradoboev, A. V. Beklemisheva, A. R. Avanesyan 368

УДК 621.039.542.34

Влияние молибдена на взаимодействие уран-молибденовых сплавов с железом и коррозионно-стойкой сталью

© 2025 г. С. Н. Никитин, Б. А. Тарасов, Д. П. Шорников, А. С. Юрлова

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

В работе приводятся результаты изучения взаимодействия уран-молибденовых сплавов с коррозионно-стойкими сталями во вне реакторных диффузионных экспериментах при температурах 700–850 °С. В диффузионной паре U10Mo/Fe13Cr при температуре отжига 700 °С наблюдается твердофазное взаимодействие. Увеличение температуры отжига выше эвтектического превращения в системе U-Fe приводит к смене характера диффузии с объемного на зернограничный. Наблюдается появление жидкой фазы, которая при охлаждении кристаллизуется в эвтектику. Скорость роста слоя взаимодействия для диффузионных пар описывается параболическим законом. Результаты исследования влияния содержания молибдена в сплаве урана на кинетику роста взаимодействия с Fe-Cr показали, что легирование урана молибденом до 17 мас. % приводит к линейному снижению скорости роста всего слоя взаимодействия ($K_{\text{общ}}$) с коррозионно-стойкими сталями, а константа скорости роста слоя взаимодействия в сталь (K_n) экспоненциально снижается с увеличением содержания молибдена при температуре 750 °С, что обусловлено уменьшением коэффициента взаимной диффузии в системе U-Mo с увеличением содержания молибдена. K_n уменьшается в 10 раз, $K_{\text{общ}}$ уменьшается в 30 раз при температуре 750 °С с увеличением содержания Mo от 6 до 17 мас. %. На основе результатов исследования структурно-фазового состояния слоя взаимодействия между сплавами урана и сталями различного состава построены тройные диаграммы состояний сплавов следующих систем: U-Mo-Fe, U-Mo-Fe(Cr), при температурах 750 °С.

Ключевые слова: уран молибденовый сплав, взаимодействие топлива и оболочки, совместимость, коррозионно-стойкие стали, кинетика взаимодействия

Введение

В настоящее время накоплен большой опыт эксплуатации металлического ядерного топлива во всем мире [1, 2]. Сплавы U-Mo исследовались как один из видов металлического топлива для реакторов как на быстрых, так и на тепловых нейтронах [3]. Основными сдерживающими факторами применения данного вида топлива являются относительно сложная технология изготовления, распухание и взаимодействие топлива с оболочкой. Как было показано, решение проблемы распухания возможно за счет равномерного уменьшения плотности ядерного топлива до 75 % от теоретического значения [4]. Оптимальным решением является создание топлива с открытой пористостью методом порошковой металлургии [5].

Проблема совместимости металлического топлива с оболочкой также сдерживает применение металлического топлива в энергетических реакторах. Взаимодействие металлического топлива со стальной оболочкой ТВЭЛ можно разделить на два этапа: твердофазное и жидкофазное взаимодействие. Распространение металлического топлива от использования в реакторах на быстрых нейтронах сдерживает наличие эвтектики компонентов топлива с элементами оболочки. Наибольшее влияние на процесс

✉ С.Н. Никитин: mephi200809@yandex.ru

Поступила в редакцию: 28.04.2025

После доработки: 26.06.2025

Принята к публикации: 08.07.2025

EDN DPPXQO

взаимодействия оказывает температура. До температуры 620 °С не обнаруживается значимого взаимодействия между топливом и стальной оболочкой [6]. Повышение эксплуатационных характеристик твэла с металлическим топливом требует использования высоколегированных сплавов урана с цирконием или молибденом. Данные по взаимодействию U-Mo топлива со стальными оболочками немногочисленны [7–9]. По сравнению с Zr, Mo имеет более низкий потенциал реакции с Fe. В отличие от слоя взаимодействия Fe с U, в диффузионном слое с U-Zr сплавом, кроме UFe_2 и U_6Fe , образуются дополнительные интерметаллиды с Zr [3]. В работе [7] отмечают ухудшение совместимости со сталью сплавов U-Mo-Pu с увеличением содержания молибдена в них (4–15 мас. %), что более заметно при содержаниях Pu ≥ 19 ат. %. В работе [3] показано, что увеличение содержания молибдена в сплаве U-xMo-19Pu приводит к увеличению температуры образования жидкой фазы. В работе [8] не наблюдается существенной разницы в совместимости сплавов U-4Mo-22Pu и U-15Mo-25Pu с Fe-12Cr при температуре 700 °С.

Данная работа является продолжением работы [10], в которой развиты подходы к изучению совместимости топлива с оболочкой при температурах выше эвтектической температуры. Целью работы является исследование совместимости сплавов U-Mo различного состава со сталями при температурах 700–850 °С.

Методика эксперимента

Сплавы урана с различным содержанием Mo (6, 8, 10, 17 мас. %) выплавляли в дуговой печи с нерасходуемым вольфрамовым электродом МИФИ-9.3. Шихта состояла из высокочистого урана (99.98 %), электролитического Mo. Для исключения окисления сплава рабочая камера заполнялась чистым Ag, перед плавкой переплавляли циркониевый геттер для дополнительной очистки газа, а сплав для гомогенизации переплавляли 3–4 раза, после чего из него отливали прутки диаметром 10 мм. Полученные прутки гомогенизировались в вакуумной печи при температуре 1000 °С в течение 10 ч. Далее прутки разрезали на диски, которые подвергали шлифовке на абразивной бумаге зернистостью 1200 и полировке на алмазных пастах зернистостью 3 и 1 мкм.

Железо и стали системы Fe-Cr готовили путем плавления шихты из металлической стружки в дуговой печи (МИФИ-9.3) в атмосфере очищенного Ag с использованием Zr геттера. Для приготовления сплавов использовались йодидный Cr и карбонильное Fe. Шихту переплавляли несколько раз для улучшения гомогенности слитка. Полученные слитки подвергали гомогенизирующему отжигу в вакууме при температуре 1000 °С в течение суток, после чего проковывали в прутки. Далее цилиндрические образцы механически обрабатывали на токарном станке до 10 мм в диаметре и разрезали на «таблетки» толщиной 3 мм, после этого подвергали шлифовке с последующей полировкой на алмазной пасте зернистостью 3 и 1 мкм. Из полученных «таблеток» отбирали образцы для анализа гомогенности и определения точного состава полученных сплавов.

Для определения кинетики роста слоя взаимодействия и его фазового состава проводили изотермические отжики диффузионных пар, которые изготавливали путем зажима «таблеток» сплавов UMo и Fe13Cr в молибденовой трубочине.

«Таблетки» уранового сплава (УС) и материала оболочки твэла (Ст.) после металлографической подготовки складывали по определенной схеме: Та/УС/Ст./УС/Ст./Та; для предотвращения взаимодействия между разными диффузионными парами использовалась танталовая фольга (Та).

Для проведения диффузионных отжигов использовали кварцевую ампулу, с одного конца заваренную, а с другого – соединенную с вакуумным постом. Для дополнительной очистки Ag в ампулу закладывался геттер из стружки йодидного Zr, после чего в ампулу опускалась диффузионная сборка и ампула герметизировалась. Для более точного регулирования температуры в диффузионной паре внутри ампулы крепится хромель/алюмелевая термопара. Диффузионные отжики проводили в трубчатой печи СУОЛ 0.4.4/12-M2-У4.2 при температурах от 700 до 850 °С, длительность выдержки – от 1 до 15 ч.

После отжигов диффузионные пары разрезали перпендикулярно направлению диффузии на электроискровом станке. Следующим этапом являлась заливка нескольких диффузионных пар в смолу. Полученный образец в дальнейшем подвергали металлографической подготовке (обработке на шлифовальных бумагах зернистостью 800 и 1200 и полировке на алмазных пастах зернистостью 3, 1, 0.5 мкм).

Микроструктуру поверхности образцов исследовали с помощью высокоразрешающего растрового электронного микроскопа JEOL 6610 LV (Япония), определение элементного состава проводилось методом рентгеноспектрального микроанализа при ускоряющем напряжении 15 кВ (ток зонда 5–50 нА) с помощью энергодисперсионного спектрометра Oxford Instruments INCA x-ACT.

В настоящей работе для определения константы скорости роста слоя взаимодействия (K_i) использовался метод измерения толщины слоя взаимодействия по всей длине областей взаимодействия с последующим усреднением и расчетом по формуле 1

$$X_i^2 = 2 \cdot K_i \cdot t, \quad (1)$$

где X – толщина слоя взаимодействия; i – индекс области слоя взаимодействия; K – константа роста слоя взаимодействия; t – время отжига.

Результаты экспериментов и их обсуждение

На рис. 1 представлено сравнение микроструктур для диффузионных пар U10%Mo/Fe13%Cr, отожженных при разных температурах. В табл. 1 представлены толщины слоев взаимодействия различных диффузионных пар.

При температуре 700 °С наблюдается твердофазное взаимодействие. Весь слой взаимодействия представляет собой послойную структуру, состоящую из трех областей: UFe_2 ($U_{36}Mo_{2-3}Fe_{48-51}Cr_{11-13}$), обогащенный молибденом слой, $U_6Fe + U(14 - 16)Mo$. С ростом температуры выше эвтектического превращения U-Fe наблюдается взаимодействие с образованием жидкой фазы (закристаллизовавшаяся

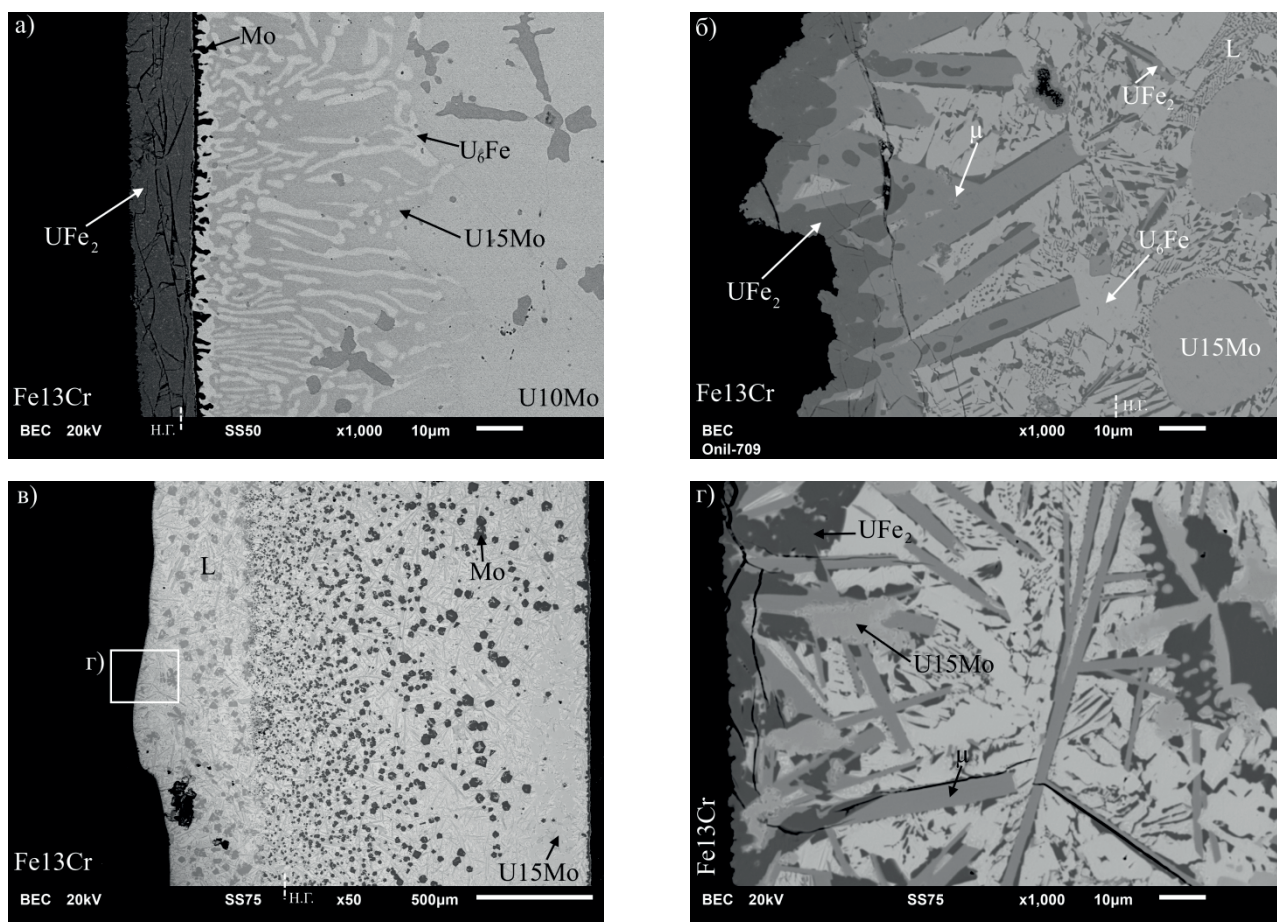


Рис. 1. Сравнение микроструктуры диффузионной пары U10Mo/Fe13Cr при различных температурах: а) 700 °С 14 ч; б) 750 °С 5 ч [10]; в) 850 °С 2 ч; г) 850 °С 2 ч

Таблица 1. Толщина слоя взаимодействия в зависимости от содержания молибдена в UMo сплаве

Диф. пара, мас. %	T , °C	t , ч	$X_{\text{общ}}^*$, мкм	$X_{\text{п}}$, мкм	$K_{\text{общ}}$, 10^{-11} м ² /с	$K_{\text{п}}$, 10^{-11} м ² /с
U6Mo/Fe13Cr	750	4.25	848±73	126±20	2.8±0.3	0.30±0.03
		5.0	1075**±35	445±16		
U8Mo/Fe13Cr		5.0	735±88	117±20	3.1±0.5	0.07±0.03
		5.0+3.0	1505**±100	253±45		
		5.0+3.0+2.0	1673**±156	210±49		
U10Mo/Fe13Cr [10]	700	14.13	65±8	13±3	0.0040±0.0009	0.00014±0.00006
		14.0	63±7	11±2		
	750	5.0	573±50	80±14	2.3±0.3	0.05±0.01
		8.0	1439±96	207±14		
		850	2.0	1857*±105	491±90	24.0±3.0
U17Mo/Fe13Cr	750	5.0	186±14	75±15	0.10±0.01	0.02±0.01
U15Mo/Fe	800	15.0	3522*±199	562±34	11.0±1.0	0.29±0.04
U10Mo/Fe [10]	750	1.5	786±47	120±10	5.4±0.5	0.16±0.03
		2.5	986±47	165±20		
		5.0	1456*±26	227±14		
		1.5+1.0+2.5	1292**±54	267±29		
	850	2.0	3031**±81	695±195	64.0±3.0	3.0±2.0

*В урановом сплаве отсутствуют области, не подверженные взаимодействию;

**отмечено вытекание жидкой фазы

эвтектика) (см. рис. 1). Происходит смена характера диффузии с объемного на зернограничный, что заметно по «островкам» с непрореагировавшей основой сплава урана. Наблюдается изменение формы молибденовых выделений от слоистого к сферическому виду. В диффузионных парах, содержащих хром, при температуре выше эвтектического превращения U-Fe присутствует новая фаза, названная μ ($\text{U}_{50-51}\text{Mo}_{9-11}\text{Fe}_{30-33}\text{Cr}_{7-9}$) (см. рис. 1).

Сравнение микроструктур слоев взаимодействия диффузионных пар показало схожее строение диффузионной зоны для диффузионных пар с содержанием молибдена от 6 до 13 % [10] (рис. 2). Слой взаимодействия неоднороден, состоит из нескольких чередующихся зон.

Весь слой взаимодействия ($X_{\text{общ}}$) можно разбить на несколько областей: область слоя взаимодействия в стали ($X_{\text{п}}$); область существования жидкой фазы ($X_{\text{ж}}$); область проникновения жидкой фазы и непрореагировавшей основы («зернограничная») ($X_{\text{зг}}$). В некоторых случаях та или иная область не наблюдается.

Область слоя взаимодействия в стали – это часть слоя взаимодействия между сталью и сплавом урана, определяемая как глубина образования продуктов взаимодействия в стали, относительно начальной границы раздела материалов. Состоит из UFe_2 ($\text{U}_{36}\text{Mo}_{2-3}\text{Fe}_{48-51}\text{Cr}_{11-13}$), фазы μ ($\text{U}_{50-51}\text{Mo}_{9-11}\text{Fe}_{30-33}\text{Cr}_{7-9}$) и жидкой фазы. В диффузионных парах U-6,8,10 Mo/Fe13Cr в зоне существования жидкой фазы, которая при охлаждении закристаллизовалась в эвтектику, отсутствуют выделения фазы, обогащенной Mo ($\text{U}_4\text{Mo}_{91}\text{Cr}_5$), однако в U17Mo/Fe13Cr присутствуют по всей длине слоя взаимодействия.

Область проникновения жидкой фазы в урановый сплав обусловлена продвижением жидкой фазы вглубь уранового сплава по границам зерен U-Mo. Основной составляющей данной структуры являются сферические зерна U-Mo сплава с повышенным содержанием молибдена около 15 мас. %. Ближе к урановому сплаву в слое взаимодействия данные зерна имеют иногда неоднородный состав, можно выделить две области: центр зерна, с концентрацией молибдена около 14 мас. %; периферия зерна со следами «проедания» жидкой фазой, концентрация молибдена составляет около 15 мас. %. Приграничная зона U-Mo сплава со слоем взаимодействия состоит из двух фаз $\text{U}_6\text{Fe} + \text{U16Mo}$ (рис. 2а).

При температуре 750 °C молибден растворяется в интерметаллиде UFe_2 в количестве около 2–3 ат. %, в μ -фазе – в количестве около 9–11 ат. %. В соединении U_6Fe растворимость молибдена составляет

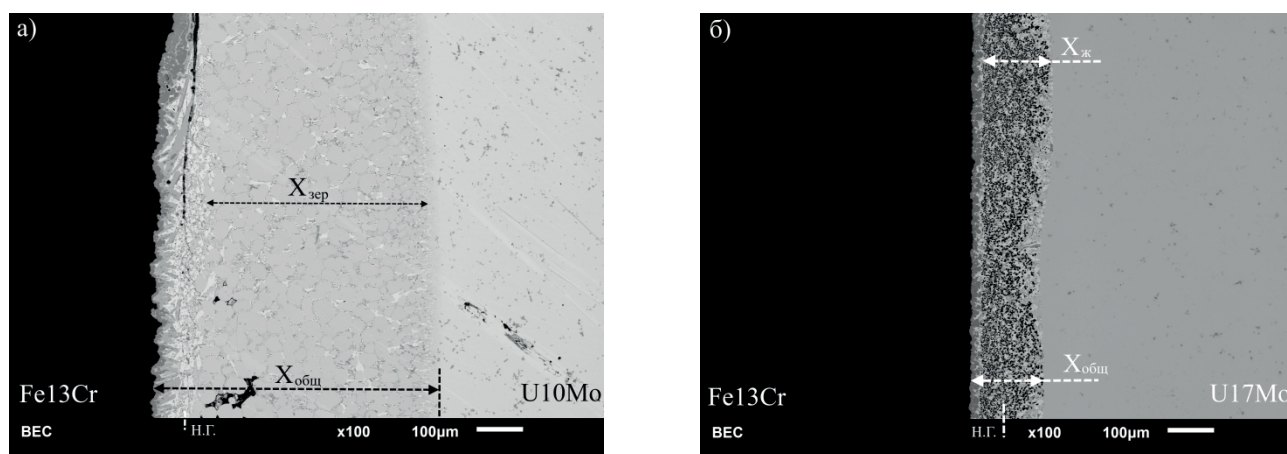


Рис. 2. Микроструктуры слоев взаимодействия после отжига при 750 °С в течение 5 ч: а) U10Mo/Fe13Cr; б) U17Mo/Fe13Cr

около 2 ат. % ($U_{83}Mo_2Fe_{15}$). Образование UFe_2 и U_6Fe приводит к повышению концентрации молибдена в непрореагировавших областях до 15–16 мас. % и в дальнейшем выделению Mo в виде глобул с содержанием последнего более 90 ат. %. (рис. 2б). Увеличение содержания Mo в сплаве урана до 17 мас.% приводит к смене характера диффузии с зернограничного на объемный (см. рис. 2).

Следует отметить, что похожие выделения Mo наблюдались в работах [7, 8]. На основании диаграммы состояния системы U-Mo, при увеличении содержания Mo в сплаве происходит его распад с образованием двух фаз $\gamma + Mo$, и, если происходит взаимодействие, то с Fe взаимодействует только γ -фаза, а молибден нет. В целом микроструктуры похожи на представленные в работах [7–9].

При повторном отжиге диффузионной пары $U_6Mo/Fe13Cr$ наблюдается увеличение ширины слоя UFe_2 , в среднем для всех диффузионных пар слой данного интерметаллида имеет толщину 12–15 мкм. Данное увеличение связано с вытеканием жидкой фазы во время отжига и образованием полостей, в результате чего взаимодействие жидкой фазы проходило только со сталью. В связи с вытеканием жидкой фазы и образованием полости без продуктов взаимодействия возможно выравнивание потока атомов урана к границе раздела по отношению к железу или его уменьшение, что приводит к росту приграничного слоя UFe_2 и увеличению эффекта Киркендалла.

С увеличением температуры до 800–850 °С наблюдается увеличение количества и размеров обогащенной Mo фазы глобулярного вида. С увеличением времени отжига от 1,5 до 5 ч происходит коагуляция молибдена и увеличение его содержания в обогащенной Mo фазе, заметного роста UFe_2 не наблюдается. Средний состав выделений (мас. %): 3–4 %Cr, 85–90 % Mo, 1 % Fe, 10 % U.

Исследование взаимодействия железа и Fe13Cr с U-Mo сплавами при 800 и 850 °С показало, что для диффузионных пар характерно полностью преобразование U-сплава в жидкую фазу из-за ограниченности толщины U-Mo дисков. В приграничной со сталью области для диффузионной пары, отожженной при 800 °С, нет крупных выделений молибдена, есть «островки» U-Mo сплава с повышенным содержанием молибдена (17–18 мас. %) относительно начального сплава (10 мас. %), расположенных в различных местах жидкой фазы. Стоит отметить, что 806 °С – температура плавления U_6Fe , поэтому при температуре выше 806 °С взаимодействие идет сразу с образованием жидкой фазы, без образования U_6Fe .

На рис. 3 представлены тройные диаграммы состояния, построенные на основании существующих двойных диаграмм и экспериментально обнаруженных в слое взаимодействия фаз. При построении границы ближайших фаз соединялись линиями. На тройные диаграммы состояния нанесены точки количественного анализа по ширине слоя взаимодействия.

Основным параметром, по которому определяется совместимость топлива с оболочкой, является скорость роста слоя взаимодействия (формула (1)). Особое значение имеет толщина K_n , так как характеризует скорость проникновения топливных составляющих в оболочку.

Как можно видеть (рис. 4), наблюдается экспоненциальное снижение K_n с увеличением содержания молибдена в урановом сплаве. Следует также отметить $K_{общ}$ линейно снижается в диапазоне содержания молибдена от 6 до 17 мас.%. Константа скорости роста описывается уравнением

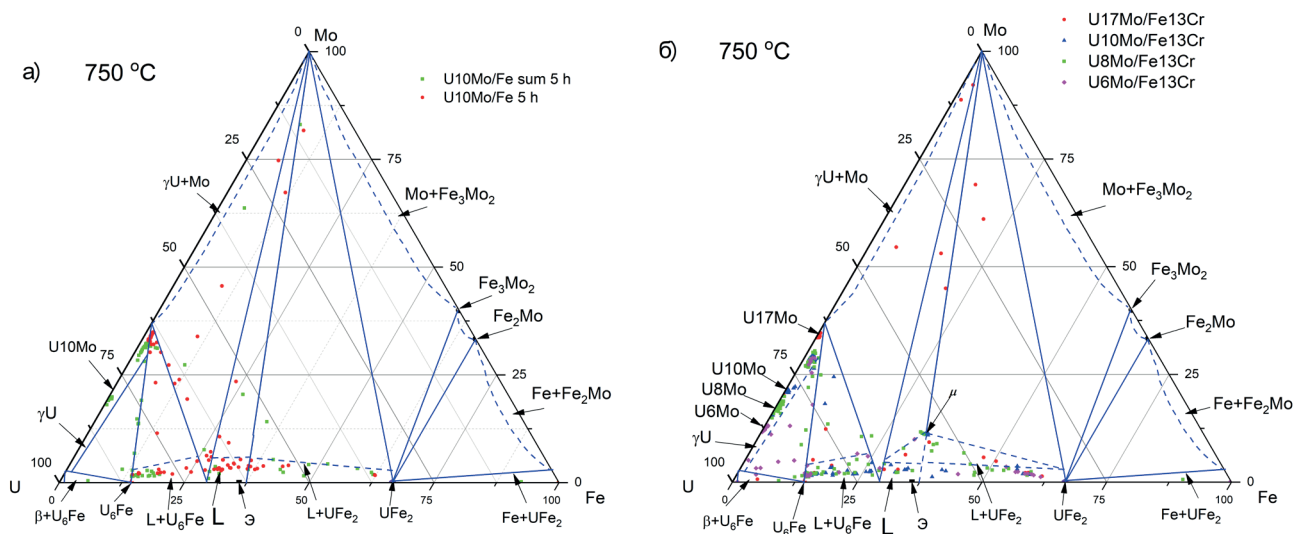


Рис. 3. Диаграмма состояний сплавов систем: а) U-Mo-Fe; б) U-Mo-Fe(Cr)

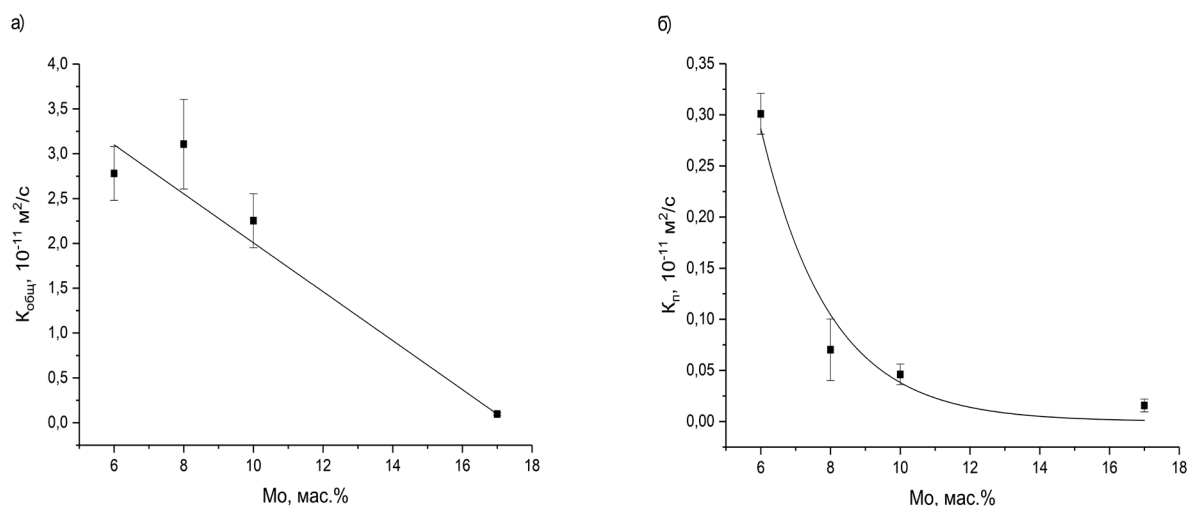


Рис. 4. Зависимость кинетики взаимодействия Fe13Cr с U-Mo от содержания молибдена при температуре 750 °C

$$K_{\text{общ}}^{\text{Mo}} = K_{\text{общ}}^{\text{U}} - 0.27 \cdot C_{\text{Mo}}, \quad (2)$$

$$K_{\text{п}}^{\text{Mo}} = K_{\text{п}}^{\text{U}} \cdot \exp^{-0.45 \cdot C_{\text{Mo}}} \quad (3)$$

$K_{\text{п}}$ уменьшается в 10 раз, $K_{\text{общ}}$ уменьшается в 30 раз при температуре 750 °C с увеличением содержания Mo от 6 до 17 мас. %. Оптимальным содержанием молибдена является 10 %, с учетом сохранения γ -фазы. Снижение скорости взаимодействия обусловлено уменьшением коэффициента взаимной диффузии в γ -фазе в сплавах UMo с увеличением содержания молибдена [11]. Аналогичное влияние молибдена на кинетику взаимодействия наблюдается между U-Mo и Al-Be сплавами [12, 13].

На рис. 5 представлена температурная зависимость общей кинетики взаимодействия и кинетики проникновения в сталь.

Для определения энергии активации процесса взаимодействия построена Аррениусовская зависимость $\ln K$ от T^{-1}

$$K_i = K_{i0} \cdot \exp(-E/RT), \quad (4)$$

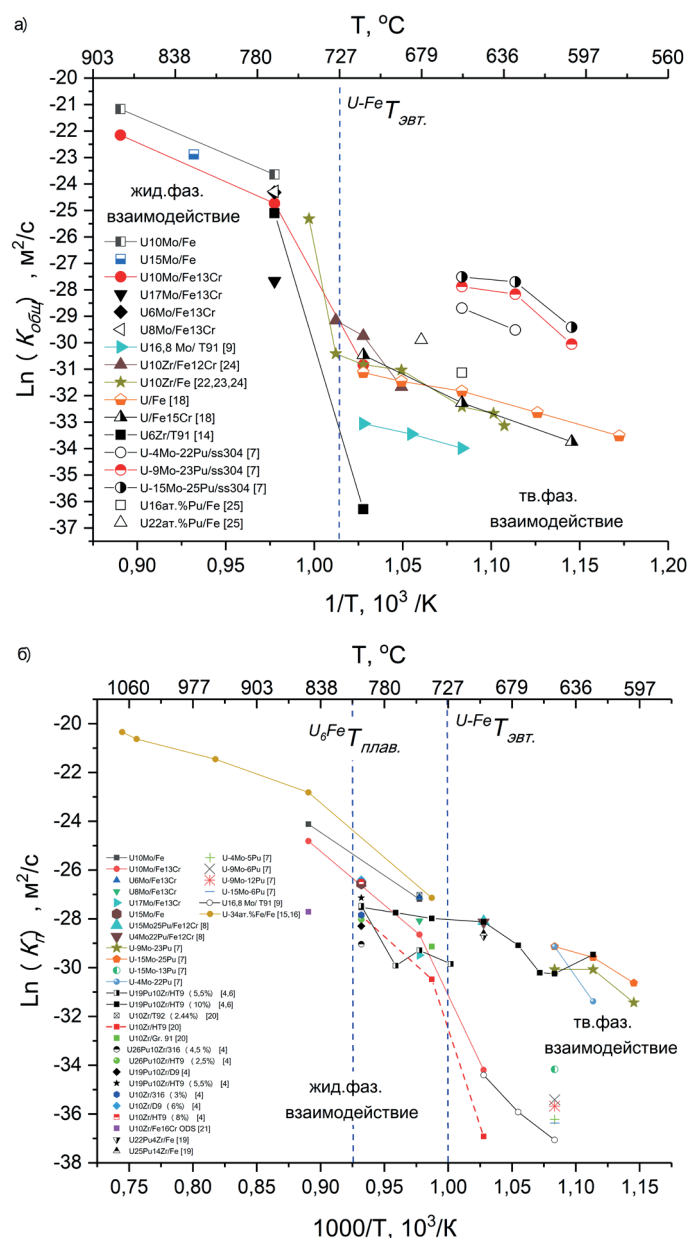


Рис. 5. Зависимость константы общей (а) и проникновения в сталь (б) скорости взаимодействия от температуры, сравнение с литературными данными

где E – энергия активации процесса взаимодействия; R – газовая постоянная; K_0 – предэкспоненциальный множитель.

В табл. 2 приведено сравнение энергии активации и K_0 двух диффузионных пар с литературными данными. В табл. 2 указаны значения, как для всего процесса взаимодействия, так и для процесса проникновения в сталь.

При наличии жидкой фазы наблюдается резкое увеличение скорости проникновения в сталь. Кинетика проникновения в сталь при температуре 700°C по данным для U10Mo/Fe13Cr близка с результатами, полученными в работе [9] U16.8Mo/T91. Из температурной зависимости скорости взаимодействия урановых сплавов со сталями видно, что до температуры эвтектического превращения U-Fe основное влияние оказывает содержание плутония в сплаве. Выше данной температуры можно говорить, что это влияние ослабевает (рис. 5).

Таблица 2. Энергия активации для различных диффузионных пар

Дифф. пара	$E_{\text{общ}},$ кДж/моль	$K_{\text{общ}},$ м ² /с	$E_{\text{п}},$ кДж/моль	$K_{\text{п}},$ м ² /с	$T, ^\circ\text{C}$	Ссылка
U16.8Mo/T91	138	$1.2 \cdot 10^{-7}$	397	$2.1 \cdot 10^6$	650–700	[14]
U-34ат. % Fe/Fe	—	—	220	0.8	740–1070	[15, 16]
U-4Mo-22Pu/SS 304	229	3.2	619	$2.6 \cdot 10^{22}$	625–650	[7]
U-9Mo-23Pu/SS 304	293	$3.95 \cdot 10^4$	184	$2.9 \cdot 10^{-3}$	600–650	[7]
U-15Mo-25Pu/SS 304	256	480	200	$5.5 \cdot 10^{-2}$	600–650	[7]
U10Mo/Fe	236	61	294	1570	750–850	д.р.
U10Mo/Fe13Cr	247	71	366	$1.73 \cdot 10^6$	750–850	д.р.

Сам процесс взаимодействия при температурах выше эвтектического превращения (750°C) можно описать следующим образом. В начальный момент времени происходит взаимная диффузия U и Fe с превалированием диффузии железа в урановый сплав. С увеличением концентрации Fe в урановом сплаве образуется интерметаллид U_6Fe с незначительной растворимостью Mo, что приводит к тому, что Mo диффундирует в прилегающие области, повышая там его концентрацию до 14–15 мас. %. Со стороны стали образуется интерметаллид UFe_2 и на границе UFe_2 и U_6Fe появляется зародыш жидкой фазы.

Поэтапный процесс растворения сплава урана и стали приводит к росту слоя жидкой зоны. При достижении некоторой толщины эффект перемешивания нарушается, и массоперенос от одной межфазной границы к другой становится существенным фактором протекания процесса в целом. Массоперенос осуществляется по диффузионному механизму, так как в прослойке жидкой фазы возникает «диффузионный профиль» концентрации от C_{U}^{II} (рис. 6) у одной межфазной границы до меняющейся во времени C_{U} у другой.

В асимптотическом пределе у данной межфазной границы достигает равновесное значение концентрации C_{U}^{I} , что означает окончание кинетической стадии процесса растворения и наступление квазиравновесного процесса взаимной диффузии через жидкую прослойку.

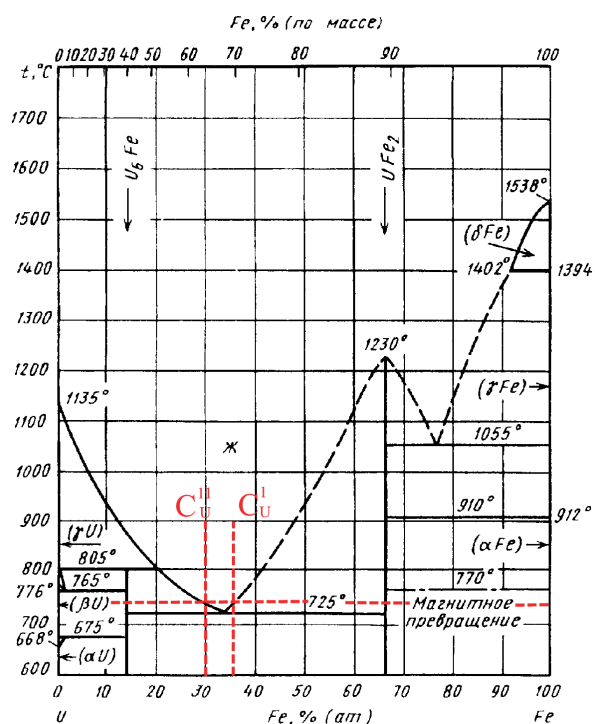


Рис. 6. Диаграмма состояния U-Fe [17]

Основные выводы

Увеличение температуры отжига выше эвтектического превращения в системе U-Fe приводит к смене характера диффузии с объемного на зернограничный, наблюдается появление жидкой фазы, которая при охлаждении закристаллизовалась в эвтектику, а также нового интерметаллида μ .

Результаты исследования влияния содержания молибдена в сплаве урана на кинетику роста взаимодействия с Fe-Cr показали, что легирование урана молибденом до 17 мас.% приводит к линейному снижению скорости роста слоя взаимодействия ($K_{\text{общ}}$) с коррозионнотойкими сталями, а $K_{\text{п}}$ экспоненциально снижается с увеличением содержания молибдена при температуре 750 °С, что обусловлено увеличением энергии активации взаимной диффузии при увеличении содержания молибдена в сплаве U-Mo. Оптимальным содержанием молибдена является 8–10 %, с учетом сохранения γ -фазы. $K_{\text{п}}$ уменьшается в 10 раз, $K_{\text{общ}}$ уменьшается в 30 раз при температуре 750 °С с увеличением содержания Mo от 6 до 17 мас. %.

На основе результатов исследования структурно-фазового состояния слоя взаимодействия между сплавами урана и сталями различного состава построены тройные диаграммы состояний сплавов систем U-Mo-Fe и U-Mo-Fe(Cr) при температурах 750 °С.

Финансирование

Авторы заявляют об отсутствии источников финансирования.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Вклад авторов

С.Н. Никитин – выполнение измерений, анализ экспериментальных данных, выявление закономерностей, подбор литературных источников, подготовка текста статьи.

Б.А. Тарасов – участие в проведении исследования и обсуждении результатов, редактирование текста статьи.

Д.П. Шорников – участие в проведении исследования и обсуждении результатов; редактирование текста статьи.

А.С. Юрлова – обсуждение результатов, подготовка текста статьи, редактирование текста статьи.

Список литературы

1. Ogata T. Metal Fuel // Comprehensive Nuclear Materials, 2012. V. 3. P. 1–40. DOI: 10.1016/b978-0-08-056033-5.00049-5.
2. Maershin A.A., Tsykanov V.A., Gadzhiev G.I., Golovchenko Yu.M., Korol'kov A.S., Golovanov V.N., Skiba O.V., Efimov V.N., Vaganov I.V., Kislyi V.A., Kosulin N.S., Teikovtsev A.A., Syuzev V.N., Shirokova N.I. Experience in Testing Promising Fuel Compositions in BOR60 // Atomic Energy, 2001. V. 91 (5). P. 385–389.
3. Kim Y. S., Hofman G.L., Yacout A.M., Kim T.K. U–Mo alloy fuel for TRU-burning advanced fast reactors // Journal of Nuclear Materials, 2013. V. 441. P. 520–524.
4. Hofman G.L., Walters L.C., Bauer T.H. Metallic Fast Reactor Fuels // Progress in Nuclear Energy, 1997. V. 31. P. 83–110.
5. Shornikov D.P., Baranov V.G., Nikitin S.N., Tarasov B.A. Application of powder metallurgy for metal nuclear fuel manufacturing // Tsvetnye Metally, 2015. V. 10. P. 85–89.
6. Cohen A.B., Tsai H., Neimark L.A. Fuel/cladding compatibility in U-19Pu-10Zr/HT9-clad fuel at elevated temperatures // Journal of Nuclear Materials, 1993. V. 204. P. 244–251.
7. Poole D.M., Critcheley J.K., Davidson J.A.C., French P.M., Hodkin E.N., Notley M.J.F. Properties of some plutonium fuel // Plutonium 1960. (Mackenzie R.C., Ed.). London: CleverHume Press, 1961. P. 627.
8. Aitkaliyeva A., Madden J.W., Miller B.D., Papesch C.A., Cole J.I. Characterization of phases formed between U-Pu-Mo fuels and Fe-12Cr cladding // Journal of Nuclear Materials Intermetallics, 2015. Vol. 464. P. 28–35.
9. Chakraborty S., Choudhuri G., Banerjee J., Agarwal R., Kumar A. Fuel clad chemical interaction of U-Mo fast reactor fuel // Journal of Nuclear Materials, 2019. V. 516. P. 1–10.

10. Nikitin S.N., Tarasov B.A., Shornikov D.P., Baranov V.G. Interaction UMo fuel with Fe and FeCr // IOP Conf. Series: Mater. Sci. and Eng., 2016. V. 130 (1). 012023.
11. Adda Y., Philibert J. The Kirkendall effect and the determination of the coefficients of intrinsic and chemical diffusion in the uranium-molybdenum couple // Compt. Rend. 1958. V. 246. 13 p.
12. Nikitin S.N., Tarasov B.A., Shornikov D.P. Interaction between U-Mo alloys and alloys Al-Be // Physics Procedia, 2015. V. 72. P. 370–373.
13. Nikitin S.N., Tarasov B.A., Shornikov D.P., Baranov V.G. Development and investigation of properties of structural materials. based on aluminum-beryllium alloys for disperse nuclear fuel // Tsvetnye Metally, 2015. V. 8. P. 66–70.
14. Kaity S., Kutty T.R.G., Agarwal R., Laik A., Kumar A. Chemical compatibility of uranium based metallic fuels with T91 cladding // Nuclear Engineering and Design, 2012. V. 250. P. 267–276.
15. Walter C.M., Kelman L.R. Penetration rate studies of stainless steel by molten uranium and uranium-fissium alloy // Journal of Nuclear Materials, 1962. V. 6. Iss.3. P. 281–290.
16. Walter C.M., Kelman L.R. The interaction of iron with molten uranium // Journal of Nuclear Materials, 1966. V. 20. Iss. 3. P. 314–322.
17. Баранов В.Г., Годин Ю.Г., Тенишев А.В., Хлунов А.В., Новиков В.В. Ядерные топливные материалы. М.: НИЯУ МИФИ, 2021. Т 7. Изд. 3-е, перераб. 640 с.
18. Huang K., Park Y., Zhou L., Coffey K.R., Sohn Y.H., Sencer B.H., Kennedy J.R. Effects of Cr and Ni on interdiffusion and reaction between U and Fe–Cr–Ni alloys // Journal of Nuclear Materials, 2014. V. 451. P. 372–378.
19. Aitkaliyeva A., Madden J.W., Miller B.D., Papesch C.A., Cole J.I. TEM examination of phases formed between U–Pu–Zr fuel and Fe // Journal of Nuclear Materials, 2015. V. 467. (2). P. 717–723.
20. Kim J.H., Cheon J.S., Lee B.O., Kim J.H., Kim H., Yoo B., Jung Y.H., Ahn S.B., Lee C. Results of High-Temperature Heating Test for Irradiated U-10Zr(-5Ce) with T92 Cladding Fuel // Metals, 2016. V. 6. Iss.11. 278. DOI: 10.3390/met6110278.
21. Ohtsuka S., Kaito T., Ukai S., Inoue M., Okuda T., Kimura A. High temperature reaction tests between high-Cr ODS ferritic steels and U–Zr metallic fuel // Journal of Nuclear Materials, 2013. V. 441. P. 286–292.
22. Ogata T., Kurata M., Nakamura K., Akabori M., Itoh A. Reactions between U–Zr alloys and Fe at 923 K // Journal of Nuclear Materials, 1997. V. 250. P. 171–175.
23. Ogata T., Nakamura K., Itoh A., Akabori M. Reactions between U–Zr alloys and Fe at 1003 K // Journal of Nuclear Materials, 2013. V. 441. (1–3). P. 579–582.
24. Nakamura K., Kurata M., Ogata T., Itoh A., Akabori M. Reaction of U–Zr alloy with Fe and Fe–Cr // Journal of Nuclear Materials, 1999. V. 275. P. 246–254.
25. Nakamura K., Ogata T., Kurata M., Yokoo T., Mignanelli M.A. Reactions of uranium-plutonium alloys with iron // Journal of Nuclear Science and Technology, 2001. V. 38. № 2. P. 112–119.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2025, vol. 14, no. 4, pp. 279–290

The effect of molybdenum on the interaction of uranium-molybdenum alloys with iron and corrosion-resistant steel

S. N. Nikitin[✉], B. A. Tarasov, D. P. Shornikov, A. S. Yurlova

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409, Russia
[✉] mephi200809@yandex.ru

Received April 28, 2025; revised June 26, 2025; accepted July 8, 2025

The paper presents the results of studying the interaction of uranium-molybdenum alloys with corrosion-resistant steels in non-reactor diffusion experiments at temperatures of 700–850 °C. A solid-phase interaction is observed in the U10Mo/Fe13Cr diffusion pair at an annealing temperature of 700 °C. An increase in the annealing temperature above the eutectic transformation in the U-Fe system leads to a change in the diffusion pattern from bulk to grain boundary. The appearance of a liquid phase is

observed, which crystallized into eutectic upon cooling. The growth rate of the interaction layer for diffusion pairs is described by a parabolic law. The results of the study of the effect of the molybdenum content in the uranium alloy on the kinetics of the growth of the interaction with Fe-Cr showed that the alloying of uranium with molybdenum up to 17 wt. % leads to a linear decrease in the growth rate of the entire interaction layer (K_{tot}) with corrosion-resistant steels, and the growth rate constant of the interaction layer in steel (K_p) decreases exponentially with an increase in the molybdenum content at a temperature of 750 °C, due to a decrease in the mutual diffusion coefficient in the U-Mo system with an increase in the molybdenum content. K_p decreases by 10 times, K_{tot} decreases by 30 times at a temperature of 750 °C with an increase in the Mo content from 6 to 17 wt. %. Based on the results of the study of the structural and phase state of the interaction layer between uranium alloys and steels of various compositions, triple diagrams of the states of alloys of the following systems U-Mo-Fe, U-Mo-Fe(Cr), at temperatures of 750 °C.

Keywords: uranium-molybdenum alloy, fuel-cladding interaction, compatibility, corrosion-resistant steels, interaction kinetics

References

1. Ogata T. Metal Fuel. Comprehensive Nuclear Materials, 2012. Vol. 3.01. Pp. 1–40. DOI: 10.1016/b978-0-08-056033-5.00049-5.
2. Maershin A.A., Tsykanov V.A., Gadzhiev G.I., Golovchenko Yu.M., Korol'kov A.S., Golovanov V.N., Skiba O.V., Efimov V.N., Vaganov I.V., Kislyi V.A., Kosulin N.S., Teikovtsev A.A., Syuzev V.N., Shirokova N.I. Experience in Testing Promising Fuel Compositions in BOR60. Atomic Energy. 2001. Vol. 91 (5). Pp. 385–389.
3. Kim Y. S., Hofman G.L., Yacout A.M., Kim T.K. U-Mo alloy fuel for TRU-burning advanced fast reactors. Journal of Nuclear Materials, 2013. Vol. 441. Pp. 520–524.
4. Hofman G.L., Walters L.C., Bauer T.H. Metallic Fast Reactor Fuels. Progress in Nuclear Energy, 1997. Vol. 31. Pp. 83–110.
5. Shornikov D.P., Baranov V.G., Nikitin S.N., Tarasov B.A. Application of powder metallurgy for metal nuclear fuel manufacturing. Tsvetnye Metally, 2015. Vol. 10. Pp. 85–89.
6. Cohen A.B., Tsai H., Neimark L.A. Fuel/cladding compatibility in U- 19Pu-10Zr/HT9-clad fuel at elevated temperatures. Journal of Nuclear Materials, 1993. Vol. 204. Pp. 244–251.
7. Poole D.M., Critcheley J.K., Davidson J.A.C., French P.M., Hodkin E.N., Notley M.J.F. Properties of some plutonium fuel. Plutonium 1960. (Mackenzie R.C., Ed.), London: CleverHume Press, 1961. Pp. 627.
8. Aitkaliyeva A., Madden J.W., Miller B.D., Papesch C.A., Cole J.I. Characterization of phases formed between U-Pu-Mo fuels and Fe-12Cr cladding. Journal of Nuclear Materials Intermetallics, 2015. Vol. 464. Pp. 28–35.
9. Chakraborty S., Choudhuri G., Banerjee J., Agarwal R., Kumar A. Fuel clad chemical interaction of U-Mo fast reactor fuel. Journal of Nuclear Materials, 2019. Vol. 516. Pp. 1–10.
10. Nikitin S.N., Tarasov B.A., Shornikov D.P., Baranov V.G. Interaction UMo fuel with Fe and FeCr. IOP Conf. Series: Mater. Sci. and Eng., 2016. Vol. 130 (1). 012023.
11. Adda Y., Philibert J. The Kirkendall effect and the determination of the coefficients of intrinsic and chemical diffusion in the uranium-molybdenum couple. Compt. Rend., 1958. Vol. 246. 13 p.
12. Nikitin S.N., Tarasov B.A., Shornikov D.P. Interaction between U-Mo alloys and alloys Al-Be. Physics Procedia, 2015. Vol. 72. Pp. 370–373.
13. Nikitin S.N., Tarasov B.A., Shornikov D.P., Baranov V.G. Development and investigation of properties of structural materials. based on aluminum-beryllium alloys for disperse nuclear fuel. Tsvetnye Metally, 2015. Vol. 8. Pp. 66–70.
14. Kaity S., Kutty T.R.G., Agarwal R., Laik A., Kumar A. Chemical compatibility of uranium based metallic fuels with T91 cladding. Nuclear Engineering and Design, 2012. Vol. 250. Pp. 267–276.
15. Walter C.M., Kelman L.R. Penetration rate studies of stainless steel by molten uranium and uranium-fissium alloy. Journal of Nuclear Materials, 1962. Vol. 6. Issue 3. Pp. 281–290.
16. Walter C.M., Kelman L.R. The interaction of iron with molten uranium. Journal of Nuclear Materials, 1966. Vol. 20. Iss. 3. Pp. 314–322.
17. Baranov V.G., Godin Yu.G., Tenishev A.V., Khlunov A.V., Novikov V.V. Yadernyye toplivnyye materialy [Nuclear fuel materials]. Moscow, MEPhI Publ., 2021. Vol. 7. 3rd edition, revised. 640 p.
18. Huang K., Park Y., Zhou L., Coffey K.R., Sohn Y.H., Sencer B.H., Kennedy J.R. Effects of Cr and Ni on interdiffusion and reaction between U and Fe–Cr–Ni alloys. Journal of Nuclear Materials, 2014. Vol. 451. Pp. 372–378.
19. Aitkaliyeva A., Madden J.W., Miller B.D., Papesch C.A., Cole J.I. TEM examination of phases formed between U–Pu–Zr fuel and Fe. Journal of Nuclear Materials, 2015. Vol. 467. (2). Pp. 717–723.
20. Kim J.H., Cheon J.S., Lee B.O., Kim J.H., Kim H., Yoo B., Jung Y.H., Ahn S.B., Lee C. Results of High-Temperature Heating Test for Irradiated U-10Zr-(5Ce) with T92 Cladding Fuel. Metals, 2016. Vol. 6. Iss.11. 278. DOI: 10.3390/met6110278.

21. *Ohtsuka S., Kaito T., Ukai S., Inoue M., Okuda T., Kimura A.* High temperature reaction tests between high-Cr ODS ferritic steels and U–Zr metallic fuel. *Journal of Nuclear Materials*, 2013. Vol. 441. pp. 286–292.
22. *Ogata T., Kurata M., Nakamura K., Akabori M., Itoh A.* Reactions between U–Zr alloys and Fe at 923 K. *Journal of Nuclear Materials*, 1997. Vol. 250. Pp. 171–175.
23. *Ogata T., Nakamura K., Itoh A., Akabori M.* Reactions between U–Zr alloys and Fe at 1003 K // *Journal of Nuclear Materials*, 2013. Vol. 441. (1–3). Pp. 579–582.
24. *Nakamura K., Kurata M., Ogata T., Itoh A., Akabori M.* Reaction of U-Zr alloy with Fe and Fe-Cr. *Journal of Nuclear Materials*, 1999. Vol. 275. Pp. 246–254.
25. *Nakamura K., Ogata T., Kurata M., Yokoo T., Mignanelli M.A.* Reactions of uranium-plutonium alloys with iron. *Journal of Nuclear Science and Technology*, 2001. Vol. 38. No. 2. Pp. 112–119.

УДК 535.8+621.3.087.92+621.371.399+681.7.068

Аналоговый оптический тракт с внешней модуляцией и с цифровым выходом для радиосигналов L -диапазона: экспериментальная оценка эффективного числа бит

© 2025 г. М. И. Казьмин, В. А. Небавский, Р. С. Стариков, Д. А. Третьяков, П. А. Черемхин

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

При передаче аналоговых сигналов по оптическим трактам качество сигнала ухудшается вследствие потерь, нелинейных искажений и шумов, что приводит к уменьшению эффективного числа бит в переданном сигнале, подвергнутом аналого-цифровому преобразованию. В настоящей статье представлены результаты экспериментального исследования функционирования сверхширокополосного сверхвысокочастотного аналогового оптического тракта с цифровым выходом. Целью работы является оценка качества передачи сигнала исследуемым трактом с точки зрения цифровых метрик. Выполнено сравнение результатов оцифровки сигнала генератора и этого же сигнала, переданного аналоговым оптическим трактом. При помощи анализа радиочастотных спектров оцифрованных сигналов оценен вклад оптической части системы в изменение качества сигнала. Измерением получено, что уровень нелинейных искажений и шума, вносимый в сигнал оптическим трактом, составил 14.7 дБ, что определяет уменьшение эффективного числа бит в оцифрованном сигнале тракта на 2.44.

Ключевые слова: микроволновая фотоника, радиофотоника, аналоговый оптический тракт, аналого-цифровое преобразование, эффективное число бит.

Введение

Технология передачи радиосигнала по оптоволокну (Radio over Fiber, RoF) [1, 2] находит все более широкое применение при построении радиотехнических систем различного назначения, а также выступает в качестве возможной основы для массовых технологий связи следующего поколения, таких как 5G и 6G [3–5]. Основной схмотехнической единицей RoF-систем является аналоговый оптический тракт (АОТ) [1], который, невосприимчив к электромагнитным помехам, имеет отличную электромагнитную совместимость, обеспечивает работу со сверхширокополосными сигналами. В рамках современных и разрабатываемых приложений важнейшей задачей является оцифровка сигнала АОТ [6].

В данной работе представлен СВЧ АОТ с внешней модуляцией с цифровым выходом, реализованный на базе коммерчески доступных компонентов и оснащенный на выходе платой с широкополосным АЦП. С целью оценки качества передачи сигнала проведено сравнение результатов оцифровки сигналов генератора, подаваемых на вход СВЧ АОТ, и выходных сигналов СВЧ АОТ.

Схема АОТ

Схема исследованного АОТ представлена на рис. 1. В качестве источника оптического излучения используется перестраиваемый по длине волны в $C+L$ диапазоне лазер TWL (Optilab, США). Лазер имеет внешнее устройство питания, управляемое при помощи персонального компьютера. Мощность

✉ М.И. Казьмин: MIKazmin@mephi.ru

Поступила в редакцию: 06.05.2025

После доработки: 22.06.2025

Принята к публикации: 03.07.2025

EDN EIFZKJ

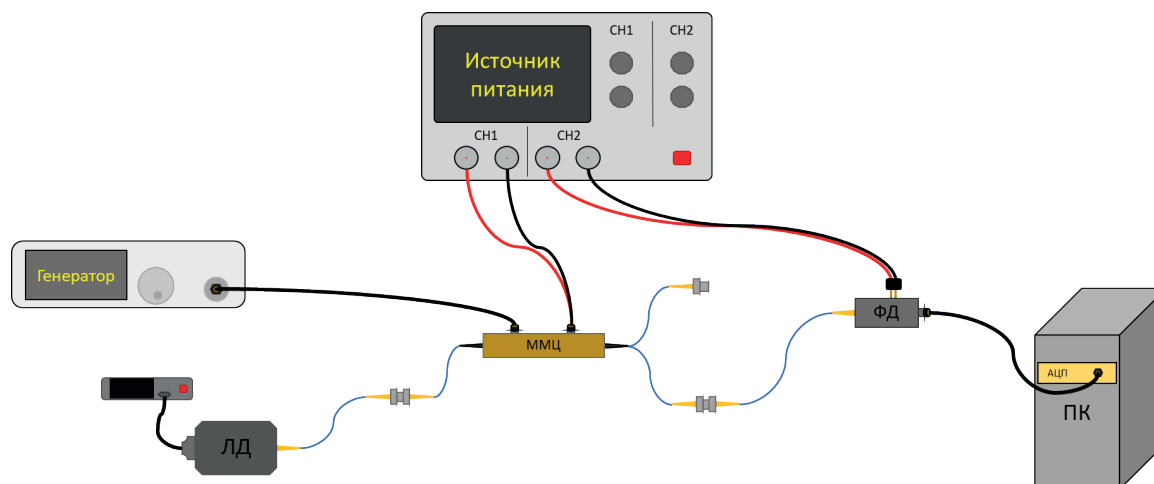


Рис. 1. Схема АОТ с цифровым выходом

излучения лазера – 16 дБм, а длина волны установлена 1550 нм. СВЧ-сигналы подаются на СВЧ-вход электрооптического модулятора Маха – Цендера (ММЦ, Optilab, США, рабочая полоса до 20 ГГц). Управление рабочей точкой ММЦ производится вручную [7] при помощи лабораторного источника питания GPS-73303A (GW Instek, Тайвань), используется точка положительной квадратуры. С выхода ММЦ оптический сигнал поступает на фотодетектор ДФДМШ40-012 (НПФ «Дилаз», Россия, рабочая полоса частот от 10 МГц до 12 ГГц, полоса спектральной чувствительности от 980 до 1650 нм). Фотодектированный сигнал оцифровывается платой АЦП с разрядностью 14 бит. Пример восстановленного сигнала на частоте 500 МГц представлен на рис. 2.

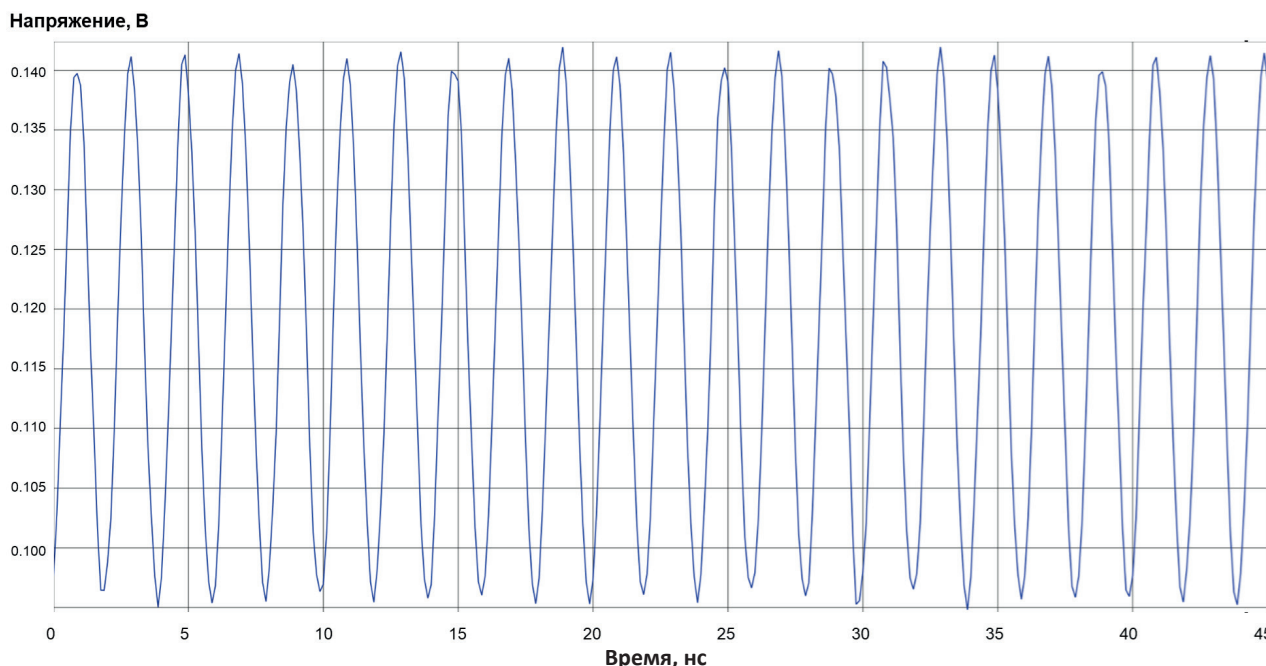


Рис. 2. Восстановленный сигнал АОТ после оцифровки

Описание экспериментов

Для оценки качества оцифровки обычно используются одночастотные, двухчастотные и многочастотные испытания [8, 9]. В рамках данной работы представлены результаты измерений одночастотных испытаний. С их помощью можно оценить такие параметры, как: коэффициент нелинейных искажений (THD – Total Harmonic Distortion), динамический диапазон, свободный от паразитных составляющих (SFDR – Spurious-Free Dynamic Range), отношение сигнал/шум (SNR – signal-to-noise ratio), отношение

сигнал/шум и коэффициент искажения ($SINAD$ – signal-to-noise and distortion ratio), эффективное число бит ($\mathcal{E}ЧБ$, $ENOB$ – effective number of bits).

Для проведения одночастотных испытаний СВЧ-АОТ с цифровым выходом использован тестовый синусоидальный сигнал, формируемый генератором N5181A (Agilent, США). Рабочий диапазон частот генератора 100 кГц – 6 ГГц, диапазон мощности сигнала генератора от –110 до 17 дБм. Сигнал генератора подавался на СВЧ-вход электрооптического модулятора Маха – Цендера (ММЦ), как показано на рис. 1. Результат оцифровки выходного сигнала АОТ записывается на диск персонального компьютера (рис. 3). Также для оценки характеристик исследуемого АОТ тестовый сигнал генератора оцифровывался напрямую, как показано на рис. 4.

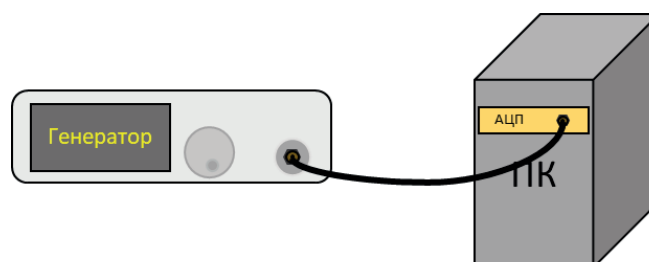


Рис. 3. Подключение генератора к плате АЦП

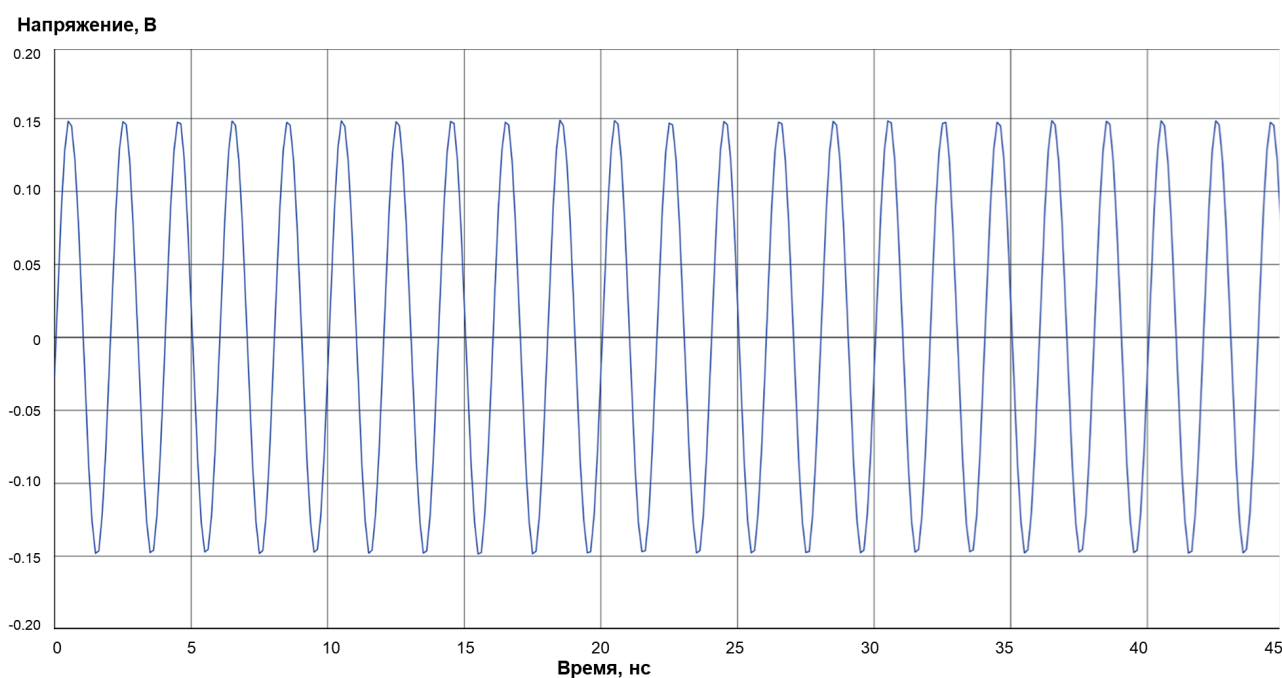


Рис. 4. Восстановленный сигнал генератора после оцифровки

Результаты измерений

С помощью дискретного преобразования Фурье рассчитывались спектры мощности оцифрованных сигналов. По спектрам определялись SNR и $SINAD$, а также рассчитывалось $ENOB$ ¹:

$$ENOB = \frac{SINAD - 1.76}{6.02}, \quad (1)$$

¹ IEEE Standard for Terminology and Test Methods for Analog-to-Digital Converters, IEEE Std 1241–2010, Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2010.

$$SINAD[dB] = 10 \lg \left(\frac{P_{signal}}{\sum_{i \neq 0, signal} P_i} \right), \quad (2)$$

здесь P_{signal} – мощность сигнальной составляющей в полученном дискретном спектре Фурье, P_i – мощности других составляющих спектра, включающие шумовые, собственные и нелинейные составляющие системы.

На рис. 5 представлены примеры спектров сигналов, в этом случае снижение ENOB составило 2.44.

Коэффициент передачи для сигнала с частотой 500 МГц составил 19.43 дБ, что эквивалентно потере ENOB в 3.22 бита. Аналогичные измерения проводились для сигналов других частот в пределах L -диапазона.

Измерения подтверждают известный факт, заключающийся в том, что основным источником снижения ENOB является уменьшение SNR-системы вследствие потери мощности полезного сигнала. Отличия

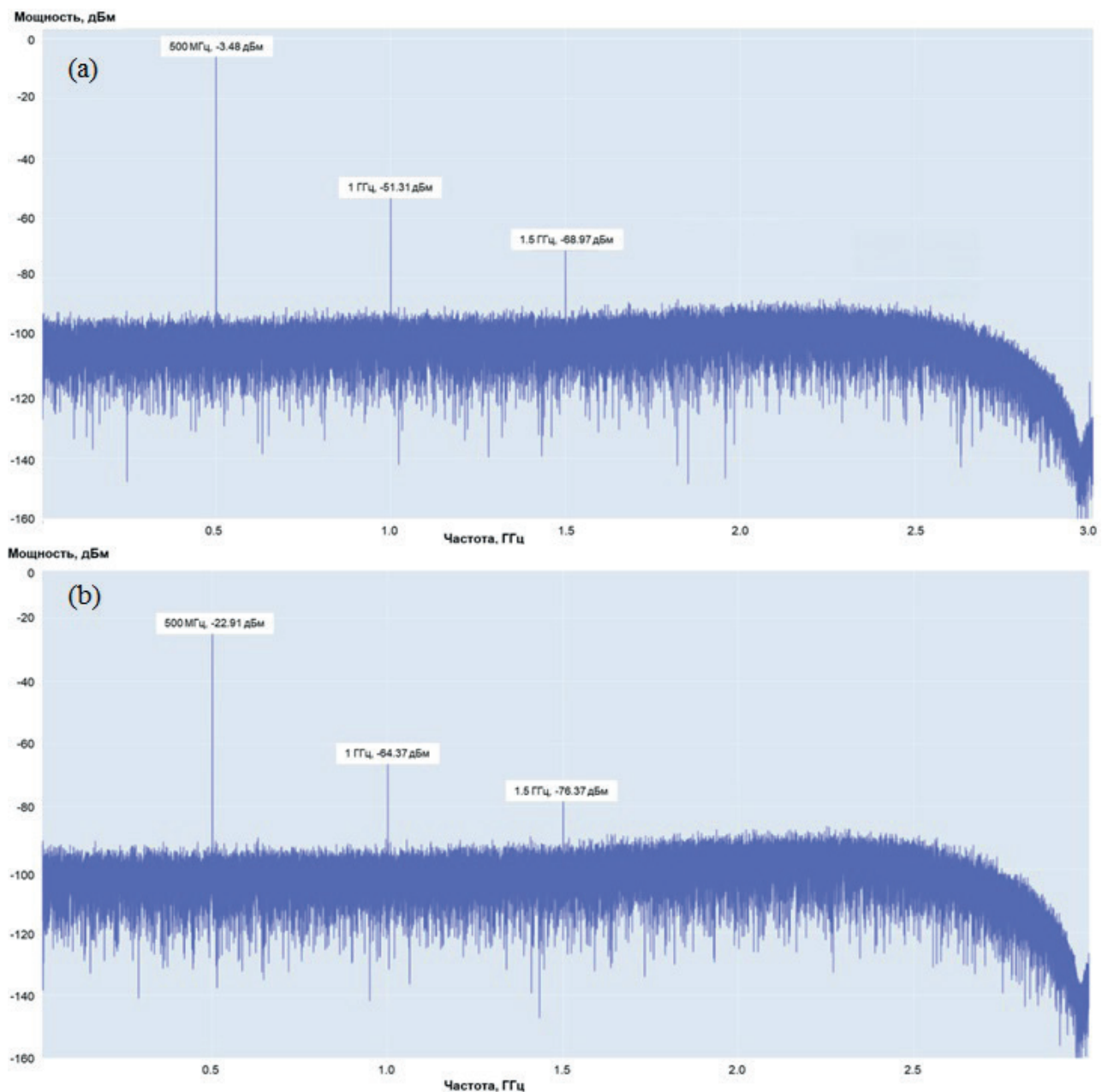


Рис. 5. Фурье-спектры мощности оцифрованных синусоидальных сигналов с частотой 500 МГц: а) генератора; б) АОТ

же ожидаемого изменения $ENOB$ из-за потерь СВЧ-мощности и измеренного могут быть обусловлены следующими причинами:

- отклонением от оптимальных условий дискретизации и квантования при оцифровке;
- температурным дрейфом рабочей точки ММЦ;
- особенностями шумов используемых образцов лазера и фотодетектора;
- влиянием перекрестных искажений собственных частот платы оцифровки.

Выводы

Реализован сверхширокополосный аналоговый оптический тракт с внешней модуляцией с цифровым выходом, обеспечивающий передачу сигналов L -диапазона и их аналого-цифровое преобразование. Эксперименты показали, что для построенного тракта, для сигнала малой мощности, основной причиной уменьшения эффективного числа бит на выходе являются потери мощности фундаментальной составляющей. Эффективное число бит переданного сигнала сокращается на 2.44 по сравнению с передаваемым. Число эффективных бит может быть увеличено путем повышения мощности используемых сигналов при поиске оптимума между влиянием шума и нелинейных искажений. В представленных в данной работе экспериментах влияние нелинейных искажений незначительное. Для повышения эффективного числа бит требуются также более точный контроль рабочей точки модулятора Маха – Цендера и оптимизация параметров оцифровки.

Финансирование

Исследование выполнено в рамках работ по программе «Приоритет-2030».

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Вклад авторов

М.И. Казьмин – формулировка идеи и целей исследования, постановка задачи, выбор методов исследования, постановка эксперимента, выполнение измерений, анализ экспериментальных и теоретических данных, участие в обсуждении результатов, редактирование текста статьи.

В.А. Небавский – разработка математической модели, выполнение измерений, анализ экспериментальных и теоретических данных, подбор литературных источников, участие в обсуждении результатов, редактирование текста статьи.

Р.С. Стариков – анализ экспериментальных и теоретических данных, участие в обсуждении результатов, редактирование текста статьи.

Д.А. Третьяков – анализ экспериментальных и теоретических данных, участие в обсуждении результатов, редактирование текста статьи;

П.А. Черемхин – формулировка идеи и целей исследования, постановка задачи, участие в обсуждении результатов.

Список литературы

1. Cox III C.H. Analog Optical Links: Theory and Practice. Cambridge University Press, 2004. DOI: 10.1017/CBO9780511536632.
2. Urick V.J., McKinney J. D., Williams K.J. Fundamentals of microwave photonics (Urick/Fundamentals of Microwave Photonics). Wiley & Sons, 2015. DOI: 10.1002/9781119029816.
3. Chen N., Okada M. Toward 6G Internet of Things and the Convergence With RoF System // IEEE Internet of Things Journal, 2021. V. 8. № 11. P. 8719–8733. DOI: 10.1109/JIOT.2020.3047613.
4. Yang H., Tian W., Li J., Chen Y. Multi-Band Analog Radio-over-Fiber Mobile Fronthaul System for Indoor Positioning, Beamforming, and Wireless Access // Sensors, 2025. V. 25. № 7. P. 2338. DOI: 10.3390/s25072338.

5. Sung M., Kim S., Kim E. S., Moon S.R., Kim M. et al. Photonic THz Communications Based on Radio-Over-Fiber Technology for 6G Mobile Network: Design and Opportunity // IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics, 2023. Vol. 29. № 5. P. 1–11. DOI: 10.1109/JSTQE.2023.3308899.
6. Hoff M.T., Ralph S.E., Stevens R.C. Optical Signal Transport on Aerospace Platforms: Analog vs. Digital Links // IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, 2025. DOI: 10.1109/MAES.2025.3554480.
7. Fu Y., Zhang X., Hraimel B., Liu T., Shen D. Mach-Zehnder: A Review of Bias Control Techniques for Mach-Zehnder Modulators in Photonic Analog Links // IEEE Microwave Magazine, 2013. V. 14. № 7. P. 102–107. DOI: 10.1109/MMM.2013.228033.
8. Walden R. Analog-to-digital converter survey and analysis // IEEE J. Sel. Areas Commun., 1999. V. 17. P. 539–550.
9. Walden R. Analog-to-digital conversion in the early twenty-first century / The Wiley Encyclopedia of Computer Science and Engineering. John Wiley & Sons Inc., New York, 2008. P. 126–138.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2025, vol. 14, no. 4, pp. 291–297

Analog optical link with external modulation and digital output for *L*-band signals: experimental evaluation of the effective number of bits

M. I. Kazmin , V. A. Nebavskiy, R. S. Starikov, D. A. Tretyakov, P. A. Cheremkhin

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409, Russia

 MIKazmin@mephi.ru

Received May 06, 2025; revised June 22, 2025; accepted July 03, 2025

When transmitting analog signals through optical link, the signal quality deteriorates due to losses, nonlinear distortions, and noise, leading to a reduction in the effective number of bits in the transmitted signal subjected to analog-to-digital conversion. The paper presents the results of an experimental study on the operation of a ultra-wideband ultra-high-frequency analog optical channel with a digital output. The aim of the work is to assess the signal transmission quality of the studied channel in terms of digital metrics. A comparison of the digitization results of the generator signal and the same signal transmitted through the analog optical link has been performed. By analyzing the radio frequency spectra of the digitized signals, the contribution of the optical part of the system to the change in signal quality has been evaluated. Measurements have shown that the level of nonlinear distortions and noise introduced into the signal by the optical channel was 14.7 dB, which is equivalent to a reduction in the effective number of bits by 2.44, primarily due to power losses in the optical part.

Keywords: microwave photonics, radio-over-fiber, analog optical link, analog-to-digital conversion, effective number of bits.

Reference

1. Cox III C.H. Analog Optical Links: Theory and Practice. Cambridge University Press, 2004. DOI: 10.1017/CBO9780511536632.
2. Urick V.J., McKinney J. D., Williams K.J. Fundamentals of microwave photonics (Urick/Fundamentals of Microwave Photonics). Wiley & Sons, 2015. DOI: 10.1002/9781119029816.
3. Chen N., Okada M. Toward 6G Internet of Things and the Convergence With RoF System. IEEE Internet of Things Journal, 2021. Vol. 8. No. 11. Pp. 8719–8733. DOI: 10.1109/JIOT.2020.3047613.
4. Yang H., Tian W., Li J., Chen Y. Multi-Band Analog Radio-over-Fiber Mobile Fronthaul System for Indoor Positioning, Beamforming, and Wireless Access. Sensors, 2025. Vol. 25. No. 7. Pp. 2338. DOI: 10.3390/s25072338.

5. Sung M., Kim S., Kim E. S., Moon S.R., Kim M. et al. Photonic THz Communications Based on Radio-Over-Fiber Technology for 6G Mobile Network: Design and Opportunity. IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics, 2023. Vol. 29. No. 5. Pp. 1 – 11. DOI: 10.1109/JSTQE.2023.3308899.
6. Hoff M.T., Ralph S.E., Stevens R.C. Optical Signal Transport on Aerospace Platforms: Analog vs. Digital Links. IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, 2025. DOI: 10.1109/MAES.2025.3554480.
7. Fu Y., Zhang X., Hraimel B., Liu T., Shen D. Mach-Zehnder: A Review of Bias Control Techniques for Mach-Zehnder Modulators in Photonic Analog Links. IEEE Microwave Magazine, 2013. Vol. 14. No. 7. Pp. 102 – 107. DOI: 10.1109/MMM.2013.228033.
8. Walden R. Analog-to-digital converter survey and analysis. IEEE J. Sel. Areas Commun., 1999. Vol. 17. Pp. 539 – 550.
9. Walden R. Analog-to-digital conversion in the early twenty-first century / The Wiley Encyclopedia of Computer Science and Engineering. John Wiley & Sons Inc., New York, 2008. Pp. 126 – 138.

УДК 517.9

Уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса с нелинейным источником: редукция, тест Пенлеве, первые интегралы и аналитические решения

© 2025 г. Н. А. Кудряшов

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

Изучается уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса с нелинейным источником. Задача Коши для этого уравнения в общем случае не решается методом обратного преобразования рассеяния. Однако уравнение допускает группу преобразований сдвига по независимым переменным и поэтому рассматривается с учетом переменных бегущей волны. Для исследования аналитических свойств нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения применяются три шага теста Пенлеве. Показано, что в общем случае уравнение не проходит тест Пенлеве. Из анализа существования ряда Лорана для общего решения дифференциального уравнения получены условия на параметры математической модели, при которых уравнение проходит тест Пенлеве, и, следовательно, выполняются необходимые условия существования общего решения для четырех случаев нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения. Принимая во внимание значения индексов Фукса, найден первый интеграл соответствующего нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения. Показано, что общие решения одного из нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений выражаются через эллиптическую функцию Вейерштрасса, а решения другого уравнения имеют решения, представимые через трансценденты первого уравнения Пенлеве при определенных ограничениях на параметры уравнения. Обсуждается взаимосвязь между тестом Пенлеве и специальными методами нахождения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений. Специальные методы используются для построения аналитических решений с одной и двумя произвольными постоянными. Получены точные решения с двумя произвольными постоянными, выраженными через эллиптическую функцию Вейерштрасса. С помощью метода логистических функций найдены точные решения уравнения Кортевега – де Вриза – Бюргерса с нелинейным источником с одной произвольной постоянной. Показано, что семейство уравнений, для которых найдены точные решения, значительно расширяется в случае использования специальных методов.

Ключевые слова: уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса с нелинейным источником, переменные бегущей волны, общее решение, эллиптическая функция Вейерштрасса, первое уравнение Пенлеве, метод простейших уравнений, точные решения.

Введение

В работе рассматривается обобщенное уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса с нелинейным источником в виде

$$u_t + buu_x + u_{xx} = \mu u_{xx} + \alpha u + \beta u^2, \quad (1)$$

где $u = u(x, t)$ – функция, описывающая распространение возмущения в нелинейной среде, зависящая от независимых переменных x и t .

✉ Н.А. Кудряшов: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию: 01.07.2025

После доработки: 14.07.2025

Принята к публикации: 22.07.2025

EDN FTZRKZ

В случае $\mu = \alpha = \beta = 0$ уравнение (1) является знаменитым уравнением Кортевега – де Вриза, полученным в статье [1], для того чтобы объяснить уединенные волны на воде, наблюдаемые впервые английским кораблестроителем Джоном Скотт Расселом в 1834 г. [2]. Открытие солитона в 1965 году [3], описываемое уравнением Кортевега – де Вриза, привлекло огромное внимание к исследованию свойств этого уравнения, что привело два года спустя к открытию нового метода решения задачи Коши для нелинейных уравнений в частных производных, который в настоящее время известен во всем мире как метод обратной задачи рассеяния [4].

Полагая $\mu \neq 0$ и $\alpha = \beta = 0$, получаем уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса, которое описывает более широкий класс волновых физических процессов, но с математической точки зрения является менее интересным, чем уравнение Кортевега – де Вриза. В течение долгого времени исследователи полагали, что это уравнение не имеет вообще никаких аналитических решений кроме тривиальных. Однако это мнение оказалось неверным, аналитические решения этого уравнения в переменных бегущей волны были получены в работе 1988 г. [5]. Позже эти решения уравнения Кортевега – де Вриза – Бюргерса были получены во многих других работах (см., например, статьи [6–17]).

Если пренебречь производной третьего порядка u_{xxx} и конвективным выражением uu_x в уравнении (1), то уравнение становится знаменитым уравнением Фишера [18], которое широко используется при описании процессов в популяционной генетике и в ряде других научных дисциплин (см., например, работы [19–27]).

В данной работе мы рассматриваем уравнение (1), как обобщение уравнения Фишера с учетом влияния процессов дисперсии и конвекции. Мы покажем, что это уравнение (1) в переменных бегущей волны имеет четыре набора параметров, при которых оно может иметь общее решение с тремя линейно независимыми произвольными постоянными.

Очевидно, что уравнение (1) допускает группу преобразований сдвига по независимым переменным x и t , и поэтому решение этого уравнения можно искать, используя переменные бегущей волны.

Цель данной статьи состоит в нахождении общего решения уравнения (1) в переменных бегущей волны с тремя произвольными постоянными.

Для того чтобы найти аналитические решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, полученного из уравнения (1), мы применим исследование аналитических свойств с помощью теста Пенлеве, которое может позволить найти необходимые условия интегрируемости обыкновенного дифференциального уравнения. Используя этот тест, мы определим значения параметров, при которых исходное уравнение (1) в переменных бегущей волны имеет общее решение. Далее, используя результаты теста Пенлеве, мы получим при дополнительных ограничениях на параметры уравнения первый интеграл уравнения (1) в переменных бегущей волны. Используя первые интегралы, мы найдем общие решения дифференциальных уравнений. Используя метод простейших уравнений, получим также аналитические решения дифференциального уравнения с одной и двумя произвольными постоянными.

Статья состоит из следующих разделов. В разд. 1 для изучения интегрируемости нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения применяется тест Пенлеве. В разд. 2 на основе информации об индексах Фукса, полученных из теста Пенлеве, мы находим первый интеграл дифференциального уравнения. В разд. 3 мы получаем общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (1) при ограничениях на параметры уравнения. Разд. 4 содержит точные решения дифференциального уравнения с двумя произвольными постоянными, полученными из первого интеграла. В разд. 5 и 6, используя метод простейших уравнений, получаем точные решения дифференциального уравнения Кортевега – де Вриза – Бюргерса с нелинейным источником с одной и двумя произвольными постоянными.

1. Применение теста Пенлеве для уравнения Кортевега – де Вриза – Бюргерса с нелинейным источником

Будем искать решение уравнения (1) используя переменные бегущей волны

$$u(x, t) = y(z), \quad z = x - C_0 t. \quad (2)$$

Подставляя (2) в уравнение (1), получаем нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y_{zzz} + 6yy_z - \mu y_{zz} - C_0 y_z - \alpha y - \beta y^2 = 0. \quad (3)$$

В этой статье мы применяем вариант С.В. Ковалевской [28, 29] теста Пенлеве для того, чтобы проверить интегрируемость уравнения (3) с помощью трех шагов [30–34]. Метод Ковалевской является простейшим вариантом теста Пенлеве, позволяющим определить, что общее решение дифференциального уравнения не имеет критических подвижных особых точек. Он состоит в виде локального разложения общего решения в ряд Лорана вблизи подвижной особой точки

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-p}, \quad (4)$$

где z_0 соответствует значению подвижного полюса; p – порядку полюса; a_k – являются коэффициентами разложения общего решения в ряд Лорана (4).

Локальное разложение общего решения (4) уравнения (3) является гипотезой. Однако даже если эта гипотеза выполняется, то представление общего решения в виде (4) не доказывает существования локального разложения общего решения. Чтобы локальное разложение общего решения имело место, ряд Лорана (4) для уравнения (1) должен иметь необходимое число линейно независимых произвольных постоянных. Поскольку уравнение (3) имеет третий порядок, его разложение общего решения в ряд Лорана должно иметь три независимые произвольные постоянные. Одной из произвольных постоянных является z_0 , а две другие произвольные постоянные могут содержаться среди коэффициентов a_k ряда Лорана (4).

На первом шаге алгоритма Ковалевской ищется первый член разложения решения в ряд Лорана (4). Принимая во внимание, что уравнение допускает группу преобразований сдвига $z \rightarrow z' - z_0$ по независимой переменной z и, следовательно, поскольку уравнение (3) является автономным, на первом шаге мы делаем подстановку

$$y(z) = \frac{a_0}{z^p} \quad (5)$$

в уравнение с ведущими членами, полученное из исходного уравнения, а именно

$$y_{zzz} + 6yy_z = 0. \quad (6)$$

На первом шаге применения теста Пенлеве к уравнению (6) мы находим ведущий член общего решения, имеющий значения

$$(a_0, p) = (-2, 2). \quad (7)$$

Из выражения (7) следует, что критических подвижных особых точек нет, и мы можем продолжить изучение аналитических свойств.

На втором шаге теста Пенлеве находятся индексы Функса, соответствующие произвольным постоянным в разложении общего решения в ряд Лорана (4). Один из этих индексов равен $j_1 = -1$. Это значение соответствует произвольному выбору полюса z_0 . Подставляя

$$y(z) = -\frac{2}{z^2} + a_j z^{j-2} \quad (8)$$

в уравнение (6) и приравнявая выражение линейное относительно коэффициента a_j нулю, мы приходим к алгебраическому уравнению

$$(j-4)(j-6)(j+1)z^{j-6}=0. \quad (9)$$

Решив алгебраическое уравнение (9), находим следующие индексы Фукса

$$j_1 = -1, \quad j_2 = 4, \quad j_3 = 6. \quad (10)$$

На третьем шаге теста Пенлеве проверяются произвольные постоянные в разложении решения. С этой целью мы подставляем усеченное разложение решения уравнения в ряд Лорана

$$y = -\frac{2}{z^2} + \frac{a_1}{z} + a_2 + a_3 z + a_4 z^2 + a_5 z^3 + a_6 z^4 + \dots \quad (11)$$

в уравнение (3). Поскольку уравнение (3) является автономным при проведении вычислений, мы снова опускаем в разложении решения значение постоянной z_0 . На этом шаге теста Пенлеве мы хотим убедиться, что коэффициенты разложения a_4 и a_6 будут произвольными постоянными для общего решения уравнения (3).

Последовательно приравнявая выражения при различных степенях z , находим следующие коэффициенты разложения решения в ряд Лорана

$$a_1 = \frac{2\beta}{15} - \frac{2\mu}{5}, \quad (12)$$

$$a_2 = \frac{\mu^2}{150} + \frac{C_0}{6} - \frac{4\beta^2}{225} + \frac{23}{450}\mu\beta, \quad (13)$$

$$a_3 = \frac{\mu^2\beta}{750} - \frac{\alpha}{6} - \frac{\mu^3}{750} - \frac{\beta C_0}{18} - \frac{64}{3375}\mu\beta^2 + \frac{7}{1125}\beta^3. \quad (14)$$

Также получаем, что коэффициент a_4 , соответствующий индексу Фукса $j_2 = 4$, в общем случае не является произвольным. Произвольным он становится только в случае выполнения равенства

$$K_4 = \frac{2}{135}(\mu - 2\beta)(27\alpha + 9\beta C_0 + 3\mu\beta^2 - \beta^3) = 0. \quad (15)$$

Из равенства (15) следует, что коэффициент a_4 будет произвольным если выполняются следующие ограничения на параметры уравнения

$$\mu = 2\beta, \quad (16)$$

или

$$C_0 = \frac{\beta^2}{9} - \frac{\mu\beta}{3} - \frac{3\alpha}{9}. \quad (17)$$

Коэффициент a_5 в результате вычислений получается следующим:

$$a_5 = \frac{\beta^2\alpha}{75} - \frac{11a_4\mu}{15} - \frac{334\beta^5}{759375} - \frac{\mu^5}{112500} - \frac{\mu^2\alpha}{450} - \frac{1}{36}\alpha C_0 + \frac{799\beta^4\mu}{303750} - \frac{4781\beta^3\mu^2}{1215000} + \frac{\beta^3 C_0}{225} + \frac{\beta^2\mu^3}{11250} - \frac{11\beta\mu^4}{45000} - \frac{\beta C_0^2}{216} + \frac{4}{5}\beta a_4 - \frac{53\beta^2\mu C_0}{4050} - \frac{53\beta\alpha\mu}{1350} - \frac{\beta\mu^2 C_0}{1350}. \quad (18)$$

Однако для того чтобы коэффициент a_6 разложения решения в ряд Лорана был произвольным, должно выполняться следующее равенство:

$$\begin{aligned}
 K_6 = & \left(4\beta^2 + 8\mu^2 - \frac{34\beta\mu}{3}\right)a_4 + \frac{\mu^6}{9375} + \frac{97\beta\mu^5}{37500} - \frac{32\beta^2\mu^4}{16875} + \\
 & + \left(\frac{8639\beta^3}{202500} + \frac{7\alpha}{250} + \frac{7\beta C_0}{750}\right)\mu^3 + \left(-\frac{14059\beta^4}{303750} + \frac{461\beta\alpha}{1125} + \frac{461\beta^2 C_0}{3375}\right)\mu^2 + \\
 & + \left(\frac{4241\beta^5}{253125} - \frac{1957\beta^3 C_0}{20250} - \frac{1957\beta^2\alpha}{6750} + \frac{3\alpha C_0}{10} + \frac{\beta C_0^2}{20}\right)\mu - \frac{1526\beta^6}{759375} + \\
 & + \frac{169\beta^4 C_0}{10125} + \frac{169\beta^3\alpha}{3375} + \frac{\beta^2 C_0^2}{90} + \frac{\alpha^2}{3} + \frac{\beta\alpha C_0}{15} = 0.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Для того чтобы уравнение (3) проходило тест Пенлеве, коэффициенты a_4 и a_6 в разложении решения в ряд Лорана должны быть произвольными постоянными. Однако в результате исследований мы получили, что выражения K_4 и K_6 в общем случае не равны нулю, поэтому уравнение (3) в общем случае не проходит тест Пенлеве.

Предполагая, что коэффициент a_4 – произвольный, получаем, что для параметров уравнения (19) должно выполняться следующее ограничение:

$$4\beta^2 + 8\mu^2 - \frac{34\beta\mu}{3} = 0. \tag{20}$$

Решив уравнение (20), находим

$$\mu_1 = \frac{3\beta}{4}, \quad \mu_2 = \frac{2\beta}{3}. \tag{21}$$

Легко заметить, что оба условия (21) противоречат ограничению (16) на параметры μ и β . Таким образом, при дальнейшем анализе учитываем только условия (17) и (21).

Подставляя $\mu = \mu_1$ в уравнение (19), получаем

$$\alpha_{1,2} = \pm \frac{\beta^3}{72}. \tag{22}$$

В этом случае параметр C_0 определяется в соответствии с формулами

$$C_0^{(1)} = -\frac{13\beta^2}{72}, \quad C_0^{(2)} = -\frac{7\beta^2}{72}. \tag{23}$$

Учитывая полученные значения параметров в уравнении (3), имеем два нелинейных дифференциальных уравнения третьего порядка, которые проходят тест Пенлеве:

$$y_{zzz} + 6yy_z - \frac{3\beta}{4}y_{zz} + \frac{13\beta^2}{72}y_z - \frac{\beta^3}{72}y - \beta y^2 = 0, \tag{24}$$

$$y_{zzz} + 6yy_z - \frac{3\beta}{4}y_{zz} + \frac{7\beta^2}{72}y_z + \frac{\beta^3}{72}y - \beta y^2 = 0. \tag{25}$$

В случае $\mu = \mu_2$ получаем следующие значения для параметра α :

$$\alpha_{3,4} = \pm \frac{2\beta^3}{225} \quad (26)$$

и два значения параметра C_0 в виде

$$C_0^{(3)} = -\frac{31\beta^2}{225}, \quad C_0^{(4)} = -\frac{19\beta^2}{225}. \quad (27)$$

При этом мы получаем еще два дополнительных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, которые проходят тест Пенлеве:

$$y_{zzz} + 6yy_z - \frac{2\beta}{3}y_{zz} + \frac{31\beta^2}{225}y_z - \frac{2\beta^3}{225}y - \beta y^2 = 0 \quad (28)$$

и

$$y_{zzz} + 6yy_z - \frac{2\beta}{3}y_{zz} + \frac{19\beta^2}{225}y_z + \frac{2\beta^3}{225}y - \beta y^2 = 0. \quad (29)$$

Таким образом, нашли, что уравнения (24), (25), (28) и (29) проходят тест Пенлеве, и можем надеяться, что они имеют общие решения.

2. Первые интегралы нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, соответствующие уравнению Кортевега – де Вриза – Бюргерса с нелинейным источником

Для того чтобы найти общее решение уравнений (24), (25), (28) и (29), найдем первый интеграл уравнения (3). Поскольку разложения общих решений в ряд Лорана имеют произвольные постоянные a_4 и a_6 , которым можно поставить в соответствие порядки полюсов 4 и 6, первые интегралы уравнения (3) должны иметь те же порядки 4 и 6.

Поэтому будем искать первый интеграл уравнения (3) принимая во внимание следующее выражение с неопределенными коэффициентами:

$$P = B_0 y_{zz} + (B_1 y + B_2) y_z + B_3 y^2 + B_4 y + B_5. \quad (30)$$

Подставляя (30) в уравнение (3), получаем, что все коэффициенты $B_k = 0$ ($k = 0, 1, \dots, 5$). Это показывает, что первого интеграла вида (30) нет.

Однако если мы воспользуемся уравнением

$$P_z - mP = 0, \quad (31)$$

в котором учтем уравнение (3), то после вычислений получим выражения:

$$B_1 = 0, \quad B_2 = \left(\frac{\beta}{3} - \mu\right)B_0, \quad B_3 = 3B_0, \quad B_4 = \frac{3\alpha}{\beta}B_0, \quad B_5 = 0, \quad m = \frac{\beta}{3}. \quad (32)$$

Однако при этом возникает ограничение на параметры C_0 , α и β , которое определяется формулой

$$C_0 = \frac{\beta^2}{9} - \frac{\beta\mu}{3} - \frac{3\alpha}{\beta}. \quad (33)$$

Уравнение (31) имеет решение:

$$P(z) = C_1 \exp(mz), \quad m = \frac{\beta}{3}. \quad (34)$$

Это первый интеграл уравнения (3) с произвольной постоянной C_1 .

При условии (33) мы имеем уравнение (3):

$$y_{zzz} + 6yy_z - \mu y_{zz} - \left(\frac{\beta^2}{9} - \frac{\beta\mu}{3} - \frac{3\alpha}{\beta} \right) y_z - \alpha y - \beta y^2 = 0. \quad (35)$$

Учитывая коэффициенты (32), получаем первый интеграл уравнения (35) в виде

$$y_{zz} + \left(\frac{\beta}{3} - \mu \right) y_z + 3y^2 + \frac{3\alpha}{\beta} y = C_1 \exp\left(\frac{\beta}{3} z \right). \quad (36)$$

Далее используем первый интеграл (36) для построения аналитических решений уравнения (3).

Еще один первый интеграл может быть найден, используя значение индекса Фукса $j_3 = 6$, соответствующий произвольной постоянной a_6 . Из локального разложения решения (11) можно заметить, что постоянной a_6 можно поставить в соответствие порядок полюса 6. Используя это наблюдение, первый интеграл уравнения (3) можно искать в виде

$$Q_z - \lambda Q = 0, \quad (37)$$

где $Q(z)$ – полином с неизвестными коэффициентами

$$Q = E_0 y_z^2 + (E_1 y + E_2) y_{zz} + (E_3 y + E_4) y_z + E_5 y^3 + E_6 y^2 + E_7 y. \quad (38)$$

Поставляя выражение (38) в уравнение (37) и используя (3), после сравнения находим следующие ограничения на коэффициенты полинома (38)

$$E_1 = -2E_0, \quad E_3 = 2(\mu - \lambda)E_0, \quad E_4 = (\lambda - \mu)E_2, \quad E_5 = -4E_0, \quad (39)$$

$$E_6 = \frac{2\mu^2}{9} E_0 + C_0 E_0 + 3E_2, \quad E_7 = -\left(\frac{2\mu^2}{9} + C_0 \right) E_2, \quad (40)$$

$$\mu = \frac{3\beta}{4}, \quad \lambda = \frac{\beta}{2}, \quad E_2 = -\frac{\beta^2}{8} E_0 - C_0 E_0 - \frac{4\alpha}{\beta} E_0.$$

Кроме того находим два условия для постоянной C_0 в виде

$$C_0^{(1,2)} = -\frac{\beta^2}{8} - \frac{3\alpha}{\beta} \mp \frac{\alpha}{\beta_0}. \quad (41)$$

При $C_0 = C_0^{(1)}$ получаем следующий первый интеграл:

$$y_z^2 - 2yy_{zz} + \frac{\beta}{2} yy_z - 4y^3 - \frac{4\alpha}{\beta} y^2 - C_4 \exp\left\{ \frac{\beta}{2} z \right\} = 0 \quad (42)$$

для уравнения (3) в виде

$$y_{zzz} - \frac{3\beta}{4} y_{zz} + 6yy_z + \left(\frac{\beta^2}{8} + \frac{4\alpha}{\beta} \right) y_z - \beta y^2 - \alpha y = 0. \quad (43)$$

В случае $C_0 = C_0^{(2)}$ получаем первый интеграл в виде:

$$y_z^2 - 2y_{zz} \left(y + \frac{\alpha}{\beta} \right) + \frac{\beta}{2} y_z \left(y + \frac{\alpha}{\beta} \right) - 4y^3 - \frac{4\alpha}{\beta} \left(2y + \frac{\alpha}{\beta} \right) y - C_4 \exp \left\{ \frac{\beta}{2} z \right\} = 0 \quad (44)$$

для уравнения (3)

$$y_{zzz} - \frac{3\beta}{4} y_{zz} + \left(\frac{\beta^2}{8} + \frac{2\alpha}{\beta} \right) y_z + 6yy_z - \alpha y - \beta y^2 = 0. \quad (45)$$

Можно заметить, что первые интегралы (42) и (44) для уравнения (3) существуют при $\mu = \mu_1 = \frac{3\beta}{4}$, однако не существуют при $\mu_2 = \frac{2\beta}{3}$. В следующем разделе найдем, что общее решение уравнения (3) находится при $\mu = \mu_1$ через эллиптическую функцию Вейерштрасса, но при $\mu = \mu_2 = \frac{2\beta}{3}$ решение уравнения определяется через трансценденты первого уравнения Пенлеве, для которого нет первого интеграла в полиномиальном виде.

3. Общее решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению Кортевега – де Вриза – Бюргерса с нелинейным источником

Общее решение уравнения (3) будем искать в виде

$$y(z) = \psi(z)W(\xi), \quad \xi = f(z). \quad (46)$$

Используя (46), имеем

$$y_z = \psi_z W + \psi W_\xi f_z, \quad (47)$$

$$y_{zz} = \psi_{zz} W + 2\psi_z W_\xi f_z + \psi W_{\xi\xi} f_z^2 + \psi W_\xi f_{zz}. \quad (48)$$

Подставляя выражения (46)–(48) в уравнение (35), и предполагая, что выполняются соотношения

$$\psi(z) = f_z^2, \quad \xi = f(z) = C_2 + \frac{15}{3\mu - \beta} \exp \left(\frac{3\mu - \beta}{15} z \right), \quad (49)$$

где C_2 – произвольная постоянная, получаем, что при условии

$$\alpha = \frac{2\beta^3}{225} - \frac{4\mu\beta^2}{75} + \frac{2\mu^2\beta}{25}$$

имеем следующее уравнение

$$W_{\xi\xi} + 3W^2 - C_1 \exp\left(\frac{3\beta - 4\mu}{15} z\right) = 0. \quad (50)$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$W_{\xi\xi} + 3W^2 - C_1 \left[\frac{(\xi - C_2)(3\mu - \beta)}{15} \right]^N = 0, \quad N = \frac{3(3\beta - 4\mu)}{3\mu - \beta}. \quad (51)$$

В случае

$$\mu = \mu_1 = \frac{3\beta}{4}$$

имеем $N = 0$, и уравнение (51) принимает вид

$$W_{\xi}^2 + 2W^3 - 2C_1W + 4C_3 = 0. \quad (52)$$

Общее решение уравнения (52) выражается через эллиптическую функцию Вейерштрасса:

$$W(\xi) = -2\wp(\xi; C_1, C_3), \quad \xi = C_2 + \frac{12}{\beta} \exp\left(\frac{\beta}{12} z\right), \quad (53)$$

где функция $\wp(\xi; C_1, C_3)$ является обозначением функции Вейерштрасса.

Используя (47) и (53), получаем общее решение следующего уравнения

$$y_{zzz} + 6yy_z - \frac{3\beta}{4} y_{zz} + \frac{13\beta^2}{72} y_z - \frac{b^3}{72} y - \beta y^2 = 0 \quad (54)$$

в виде

$$y(z) = -2 \exp\left(\frac{\beta}{6} z\right) \wp\left\{C_2 + \exp\left(\frac{\beta}{12} z\right); C_1, C_3\right\}. \quad (55)$$

В случае

$$\mu = \mu_2 = \frac{2}{3} \beta$$

получаем $N = 1$, и уравнение (51) становится хорошо известным первым уравнением Пенлеве в виде

$$W_{\xi\xi} + 3W^2 - \frac{\beta C_1}{15} (\xi - C_2) = 0. \quad (56)$$

Мы нашли, что общее решение $y(z)$ уравнения

$$y_{zzz} + 6yy_z - \frac{2\beta}{3}y_{zz} + \frac{31\beta^2}{225}y_z - \frac{2\beta^3}{225}y - \beta y^2 = 0 \quad (57)$$

с тремя произвольными постоянными определяется через трансценденты первого уравнения Пенлеве в виде

$$y(z) = -\left(\frac{-15}{\beta C_1}\right)^{-2/5} \exp\left(\frac{2\beta}{15}z\right) V\left\{\left(\frac{-15}{\beta C_1}\right)^{-1/5} \exp\left(\frac{\beta}{15}z\right)\right\}, \quad (58)$$

где зависимость $V(\theta)$ обозначает трансценденты первого уравнения Пенлеве

$$V_{\theta\theta} = 3V^2 + \theta. \quad (59)$$

В табл. 1 представлены значения параметров исходного уравнения, при которых уравнение (3) имеет общие решения, которые выражаются через переменные бегущей волны с тремя произвольными постоянными. Первый случай соответствует хорошо известному решению уравнения Кортевега – де Вриза, другие случаи – общим решениям уравнения третьего порядка (3).

Таблица 1. Значения параметров уравнения (3) с общим решением

n	μ	α	C_0	β
1	0	0	C_0	0
2	$\frac{3\beta}{4}$	$\frac{\beta^3}{72}$	$-\frac{13\beta^2}{72}$	β
3	$\frac{3\beta}{4}$	$-\frac{\beta^3}{72}$	$-\frac{7\beta^2}{72}$	β
4	$\frac{2\beta}{3}$	$\frac{2\beta^3}{225}$	$-\frac{31\beta^2}{225}$	β
5	$\frac{2\beta}{3}$	$-\frac{2\beta^3}{225}$	$-\frac{19\beta^2}{225}$	β

Таким образом, в данном разделе показано, что уравнение (1) имеет общие решения, выраженные через эллиптические функции Вейерштрасса и через неклассические функции трансценденты первого уравнения Пенлеве при $N = 0$ и при $N = 1$, когда $\mu = \frac{3}{4}\beta$ и $\mu = \frac{2}{3}\beta$. Для других значений параметров общего решения уравнения (51) нет.

4. Точные решения уравнения (3) с двумя произвольными постоянными

Полагая $C_1 = 0$ в уравнении (36), получаем нелинейное обыкновенное дифференциальное второго порядка в виде

$$y_{zz} + \frac{\beta}{3}y_z + 3y^2 + \frac{3\alpha}{\beta}y = 0. \quad (60)$$

Подставляя выражения (46)–(48) в уравнение (60) и предполагая следующие зависимости при $\alpha = -\frac{2\beta^3}{75}$

$$\psi(z) = f_z^2, \quad \xi = f(z) = C_4 - \frac{15}{\beta} \exp\left(-\frac{\beta}{15}z\right), \quad (61)$$

получаем уравнение

$$W_{\xi\xi} + \frac{1}{3}W^2 = 0. \quad (62)$$

Первый интеграл уравнения (62) имеет вид

$$W_{\xi}^2 + \frac{2}{9}W^3 = C_5. \quad (63)$$

Решение уравнения (63) и, следовательно, решение уравнения (3) может быть представлено через эллиптическую функцию Вейерштрасса:

$$y(z) = \exp\left(-\frac{2\beta}{15}z\right) \wp\left\{C - \frac{15}{\beta} \exp\left(-\frac{\beta}{15}z\right); 0, -\frac{C}{1296}\right\}. \quad (64)$$

Решение (64) уравнения (3) имеет две произвольные постоянные в отличие от решения, полученного в предыдущем разделе.

5. Применение метода простейших уравнений для нахождения решений уравнения (1) с эллиптической функцией Вейерштрасса

Используя произвольные постоянные для значений коэффициентов a_4 и a_6 в разложении общего решения в ряд Лорана, мы нашли четыре нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнения с общими решениями. В случае $K_4 \neq 0$ или $K_6 \neq 0$, уравнение (1) допускает только тривиальные решения, поскольку в этих случаях отсутствуют локальные разложения общего решения уравнения (3) в ряд Лорана.

Однако если уравнение (3) не проходит тест Пенлеве, но разложения общего решения в ряды Лорана существуют, аналитические решения уравнения могут быть найдены с меньшим числом независимых произвольных постоянных. В частности, для уравнения (3) аналитические решения могут быть получены при одной или двух произвольных постоянных для фиксированного значения коэффициента a_4 .

В последние несколько десятилетий в научной литературе для поиска таких аналитических решений было предложено несколько методов. Один из популярных и эффективных методов для поиска точных решений предложен в статьях [38, 39] и назван методом простейших уравнений. Идея этого метода, называемого часто в зарубежной литературе «методом Кудряшова», достаточно проста и состоит в том, что если мы не можем найти общего решения исходного уравнения, то можно воспользоваться известным аналитическим решением более простого уравнения меньшего порядка.

В качестве примера применения этого метода найдем аналитические решения уравнения (3), используя формулы, представленные в работах [40–51]:

$$y(z) = M_0 + M_1 R(z), \quad (65)$$

где $R(z)$ является решением уравнения для эллиптической функции Вейерштрасса

$$R_z^2 = 4R^3 + 2cR - g_3. \quad (66)$$

Можно заметить, что решения уравнения (57) удовлетворяют также следующим уравнениям:

$$R_{zz} = 6R^2 + c \quad (67)$$

и

$$R_{zzz} = 12RR_z, \quad (68)$$

которые получены в результате дифференцирования уравнения (66).

Подставляя (65) в уравнение (3) и используя уравнения (66), (67) и (68), получаем выражения:

$$M_1 = -2, \quad M_0 = -\frac{\alpha}{2\beta}, \quad \mu = \frac{\beta}{3}, \quad c = -\frac{3\alpha^2}{8\beta^2}. \quad (69)$$

Учитывая выражения (65) и (69), имеем точные решения уравнения (3) в виде

$$y(z) = -\frac{\alpha}{2\beta} - 2\beta \left\{ z - z_0; \frac{3\alpha^2}{4\beta^2}, g_3 \right\}. \quad (70)$$

Решения (70) уравнения (3) имеют две произвольных постоянных z_0 и g_3 .

6. Применение метода простейших уравнений для нахождения решений уравнения (1) с помощью уравнения Риккати

Рассмотрим применение метода простейших уравнений для поиска аналитических решений уравнения (3), используя уравнение Риккати в качестве простейшего уравнения. В этом случае решение уравнения ищется в виде [52–63]:

$$y(z) = S_0 + S_1 Q + S_2 Q^2, \quad (71)$$

где $Q(z)$ является решением уравнения Риккати в виде

$$Q_z = k(Q^2 - Q). \quad (72)$$

Общее решение уравнения (72) выражается формулой:

$$Q(z) = [1 + \exp\{k(z - z_0)\}]^{-1}. \quad (73)$$

Заметим, что решение (73) удовлетворяет также уравнениям

$$Q_{zz} = 2k^2 Q^3 - 3k^2 Q^2 + k^2 Q \quad (74)$$

и

$$Q_{zzz} = 6k^3 Q^4 - 12k^3 Q^3 + 7k^3 Q^2 - k^2 Q. \quad (75)$$

Подставляя (71) в уравнение (3) и учитывая уравнения (72), (74) и (75), приходим к уравнению в виде

$$\begin{aligned}
 & 24S_2k\left(k^2 + \frac{S_2}{2}\right)Q^6 + \left(24\left(\frac{S_1}{4} - \frac{9}{4}S_2\right)k^3 - 6S_2k^2\mu + 18\left(S_1 - \frac{2}{3}S_2\right)S_2k - S_2^2\beta\right)Q^5 + \\
 & + \left(24\left(-\frac{S_1}{2} + \frac{19S_2}{12}\right)k^3 - 2\mu(S_1 - 5S_2)k^2 + 24\left(\frac{1}{4}S_1^2 - \frac{3}{4}S_1S_2 - \frac{1}{12}S_2(C_0 - 6S_0)\right)k - 2S_1S_2\beta\right)Q^4 + \\
 & + \left(24\left(\frac{7S_1}{24} - \frac{S_2}{3}\right)k^3 + 3\mu\left(S_1 - \frac{4}{3}S_2\right)k^2 + 24\left(-\frac{1}{4}S_1^2 + \left(-\frac{C_0}{24} + \frac{S_0}{4}\right)S_1 + \frac{1}{12}S_2(C_0 - 6S_0)\right)k - S_1^2\beta - \right. \\
 & \left. - 2\left(S_0\beta + \frac{\alpha}{2}\right)S_2\right)Q^3 - S_1(k^3 + k^2\mu + (-C_0 + 6S_0)k + 2S_0\beta + \alpha)Q^2 - S_0(S_0\beta + \alpha)Q = 0.
 \end{aligned} \tag{76}$$

Коэффициенты этого уравнения должны быть равны нулю, и, решая алгебраические уравнения, находим следующие значения:

$$\begin{aligned}
 S_2 &= -2k^2, \quad S_1 = -\frac{2k}{15}(\beta - 15k - 3\mu), \\
 S_0 &= \frac{C_0}{6} - \frac{4\beta^2}{225} + \frac{k\beta}{15} + \frac{23\beta\mu}{450} - \frac{k^2}{6} - \frac{k\mu}{5} + \frac{\mu^2}{150}.
 \end{aligned} \tag{77}$$

Также получаем следующие ограничения для параметров уравнения (3):

$$C_0 = \frac{14\beta^2}{125} - \frac{128\beta\mu}{375} - \frac{k^2}{5} + \frac{3\mu^2}{125} + \frac{3k^2\mu}{5\beta} - \frac{3\mu^3}{125\beta} - \frac{3\alpha}{\beta} \tag{78}$$

и значения

$$\mu_1 = 2\beta, \quad \mu_2 = \frac{\beta}{3}, \quad \mu_3 = \frac{\beta}{3} - 5k, \quad \mu_4 = \frac{\beta}{3} + 5k. \tag{79}$$

В случае $\mu_1 = 2\beta$ имеем следующие значения:

$$k_{(1,2)} = \pm \frac{3\alpha}{2\beta^2}, \quad C_0^{(1,2)} = \frac{9\alpha^2}{4\beta^4} - \frac{2\beta^2}{3} - \frac{3\alpha}{\beta}. \tag{80}$$

При $\mu_2 = \frac{\beta}{3}$ получаем:

$$k_{(1,2)} = \pm \frac{\sqrt{-3\alpha\beta}}{\beta}, \quad k_{(3,4)} = \pm \frac{\sqrt{3\alpha\beta}}{\beta}, \quad C_0^{(1,2,3,4)} = -\frac{3\alpha}{\beta}. \tag{81}$$

В случае $\mu_3 = \frac{\beta}{3} - 5k$ и $\mu_4 = \frac{\beta}{3} + 5k$ находим:

$$k_{(1,2)} = \pm \frac{\sqrt{2\alpha\beta}}{2\beta}, \quad k_{(3,4)} = \pm \frac{\sqrt{-2\alpha\beta}}{2\beta} \tag{82}$$

и

$$C_0^{(1,2)} = \mp \frac{5\sqrt{2\alpha\beta}}{2\beta} - \frac{3\alpha}{\beta}, \quad C_0^{(3,4)} = \mp \frac{5\sqrt{-2\alpha\beta}}{2\beta} - \frac{3\alpha}{\beta}. \quad (83)$$

В табл. 2 даны значения для μ и C_0 уравнения (3), при которых точные решения уравнения Кортевега – де Вриза – Бюргерса с нелинейным источником выражаются через решения уравнения Риккати (72). В этом случае решение уравнения (3) находится по формуле:

$$y(z) = \frac{C}{6} - \frac{4\beta^2}{225} + \frac{k\beta}{15} + \frac{23\beta\mu}{450} - \frac{k^2}{6} - \frac{k\mu}{5} + \frac{\mu^2}{150} - \frac{2k}{15}(\beta - 15k - 3\mu)Q(z) - 2k^2Q^2, \quad (84)$$

где $Q(z)$ – логистическая функция (73), параметры μ , k и C_0 определяются формулами (78)–(83).

Точные решения уравнения (1) являются кинками разного вида и уединенными волнами с одной произвольной постоянной. Заметим, что эти решения зависят также от двух произвольных значений параметров α и β . Следовательно, уравнение (1) имеет уединенные волны при более широком классе значений параметров уравнения.

Таблица 2. Параметры уравнения (3), при которых точные решения выражаются через решения уравнения Риккати

n	μ	α	C_0	β	k
1	2β	α	$\frac{9\alpha^2}{4\beta^4} - \frac{2\beta^2}{3} - \frac{3\alpha}{\beta}$	β	$\frac{3\alpha}{2\beta^2}$
2	2β	α	$\frac{9\alpha^2}{4\beta^4} - \frac{2\beta^2}{3} - \frac{3\alpha}{\beta}$	β	$-\frac{3\alpha}{2\beta^2}$
3	$\frac{\beta}{3}$	α	$-\frac{3\alpha}{\beta}$	β	$\frac{\sqrt{3\alpha\beta}}{\beta}$
4	$\frac{\beta}{3}$	α	$-\frac{3\alpha}{\beta}$	β	$-\frac{\sqrt{3\alpha\beta}}{\beta}$
5	$\frac{\beta}{3}$	α	$-\frac{3\alpha}{\beta}$	β	$\frac{\sqrt{-3\alpha\beta}}{\beta}$
6	$\frac{\beta}{3}$	α	$-\frac{3\alpha}{\beta}$	β	$-\frac{\sqrt{-3\alpha\beta}}{\beta}$
7	$\frac{\beta \pm 5\sqrt{2\alpha\beta}}{3}$	α	$\frac{5\sqrt{2\alpha\beta}}{2\beta} - \frac{3\alpha}{\beta}$	β	$\frac{\sqrt{2\alpha\beta}}{2\beta}$
8	$\frac{\beta \pm 5\sqrt{2\alpha\beta}}{3}$	α	$-\frac{5\sqrt{2\alpha\beta}}{2\beta} - \frac{3\alpha}{\beta}$	β	$-\frac{\sqrt{2\alpha\beta}}{2\beta}$
9	$\frac{\beta \pm 5\sqrt{-2\alpha\beta}}{3}$	α	$\frac{5\sqrt{-2\alpha\beta}}{2\beta} - \frac{3\alpha}{\beta}$	β	$\frac{\sqrt{-2\alpha\beta}}{2\beta}$
10	$\frac{\beta \pm 5\sqrt{-2\alpha\beta}}{3}$	α	$-\frac{5\sqrt{-2\alpha\beta}}{2\beta} - \frac{3\alpha}{\beta}$	β	$-\frac{\sqrt{-2\alpha\beta}}{2\beta}$

Краткие выводы

В данной статье мы изучили уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса с нелинейным источником. В общем случае задача Коши для этого уравнения не решается методом обратной задачи рассеяния. Однако, используя переменные бегущей волны, уравнение (1) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. Мы применили тест Пенлеве, чтобы найти ограничения на параметры нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, при которых уравнение проходит тест Пенлеве. Используя результаты теста Пенлеве, в статье получены два первых интеграла нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения. Используя один из первых интегралов, получено общее решение четырех уравнений в переменных бегущей волны. Эти решения выражаются через эллиптические функции Вейерштрасса, и трансценденты первого уравнения Пенлеве. Мы также использовали специальные методы для нахождения аналитических решений с одной и двумя произвольными постоянными. Мы представили точные решения с двумя произвольными постоянными, выраженными через логистическую функцию, являющуюся решением уравнения Риккати. Полученные результаты с помощью метода простейших уравнений демонстрируют, что исходное уравнение имеет решения в виде уединенных волн и кинков для более широких значений параметров, чем в случае существования общих решений.

Финансирование

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации и выполнена по теме государственного задания FSWU-2023-0031.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Список литературы

1. Korteweg D.J., de Vries G. On the Change of Form of Long Waves advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Wave // *Philosophical Magazine Series 5*, 1895. V. 39 (240). P. 422–443. DOI: 10.1080/14786449508620739.
2. Russel J. S. Report on Waves // Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, York, September 1844 (London 1845). P. 311–390.
3. Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of «Solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // *Physical Review Letters*, 1965. V. 15. Iss. 6. P. 240–243. DOI: 10.1103/PhysRevLett.15.240.
4. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg-deVries equation // *Physical Review Letters*, 1967. V. 19. P. 1095–1097. DOI: 10.1103/PhysRevLett.19.1095.
5. Kudryashov N.A. Exact soliton solutions of the generalized evolution equation of wave dynamics // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1988. V. 52. Iss. 3. P. 361–365. DOI: 10.1016/0021-8928(88)90090-1.
6. Kudryashov N.A. On «new travelling wave solutions» of the KdV and the KdV-Burgers equations // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009. V. 14. Iss. 5. P. 1891–1900. DOI: 10.1016/j.cnsns.2008.09.020.
7. Feng Zh., Wang X. The first integral method to the two-dimensional Burgers-Korteweg-de Vries equation // *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2003. V. 308. Iss. 2–3. P. 173–178. DOI: 10.1016/S0375-9601(03)00016-1.
8. Feng Zh. The first-integral method to study the Burgers–Korteweg–de Vries equation // *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2002. V. 35. Iss. 2. P. 343–349. DOI: 10.1088/0305-4470/35/2/312.
9. Bona J.L. Travelling-wave solutions to the Korteweg–de Vries–Burgers equation // *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 1985. V. 101. Iss. 3–4. P. 207–226. DOI: 10.1017/S0308210500020783.
10. Parkes E.J., Duffy B.R. Travelling solitary wave solutions to a compound KdV–Burgers equation // *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 1997. V. 229. Iss. 4. P. 217–220. DOI: 10.1016/S0375-9601(97)00193-X.
11. El-Ajou A., Arqub O. Abu, Momani Sh. Approximate analytical solution of the nonlinear fractional KdV–Burgers equation: A new iterative algorithm // *Journal of Computational Physics*, 2015. V. 293. P. 81–95. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.08.004.
12. Parkes E.J. Exact solutions to the two-dimensional Korteweg-de Vries-Burgers equation // *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1994. V. 27. Iss. 13. P. L497–L501. DOI: 10.1088/0305-4470/27/13/006.
13. Soliman A.A. A numerical simulation and explicit solutions of KdV–Burgers' and Lax's seventh-order KdV equations // *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006. V. 29. Iss. 2. P. 294–302. DOI: 10.1016/j.chaos.2005.08.054.

14. Feng Zh. On explicit exact solutions to the compound Burgers–KdV equation // *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2002. V. 293. Iss. 1–2. P. 57–66. DOI: 10.1016/S0375-9601(01)00825-8.
15. Kudryashov N.A. On types of nonlinear nonintegrable equations with exact solution // *Physics Letters A*, 1991. V. 155. Iss. 4–5. P. 269–275. DOI: 10.1016/0375-9601(91)90481-M.
16. Kudryashov N.A. Logistic function as solution of many nonlinear differential equations // *Applied Mathematical Modelling*, 2015. V. 39. Iss. 18. P. 5733–5742. DOI: 10.1016/j.apm.2015.01.048.
17. Kudryashov N.A. Painleve analysis and exact solutions of the Korteweg-de Vries equation with a source // *Applied Mathematics Letters*, 2015. V. 41. P. 41–45. DOI: 10.1016/j.aml.2014.10.015.
18. Fisher R.A. The wave of advance of advantageous genes // *Annals of eugenics*, 1937. V. 7. P. 335–369.
19. McCue S.W., El-Hachem M., Simpson M. J. Exact sharp-fronted travelling wave solutions of the Fisher-KPP equation // *Applied Mathematics Letters*, 2021. V. 114. Article number: 106918. DOI: 10.1016/j.aml.2020.106918.
20. Lu B.Q., Xiu B.Z., Pang Z.L., Jiang X.F. Exact traveling wave solution of one class of nonlinear diffusion equations // *Physics Letters A*, 1993. V. 175(2). P. 113–115. DOI: 10.1016/0375-9601(93)90131-L.
21. Kudryashov N.A. Exact solutions of a family of Fisher equations. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1993. V. 94. Iss. 2. P. 211–218. DOI: 10.1007/BF01019332.
22. Aggarwal S.K. Some numerical experiments on fisher equation // *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 1985. V. 12. Iss. 4. P. 417–430. DOI: 10.1016/0735-1933(85)90036-3.
23. Broadbridge P., Bradshaw-Hajek B.H. Exact solutions for logistic reaction – diffusion equations in biology // *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, 2016. V. 67. № 4. P. 1–13. DOI: 10.1007/s00033-016-0686-3.
24. Kudryashov N.A. Exact solitary waves of the Fisher equation // *Physics Letters, Section A: General Atomic and Solid State Physics*, 2005. V. 342. № 1–2. P.99–106. DOI: 10.1016/j.physleta.2005.05.025.
25. Ebadi Gh., Biswas A. Application of the G'/G-expansion method for nonlinear diffusion equations with nonlinear source // *Journal of the Franklin Institute*, 2010. V. 347. № 7. P. 1391–1398. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2010.05.013.
26. Hayek M. Exact and traveling-wave solutions for convection-diffusion-reaction equation with power-law nonlinearity // *Applied Mathematics and Computation*, 2011. V. 218. Iss. 6. P. 2407–2420. DOI: 10.1016/j.amc.2011.07.034.
27. Petrovskii S., Shigesada N. Some exact solutions of a generalized Fisher equation related to the problem of biological invasion // *Mathematical Biosciences*, 2001. V. 172. № 2. P. 73–94. DOI: 10.1016/S0025-5564(01)00068-2.
28. Kowalevski S. Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // *Acta Mathematica*, 1889. V. 12. № 1. P. 177–232. DOI: 10.1007/BF02592182.
29. Kowalevski S. Sur une propriété du système d'equations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // *Acta Mathematica*, 1890. V. 14. № 1. P. 81–93. DOI:10.1007/BF02413316.
30. Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H. A. Connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I // *Journal of Mathematical Physics*, 1979. V. 21. Iss. 4. P. 715–721. DOI: 10.1063/1.524491.
31. Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H. Nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of painleve type // *Lettere al Nuovo Cimento*, 1978. V. 23. Iss. 9. P. 333–338. DOI: 10.1007/BF02824479.
32. Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. II // *Journal of Mathematical Physics*, 1979. V. 21. Iss. 5. P. 1006–1015. DOI: 10.1063/1.524548.
33. Kudryashov N.A. Painleve analysis of the Sasa–Satsuma equation // *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2024. V. 525. DOI: 10.1016/j.physleta.2024.129900.
34. Kudryashov N.A. Painleve analysis of the resonant third-order nonlinear Schrödinger equation // *Applied Mathematics Letters*, 2024. V. 158. DOI: 10.1016/j.aml.2024.109232.
35. Drazin P.G., Johnson R.S. *Solitons: An Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press, 1989. 226 p.
36. Ablowitz M.J., Clarkson P.A. *Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. 516 p.
37. Kudryashov N. A. Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities // *Optik*, 2020. V. 212(4). DOI: 10.1016/j.ijleo.2020.164750.
38. Kudryashov N. A. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005. V. 24. № 5. P. 1217–1231. DOI: 10.1016/j.chaos.2004.09.109.
39. Kudryashov N.A. One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012. V. 17. № 6. P. 2248–2253. DOI: 10.1016/j.cnsns.2011.10.016.
40. Vitanov N.K., Dimitrova Z.I., Kantz H. Modified method of simplest equation and its application to nonlinear PDEs // *Applied Mathematics and Computation*, 2010. V. 216. № 9. P. 2587–2595. DOI: 10.1016/j.amc.2010.03.102.
41. Ahmed H.M., El-Sheikh M.M.A., Arnous Ah. H., Rabie W.B. Construction of the Soliton Solutions for the Manakov System by Extended Simplest Equation Method // *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 2021. V. 7(6). DOI: 10.1007/s40819-021-01183-3.
42. Zayed E.M.E., Shohib R..M.A., Al-Nowehy A.-G. On solving the (3+1)-dimensional NLEQZK equation and the (3+1)-dimensional NLMZK equation using the extended simplest equation method // *Computers and Mathematics with Applications*, 2019. V. 78. № 10. P. 3390–3407. DOI: 10.1016/j.camwa.2019.05.007.

43. *Vitanov N.K.* Modified method of simplest equation for obtaining exact solutions of nonlinear partial differential equations: History, recent developments of the methodology and studied classes of equations // *Journal of Theoretical and Applied Mechanics (Bulgaria)*, 2019. V. 49. Iss. 2. P. 107–122.
44. *Vitanov N.K., Dimitrova Z.I.* Modified method of simplest equation applied to the nonlinear Schrodinger equation // *Journal of Theoretical and Applied Mechanics (Bulgaria)*, 2018. V. 48. Iss. 1. P. 59–68. DOI: 10.2478/jtam-2018-0005.
45. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A.* Optical solitons and other solutions to Biswas–Arshed equation using the extended simplest equation method // *Optik*, 2019. V. 185. P. 626–635. DOI: 10.1016/j.jleo.2019.03.112.
46. *Chen Ch., Jiang Y.-Lin.* Simplest equation method for some time-fractional partial differential equations with conformable derivative // *Computers and Mathematics with Applications*, 2018. V. 75. № 8. P. 2978–2988. DOI: 10.1016/j.camwa.2018.01.025.
47. *Biswas A., Mirzazadeh M., Savescu M., Milovic D., Khan K. R., Mahmood M.F., Belic M.* Singular solitons in optical metamaterials by ansatz method and simplest equation approach // *Journal of Modern Optics*, 2014. V. 61. Iss. 19. P. 1550–1555. DOI: 10.1080/09500340.2014.944357.
48. *Vitanov N. K.* On modified method of simplest equation for obtaining exact and approximate solutions of nonlinear PDEs: The role of the simplest equation // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011. V. 16. Iss. 11. P. 4215–4231. DOI: 10.1016/j.cnsns.2011.03.035.
49. *Antonova A.O., Kudryashov N.A.* Generalization of the simplest equation method for nonlinear non-autonomous differential equations // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014. V. 19. Iss. 11. P. 4037–4041. DOI: 10.1016/j.cnsns.2014.03.035.
50. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Al-Nowehy A.I.-Gh.* Solitons and other solutions for higher-order NLS equation and quantum ZK equation using the extended simplest equation method // *Computers and Mathematics with Applications*, 2018. V. 76. № 9. P. 2286–2303. DOI: 10.1016/j.camwa.2018.08.027.
51. *Khalique Ch. M.* Solutions of a generalized complexly coupled Korteweg-de Vries system using simplest equation method // *Proceedings – 2014 International Conference on Computational Science and Computational Intelligence, CSCI 2014*. P. 223–225. DOI: 10.1109/CSCI.2014.123.
52. *Kudryashov N.A., Loguinova N.B.* Extended simplest equation method for nonlinear differential equations // *Applied Mathematics and Computation*, 2008. V. 205. № 1. P. 396–402. DOI: 10.1016/j.amc.2008.08.019.
53. *Seadawy Aly R., Yasmeen A., Raza N., Althobaiti S.* Novel solitary waves for fractional (2+1)-dimensional Heisenberg ferromagnetic model via new extended generalized Kudryashov method // *Physica Scripta*, 2021. V. 96(12). DOI: 10.1088/1402-4896/ac30a4.
54. *Zayed E.M.E., El-Shater M., Arnous Ah.H., Yildirim Y., Hussein L., Jawad A.J.M., Veni S.S., Biswas A.* Quiescent optical solitons with Kudryashov’s generalized quintuple-power law and nonlocal nonlinearity having nonlinear chromatic dispersion with generalized temporal evolution by enhanced direct algebraic method and sub-ODE approach // *European Physical Journal Plus*, 2024. V. 139 (10). DOI: 10.1140/epjp/s13360-024-05636-8.
55. *Zhou J., Ju L., Zhao Sh., Zhang Y.* Exact Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations Using the Extended Kudryashov Method and Some Properties // *Symmetry*, 2023. V. 15. Iss.12. DOI: 10.3390/sym15122122.
56. *Ekici M.* Exact Solutions to Some Nonlinear Time-Fractional Evolution Equations Using the Generalized Kudryashov Method in Mathematical Physics // *Symmetry*, 2023. V. 15. Iss. 10. Article id.1961. DOI: 10.3390/sym15101961.
57. *Arnous Ah., Biswas A., Yildirim Y., Zhou Q., Liu W., Alshomrani A. S., Alshehri H.M.* Cubic–quartic optical soliton perturbation with complex Ginzburg – Landau equation by the enhanced Kudryashov’s method // *Chaos, Solitons and Fractals*, 2022. V. 155. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.111748.
58. *Rabie W. B., Ahmed H.M., Hashemi M. S., Mirzazadeh M., Bayram M.* Generating optical solitons in the extended (3 + 1)-dimensional nonlinear Kudryashov’s equation using the extended F-expansion method // *Optical and Quantum Electronics*, 2024. V. 56 (5). DOI: 10.1007/s11082-024-06787-9.
59. *Cinar M., Secer A., Ozisik M., Bayram M.* Optical soliton solutions of (1 + 1)-and (2 + 1)-dimensional generalized Sasa-Satsuma equations using new Kudryashov method // *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2023. V. 20(2). DOI: 10.1142/S0219887823500342.
60. *Ali Kh.K., Mehanna M.S., Abdel-Aty A.-H., Wazwaz A.-M.* New soliton solutions of Dual mode Sawada Kotera equation using a new form of modified Kudryashov method and the finite difference method, // *Journal of Ocean Engineering and Science*, 2024. V. 9. Iss. 3. P. 207–215. DOI: 10.1016/j.joes.2022.04.033.
61. *Ozisik M., Secer A., Bayram M.* On the investigation of chiral solitons via modified new Kudryashov method // *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2023. V. 20 (7). DOI: 10.1142/S0219887823501177.
62. *Zayed E.M.E., Gepreel Kh.A., Alngar M.E.M.* Addendum to Kudryashov’s method for finding solitons in magneto-optics waveguides to cubic–quartic NLSE with Kudryashov’s sextic power law of refractive index // *Optik*, 2021. V. 230. DOI: 10.1016/j.jleo.2021.166311.
63. *Rabie W.B., Ahmed H.M.* Construction cubic-quartic solitons in optical metamaterials for the perturbed twin-core couplers with Kudryashov’s sextic power law using extended F-expansion method // *Chaos, Solitons and Fractals*, 2022. V. 160. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112289.

The Korteweg – de Vries – Burgers equation: with nonlinear source, reduction, the Painlevé test, first integrals and analytical solutions

N. A. Kudryashov 

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

 NAKudryashov@mephi.ru

Received July 1, 2025; revised July 14, 2025; accepted July 22, 2025

The Korteweg–de Vries–Burgers equation with a nonlinear source is studied. The Cauchy problem for this equation cannot be solved by the inverse scattering transform in the general case. Therefore, the equation is considered taking into account the traveling wave variables. The Painlevé test is applied to the resulting nonlinear ordinary differential equation to investigate its integrability. It is shown that general solutions of the nonlinear ordinary differential equation are expressed via the Weierstrass elliptic function and the first Painlevé transcendents under certain parameter constraints. The relationship between the Painlevé test and special methods for finding exact solutions of nonlinear differential equations is discussed. Special methods are used to construct analytical solutions with one and two arbitrary constants. Exact solutions with two arbitrary constants expressed in terms of the Weierstrass elliptic function are obtained. Exact solutions with one arbitrary constant of the Korteweg–de Vries–Burgers equation with a nonlinear source are found using the logistic function method. It is demonstrated that the family of equations for which exact solutions are found is significantly expanded by the use of special methods.

Keywords: Korteweg – de Vries – Burgers equation with nonlinear source, Traveling wave solution, Weierstrass elliptic function, Riccati equation, Painlevé transcendent, Simplest equation method.

References

1. Korteweg D.J., de Vries G. On the Change of Form of Long Waves advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Wave. Philosophical Magazine Series 5, 1895. Vol. 39(240). Pp. 422–443, DOI: 10.1080/14786449508620739.
2. Russel J.S. Report on Waves. Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, York, September 1844 (London 1845). Pp. 311–390.
3. Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of «Solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. Physical Review Letters, 1965. Vol. 15. Iss. 6. Pp. 240–243. DOI: 10.1103/PhysRevLett.15.240.
4. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg – deVries equation. Physical Review Letters, 1967. Vol. 19. Pp. 1095–1097. DOI: 10.1103/PhysRevLett.19.1095.
5. Kudryashov N.A. Exact soliton solutions of the generalized evolution equation of wave dynamics. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1988. vol. 52. Iss. 3. Pp. 361–365. DOI: 10.1016/0021-8928(88)90090-1.
6. Kudryashov N.A. On «new travelling wave solutions» of the KdV and the KdV – Burgers equations. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009. Vol. 14. Iss. 5. Pp. 1891–1900. DOI: 10.1016/j.cnsns.2008.09.020.
7. Feng Zh., Wang X. The first integral method to the two-dimensional Burgers–Korteweg–de Vries equation. Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics, 2003. Vol. 308, Iss. 2–3, Pp. 173–178. DOI: 10.1016/S0375-9601(03)00016-1.
8. Feng Zh. The first-integral method to study the Burgers–Korteweg–de Vries equation. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2002. Vol.35. Iss.2. Pp. 343–349. DOI: 10.1088/0305-4470/35/2/312.
9. Bona J.L. Travelling-wave solutions to the Korteweg–de Vries–Burgers equation. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 1985. Vol. 101. Iss. 3–4. Pp. 207–226. DOI: 10.1017/S0308210500020783.
10. Parkes E.J., Duffy B.R. Travelling solitary wave solutions to a compound KdV – Burgers equation. Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics, 1997. Vol. 229. Iss. 4. Pp. 217–220. DOI: 10.1016/S0375-9601(97)00193-X.
11. El-Ajou A., Arqub O. Abu, Momani Sh. Approximate analytical solution of the nonlinear fractional KdV–Burgers equation: A new iterative algorithm. Journal of Computational Physics, 2015. Vol. 293. Pp. 81–95. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.08.004.

12. *Parkes E.J.* Exact solutions to the two-dimensional Korteweg–de Vries–Burgers equation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1994. Vol. 27. Iss.13. Pp. L497–L501. DOI: 10.1088/0305-4470/27/13/006.
13. *Soliman A.A.* A numerical simulation and explicit solutions of KdV–Burgers’ and Lax’s seventh-order KdV equations. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006. Vol.29. Iss. 2. Pp. 294–302, DOI: 10.1016/j.chaos.2005.08.054.
14. *Feng Zh.* On explicit exact solutions to the compound Burgers–KdV equation. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2002. Vol. 293. Iss. 1–2. Pp. 57–66. DOI: 10.1016/S0375-9601(01)00825-8.
15. *Kudryashov N.A.* On types of nonlinear nonintegrable equations with exact solution. *Physics Letters A*, 1991. Vol. 155. Iss. 4–5. Pp. 269–275. DOI:10.1016/0375-9601(91)90481-M.
16. *Kudryashov N.A.* Logistic function as solution of many nonlinear differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, 2015. Vol. 39. Iss. 18. Pp. 5733–5742. DOI: 10.1016/j.apm.2015.01.048.
17. *Kudryashov N.A.* Painleve analysis and exact solutions of the Korteweg – de Vries equation with a source. *Applied Mathematics Letters*, 2015. Vol. 41. Pp. 41–45. DOI: 10.1016/j.aml.2014.10.015.
18. *Fisher R.A.* The wave of advance of advantageous genes. *Annals of eugenics*, 1937. Vol. 7. Pp. 335–369.
19. *McCue S.W., El-Hachem M., Simpson M. J.* Exact sharp-fronted travelling wave solutions of the Fisher-KPP equation. *Applied Mathematics Letters*, 2021. Vol. 114. Article number: 106918. DOI: 10.1016/j.aml.2020.106918.
20. *Lu B.Q., Xiu B.Z., Pang Z.L., Jiang X.F.* Exact traveling wave solution of one class of nonlinear diffusion equations. *Physics Letters A*, 1993. Vol.175(2). Pp. 113–115. DOI: 10.1016/0375-9601(93)90131-I.
21. *Kudryashov N.A.* Exact solutions of a family of Fisher equations. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1993. Vol. 94. Iss. 2. Pp. 211–218. DOI: 10.1007/BF01019332.
22. *Aggarwal S.K.* Some numerical experiments on fisher equation. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 1985. Vol. 12. Iss. 4. Pp. 417–430. DOI: 10.1016/0735-1933(85)90036-3.
23. *Broadbridge P., Bradshaw-Hajek B.H.* Exact solutions for logistic reaction–diffusion equations in biology. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, 2016. Vol. 67. No. 4. Pp. 1–13. DOI: 10.1007/s00033-016-0686-3.
24. *Kudryashov N.A.* Exact solitary waves of the Fisher equation. *Physics Letters, Section A: General Atomic and Solid State Physics*, 2005. Vol. 342. No. 1–2. Pp. 99–106. DOI: 10.1016/j.physleta.2005.05.025.
25. *Ebadi Gh., Biswas A.* Application of the G'/G-expansion method for nonlinear diffusion equations with nonlinear source. *Journal of the Franklin Institute*, 2010. Vol. 347. No. 7. Pp. 1391–1398. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2010.05.013.
26. *Hayek M.* Exact and traveling-wave solutions for convection-diffusion-reaction equation with power-law nonlinearity. *Applied Mathematics and Computation*, 2011. Vol. 218. Iss.6. Pp. 2407–2420. DOI: 10.1016/j.amc.2011.07.034.
27. *Petrovskii S., Shigesada N.* Some exact solutions of a generalized Fisher equation related to the problem of biological invasion. *Mathematical Biosciences*, 2001. Vol. 172. No. 2. Pp. 73–94. DOI: 10.1016/S0025-5564(01)00068-2.
28. *Kowalevski S.* Sur le probleme de la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe. *Acta Mathematica*, 1889. Vol. 12. No. 1. Pp. 177–232. DOI: 10.1007/BF02592182.
29. *Kowalevski S.* Sur une propriété du système d’ q' uations différentielles qui définit la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe. *Acta Mathematica*, 1890. Vol. 14. No. 1. Pp. 81–93. DOI: 10.1007/BF02413316.
30. *Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H. A.* Connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I. *Journal of Mathematical Physics*, 1979. Vol. 21. Iss. 4. Pp. 715–721. DOI: 10.1063/1.524491.
31. *Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H.* Nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of painleve type. *Lettere al Nuovo Cimento*, 1978. Vol. 23. Iss. 9. Pp. 333–338. DOI: 10.1007/BF02824479.
32. *Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H.* A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. II. *Journal of Mathematical Physics*, 1979. Vol. 21. Iss. 5. Pp. 1006–1015. DOI: 10.1063/1.524548.
33. *Kudryashov N.A.* Painleve analysis of the Sasa–Satsuma equation. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2024. Vol. 525. DOI: 10.1016/j.physleta.2024.129900.
34. *Kudryashov N.A.* Painleve analysis of the resonant third-order nonlinear Schrödinger equation. *Applied Mathematics Letters*, 2024. Vol. 158. DOI: 10.1016/j.aml.2024.109232.
35. *Drazin P.G., Johnson R.S.* Solitons: An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1989. 226 p.
36. *Ablowitz M.J., Clarkson P.A.* Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. 516 p.
37. *Kudryashov N. A.* Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities. *Optik*, 2020. Vol. 212(4). DOI: 10.1016/j.ijleo.2020.164750.
38. *Kudryashov N. A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005. Vol. 24. No. 5. Pp. 1217–1231. DOI: 10.1016/j.chaos.2004.09.109.
39. *Kudryashov N.A.* One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012. Vol. 17. No. 6. Pp. 2248–2253. DOI: 10.1016/j.cnsns.2011.10.016.
40. *Vitanov N.K., Dimitrova Z. I., Kantz H.* Modified method of simplest equation and its application to nonlinear PDEs. *Applied Mathematics and Computation*, 2010. Vol.216. No. 9. Pp. 2587–2595. DOI: 10.1016/j.amc.2010.03.102.
41. *Ahmed H.M., El-Sheikh M.M.A., Arnous Ah. H., Rabie W.B.* Construction of the Soliton Solutions for the Manakov System by Extended Simplest Equation Method. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 2021. Vol. 7(6). DOI: 10.1007/s40819-021-01183-3.

42. Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Al-Nowehy A.-G. On solving the (3+1)-dimensional NLEQZK equation and the (3+1)-dimensional NLmZK equation using the extended simplest equation method. *Computers and Mathematics with Applications*, 2019. Vol. 78. No. 10. Pp. 3390–3407. DOI: 10.1016/j.camwa.2019.05.007.
43. Vitanov N.K. Modified method of simplest equation for obtaining exact solutions of nonlinear partial differential equations: History, recent developments of the methodology and studied classes of equations. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics (Bulgaria)*, 2019. Vol. 49. Iss. 2. Pp. 107–122.
44. Vitanov N.K., Dimitrova Z.I. Modified method of simplest equation applied to the nonlinear Schrodinger equation. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics (Bulgaria)*, 2018. Vol. 48, Iss. 1. Pp. 59–68. DOI: 10.2478/jtam-2018-0005.
45. Zayed E.M.E., Shohib R.M.A. Optical solitons and other solutions to Biswas–Arshed equation using the extended simplest equation method. *Optik*, 2019. Vol. 185. Pp. 626–635. DOI: 10.1016/j.ijleo.2019.03.112.
46. Chen Ch., Jiang Y.-Lin. Simplest equation method for some time-fractional partial differential equations with conformable derivative. *Computers and Mathematics with Applications*, 2018. Vol. 75. No. 8. Pp. 2978–2988. DOI: 10.1016/j.camwa.2018.01.025.
47. Biswas A., Mirzazadeh M., Savescu M., Milovic D., Khan K. R., Mahmood M.F., Belic M. Singular solitons in optical metamaterials by ansatz method and simplest equation approach. *Journal of Modern Optics*, 2014. Vol. 61. Iss. 19. Pp. 1550–1555. DOI: 10.1080/09500340.2014.944357.
48. Vitanov N.K. On modified method of simplest equation for obtaining exact and approximate solutions of nonlinear PDEs: The role of the simplest equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011. Vol. 16. Iss. 11. Pp. 4215–4231. DOI: 10.1016/j.cnsns.2011.03.035.
49. Antonova A.O., Kudryashov N. A. Generalization of the simplest equation method for nonlinear non-autonomous differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014. Vol. 19. Iss. 11. Pp. 4037–4041. DOI: 10.1016/j.cnsns.2014.03.035.
50. Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Al-Nowehy A.I.-Gh. Solitons and other solutions for higher-order NLS equation and quantum ZK equation using the extended simplest equation method. *Computers and Mathematics with Applications*, 2018. Vol. 76. No. 9. Pp. 2286–2303. DOI: 10.1016/j.camwa.2018.08.027.
51. Khalique Ch.M. Solutions of a generalized complexly coupled Korteweg-de Vries system using simplest equation method. *Proceedings – 2014 International Conference on Computational Science and Computational Intelligence, CSCI 2014*. Pp. 223–225. DOI: 10.1109/CSCI.2014.123.
52. Kudryashov N.A., Loguinova N.B. Extended simplest equation method for nonlinear differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 2008. Vol. 205. No. 1. Pp. 396–402. DOI: 10.1016/j.amc.2008.08.019.
53. Seadawy Aly R., Yasmeen A., Raza N., Althobaiti S. Novel solitary waves for fractional (2+1)-dimensional Heisenberg ferromagnetic model via new extended generalized Kudryashov method. *Physica Scripta*, 2021. Vol. 96(12). DOI: 10.1088/1402-4896/ac30a4.
54. Zayed E.M.E., El-Shater M., Arnous Ah.H., Yildirim Y., Hussein L., Jawad A.J.M., Veni S.S., Biswas A. Quiescent optical solitons with Kudryashov's generalized quintuple-power law and nonlocal nonlinearity having nonlinear chromatic dispersion with generalized temporal evolution by enhanced direct algebraic method and sub-ODE approach. *European Physical Journal Plus*, 2024. Vol. 139 (10). DOI: 10.1140/epjp/s13360-024-05636-8.
55. Zhou J., Ju L., Zhao Sh., Zhang Y. Exact Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations Using the Extended Kudryashov Method and Some Properties. *Symmetry*, 2023. Vol. 15. Iss. 12. DOI: 10.3390/sym15122122.
56. Ekici M. Exact Solutions to Some Nonlinear Time-Fractional Evolution Equations Using the Generalized Kudryashov Method in Mathematical Physics. *Symmetry*, 2023. Vol. 15. Iss. 10. Article id. 1961. DOI: 10.3390/sym15101961.
57. Arnous Ah., Biswas A., Yildirim Y., Zhou Q., Liu W., Alshomrani A. S., Alshehri H.M. Cubic–quartic optical soliton perturbation with complex Ginzburg – Landau equation by the enhanced Kudryashov's method. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2022. Vol. 155. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.111748.
58. Rabie W.B., Ahmed H.M., Hashemi M.S., Mirzazadeh M., Bayram M. Generating optical solitons in the extended (3 + 1)-dimensional nonlinear Kudryashov's equation using the extended F-expansion method. *Optical and Quantum Electronics*, 2024. Vol. 56 (5). DOI: 10.1007/s11082-024-06787-9.
59. Cinar M., Secer A., Ozisik M., Bayram M. Optical soliton solutions of (1 + 1)- and (2 + 1)-dimensional generalized Sasa-Satsuma equations using new Kudryashov method. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2023. Vol. 20(2). DOI: 10.1142/S0219887823500342.
60. Ali Kh.K., Mehanna M.S., Abdel-Aty A.-H., Wazwaz A.-M. New soliton solutions of Dual mode Sawada Kotera equation using a new form of modified Kudryashov method and the finite difference method. *Journal of Ocean Engineering and Science*, 2024. Vol. 9. Iss. 3. Pp. 207–215. DOI: 10.1016/j.joes.2022.04.033.
61. Ozisik, M., Secer A., Bayram M. On the investigation of chiral solitons via modified new Kudryashov method. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2023. Vol. 20 (7). DOI: 10.1142/S0219887823501177.
62. Zayed E.M.E., Gepreel Kh.A., Alngar M.E.M. Addendum to Kudryashov's method for finding solitons in magneto-optics waveguides to cubic-quartic NLSE with Kudryashov's sextic power law of refractive index. *Optik*, 2021. Vol. 230. DOI: 10.1016/j.ijleo.2021.166311.
63. Rabie W.B., Ahmed H.M. Construction cubic-quartic solitons in optical metamaterials for the perturbed twin-core couplers with Kudryashov's sextic power law using extended F-expansion method. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2022. Vol. 160. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112289.

УДК 519.63

Исследование процессов самоорганизации в бактериальных колониях, описываемых моделью Чави-Вадди – Колокольникова

© 2025 г. А. Г. Головков, П. Н. Рябов, Н. А. Кудряшов

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

Исследована обобщенная модель Чави-Вадди – Колокольникова, применяемая для описания пространственно-временной динамики бактериальных колоний с учетом возможной «дисперсии» – механизма, отвечающего за миграцию и перераспределение популяции в окружающей среде. С биологической точки зрения, благодаря рассматриваемой модели удастся понять, как бактериальные клетки, способные к коллективному движению, формируют упорядоченные структуры (например, скопления или волны) даже при наличии внешних возмущений. Основной фокус работы направлен на исследование динамики системы бактериальных колоний, описываемых обобщенной моделью Чави-Вадди – Колокольникова. Так, в работе разработан численный алгоритм для проведения математического моделирования данных процессов, проведена его верификация на базе точных решений рассматриваемой модели в виде уединенных волн. Исследовано влияние параметров задачи на поведение системы бактериальных колоний. Помимо этого, основное внимание в работе уделено изучению процессов самоорганизации бактерий, а также классификации динамики поведения системы для различных значений параметров рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: моделирование, дифференциальные уравнения, бактериальные колонии, хемотаксис, фототаксис, метод линий, метод Рунге – Кутты, численные методы.

Введение

Решение задачи распределения бактерий в пространстве является важным этапом для анализа их дальнейшего поведения. Поскольку бактерии часто вынуждены выживать в условиях, неблагоприятных для их роста, они разработали ряд адаптивных механизмов. Например, хемотаксис представляет собой направленное движение бактерий под воздействием химического градиента. В последние годы этот феномен подробно изучали математики, начиная с работ Келлера и Сигела [1–3]. Их модель включает четыре сильно связанных параболических уравнения в частных производных, описывающих агрегацию популяции клеточной слизи. Модель Келлера – Сигела была разработана с макроскопической точки зрения, рассматривая всю популяцию относительно плотности в конкретном месте и времени. Модель демонстрирует важные особенности хемотаксиса, такие как взрывное увеличение концентрации за конечное время при высоких концентрациях, самоагрегация и формирование пространственных паттернов [4, 5]. Также предложено несколько расширений модели Келлера – Сигела. Например, в работе [6] модель была расширена с учетом плотности хемотаксирующей популяции, которая напрямую регулирует свою чувствительность к химическим веществам. В работе [7] была выведена обобщенная модель Келлера – Сигела с учетом флуктуаций. В исследовании [8] модель Келлера – Сигела была связана с моделью хищник – жертва для описания динамики двух биологических видов, выделяющих

✉ А. Г. Головков: gag006@campus.mephi.ru

Поступила в редакцию: 30.06.2025

После доработки: 24.07.2025

Принята к публикации: 30.07.2025

EDN MJQWIL

химические вещества. В статье [9] представлены результаты по предотвращению взрывного роста в модели Келлера – Сигела путем добавления сублогистического источника.

Известен и другой механизм адаптации микроорганизмов – фототаксис. Фототаксис представляет собой направленное движение микроорганизмов в ответ на световые градиенты. Данный эффект в настоящий момент недостаточно хорошо изучен в сравнении с хемотаксисом. В работе [10] была выведена модель, описывающая фототаксическое поведение клеточного слизняка, на основе гибридных клеточных автоматов и модели уравнений в частных производных. Исследование [11] представляет вывод модели фототаксиса у *E. gracilis* на основе подхода Келлера – Сигела и стационарных распределений. В работе [12] предложена модель, в которую был добавлен новый реактивный крутящий момент, связанный с фототаксисом, в уравнение Фоккера – Планка для функции плотности вероятности направления плавания клеток. В работе [13] представлена система уравнений в частных производных, выведенная как предел систем множества частиц, взаимодействующих стохастически. Вторая модель также точно описывала движение бактерий в областях с низкой и средней плотностью клеток. В этой модели применялась дискретная по времени динамика частиц, локально взаимодействующих по заданным правилам с добавлением случайных членов [14, 15]; при этом сами правила были сформулированы на основе ранних экспериментальных наблюдений [16, 17].

В недавней работе [18] была представлена упрощенная версия модели фототаксиса из [14, 15] и получено новое параболическое дифференциальное уравнение в приближении постоянного предела. Это дифференциальное уравнение учитывает одномерное поведение бактерий без процесса дисперсии. В данной работе мы исследуем самоорганизацию бактериальных колоний, описываемых уравнением, которое имеет вид

$$u_t + u_{xx} + \sigma u_{xxx} + u_{xxxx} - \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x u_{xx}}{u} \right) = 0, \quad (1)$$

где $u(x, t)$ – функция, описывающая концентрацию бактерий, x и t – независимые переменные, α и σ – параметры математической модели, где α определяется по формуле [18]:

$$\alpha = \frac{c(2d+1)(d+1)^2}{c[1+d(d^2+2d+3)]-2a}. \quad (2)$$

В работе [19] была предложена обобщенная модель Чави-Вадди – Колокольникова, описывающая одномерную динамику концентрации бактериальной колонии $u(x, t)$ с учетом дисперсии:

$$u_t + u_{xx} + \sigma u_{xxx} + u_{xxxx} - \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x u_{xx}}{u} \right) = 0, \quad x \in [0, l], t > 0, \quad (3)$$

где σ – произвольный параметр.

Данная модель и является предметом исследования настоящей работы.

Алгоритм численного моделирования процессов самоорганизации в бактериальных колониях, описываемых обобщенной моделью Чави-Вадди – Колокольникова

Для начала построим численный алгоритм решения задачи (3) на основе метода линий. Данный алгоритм делится на две стадии. Первая стадия посвящена построению разностной аппроксимации пространственной компоненты модели (3). По сути, таким образом мы переформулируем базовую постановку в серию задач Коши в каждом пространственном узле рассматриваемой сетки. На второй стадии алгоритма интегрируем каждую из задач Коши численно методом Рунге – Кутты четвертого порядка точности. В частности, данный подход был использован для решения смешанной краевой задачи для уравнения Курамото – Сивашинского в работе [20].

Для реализации данного алгоритма перепишем исходную постановку задачи (3) в виде:

$$\begin{aligned} u_t &= L(u) + N(u), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \\ u(x, t) &= u(x + l, t), \end{aligned} \quad (4)$$

где L – линейный оператор от $u(x, t)$, N – нелинейный оператор от $u(x, t)$, $u_0(x)$ – начальное условие, l – период.

Для уравнения (3) имеем:

$$\begin{aligned} L(u) &= -u_{xx} - \sigma u_{xxx} - u_{xxxx}, \\ N(u) &= \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x u_{xx}}{u} \right) = \alpha \frac{\partial}{\partial x} (S(u)). \end{aligned} \quad (5)$$

Далее опишем, как строилась аппроксимация пространственной и временной компоненты, а также граничных условий.

Дискретизация производных по пространству строилась на сетке из N узлов с шагом $\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{N}$.

Для аппроксимации производных на данной сетке использовались центральные разности в виде

$$\begin{aligned} u_x &\approx \frac{u_{i-2} - 8u_{i-1} + 8u_{i+1} - u_{i+2}}{12\Delta x}, \\ u_{xx} &\approx \frac{-u_{i-2} + 16u_{i-1} - 30u_i + 16u_{i+1} - u_{i+2}}{12(\Delta x)^2}, \\ u_{xxx} &\approx \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + 2u_{i-1} - u_{i-2}}{2\Delta x^3}, \\ u_{xxxx} &\approx \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta x^4}. \end{aligned} \quad (6)$$

Далее, подставляя (6) в уравнение (3), приходим к значению u_i в x_i узле сетки для $i = [2, \dots, N-2]$, получаем систему ОДУ из $N-4$ уравнений. Как уже отмечалось ранее, численное решение системы полученных ОДУ строилось на базе метода Рунге – Кутты 4-го порядка точности.

Аппроксимация нелинейного оператора из (5) строилась следующим образом. Запишем частную производную от функции $S(u)$ в виде

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{u_{xxx} u_x}{u} + \frac{u_{xx}^2}{u} - \frac{u_{xx} u_x^2}{u^2}. \quad (7)$$

Воспользуемся центральными разностями из (6). Подставляем аппроксимации производных, находим

$$\frac{dS}{dx} \approx \frac{D3 \cdot D1}{u_i} + \frac{D2^2}{u_i} - \frac{D2 \cdot D1^2}{u_i^2}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}\frac{D3 \cdot D1}{u_i} &= \frac{(u_{i+2} - 2u_{i+1} + 2u_{i-1} - u_{i-2})(u_{i+1} - u_{i-1})}{4\Delta x^4 u_i}, \\ \frac{D2^2}{u_i} &= \frac{(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})^2}{u_i \Delta x^4}, \\ \frac{D2 \cdot D1^2}{u_i^2} &= \frac{(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})(u_{i+1} - u_{i-1})^2}{4\Delta x^4 u_i^2}.\end{aligned}\tag{9}$$

Таким образом, получаем аппроксимацию пространственной компоненты задачи (4). В свою очередь, для интегрирования по времени рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в виде

$$\begin{aligned}y_z &= w, \\ w_z &= r, \\ r_z &= Vy - \frac{y^{m+1}}{m+1} - w - \beta r.\end{aligned}\tag{10}$$

Здесь и далее:

$$\mathbf{y}(z) = (y(z), w(z), r(z)), \mathbf{f}(z, \mathbf{y}) = (f_1(z, \mathbf{y}), f_2(z, \mathbf{y}), f_3(z, \mathbf{y})).\tag{11}$$

Значения в последующих точках вычисляются по итерационной формуле

$$\mathbf{y}(z+h) = \mathbf{y}(z) + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4),\tag{12}$$

где h – шаг сетки по z , а $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4$ вычисляются на каждом шаге по следующим формулам:

$$\begin{aligned}k_1 &= f(z, y(z)), \\ k_2 &= f\left(z + \frac{h}{2}, y(z) + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(z + \frac{h}{2}, y(z) + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(z+h, y(z) + hk_3),\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}f_1(z, y) &= w(z), \\ f_2(z, y) &= r(z), \\ f_3(z, y) &= Vy(z) - \frac{y^{m+1}(z)}{m+1} - w(z) - \beta r(z).\end{aligned}\tag{14}$$

Здесь k_i называют наклонами или оценками производных в четырех специально подобранных точках, которые лежат на отрезке $[t_n, t_{n+1}]$. Именно выбор этих точек позволяет построить схему четвертого порядка без использования производных $f_z, f_y, \dots$. Рассмотрим обобщенную формулу перехода. Пусть приблизительное значение решения в $t_{n+1} = t_n + h$ рассчитывается как

$$y_{n+1} = y_n + h(a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + a_4 k_4), \quad (15)$$

где a_i – неизвестные коэффициенты, которые предстоит найти из требования четвертого порядка точности. Для компактности введем обозначения $\Phi = ak_1 + ak_2 + ak_3 + ak_4$, так что (15) можно записать в виде $y_{n+1} = y_n + h\Phi$. Разложим y в ряд Тейлора в точке $t_{n+1} = t_n + h$:

$$y(t_n + h) = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2} y''_n + \frac{h^3}{6} y'''_n + \frac{h^4}{24} y^{(4)}_n + \mathcal{O}(h^5), \quad (16)$$

где производные $y_n^{(m)}$ выражаются через f и его частные производные (ниже понадобятся только коэффициенты при степенях $h^1 \dots h^4$)

$$\begin{aligned} y'_n &= f_n, \\ y''_n &= f_t + f_y f, \\ y'''_n &= f_{tt} + 2f_{ty} f + f_{yy} f^2 + f_y (f_t + f_y f), \\ y^{(4)}_n &= f_{ttt} + 4f_{tuy} f + 6f_{tyy} f^2 + 4f_{yyy} f^3 + f_{yyyy} f^4 + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Нужно разложить Φ , а значит и каждый k_i , в ряд Тейлора по h .

$$\begin{aligned} k_1 &= f_n, \\ k_2 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1) = f_n + \frac{h}{2} f_t + \\ &\quad + \frac{h}{2} f_y f_n + \mathcal{O}(h^2), \\ k_3 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2) = f_n + \frac{h}{2} f_t + \frac{h}{2} f_y f_n + \\ &\quad + \frac{h^2}{4} (f_{tt} + 2f_{ty} f_n + f_{yy} f_n^2) + \mathcal{O}(h^3), \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + h k_3) = f_n + h f_t + h f_y f_n + \\ &\quad + \frac{h^2}{2} (f_{tt} + 2f_{ty} f_n + f_{yy} f_n^2) + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned} \quad (18)$$

Теперь вставляем эти разложения в Φ и группируем по степеням h :

$$\begin{aligned} \Phi &= \underbrace{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) f_n}_{\mathcal{O}(h^0)} + \underbrace{(\frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{2} a_3 + a_4) (f_t + f_y f_n)}_{\mathcal{O}(h^1)} + \\ &\quad + \underbrace{(\frac{1}{4} a_2 + \frac{1}{4} a_3 + \frac{1}{2} a_4) (f_{tt} + 2f_{ty} f_n + f_{yy} f_n^2)}_{\mathcal{O}(h^2)} + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя $y_{n+1} = y_n + h\Phi$ и приравнявая коэффициенты у каждой степени h с соответствующими коэффициентами в (16), получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 1, \\ \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{2} a_3 + a_4 &= \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4} a_2 + \frac{1}{4} a_3 + \frac{1}{2} a_4 &= \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{8} a_2 + \frac{1}{8} a_3 + a_4 &= \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (20)$$

Решением системы (20) являются следующие коэффициенты: $a_1 = \frac{1}{6}$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{6}$. Подставим их в (15):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

с локальной погрешностью $O(h^5)$ и глобальным порядком $O(h^4)$.

Применим метод Рунге – Кутты для задачи (4):

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \quad (21)$$

где n это индекс временной сетки, а k_1, k_2, k_3, k_4 вычисляются по формулам (13), причем f имеет вид

$$u_t = -u_{xx} - \sigma u_{xxx} - u_{xxxx} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x u_{xx}}{u} \right). \quad (22)$$

Здесь u_{xx} , u_{xxx} , u_{xxxx} выражаем через центральные разности (6), а нелинейный член $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x u_{xx}}{u} \right)$ – через (8). В постановке задачи (4) граничные условия периодические, они обеспечивают непрерывность решения на границах вычислительной области. Параметры для граничных условий были определены путем решения системы уравнений. Рассмотрим систему уравнений, полученную из применения разностных схем (6):

$$\begin{aligned} -u_{-2} + 2u_{-1} - 2u_1 + u_2 &= -u_{N-3} + 2u_{N-2} - 2u_N + u_{N+1}, \\ -u_{-2} + 16u_{-1} - 30u_0 + 16u_1 - u_2 &= -u_{N-3} + 16u_{N-2} - 30u_{N-1} + 16u_N - u_{N+1}, \\ u_{-2} - 8u_{-1} + 8u_1 - u_2 &= u_{N-3} - 8u_{N-2} + 8u_N - u_{N+1}, \\ u_0 &= u_{N-1}, \\ -u_{-1} + 2u_0 - 2u_2 + u_3 &= -u_{N-2} + 2u_{N-1} - 2u_{N+1} + u_{N+2}, \\ -u_{-1} + 16u_0 - 30u_1 + 16u_2 - u_3 &= -u_{N-2} + 16u_{N-1} - 30u_N + 16u_{N+1} - u_{N+2}, \\ u_{-1} - 8u_0 + 8u_2 - u_3 &= u_{N-2} - 8u_{N-1} + 8u_{N+1} - u_{N+2}, \\ u_1 &= u_N, \end{aligned} \quad (23)$$

Система (23) была решена с использованием программного обеспечения Python и библиотеки SymPy для определения значений граничных узлов, обеспечивающих периодичность решения. Были получены следующие значения:

$$\begin{aligned} u_{-1} &= u_{N-2}, u_{-2} = u_{N-3}, \\ u_0 &= u_{N-1}, u_{N+1} = u_2, \\ u_{N+2} &= u_3, u_N = u_1. \end{aligned} \quad (24)$$

Таким образом, аппроксимированные граничные условия используются в виде (24). Проведем верификацию разработанного численного решения, приведенного в формуле (30).

Построение точного решения обобщенного уравнения Чави-Вадди – Колокольникова

Уравнение (3) не относится к классу интегрированных уравнений. В связи с этим получение общего решения методом обратной задачи рассеивания невозможно. Поэтому построим частное решение, используя метод простейших уравнений. Поскольку уравнение допускает группу преобразований сдвига по координате и времени, обратимся к редукции бегущих волн.

$$u(x, t) = y(z), \quad z = x - \omega t, \quad (25)$$

где $y(z)$ – новая функция, а ω – постоянная скорость волны. Аналитические решения при $\omega = 0$ были получены в работах [21, 22]. Показано, что порядок полюса общего решения зависит от параметра α и равен

$$\rho = \frac{2}{\alpha - 1}, \quad (26)$$

где p – порядок полюса функции $Q(z)$.

Подставляя преобразование (25) в уравнение (3), получаем

$$y_{zzzz}y^2 + (-\alpha y y_z + \sigma y^2)y_{zz} - \alpha y y_{zz}^2 + (\alpha y_z^2 + y^2)y_{zz} - \omega y_z y^2 = 0. \quad (27)$$

Точные решения уравнения (27) были получены в работе [19]. Для этого уравнения существует первый интеграл

$$y_{zz}y + (\sigma y - \alpha y_z)y_{zz} - \omega y^2 + y y_z + C_1 y = 0, \quad (28)$$

где C_1 – константа.

Далее, частное решение данного уравнения строится с использованием метода простейших уравнений. Подробное изложение метода построения решения задачи (29) приведено в работе [19]. В результате мы получаем следующие соотношения параметров задачи, при которых существует частное аналитическое решение в виде бегущих волн.

При $\alpha \neq 1$ получаем:

$$\begin{aligned} p &= \frac{2}{\alpha - 1}, \\ m &= \frac{1}{\alpha - 1} \mp \frac{\sigma(\alpha + 1)}{k(\alpha + 3)(\alpha - 1)}, \\ \omega &= -\frac{\sigma(-2\alpha\sigma^2 + \alpha^2 - 2\sigma^2 + 6\alpha + 9)}{(\alpha + 3)^3}, \\ k &= \pm \frac{\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2}}{\alpha + 3}, \\ \alpha_1 &= -\alpha^2\sigma^2 + \alpha^3 + 2\alpha\sigma^2, \\ \alpha_2 &= 5\alpha^2 + 3\sigma^2 + 3\alpha - 9. \end{aligned} \quad (29)$$

Для набора параметров (29) решение уравнения (3) имеет вид

$$u(x, t) = \frac{A e^{-km(x - \omega t - z_0)}}{(1 + e^{-k(x - \omega t - z_0)})^p}. \quad (30)$$

где A и z_0 – произвольные константы.

На рис. 1 показана концентрация бактерий u в момент времени $t = 0$ при разных значениях параметров задачи.

На рис. 1а фиксируется параметр $\alpha = 1.5$, при небольших значениях σ видно, что начальное распределение концентрации имеет вид уединенной волны, при достижении значения $\sigma = \frac{9\sqrt{5}}{10}$ концентрация u стремится к значению 10, а при увеличении до $\sigma = 2.1$ концентрация с $z = 10$ начинает непрерывно расти. В свою очередь, на рис. 1б фиксируется параметр σ , видно, что с увеличением второго параметра увеличивается амплитуда волн.

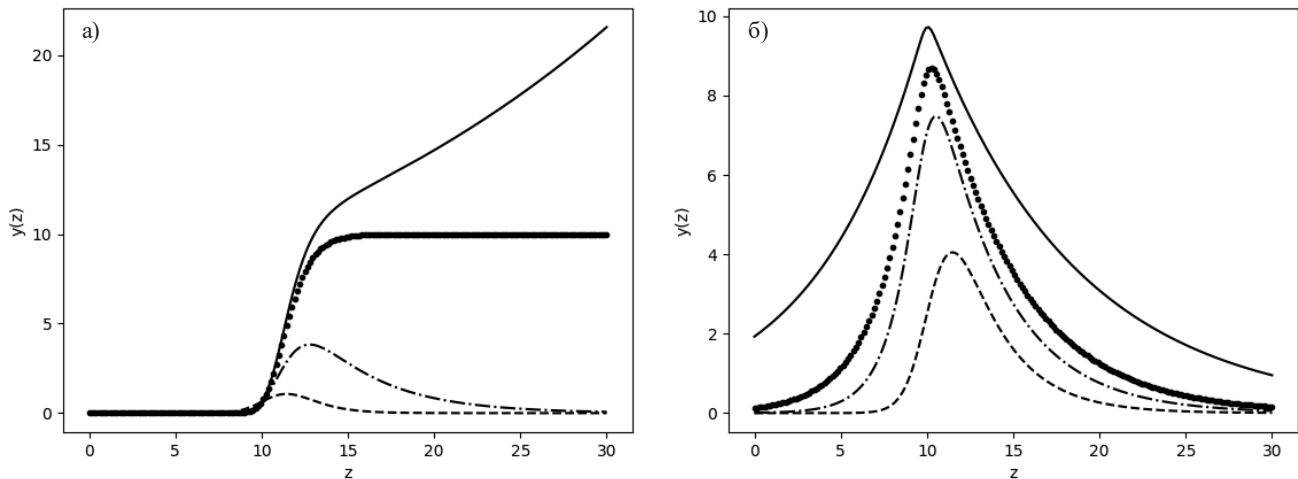


Рис. 1. График функции $u(x, t)$ (30) при $t = 0$ и при разных значениях параметров задачи: а) $\alpha = 1.5$, $\sigma = 0.7$ (график пунктиром), $\sigma = 1.5$ (график точкой запятой), $\sigma = \frac{9\sqrt{5}}{10}$ (график точечный), $\sigma = 2.1$ (график сплошной); б) $\sigma = 1.2$, $\alpha = 2.0$ (график пунктиром), $\alpha = 5.0$ (график точкой запятой), $\alpha = 10.0$ (график точечный), $\alpha = 50.0$ (график сплошной)

Тестирование численного алгоритма для проведения математического моделирования бактериальных колоний

Для тестирования предложенного численного алгоритма проводилось сравнение численного и аналитического решений для модели Чави-Вадди – Колокольникова.

На рис. 2 приведено численное моделирование процессов самоорганизации в бактериальных колониях, описываемых моделью ЧВК. На рис. 2а при $t = 0$ полученное возбуждение имеет вид уединенной волны, с течением времени (при $t = 40$, $t = 150$) на рис. 2б,в наблюдается, что уединенная волна движется справа налево, причем график численного решения имеет незначительное отклонение от графика точного решения. Погрешности, полученные при расчетах, лежат в пределах второго порядка точности по координате и времени. Это демонстрирует эффективность построенного численного алгоритма.

Моделирование процессов самоорганизации бактериальных колоний при различных параметрах задачи

Известно, что различные математические модели, основу которых составляют уравнения в частных производных, предполагают наличие регулярной динамики, описывающей самоорганизацию пространственно однородных структур из случайно распределенного начального состояния системы. К примеру, подобные явления наблюдались в задачах, описываемых обобщенным уравнением Курамото – Сивашинского [20], а также в задачах, описываемых уравнением в частных производных пятого порядка [23].

Численные эксперименты показали, что в зависимости от значения параметров α и σ модели (3) имеют место подобные процессы (рис. 3). Данный раздел посвящен исследованию влияния параметров модели на динамику эволюции системы бактериальных колоний с течением времени. Для этого

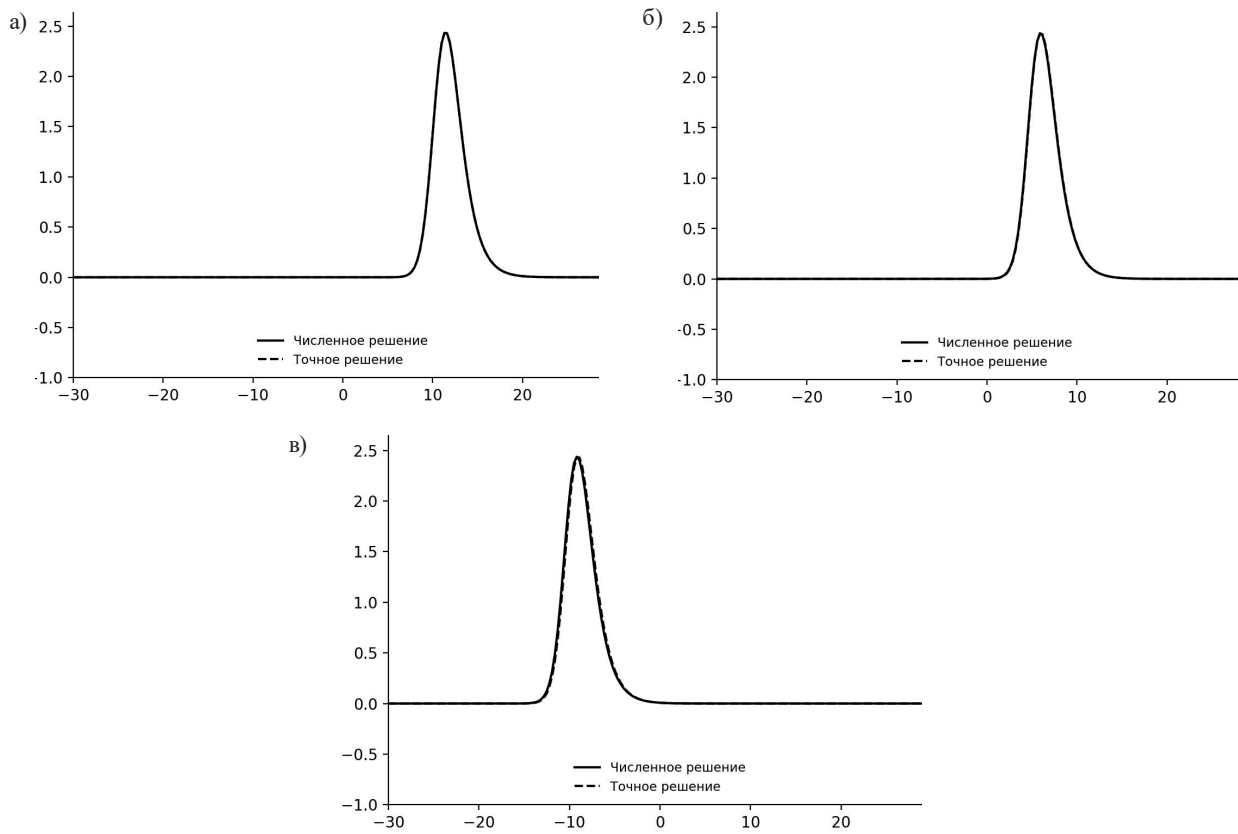


Рис. 2. Зависимость численного решения задачи (4) от координат x и времени t при $\sigma = 0.7$ и $\alpha = 1.5$, при начальном условии (4): а) при $t = 0$; б) $t = 40$; в) $t = 150$

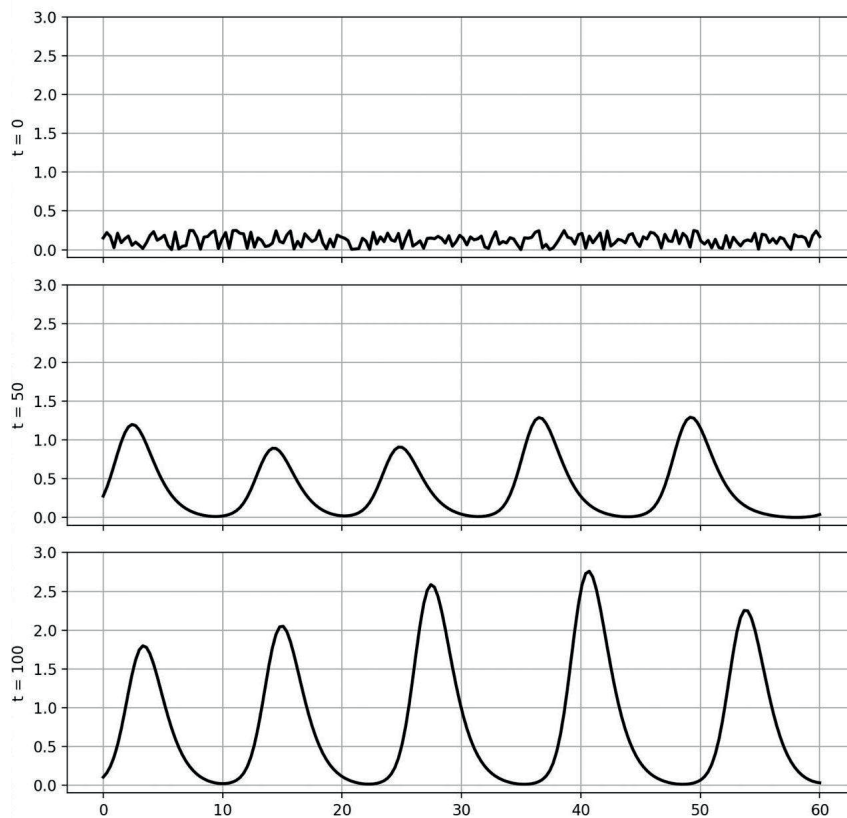


Рис. 3. Хаотическая и регулярная структуры ($\sigma = 0.7$, $\alpha = 1.5$)

в качестве начального условия $u(x, t = 0)$ используется равномерно распределенный шум амплитуды $\varepsilon = 0.25$, моделирующий случайное распределение концентрации бактерий около состояния $u(x, t = 0)$. Заданное в таком виде начальное условие довольно неплохо описывает реальные системы.

На среднем и нижнем графиках рис. 3 мы видим, что со временем становится заметным формирование регулярных волновых структур. Амплитуда колебаний подобных структур растет, а нелинейность начинает играть более значительную роль, что приводит к выделению устойчивой формы колебаний. Также с течением времени наблюдается демпфирование шума, его компонента становится менее выраженной, уступая место более крупным и плавным колебаниям. Это может быть связано с тем, что система фильтрует высокочастотные шумовые компоненты, сохраняя только низкочастотные моды. Нелинейная природа дифференциального уравнения приводит к появлению устойчивых форм колебаний даже при начальном нерегулярном возмущении.

В рамках данного исследования была построена детальная двухпараметрическая карта состояний системы, иллюстрирующая различные типы динамики в зависимости от изменения двух ключевых параметров модели α и σ на вид уравнения (3) при начальных условиях в виде равномерно распределенного шума. Исследования показали, что при $\alpha > 3.15$ возбуждения становятся неустойчивыми, и наблюдается явление взрыва волны при любых значениях σ . При фиксированном α было установлено, что при увеличении значения σ в областях с устойчивой системой скорость возрастания амплитуды волн увеличивается, как и движение волн вдоль оси x .

Полученная карта позволила наглядно выделить три качественно отличающихся области, каждая из которых характеризуется специфическими динамическими особенностями формирования и эволюции возбуждений.

Распределение изначально нерегулярное, но со временем система сама приходит к явно выраженной периодической структуре, имеющей регулярные пики (рис. 4).

Данное поведение представляет собой типичный пример пространственно-временной самоорганизации, когда случайные флуктуации упорядочиваются в регулярные пики с устойчивой амплитудой. Распределение преобразуется из хаотического в периодическое с равными амплитудами (рис. 5).

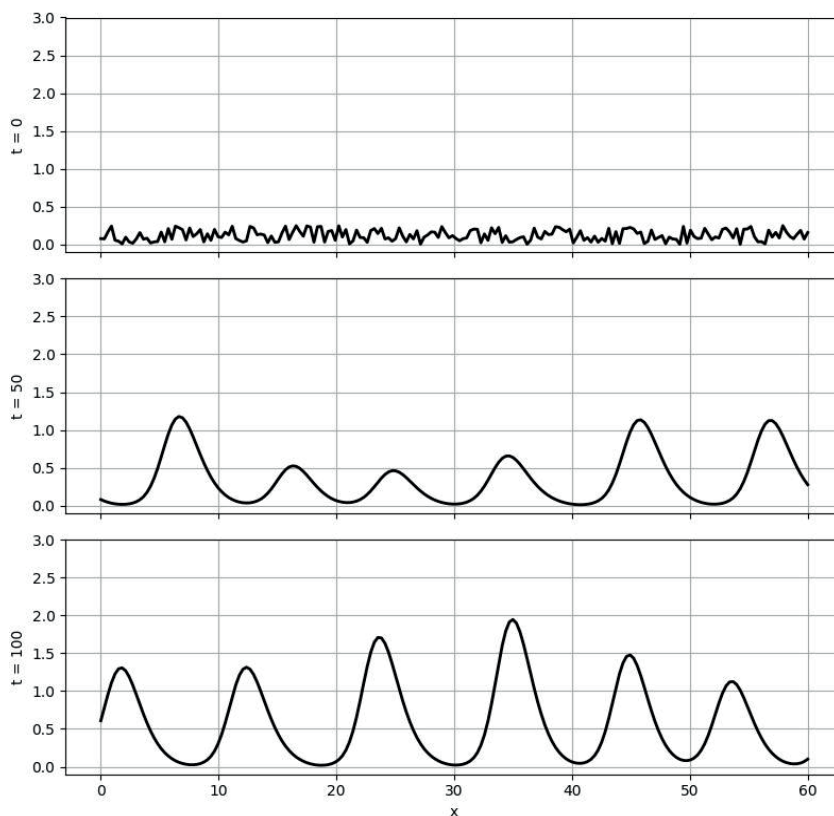


Рис. 4. Поведение системы в области 1

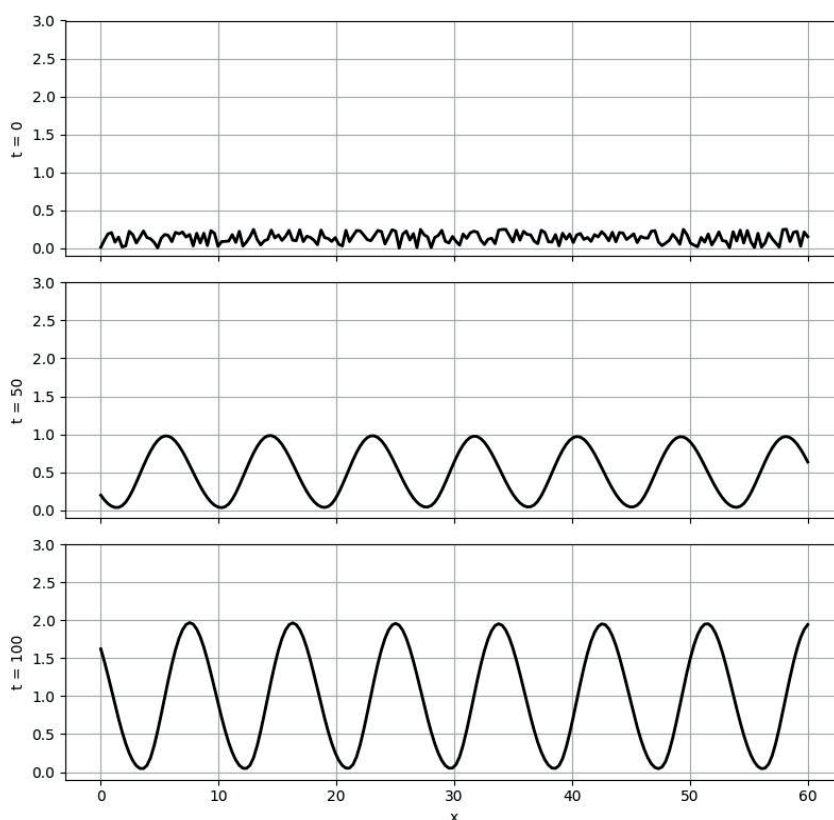


Рис. 5. Поведение системы в области 2

Здесь динамика амплитуды волн остается устойчивой и не проявляет тенденции к дальнейшему росту. Третья область описывается тем же переходом из нерегулярного состояния к периодическому, однако, в отличие от предыдущих случаев, амплитуда волн непрерывно возрастает. Такое поведение приводит к неустойчивости и, в конечном итоге, к разрушению структуры возбуждений, что можно охарактеризовать как динамическую неустойчивость, вызванную чрезмерным ростом амплитуды колебаний.

Таким образом, построенная карта (рис. 6) позволяет наглядно визуализировать и обобщить результаты численных экспериментов, предоставляя возможность качественного и количественного анализа влияния параметров σ и α на динамическое поведение системы. Это существенно упрощает идентификацию режимов стабильности и неустойчивости.

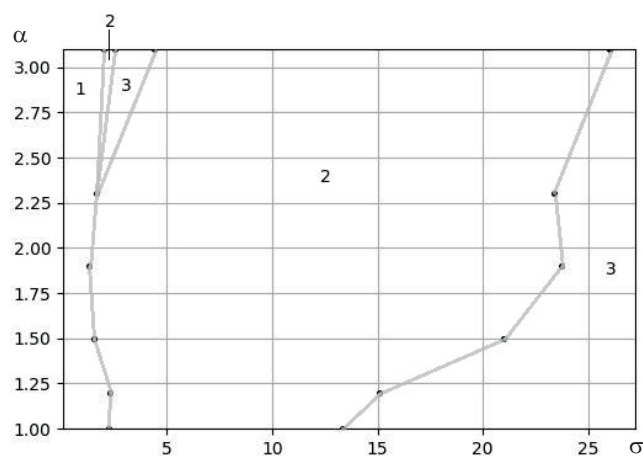


Рис. 6. Карта параметров σ и α

Численные опыты с начальным шумом показали, что высокочастотные флуктуации быстро подавляются, а система переходит к устойчивым волновым структурам, сформированным нелинейной динамикой.

Построенная карта параметров α и σ выявила три принципиальные области:

1. Нерегулярная динамика $\rightarrow$ устойчивые периодические структуры;
2. Нерегулярная динамика $\rightarrow$ устойчивая структура с пиками различной амплитуды;
3. Нерегулярная динамика $\rightarrow$ неустойчивая пространственная структура.

Порог $\alpha > 3.15$ отделяет область взрыва решения, тогда как при фиксированном α увеличение σ усиливает амплитуду волн. Эти результаты уточняют границы стабильности и подтверждают роль нелинейности в самоорганизации бактериальных колоний.

Отметим, что полученные результаты находятся в хорошем согласовании с результатами работы [19].

Финансирование

Данная работа выполнена в рамках проекта РНФ № 25-21-00417.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Вклад авторов

А.Г. Головков – проведение численных расчетов, обработка результатов, подготовка текста статьи.

П.Н. Рябов – выбор методов, разработка алгоритмов, анализ результатов.

Н.А. Кудряшов – формулировка идеи исследования, постановка задачи.

Список литературы

1. Keller E.F, Segel Lee A. Traveling bands of chemotactic bacteria: a theoretical analysis // Journal of theoretical biology, 1971. V. 30(2). P. 235–248.
2. Keller E.F, Segel Lee A. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability // Journal of theoretical biology, 1970. V. 26(3). P. 399–415.
3. Keller E.F, Segel Lee A. Model for chemotaxis // Journal of theoretical biology, 1971. V. 30(2). P. 225–234.
4. Horstmann D. From 1970 until present: the Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 2003. V. 105(3). P. 103–165.
5. Liu P, Shi J., Wang Z-A. Pattern formation of the attraction-repulsion Keller-Segel system // Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B, 2013. V. 18. № 10. P. 2597–2625.
6. Painter K. J., Hillen T. Volume-filling and quorum-sensing in models for chemosensitive movement // Canadian Applied Mathematics Quarterly journal, 2002. V. 10. № 4. P. 501–543.
7. Chavanis P-H. A stochastic Keller–Segel model of chemotaxis // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010. V. 15. № 1. P. 60–70.
8. Negreanu M., Tello J.I. Global existence and asymptotic behavior of solutions to a predator–prey chemotaxis system with two chemicals // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019. V. 474. № 2. P.1116–1131.
9. Xiang T. Sub-logistic source can prevent blow-up in the 2D minimal Keller-Segel chemotaxis system // Journal of Mathematical Physics, 2018. V. 59. Iss. 8. DOI: 10.1063/1.5018861.
10. Mar'ee A.F. M., Panfilov A.V., Hogeweg P. Phototaxis during the slug stage of Dictyostelium discoideum: a model study // Proceedings of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences, 1999. V. 266. Iss. 1426. P. 1351–1360. DOI: 10.1098/rspb.1999.0787.
11. Giometto A., Altermatt F., Maritan A., Stocker R., Rinaldo A. Generalized receptor law governs phototaxis in the phytoplankton *Euglena gracilis* // Proceedings of the National Academy of Sciences, 2015. V. 112. Iss. 22. P. 7045–7050. DOI: 10.1073/pnas.1422922112.
12. Williams C.R., Bees M.A. Photo-gyrotactic bioconvection // Journal of fluid mechanics, 2011. V. 678. P. 41–86. DOI: 10.1017/jfm.2011.100.
13. Levy D., Requeijo T. Modeling group dynamics of phototaxis: From particle systems to PDEs // Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, 2008. V. 9. Iss. 1. P. 103–128. DOI: 10.3934/dcdsb.2008.9.103.
14. Galante A., Levy D. Modeling selective local interactions with memory // Physica D, 2013. V. 260. P. 176–190. DOI: 10.1016/j.physd.2012.10.010.

15. Weinberg D., Levy D. Modeling selective local interactions with memory: Motion on a 2D lattice // *Physica D*, 2014. V. 278–279. P. 13–30. DOI: 10.1016/j.physd.2014.04.001.
16. Burriesci M., Bhaya D. Tracking phototactic responses and modeling motility of *Synechocystis* sp. strain PCC6803 // *Journal of Photochemistry and Photobiology B: Biology*, 2008. V. 91. Iss. 2–3. P. 77–86. DOI: 10.1016/j.jphotobiol.2008.01.012.
17. Bhaya D. Light matters: phototaxis and signal transduction in unicellular cyanobacteria // *Molecular microbiology*, 2004. V. 53. Iss. 3. P. 745–754. DOI: 10.1111/j.1365-2958.2004.04160.x.
18. Chavy-Waddy P.-Ch., Kolokolnikov Th. A local PDE model of aggregation formation in bacterial colonies // *Nonlinearity*, 2016. V. 29. Iss. 10. P. 3174. DOI: 10.1088/0951-7715/29/10/3174.
19. Kudryashov N.A., Kutukov A.A., Lavrova S.F. Properties of the generalized Chavy-Waddy–Kolokolnikov model for description of bacterial colonies // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2024. V. 128. P. 107645. DOI: 10.1016/j.cnsns.2023.107645.
20. Kudryashov N.A., Ryabov P.N., Petrov B.A. Dissipative structures of the Kuramoto–Sivashinsky equation // *Automatic Control and Computer Sciences*, 2015. V. 49. Iss. 7. P. 508–513. DOI: 10.3103/S0146411615070147.
21. Kudryashov N.A., Lavrova S.F. Painlevé Test, Phase Plane Analysis and Analytical Solutions of the Chavy-Waddy–Kolokolnikov Model for the Description of Bacterial Colonies // *Mathematics*, 2023. V. 11(14). P. 3203. DOI: 10.3390/math11143203.
22. Leo'n-Ram'irez A., Gonza'lez-Gaxiola O., Chaco'n-Acosta G. Analytical solutions to the Chavy-Waddy–Kolokolnikov model of bacterial aggregates in phototaxis by three integration schemes // *Mathematics*, 2023. V. 11. Iss. 10. P. 2352. DOI: 10.3390/MATH11102352.
23. Kudryashov N.A., Ryabov P. N., Fedyanin T.E., Kutukov A.A. Evolution of pattern formation under ion bombardment of substrate // *Physics Letters A*, 2013. V. 377. P. 753–759. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.01.007.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2025, vol. 14, no. 4, pp. 318–331

Investigation of self-organization processes in bacterial colonies described by the Chavi-Waddy – Kolokolnikov model equation

A. G. Golovkov[✉], P. N. Ryabov, N. A. Kudryashov

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia
[✉] gag006@campus.mephi.ru

Received June 30, 2025; revised July 24, 2025; accepted July 30, 2025

The generalized Chavi-Waddy – Kolokolnikov model used to describe the spatial and temporal dynamics of bacterial colonies is studied, taking into account possible «dispersion» – the mechanism responsible for migration and redistribution of the population in the environment. From a biological point of view, the model allows us to understand how bacterial cells, capable of collective movement, form ordered structures (e.g., clusters or waves) even in the presence of external disturbances. The main focus of the work is on the study of the dynamics of the bacterial colony system described by the generalized Chavi – Wadi – Kolokolnikov model. Thus, a numerical algorithm for mathematical modeling of these processes has been developed and its verification has been carried out on the basis of exact solutions of the model in the form of solitary waves. The influence of the problem parameters on the behavior of the bacterial colony system was investigated. In addition, the main attention in the work is paid to the study of bacterial self-organization processes, as well as to the classification of the dynamics of the system behavior for different values of the parameters of the problem under consideration.

Keywords: Modeling, differential equations, bacterial colonies, chemotaxis, phototaxis, line method, Runge-Kutta method, numerical methods.

References

1. Keller E.F, Segel Lee A. Traveling bands of chemotactic bacteria: a theoretical analysis. Journal of theoretical biology, 1971. Vol. 30(2). Pp. 235–248.
2. Keller E.F, Segel Lee A. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability. Journal of theoretical biology, 1970. Vol. 26(3). Pp. 399–415.
3. Keller E.F, Segel Lee A. Model for chemotaxis. Journal of theoretical biology, 1971. Vol. 30(2). Pp. 225–234.
4. Horstmann D. From 1970 until present: the Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 2003. Vol. 105(3). Pp. 103–165.
5. Liu P, Shi J., Wang Z-A. Pattern formation of the attraction-repulsion Keller-Segel system. Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B, 2013. Vol. 18. No. 10. Pp. 2597–2625.
6. Painter K. J., Hillen T. Volume-filling and quorum-sensing in models for chemosensitive movement. Canadian Applied Mathematics Quarterly journal, 2002. Vol. 10. No. 4. Pp. 501–543.
7. Chavanis P-H. A stochastic Keller–Segel model of chemotaxis. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010. Vol. 15. No. 1. Pp. 60–70.
8. Negreanu M., Tello J.I. Global existence and asymptotic behavior of solutions to a predator–prey chemotaxis system with two chemicals. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019. Vol. 474. No. 2. Pp. 1116–1131.
9. Xiang T. Sub-logistic source can prevent blow-up in the 2D minimal Keller-Segel chemotaxis system. Journal of Mathematical Physics, 2018. Vol. 59. Iss. 8. DOI: 10.1063/1.5018861.
10. Mar'ee A.F. M., Panfilov A.V., Hogeweg P. Phototaxis during the slug stage of Dictyostelium discoideum: a model study. Proceedings of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences, 1999. Vol. 266. Iss. 1426. Pp. 1351–1360. DOI: 10.1098/rspb.1999.0787.
11. Giometto A., Altermatt F., Maritan A., Stocker R., Rinaldo A. Generalized receptor law governs phototaxis in the phytoplankton Euglena gracilis. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2015. Vol. 112. Iss. 22. Pp. 7045–7050. DOI: 10.1073/pnas.1422922112.
12. Williams C.R., Bees M.A. Photo-gyrotactic bioconvection. Journal of fluid mechanics, 2011. Vol. 678. Pp. 41–86. DOI:10.1017/jfm.2011.100.
13. Levy D., Requeijo T. Modeling group dynamics of phototaxis: From particle systems to PDEs. Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, 2008. Vol. 9. Iss. 1. Pp. 103–128. DOI: 10.3934/dcdsb.2008.9.103.
14. Galante A., Levy D. Modeling selective local interactions with memory. Physica D, 2013. Vol. 260. Pp. 176–190. DOI: 10.1016/j.physd.2012.10.010.
15. Weinberg D., Levy D. Modeling selective local interactions with memory: Motion on a 2D lattice. Physica D, 2014. Vol. 278–279. Pp. 13–30. DOI: 10.1016/j.physd.2014.04.001.
16. Burriesci M., Bhaya D. Tracking phototactic responses and modeling motility of Synechocystis sp. strain PCC6803. Journal of Photochemistry and Photobiology B: Biology, 2008. Vol. 91. Iss. 2–3. Pp. 77–86. DOI: 10.1016/j.jphotobiol.2008.01.012.
17. Bhaya D. Light matters: phototaxis and signal transduction in unicellular cyanobacteria. Molecular microbiology, 2004. Vol. 53. Iss. 3. Pp. 745–754. DOI: 10.1111/j.1365-2958.2004.04160.x.
18. Chavy-Waddy P.-Ch., Kolokolnikov Th. A local PDE model of aggregation formation in bacterial colonies. Nonlinearity, 2016. Vol. 29. Iss. 10. Pp. 3174. DOI: 10.1088/0951-7715/29/10/3174.
19. Kudryashov N.A., Kutukov A.A., Lavrova S.F. Properties of the generalized Chavy-Waddy–Kolokolnikov model for description of bacterial colonies. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2024. Vol. 128. Pp. 107645. DOI:10.1016/j.cnsns.2023.107645.
20. Kudryashov N.A., Ryabov P. N., Petrov B. A. Dissipative structures of the Kuramoto–Sivashinsky equation. Automatic Control and Computer Sciences, 2015. Vol. 49. Iss. 7. Pp. 508–513. DOI: 10.3103/S0146411615070147.
21. Kudryashov N.A., Lavrova S. F. Painlevé Test, Phase Plane Analysis and Analytical Solutions of the Chavy-Waddy–Kolokolnikov Model for the Description of Bacterial Colonies. Mathematics, 2023. Vol. 11(14). Pp. 3203. DOI: 10.3390/math11143203.
22. Leo'n-Ram'irez A., Gonza'lez-Gaxiola O., Chaco'n-Acosta G. Analytical solutions to the Chavy-Waddy–Kolokolnikov model of bacterial aggregates in phototaxis by three integration schemes. Mathematics, 2023. Vol. 11. Iss. 10. Pp. 2352. DOI: 10.3390/MATH11102352.
23. Kudryashov N.A., Ryabov P. N., Fedyanin T.E., Kutukov A.A. Evolution of pattern formation under ion bombardment of substrate. Physics Letters A, 2013. Vol. 377. Pp. 753–759. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.01.007.

УДК 004.81

Гибридный подход на основе когнитивного картирования и регрессионного анализа для прогнозирования в сложных слабо формализованных системах

© 2025 г. Р. М. Романов, А. И. Гусева

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

В статье представлен оригинальный гибридный подход, объединяющий нечеткие когнитивные карты и регрессионный анализ для прогнозирования в слабо формализованных системах, характеризующихся высокой степенью неопределенности и сложными, неструктурированными взаимосвязями между переменными. Основная идея подхода заключается в использовании экспертных оценок, выраженных через лингвистические переменные и нечеткие числа, для адаптации весовых коэффициентов регрессионной модели. Полученные веса, рассчитанные на основе когнитивного анализа, интегрируются в процедуру многопараметрической линейной регрессии с использованием взвешенного метода наименьших квадратов. Это позволяет повысить точность прогнозов и улучшить интерпретируемость модели. Результаты эмпирического исследования, проведенного в статистической среде R , демонстрируют, что предложенный подход превосходит ($MAPE = 10.21\%$) не только классические одиночные методы прогнозирования, такие как линейная регрессия ($MAPE = 3.80\%$), а также нейросетевые подходы, например, многослойный персептрон ($MAPE = 31.24\%$), но и успешно конкурирует с ансамблевыми методами, включая случайный лес ($MAPE = 12.35\%$) и градиентный бустинг ($MAPE = 7.75\%$). Данный подход может быть успешно применен для прогнозирования объемов поставок газа в Китай, а также для решения других задач, требующих интеграции качественных и количественных данных.

Ключевые слова: нечеткая когнитивная карта, нечеткие числа, регрессионный анализ, прогнозирование, слабо формализованные системы, экспертная оценка.

Введение

Прогнозирование в слабо формализованных системах, таких как топливно-энергетический комплекс, сопряжено с высокой степенью неопределенности, неполнотой данных и трудностями формализации экспертных знаний. Современные модели, включая регрессионные и нейросетевые, при всей точности демонстрируют низкую интерпретируемость и ограниченную способность учитывать качественные характеристики.

В данной работе обосновывается гибридный подход, основанный на интеграции нечетких когнитивных карт (далее – НКК) и регрессионного анализа. НКК позволяют формализовать причинно-следственные связи с учетом нечеткости экспертных оценок, в то время как регрессионная модель обеспечивает количественное уточнение прогнозов. Особое внимание уделено передаче весов из системы НКК в структуру регрессионной модели.

Цель исследования – разработка и обоснование прогностического подхода, адаптированного к условиям неопределенности и слабо формализованной системы.

✉ Р.М. Романов: Rodion.Romanov.M@yandex.com

А.И. Гусева: aiguseva@mephi.ru

Поступила в редакцию: 30.06.2025

После доработки: 15.07.2025

Принята к публикации: 22.07.2025

EDN SPPAWL

Эмпирическая проверка выполнена в среде статистического анализа *R* (версия 4.3.3), что обеспечивает воспроизводимость результатов и соответствует современным требованиям исследовательской практики. Сравнительный анализ демонстрирует превосходство предлагаемого подхода по точности и интерпретируемости прогнозов по сравнению с традиционными методами.

Методы исследования

Нечеткие когнитивные карты

Когнитивная карта представляет собой формализованную модель знаний экспертов о свойствах и закономерностях развития изучаемой системы, формально описываемую в виде ориентированного знакового графа [1]. В когнитивной карте факторы отображаются узлами, а причинно-следственные отношения между ними – направленными связями. При построении нечеткой когнитивной карты взаимодействие факторов в рассматриваемой системе формализуется в виде направленного взвешенного графа [1, 3, 5, 7]:

$$G = \langle C, E \rangle, \quad (1)$$

где C – множество узлов, соответствующих ключевым параметрам (факторам); E – совокупность дуг, описывающих причинно-следственные связи между ними.

Каждой дуге $(C_i, C_j) \in E$ приписывается вес $w_{ij} \in [-1, 1]$, численно выражающий характер и силу влияния одного фактора на другой. Значения весов формируются на основе экспертных суждений, заданных в виде лингвистических переменных (например, «умеренное положительное», «значительное отрицательное»), которые затем дефазифицируются методом центра тяжести [1]:

$$z = \frac{\sum \mu(x_i) \cdot x_i}{\sum \mu(x_i)}, \quad (2)$$

где $\mu(x_i)$ – степень принадлежности функции принадлежности, x_i – значение.

Интерпретация весов, следующая:

$w_{ij} > 0$ – положительное влияние (усиление C_j при росте C_i);

$w_{ij} < 0$ – отрицательное влияние (ослабление C_j при росте C_i);

$w_{ij} = 0$ – отсутствие прямого влияния (C_i на фактор C_j).

Для исключения противоречий при передаче влияний между факторами используется механизм согласованности. Коэффициент совместимости $c_{ij} \in [0, 1]$, рассчитываемый по формуле

$$c_{ij} = \frac{v_{ij}^+}{v_{ij}^+ + v_{ij}^-}, \quad (3)$$

отражает уровень согласия между влияющим и принимающим факторами. Здесь v_{ij}^+ и v_{ij}^- – положительные и отрицательные компоненты консонанса, отражающие степень согласованности C_i на C_j .

Собственно балансировка выполняется с помощью медианного оператора [2]:

$$C_j = \text{med}(C_i, w_{ij}; c_{ij}), \quad (4)$$

где влияние передается от C_i на C_j , w_{ij} – вес, а c_{ij} – коэффициент совместимости, определяемый по формуле (3).

Значение же концепта C_j , на которое передаются непосредственные влияния с нескольких концептов $C_i, i = 1, \dots, N$, зависит от порядка просмотра степеней совместимости c_{ij} , обуславливающего очередность их аккумуляции, например, от меньших к большим.

Такой механизм обеспечивает фильтрацию несогласованных воздействий и гарантирует согласованность структуры факторов при распространении влияний.

Регрессия

Построение многопараметрической регрессионной модели включает серию этапов, направленных на выявление зависимости между прогнозируемой переменной Y и множеством факторов $X_1, X_2, \dots, X_N$. Общая форма линейной модели имеет вид [4]:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_N X_N + \varepsilon, \quad (5)$$

где $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$ – коэффициенты регрессии, подлежащие определению на основе данных, ε – случайная ошибка, предполагаемая нормально распределенной.

Первоначально формируется репрезентативная обучающая выборка, проводится обработка пропусков (средними, медианой, kNN, GMM и др.), проверяется применимость регрессии: отсутствуют мультиколлинеарность и вырожденность матрицы X . Оценка параметров производится методом наименьших квадратов (МНК):

$$\hat{\Theta}_{\text{МНК}} = (X^T X)^{-1} X^T Y, \quad (6)$$

что позволяет минимизировать сумму квадратов отклонений между предсказанными и фактическими значениями.

Для повышения устойчивости моделей применяются взвешенные (WLS), обобщенные (GLS), робастные (LAD) модификации, а также регуляризация (Ridge, Lasso) и жадные методы отбора признаков (Forward/Backward Selection) [6]. Эти подходы уменьшают дисперсию оценок при наличии мультиколлинеарности и улучшают обобщающую способность моделей. Качество модели оценивается по остаткам, которые должны соответствовать условиям нормальности, гомоскедастичности и отсутствия автокорреляции (например, по критерию Дарбина – Уотсона). Дополнительно рассчитываются метрики: R^2 , $Adjusted R^2$, MSE , MAE , $RMSE$ [8].

Результаты

Проведем сравнительный анализ классических ансамблевых и нейросетевых методов и предложенной гибридной подходе, основанной на НКК в сочетании с многофакторной регрессией для прогнозирования объема поставок газа в Китай ежемесячно на 2023 г. (рис. 1 и табл. 1).

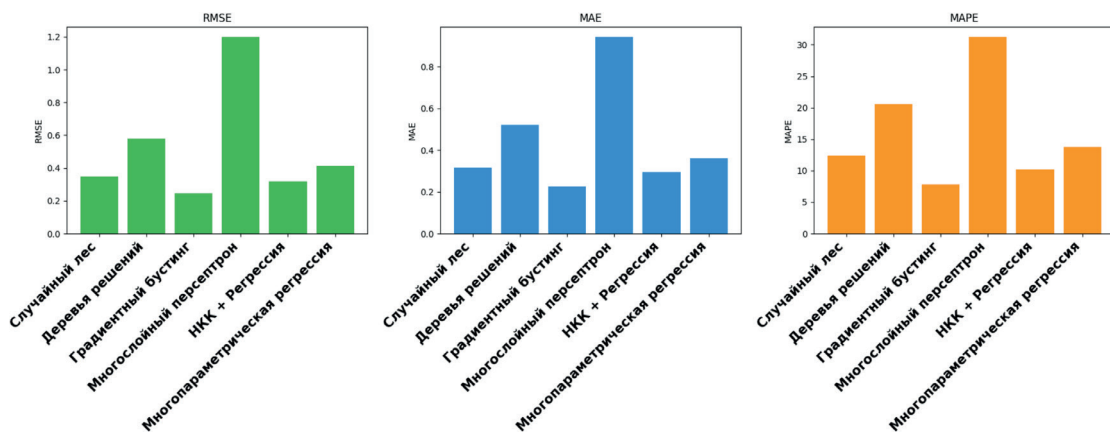


Рис. 1. Сравнительный анализ значений метрик классических ансамблевых подходов, нейросетевых методов нечеткой когнитивной карты и регрессионного анализа

Таблица 1. Сравнение классических ансамблевых подходов, нечеткой когнитивной карты и регрессионного анализа

Модель	RMSE	MAE	MAPE (%)
Случайный лес	0.351	0.317	12.35
Деревья решений	0.577	0.522	20.52
Градиентный бустинг	0.246	0.226	7.75
Многослойный персептрон (MLP)	1.200	0.943	31.24
НKK и регрессия	0.318	0.297	10.21
Многофакторная регрессия	0.4123	0.3625	13.80

Для проведения прогноза набор данных содержит 48 наблюдений – ежемесячные значения с января 2019 по декабрь 2022 г. В качестве прогнозируемой целевой переменной выступал объем совокупных поставок газа из РФ в Китай.

В качестве факторов, потенциально влияющих на динамику объема, были выбраны как внутренние, так и внешние индикаторы, способные отражать экономические, энергетические и политические условия.

Для всех переменных была предварительно проведена нормализация. Для моделирования использовались как классические методы машинного обучения, так и предложенная гибридная модель на основе нечеткой когнитивной карты и регрессии.

Исследование проводилось в специальной среде статистического анализа данных *R* версии 4.3.3, с использованием следующих пакетов:

randomForest – для случайного леса (500 деревьев, mtry = 3);
 rpart – для дерева решений;
 gbm – для градиентного бустинга (n.trees = 100, depth = 3, shrinkage = 0.05);
 nnet – для MLP с одним скрытым слоем (5 нейронов);
 lm (встроенная функция в *R*) – для многофакторной регрессии.

Погрешность вычислений в табл. 1 составляет в среднем $\pm 5\%$ при уровне доверия 95 %, что обусловлено вариативностью оценок качества моделей в рамках процедур перекрестной валидации.

Согласно экспериментальным результатам (см. рис. 1 и табл. 1), модель НKK продемонстрировала значение средней абсолютной процентной ошибки (*MAPE*), сопоставимое с градиентным бустингом (10.2 % против 7.75 %) на уровне погрешности вычисления, а также существенно более низкие значения по сравнению с деревьями решений (20.5 %) и многослойным персептроном (31.2 %). Аналогичные выводы можно сделать на основании сравнимых значений средней абсолютной ошибки (*MAE*) и корня средней квадратичной ошибки (*RMSE*), что подтверждает высокую точность гибридной модели при общем улучшении интерпретируемости.

Обсуждение результатов

Полученные экспериментальные результаты показывают, что предложенная гибридная модель (НKK + регрессионный анализ) обеспечивает более высокую точность прогнозирования по сравнению с традиционными методами машинного обучения. В частности, гибридный подход показывает конкурентоспособные результаты при сравнении с ансамблевыми моделями (случайный лес, градиентный бустинг) и значительно превосходит отдельные методы, такие как деревья решений, многослойный персептрон и многофакторная регрессия. Например, другой современный подход сочетает НKK первого уровня с нейросетевыми моделями (MLP/LSTM) на втором уровне для анализа сложных многомерных временных рядов для задачи прогнозирования энергопотребления [9]. В этом подходе данные группируются в кластеры, и на каждом кластере строятся нейросети. Результаты данного исследования показывают, что лучшие LSTM-модели второго уровня дают очень низкую ошибку: например, для одного кластера получены $MSE = 0.0013$, $MAE = 0.0277$. Авторы подчеркивают, что предложенная вложенная структура обеспечила более низкие *MAE* и *MSE* по сравнению с классической НKK и обычными ANN [9]. Иными словами, гибридный НKK + MLP/LSTM продемонстрировал высокую точность прогнозирования энергопотребления, превосходя отдельные FCM-модели и классические сети по *MSE* и *MAE*. Таким

образом, экспериментальные выводы подтверждают, что гибридный подход обеспечивает значительное преимущество по метрикам качества прогноза.

Практическая значимость предлагаемого подхода особенно очевидна при прогнозировании объема поставок газа в Китай. Как отмечено в литературе, прогнозирование индикаторов спроса и предложения природного газа является важной опорой для принятия стратегических решений органами управления и энергетическими компаниями. В условиях устойчивого роста газового потребления в Китае и реализации масштабных энергетических программ точное прогнозирование объема потребления природного газа приобретает особую важность [10]. Гибридный метод объединяет количественные методы регрессионного анализа и экспертные знания, позволяет учесть широкий спектр влияющих факторов (экономический рост, демографию, сезонность потребления, политические и климатические риски и т.д.) и, следовательно, повышает обоснованность прогнозных оценок. Это делает подход особенно полезным для планирования инфраструктурных проектов и мониторинга динамики импорта сжиженного и трубопроводного газа. Метод имеет и ограничения. В НКК требуются ручное формализация концептов и задание весов влияния экспертами, что вносит субъективность и возможные погрешности в модель [11]. Неточность или неполнота экспертных оценок может существенно исказить результат прогноза. Для уменьшения влияния такой субъективности применяются статистические методы обработки экспертных данных (например, метод наименьших квадратов), однако полностью устранить эти погрешности сложно [12, 13]. Кроме того, настройка численных параметров модели (весов связей, пороговых функций активации и др.) часто требует итеративной калибровки или эвристических алгоритмов (например, генетической оптимизации), что усложняет применение метода при большом числе факторов и связей. Эти факторы ограничивают масштабируемость подхода и требуют щепетильности при выборе экспертов и валидации весов НКК.

Перспективными направлениями дальнейших исследований могут стать динамическая калибровка весовых связей и интеграция с другими ИИ-методами. Стоит исследовать методы адаптации весов НКК на основе данных. В литературе предложены различные алгоритмы обучения весов (от правил Хебба до эволюционных методов), позволяющие автоматически корректировать параметры НКК по результатам наблюдений [14]. Наконец, интересен путь комбинирования НКК с современными архитектурами глубокого обучения. Недавно были предложены гибридные структуры, объединяющие когнитивные сети (расширенные НКК) с нейросетевыми модулями (CNN, ESN, автоэнкодерами и др.), которые демонстрируют качество прогнозирования не хуже или лучше по сравнению с классическими глубокими нейросетями [14]. Анализ подобных гибридных архитектур может открыть новые возможности повышения точности и адаптивности прогнозов в слабо формализованных системах.

Финансирование

Авторы заявляют об отсутствии источников финансирования.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Вклад авторов

Р.М. Романов – выполнение экспериментальных работ, обработка результатов; проведение численных расчетов; выбор методов исследования; подготовка текста статьи.

А.И. Гусева – постановка задачи и целей исследования.

Список литературы

1. Кулинич А.А. Систематизация когнитивных карт и методов их анализ // Труды VII Международной конференции «Когнитивный анализ и управление развитием ситуаций (CASC'2007)». М.: ИПУ РАН, 2007. С. 50–56.
2. Борисов В.В., Федулов А.С. «Совместимые» нечеткие когнитивные карты // Системы компьютерной математики и их приложения, 2016. № 17. С. 41–43.

3. Axelrod R. Structure of decision: The cognitive maps of political elites. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1976. 422 p.
4. Арутюнов А.Л., Иванюк В.А., Цвиркун А.Д. Разработка инструментальных средств прогнозирования в социально-экономических системах // Управление развитием крупномасштабных систем, 2015. С. 241–293.
5. Kosko B. Fuzzy cognitive maps // International journal of man-machine studies, 1986. V. 24. № 1. P. 65–75.
6. Eng K., Chen Y. Y., Kiang J. E. User's guide to the weighted-multiple-linear-regression program (WREG version 1.0) // US Geological Survey Techniques and Methods, 2009. book 4, A8, 21 p.
7. Романов Р.М., Гусева А.И. Прогнозирование с использованием нечетких когнитивных карт и экспертной информации // GSOM Economy and Management conference 2024. Conference book. St. Petersburg, SPSU, 2024. P. 399–406.
8. Бабешко Л.О., Орлова И.В. Эконометрика и эконометрическое моделирование в Excel и R: учебник. М.: ИНФРА-М, 2025. 300 с.
9. Poczetka K., Papageorgiou E.I. Energy use forecasting with the use of a nested structure based on fuzzy cognitive maps and artificial neural networks // Energies, 2022. V. 15. № 20. P. 7542.
10. De G., Gao W. Forecasting China's natural gas consumption based on AdaBoost-particle swarm optimization-extreme learning machine integrated learning method // Energies, 2018. V. 11. № 11. P. 2938.
11. Christodoulou P., Christoforou A., Andreou A.S. A hybrid prediction model integrating fuzzy cognitive Maps with Support vector machines // International Conference on Enterprise Information Systems. SCITEPRESS, 2017. V. 2. P. 554–564.
12. Ротштейн А.П. Нечеткие когнитивные карты в анализе надежности систем // Надежность, 2019. Т. 19. № 4. С. 24–31.
13. Подгорская С.В. и др. Построение нечетких когнитивных моделей социально-экономических систем на примере модели управления комплексным развитием сельских территорий // Бизнес-информатика, 2019. Т. 13. № 3. С. 7–19.
14. Karatzinis G.D. et al. Fuzzy cognitive networks in diverse applications using hybrid representative structures // International Journal of Fuzzy Systems, 2023. V. 25. № 7. P. 2534–2554.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2025, vol. 14, no. 4, pp. 332–338

Hybrid approach based on cognitive mapping and regression analysis for forecasting in complex weakly formalized systems

R. M. Romanov[✉], A. I. Guseva[✉]

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409, Russia

✉ Rodion.Romanov.M@yandex.com

✉ aiguseva@mephi.ru

Received June 30, 2025; revised July 15, 2025; accepted July 22, 2025

The article presents an original hybrid approach that integrates fuzzy cognitive maps and regression analysis for forecasting in weakly formalized systems characterized by high levels of uncertainty and complex, unstructured interrelationships among variables. The core idea of the approach lies in utilizing expert judgments, expressed through linguistic variables and fuzzy numbers, to adapt the weighting coefficients of the regression model. The weights obtained from cognitive analysis are incorporated into the procedure of multiparametric linear regression using the weighted least squares method. This integration enhances both the accuracy of forecasts and the interpretability of the model. The results of an empirical study conducted in the R statistical environment demonstrate that the proposed approach outperforms (MAPE = 10.21%) not only classical single forecasting methods, such as linear regression (MAPE = 13.80%) and neural network models, e.g., the multilayer perceptron (MAPE = 31.24%), but also successfully competes with ensemble methods, including random forest (MAPE = 12.35%) and gradient boosting (MAPE = 7.75%). The proposed approach can be effectively applied to forecasting natural gas supply volumes to China, as well as to solving other tasks that require the integration of qualitative and quantitative data.

Keywords: fuzzy cognitive map; fuzzy numbers; regression analysis; forecasting; weakly formalized systems; expert judgment.

References

1. *Kulinich A.A.* Sistematizaciya kognitivnyh kart i metodov ih analiz [Systematization of cognitive karting and methods of analysis]. Trudy VII Mezhdunarodnoj konferencii «Kognitivnyj analiz i upravlenie razvitiem situacij (CASC'2007)» [Proceedings of the VII International Conference «Cognitive Analysis and Business Development Management (CASC'2007)»]. Moscow, IPU RAN Publ., 2007. Pp. 50–56 (in Russian).
2. *Borisov V.V., Fedulov A.S.* «Sovmestimye» nechetkie kognitivnye karty [«Compatible» fuzzy cognitive maps]. Sistemy komp'yuternoj matematiki i ih prilozheniya, 2016. No. 17. Pp. 41–43 (in Russian).
3. *Axelrod R.* Structure of decision: The cognitive maps of political elites. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1976. 422 p.
4. *Arutyunov A.L., Ivanyuk V.A., Tsvirkun A.D.* Razrabotka instrumental'nyh sredstv prognozirovaniya v social'no-ekonomicheskikh sistemah [Development of forecasting tools in socio-economic systems]. Upravlenie razvitiem krupnomasshtabnyh sistem, 2015. Pp. 241–293 (in Russian).
5. *Kosko B.* Fuzzy cognitive maps. International Journal of Human-Machine Research, 1986. Vol. 24. No. 1. Pp. 65–75.
6. *Eng K., Chen Y.Y., Kiang J.E.* User's guide to the weighted-multiple-linear-regression program (WREG version 1.0). US Geological Survey Techniques and Methods, 2009. book 4, A8, 21 p.
7. *Romanov R.M., Guseva A.I.* Prognozirovanie s ispol'zovaniem nechotkih kognitivnyh kart i ekspertnoj informacii [Forecasting using fuzzy cognitive maps and expert information]. GSOM Economy and Management conference 2024. Conference book. St. Petersburg, SPSU Publ., 2024 Pp. 399–406 (in Russian).
8. *Babenko L.O., Orlova I.V.* Ekonometrika i ekonometricheskoe modelirovanie v Excel i R: uchebnik [Computer graphics and computer modeling in Excel and R: textbook]. Moscow, INFRA-M Publ., 2025. 300 p.
9. *Pocheta K., Papageorgiu E.I.* Forecasting energy consumption using a nested structure based on fuzzy cognitive maps and artificial neural networks. Energy, 2022. Vol. 15. No. 20. P. 7542.
10. *De G., Gao U.* Forecasting natural gas consumption in China based on the integrated learning method AdaBoost-particle swarm optimization-extreme learning machine. Energy, 2018. Vol. 11. No. 11. P. 2938.
11. *Christodoulou P., Christoforou A., Andreu A.S.* Hybrid forecasting model integrating fuzzy cognitive maps with support vector methods. International Conference on Corporate Information Systems. SCITEPRESS, 2017. Vol. 2. Pp. 554–564.
12. *Rotstein A.P.* Nechetkie kognitivnye karty v analize nadezhnosti sistem [Fuzzy cognitive maps in the analysis of system reliability]. Nadezhnost', 2019. Vol. 19. No. 4. Pp. 24–31 (in Russian).
13. *Podgorskaya S.V., et al.* Postroenie nechetkih kognitivnyh modelej social'no-ekonomicheskikh sistem na primere modeli upravleniya kompleksnym razvitiem sel'skih territorij [Building fuzzy cognitive models of socio-economic systems using the example of a management model for integrated rural development]. Biznes-informatika, 2019. Vol. 13. No. 3. Pp. 7–19 (in Russian).
14. *Karatsinis G.D. et al.* Fuzzy cognitive networks in various applications using hybrid representative structures. International Journal of Fuzzy Systems, 2023. Vol. 25. No. 7. Pp. 2534–2554.

УДК 004.942

Генеративно-сопоставительная нейронная сеть для моделирования шумовых характеристик источников тока

© 2025 г. А. Г. Попов^{1,2}

¹ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Москва, 117303, Россия

² Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный научно-исследовательский институт химии и механики» им. Д.И. Менделеева, Москва, 115487, Россия

В статье представлен новый подход к моделированию шумов напряжения химических источников тока с целью аугментации наборов данных. Для решения задачи моделирования шумов напряжения литий-ионных аккумуляторов впервые предложен метод на основе генеративно-сопоставительной нейронной сети с использованием слоев LSTM. Приведен краткий статистический и спектральный анализ флуктуаций реальных сигналов напряжения источников тока. На его основе проведено качественное и количественное исследование синтетических сигналов. Показано, как разметка сгенерированных данных при помощи глубокой нейронной сети позволяет проводить генерацию шумовых характеристик для заданной степени заряженности элемента. Приведены рекомендации по применению предложенного алгоритма для усовершенствования методов интерпретации флуктуаций напряжения источников тока и дана экспериментальная оценка эффективности его применения: снижение ошибки определения степени заряженности элемента с 6.8 до 4.9 %.

Ключевые слова: генеративно-сопоставительные нейронные сети, химические источники тока, спектральная плотность мощности, шум напряжения.

Введение

С увеличением приходящихся на литий-ионные химические источники тока (ХИТ) мощностей растет необходимость в их эффективной и безопасной эксплуатации. Решение данной задачи невозможно без достоверной и полной информации о состоянии элементов: степени заряженности (*State of Charge, SoC*), остаточной емкости, оставшемся числе рабочих циклов.

Последние успехи в машинном обучении ускорили развитие основанных на больших данных техник определения состояния литий-ионных аккумуляторов [1–3]. Одними из активно развивающихся в последние годы методов контроля литий-ионных источников тока, использующими как методы машинного обучения, так и модели внутреннего поведения ХИТ, являются алгоритмы расширенного фильтра Калмана [4–6]. Для их точности важна информация не только о собственных электрохимических шумах источников тока (глубоко изученных в последние годы Е.В. Астафьевым [7–10]), но и о шумах системы измерения и нелинейностях разрядных кривых ХИТ [1]. Современные алгоритмы на основе расширенного фильтра Калмана, в том числе применяющие методы машинного обучения [6], требуют информацию о виде распределения, среднем, дисперсии и ковариации шумов контролируемой системы.

Важность выделенных параметров сигнала дополнительно подтверждается попытками напрямую связать характеристики нелинейности разрядной кривой и шумы напряжения литий-ионных аккумуля-

✉ А. Г. Попов: popov.ag@phystech.edu

Поступила в редакцию: 11.07.2025

После доработки: 25.07.2025

Принята к публикации: 30.07.2025

EDN VUYXVI

торов с его зарядовым состоянием [11 – 13]. Применение методов кластеризации и глубоких нейронных сетей для анализа флуктуаций сигнала может позволить повысить точность в определении *SoC* при помощи данных подходов [12].

Как известно, эффективность применения машинного обучения напрямую зависит от количества доступных данных [22]. В случае методов контроля состояния источников тока по его электрохимическим шумам объем доступных данных ограничен высокими требованиями к точности измерительного оборудования и условиям постановки эксперимента [8 – 11].

Поскольку значимая часть информации содержится в статистических и спектральных характеристиках флуктуаций сигнала, то обычные способы увеличения обучающего набора данных (аугментации) за счет добавления случайных помех и применения аффинных преобразований неэффективны. Ставится задача создания и валидации нового метода моделирования шумов напряжения литий-ионных ХИТ.

1. Материалы и методы

Для решения поставленной задачи генерации стохастических сигналов напряжения мы предлагаем новый метод моделирования шумовых характеристик источников тока, основанный на применении генеративно-состязательной нейронной сети (так называемой GAN – generative adversarial network). Данный тип алгоритмов был впервые предложен в 2014 г. Яном Гудфеллоу и другими в работе [16]. С тех пор GAN-модели нашли широчайшее применение в задачах генерации сигналов: изображений [17, 18], текстов [19, 20], музыки [21, 22]. В последние годы в ряде работ [23, 24] была показана эффективность применения GAN для решения задач генерации данных о функционировании химических источников тока. В данной работе выбранный тип алгоритмов впервые специально применяется для получения синтетических данных о стохастических процессах в электрохимических системах.

Суть генеративно-состязательной нейронной сети (GAN) заключается в соревновании двух нейронных сетей: генератора G и дискриминатора D . Сеть-генератор обучается создавать синтетические данные, неотличимые от реальных, сеть-дискриминатор – отличать сгенерированные данные от экспериментальных. При этом в ходе обучения генератор и дискриминатор оптимизируют не только свои внутренние параметры, но и параметры друг друга при помощи обратного распространения ошибки. Таким образом, в ходе соревнования происходит обучение всей системы, позволяющее ей производить данные, все более похожие на реальные значения. Блок-схема работы генеративно-состязательной сети приведена на рис. 1.

На вход сети генератора подается случайный сигнал ξ с некоторым заранее определенным распределением $P(\xi_i)$. Для генерации сигнала источников тока типично используются нормально распределенные случайные величины с $P(\xi_i) = N(0,1) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-\frac{(\xi_i)^2}{2}}$ – гауссов шум [17]. В процессе работы

сеть-генератор решает задачу регрессии; возвращаемые значения $x_g = x_g(\xi)$ совпадают по размерности с подаваемыми на вход дискриминатора реальными данными x_r .

Получая на вход реальные и синтетические данные дискриминатор решает задачу бинарной классификации, т.е. он должен возвращать близкое к 0 значение для поступивших на вход сгенерированных данных и близкое к 1 – для реальных. В общем случае для этого используется сигмоидальная функция

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-(y_d(x))}}, \quad (1)$$

где $y_d(x)$ – некоторая функция отклика сети дискриминатора на сигнал x до сигмоидальной активации.

С ростом подобия сгенерированных и реальных сигналов в процессе обучения целевые функции генератора и дискриминатора D и G стремятся к $\frac{1}{2}$. Итоговая целевая функция $V(D, G)$ простой GAN-модели выглядит следующим образом:

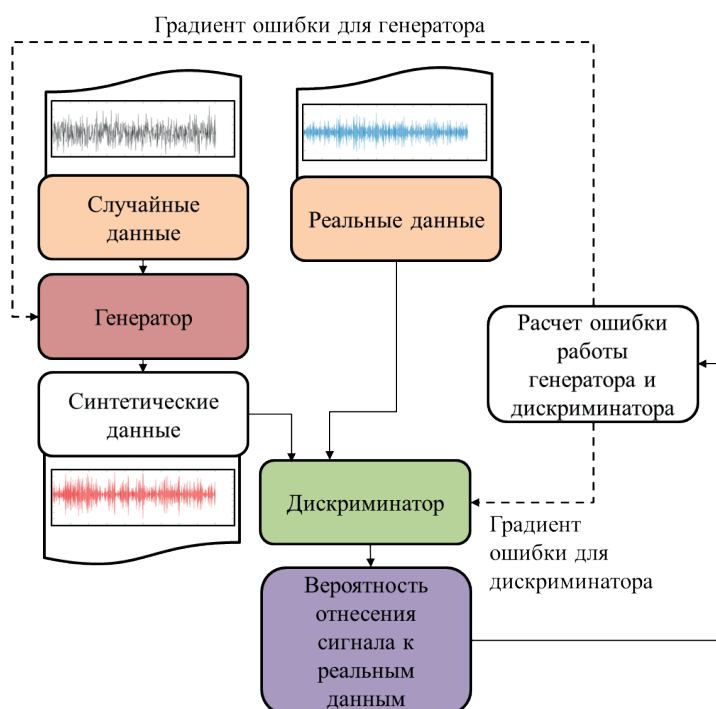


Рис. 1. Схема работы генеративно-сопоставительной сети

$$V(D, G) = -(\log(D) + \log(1 - G)), \quad (2)$$

а функция потерь:

$$Loss = 1 - V. \quad (3)$$

В силу уже известных особенностей сигнала шумов источников тока мы предлагаем использовать в GAN комбинацию сверточных слоев и слоев с долгой краткосрочной памятью. Применение LSTM-слоев позволит снизить влияние взрывов и затуханий градиентов при работе с разреженными сигналами. Использование сверточных слоев же предположительно позволит воспроизвести частотные особенности сигналов. Архитектура, включающая в себя усреднение выходов нескольких слоев, позволит снизить ошибку дискриминатора при классификации стохастических сигналов.

После обучения GAN-сети предлагается применить разметку полученных данных по степени заряда аккумулятора при помощи предобученной сети, основанной на описанной в [20] архитектуре, и проверить эффективность применения предложенного метода для аугментации данных. При этом следует провести анализ сгенерированных данных, чтобы определить степень их сходства с реальными сигналами и между собой.

Требования используемой для разметки сети к входным данным и стремление использовать сгенерированные данные для определения SoC аккумулятора требуют разбиения разрядной кривой на небольшие (менее 5 % ΔSoC) фрагменты и предварительной обработки каждого из них.

2. Методика получения экспериментальных данных

Измерительный стенд и программное обеспечение для управления им были основаны на подробно описанных в работе [12]. Были исследованы литий-кобальт-диоксидные аккумуляторы типоразмера 18650 емкостью 2.2 А·ч («АО Энергия ICR 19/66»). Данные аккумуляторы представляют собой цилиндрические ячейки с номинальным напряжением 3.7 В. Исследования проводились в пределах 500 заряд-разрядных циклов, что составляет заявленный срок службы для данных аккумуляторов. Степень заряда аккумулятора SoC определялась при помощи интегрирования по току как

$$SoC(T) = SoC_0 - 100 \% \cdot \int_T \frac{I(t)}{Q_0} dt. \quad (4)$$

Примеры экспериментально полученных зависимостей шумов напряжения от состояния заряда (SoC , *state of charge*) исследуемых аккумуляторов при разных режимах разряда и температуре приведены на рис. 2.

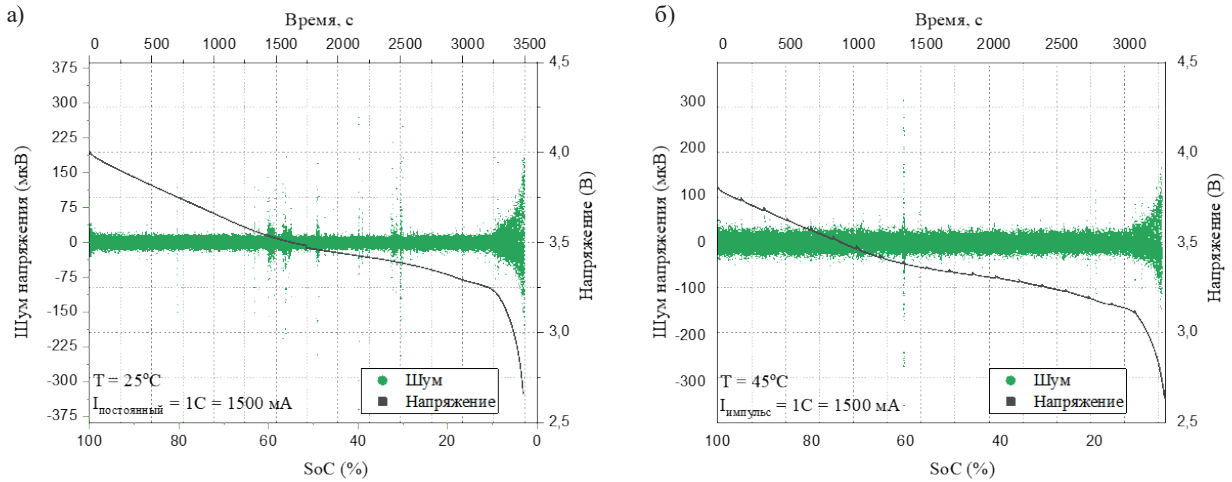


Рис. 2. Пример обработки разрядной кривой: а) 100 % разрядом постоянной нагрузкой 1С; б) разрядом разрядными импульсами по 5 % SoC

Для анализа и включения в обучающий набор данных были отобраны 36 разрядных кривых с наименьшим уровнем внешних шумов и наименьшим числом выбросов значений в сигналах.

После выделения шумового сигнала при помощи методики на основе вариационной декомпозиции [12] было проведено спектральное исследование посредством быстрого преобразования Фурье. Спектральная плотность мощности (СПМ) сигналов была получена по теореме Виннера – Хинчина. Пример полученных СПМ приведен на рис. 3.

Исходя из выделенных в [15] особенностей, полученные СПМ были описаны уравнениями вида

$$U = U_{white} \cdot f^0 + U_{colored} \cdot f^\gamma. \quad (5)$$

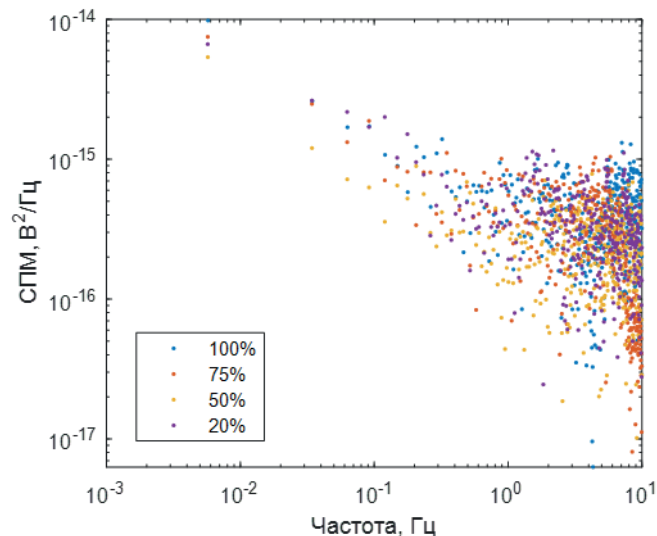


Рис. 3. СПИ сигнала для ряда разрядных импульсов по 5 % (SoC равна 100, 75, 50 и 20 % до подачи импульса), элемент AC22, 149-й цикл заряд-разряд (см. рис. 2а)

Показатель наклона цветной составляющей шума для исследованных спектров в среднем был равен -0.96 , что при соотношении амплитуд $U_{\text{colored}} \gg U_{\text{white}}$ говорит о преимущественном вкладе фликкер-шума в шумовую характеристику источников тока.

Для проверки возможности применения для анализа шума статистических критериев, основанных на предположении о нормальности распределения флуктуаций, был проведен тест Колмогорова – Смирнова. Тест был проведен с надежностью 95 % для проверки гипотезы H_0 о подчинении выборок флуктуаций напряжения нормальному распределению. Для этого для каждого участка разрядной кривой шириной в 2 % SoC была рассчитана статистика:

$$D_n = \max |N(x) - F(x)| * n^{\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

где $F(x)$ – выборочная функция распределения вероятности для значения x в экспериментальной выборке; $N(x)$ – нормальная функция распределения вероятности с параметрами, определенными из несмещенных выборочных оценок; n – длина участка.

Гипотеза о нормальном распределении данных была отвергнута менее чем для 5 % участков исследованных разрядных кривых, вне зависимости от уровня заряда. В силу полученных результатов можно принять нулевую гипотезу, и приблизить исследуемое распределение нормальным распределением на участках разрядных кривых с изменением SoC менее чем на 2 %.

Таким образом, обучающий набор данных был составлен из 1800 отобранных фрагментов шума напряжения, полученного из 36 разрядных кривых источников тока.

3. Архитектура генеративно-сопоставительной сети

Реализующая предлагаемый метод архитектура генеративно-сопоставительной сети состоит из двух основных блоков: блока сети-дискриминатора и сети-генератора. Блок-схема, описывающая архитектуру сети-дискриминатора приведена на рис. 4.

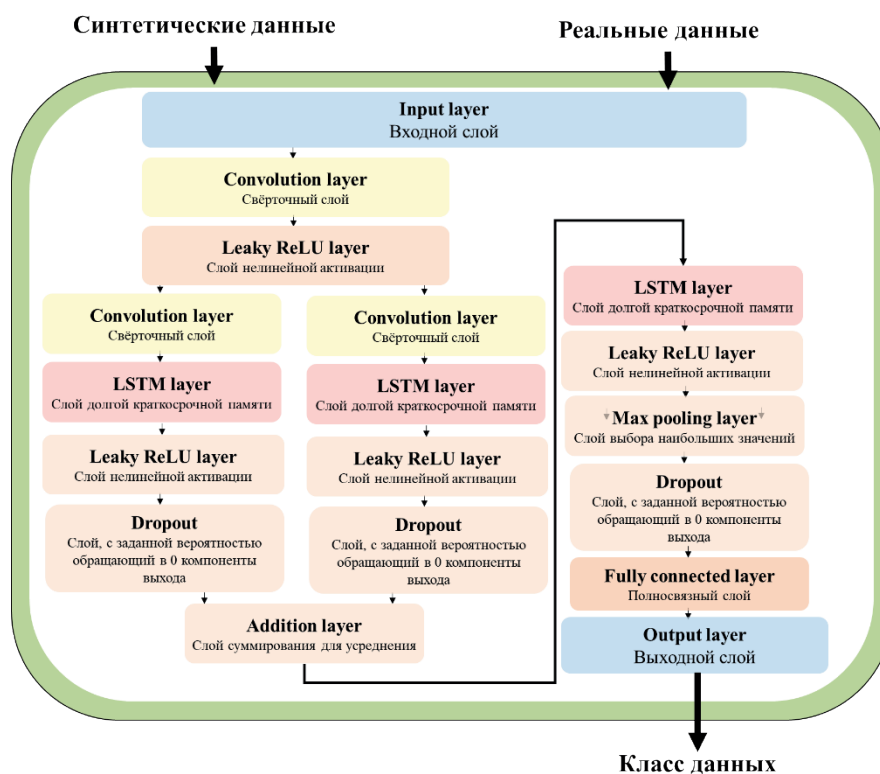


Рис. 4. Блок-схема архитектуры сети дискриминатора

В состав дискриминатора входит блок из двух групп параллельных слоев, выходы которых суммируются. Как показало предобучение сети-дискриминатора на подвыборке обучающего набора данных, данное решение позволяет повысить скорость падения ошибки при обучении и увеличить точность работы сети-дискриминатора на наборах данных с преобладающей составляющей шума в сигнале.

Входящие в состав дискриминатора параллельные группы слоев состоят из сверточного слоя (размер фильтра $n_{conv} = [32, 1]$, шаг 2), за которым идет рекуррентный слой (LSTM-слой с размером скрытого слоя $n_h = 32$), слой нелинейной активации с утечкой (с коэффициентом 0.05) и слой dropout (с вероятностью обнуления компоненты входа). Сочетание сверточных и рекуррентных слоев позволяет оценивать классифицируемые сигналы как данные с иерархической зависимостью и учитывать нестационарности во входных данных.

Результат суммирования выходов параллельных групп слоев подается на слой с долгой краткосрочной памятью (LSTM-слой с размером скрытого слоя $n_h = 32$). За ним следует слой нелинейной активации с утечкой (с коэффициентом 0.05) и слой dropout ($p_{dropout} = 0.2$), полносвязный слой и слой выхода классификатора.

Поскольку результаты предварительных испытаний показали превалирование сети-генератора в обучении данной архитектуры GAN при Glorot-инициализации [25], архитектура сети-дискриминатора была предварительно обучена на наборе данных, составленном из реальных сигналов из основной обучающей выборки и сгенерированных случайных гауссовых сигналов с нулевым средним и дисперсией, равной дисперсии реальных сигналов. Предобучение проходило в течение десяти эпох до достижения дискриминатором точности в 100 %.

Блок-схема, описывающая архитектуру сети-генератора, приведена на рис. 5.

На вход сети-генератора подавался случайный вектор длиной $L = 900$ из скрытого пространства z с нормальным распределением. Для генерации сигнала было решено использовать архитектуру с двумя последовательными блоками из групп параллельных слоев. Параллельная группа состоит из

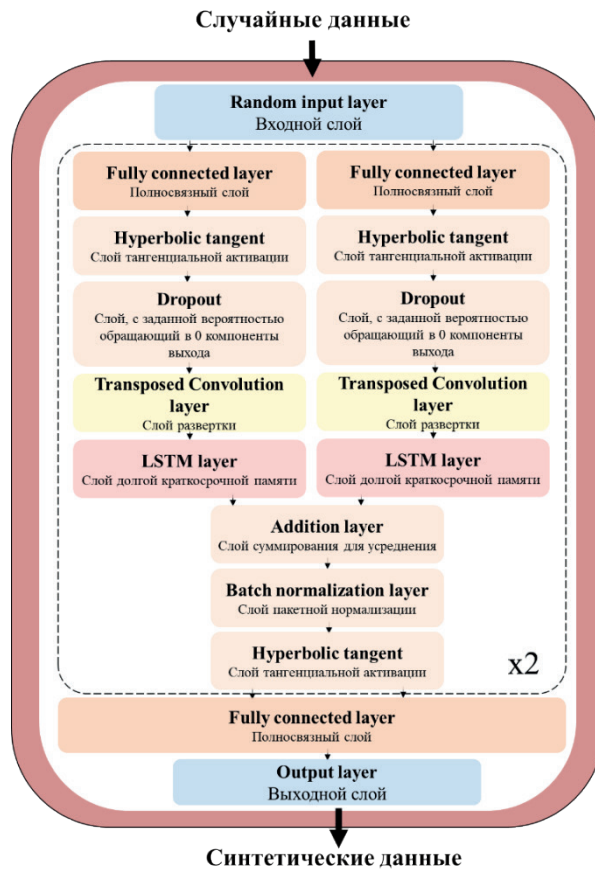


Рис. 5. Блок-схема архитектуры сети-генератора

полносвязного слоя, за которыми следует слой тангенциальной активации, слой dropout ($p_{dropout} = 0.2$), слой транспонированной свертки (ширина фильтра 16) и рекуррентный слой (LSTM-слой с размером скрытого слоя $n_h = 32$). После параллельных блоков применялся слой пакетной нормализации.

Как показали предварительные результаты обучения сети, в качестве слоя активации в данном блоке лучше использовать гиперболический тангенс, так как ReLU приводит к появлению большого числа вырожденных сигналов.

Метод, который был использован для обучения данной нейронной сети, основан на работе [12]. Для обучения архитектуры генератор-дискриминатор использовался оптимизатор adam с параметрами скорости обучения 10^{-3} , затухания градиента 0.5 и затухания квадрата градиента 0.999. Все программы для предобработки данных и инфраструктура для обучения сети были реализованы в Matlab. Обучение проводилось на рабочей станции HP Z8 на графическом процессоре NVIDIA Quadro RTX-4000. Обучение заняло 1 000 эпох, размер пакета данных был выбран равным 128. В течение каждой эпохи дискриминатор псевдослучайно обучался от 0 до 2 раз, а генератор – один раз. Коэффициент штрафа за градиент λ был установлен равным 2.

4. Результаты и обсуждение

Для качественной оценки результатов работы генератора было проведено визуальное сравнение синтетических данных с реальными во временной и частотной области. На рис. 6а приведено временное представление случайной пары из реального и синтетического сигналов. Спектральная плотность мощности шумов данных сигналов приведена на рис. 6б. Как можно увидеть, среднее значение сгенерированных данных незначительно отличается от нуля, а дисперсия синтетических данных близка к дисперсии реальных. Спектры сигналов имеют схожую форму.

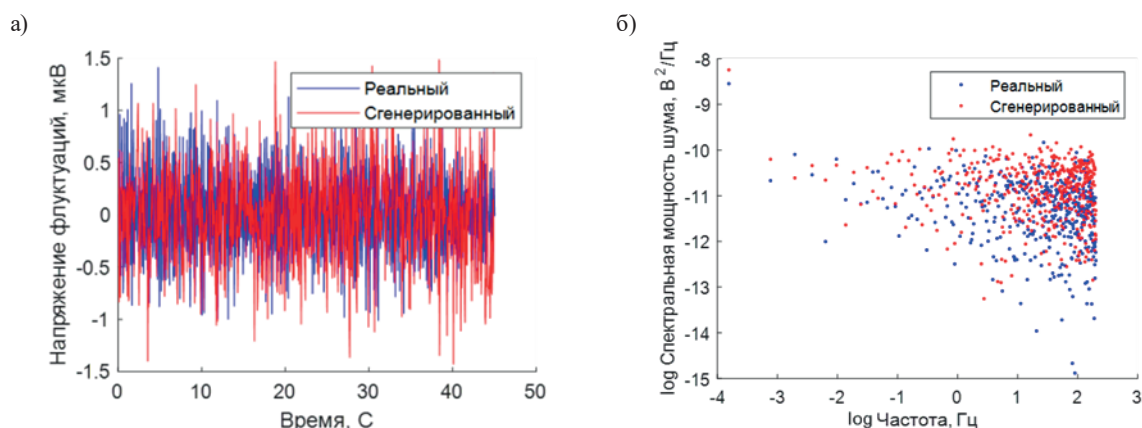


Рис. 6. Сравнение сгенерированных и полученных экспериментально флуктуаций напряжения (а); спектральная характеристика сгенерированных и полученных экспериментально флуктуаций напряжения (SoC = 50 %) (б)

Известной трудностью в обучении GAN-архитектур является проблема вырождения генерируемых сигналов к обучающей выборке. Поэтому для качественной оценки влияния числа эпох обучения на вариативность данных был применен алгоритм стохастического вложения соседей с t -распределением (t -SNE).

Данный алгоритм машинного обучения определяет сходство между сигналами как расстояние между ними в многомерном пространстве и при помощи минимизации расстояния Кульбака – Лейблера проводит отображение распределенных по Гауссу многомерных данных в распределенные по Стюденту данные в пространстве меньшей размерности [26]. Это позволяет оценить вариативность и подобие данных после их отображения.

Используя t -SNE, мы смогли проследить как число итераций процесса обучения (в эпохах) влияет на качество сгенерированных синтетических данных. Распределение данных в таком виде представлено на рис. 7.

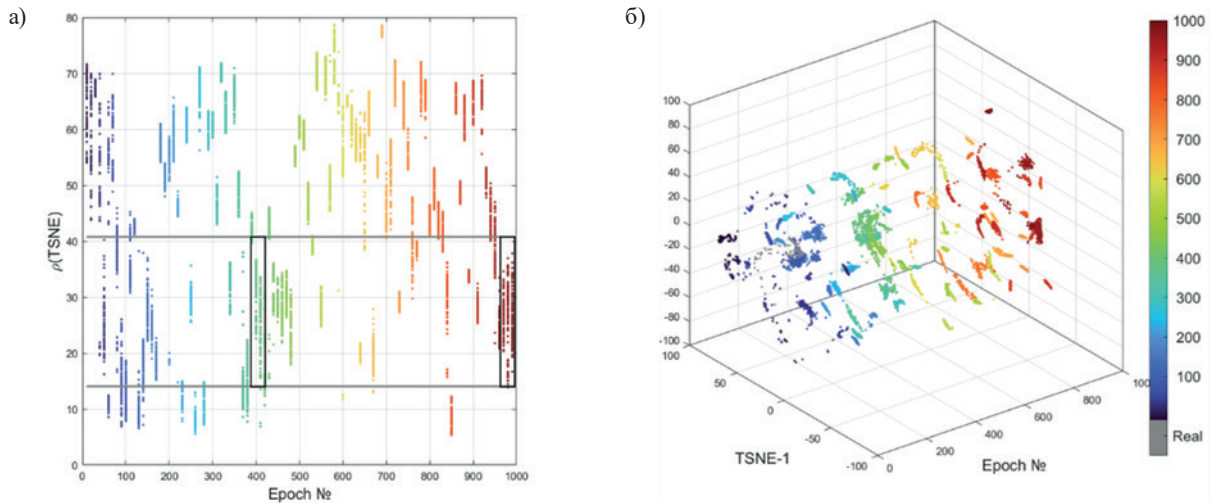


Рис. 7. Влияние числа эпох обучения на распределение данных, визуализированное при помощи метода TSNE: а) квадраты расстояния для двумерной проекции в зависимости от числа эпох обучения; цветом – сгенерированные данные; серым – область, в которой лежат значения реальных сигналов; серые рамки – области, в которых сгенерированные сигналы имеют наилучшее соотношения подобия с реальными и вариативности; б) трехмерное представление генерируемых данных при помощи TSNE

Можно заметить повторяющийся паттерн: с ростом числа эпох обучения с периодом около 200 эпох происходит увеличение уровня сходства реальных и сгенерированных сигналов. При этом наибольшую стабильность генерируемых значений имеют области в районе 400 и 1000 эпох обучения. Финальные результаты обучения генератора при этом имеют наибольшую вариативность и лежат в области значений реальных данных.

Для количественной оценки результатов работы GAN-архитектуры использовались следующие метрики:

- 1) наклон графика спектральной плотности мощности шума γ_{sint} ;
- 2) косинусное расстояние между синтетическим и реальными сигналами D_{cos} .

Для анализа при помощи последней итерации обучения сети-генератора была сгенерирована и размечена LSTM-сетью по категориям заряда выборка из 1000 синтетических сигналов.

Результаты спектрального анализа сгенерированных сигналов показали, что, исходя из предположения о нормальности распределения наклона цветной составляющей шума и применяя квантили распределения Стюдента коэффициент наклона СПМ γ_{sint} для синтетических данных, можно с надежностью 95 % оценить из выборки сгенерированных сигналов как $\gamma_{sint} = -1.04 \pm 0.09$. Поскольку значение коэффициента наклона для реальных сигналов ($\gamma_{real} = -0.96$) попадает в доверительный интервал значений синтетических, различие в среднем наклоне принимается незначимым.

Косинусное расстояние [27] позволяет попарно оценить сходство сигналов и имеет смысл косинуса между векторами в многомерном пространстве:

$$D_{cos} = \frac{\sum_{i=1}^N F'_i \cdot F''_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^N F'^2_i \cdot \sum_{i=1}^N F''^2_i}}, \quad (7)$$

где F'_i, F''_i – i -я компонента спектральной плотности мощности для двух сравниваемых сигналов длиной N . Чем ближе D_{cos} к 1, тем выше сходство между сигналами.

Косинусные расстояния были рассчитаны по формуле (7) отдельно для спектров каждой пары реальных сигналов. Затем расстояния были усреднены по всем проведенным сравнениям. Аналогичная операция сравнения и усреднения была проведена для сгенерированных данных. Затем было проведено

сравнение между парами из сгенерированных и реальных сигналов. Результаты проведенных расчетов приведены в табл. 1.

Таблица 1. Средние косинусные расстояния $\bar{D}_{\cos}$ между спектрами сигналов в группах данных

$\bar{D}_{\cos}$	Реальные сигналы	Синтетические сигналы	Гауссов шум
Реальные сигналы	0.7921	0.8101	0.7623
Синтетические сигналы	0.8101	0.8522	0.7996
Гауссов шум	0.7623	0.7996	0.8303

Как показывают результаты расчета косинусных расстояний, синтетические сигналы имеют большее подобие с реальными (среднее расстояние $\bar{D}_{\cos} = 0.8101$), чем реальные сигналы с псевдослучайным гауссовым шумом ($\bar{D}_{\cos} = 0.7623$) и между собой ($\bar{D}_{\cos} = 0.7921$). Последнее объясняется усреднением параметров сигналов при генерации.

После проведения количественного анализа сгенерированные данные были размечены при помощи предварительно обученной нейронной сети, основанной на архитектуре [12]. Примененная архитектура показана на рис. 8. Данная сеть решает задачу регрессии, сопоставляя сигналу напряжения уровень заряда аккумулятора.

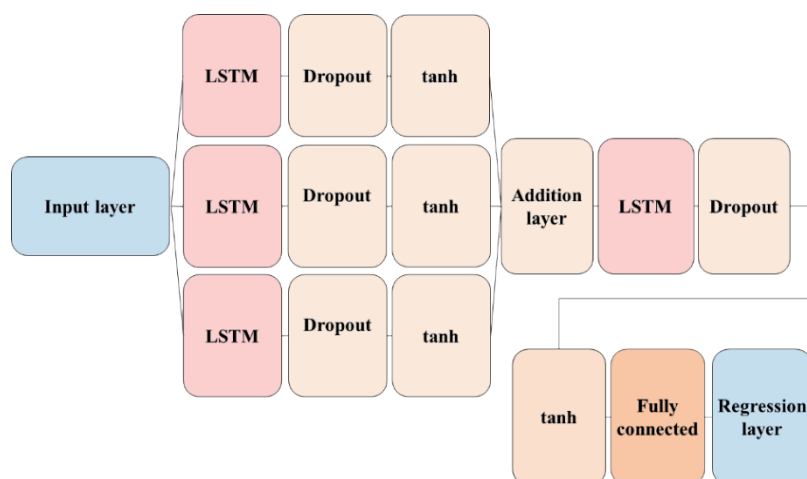


Рис. 8. Блок-схема архитектуры глубокой нейронной сети для решения задачи контроля состояния аккумулятора по шумам напряжения

Распределение присвоенных сгенерированным данным степеней заряженности аккумулятора (SoC) представлен на рис. 9. Возможный перекося в сторону больших значений степеней заряженности может объясняться особенностями вычисления ошибки регрессии нейронной сети в области низких значений заряда.

Многokrатно повторяя генерацию сигнала и отбирая при помощи нейронной сети классификатора сигналы с требуемым SoC , возможно синтезировать шумовые характеристики источников тока на протяжении всего разряда. Пример генерации шумовой характеристики для полного разряда ХИТ приведен на рис. 10. Применение данной методики для численного моделирования значений шума затрачивает на используемом оборудовании на порядок меньше времени, чем проведение дополнительных натурных экспериментов.

Полученные синтетические данные были замешаны в обучающий набор данных, и было заново проведено обучение нейронной сети для определения SoC . Методика обучения сети была аналогична описанной в работе [12]. Благодаря увеличению объема обучающих данных удалось добиться снижения средней ошибки определения заряда элемента методом интерпретации электрохимических шумов с 6.8 до 4.9 %.

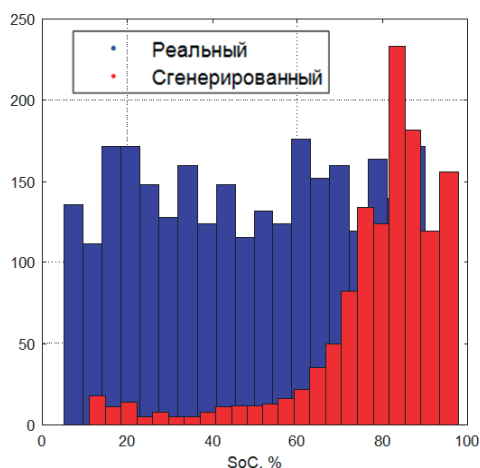


Рис. 9. Распределение сгенерированных данных по степени заряженности (SoC) среди 1000 сгенерированных сигналов

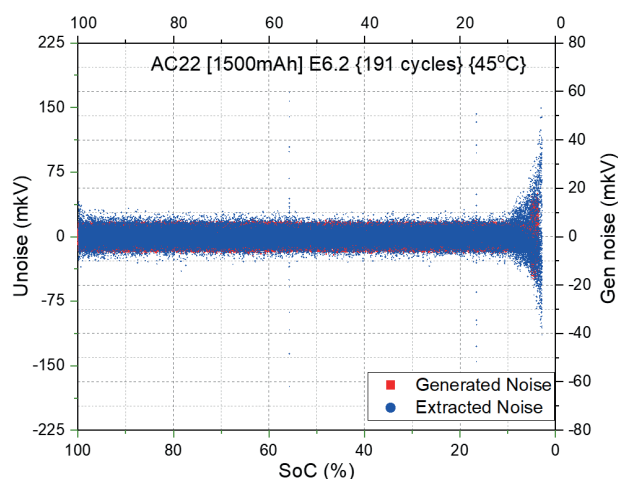


Рис. 10. Пример генерации шумовой характеристики для полного разряда ХИТ. Красным цветом указан сгенерированный сигнал, синим цветом – реальный сигнал

Закключение и выводы

Была разработан и валидирован новый метод моделирования шумовых характеристик химических источников тока, основанный на применении генеративно-состязательных нейронных сетей. Показано, как генерируемые синтетические данные о флуктуациях напряжения могут быть применены для аугментации наборов данных для машинного обучения.

В основу архитектуры сети-генератора были положены слои с долгой краткосрочной памятью (LSTM) и слои тангенциальной активации, что позволило избежать вырождения синтетических сигналов. Сеть-дискриминатор, в свою очередь, была основана на комбинации сверточных и рекуррентных слоев в параллельно-последовательном соединении. Для предотвращения доминирования генератора дискриминатор был предобучен на наборе данных из реальных сигналов и гауссова шума.

Генеративно-состязательная нейронная сеть была обучена на экспериментально полученных данных о разряде литий-ионных источников тока. Для составления обучающего набора данных экспериментально полученные сигналы напряжения были детрендированы при помощи методики на основе вариационной декомпозиции и разбиты на участки с изменением состояния заряженности элемента не более, чем на 2 %. Было показано, что вошедшие в набор данных сигналы шумов напряжения квазистационарны.

Как показывает качественный анализ результатов работы GAN, синтетические данные достаточно полно покрывают пространство реальных сигналов, не вырождаясь к отдельным его элементам. Синтетические данные имеют схожие с реальными статистические и спектральные характеристики. Сгенерированные шумы напряжения обладают большим сходством с реальными сигналами, чем простой гауссов шум.

Разметка синтетических данных при помощи глубокой нейронной сети для определения степени заряженности по шумовым характеристикам позволяет использовать предложенную методику для аугментации наборов данных для применения в методах «обучения с учителем». Результаты разметки сгенерированных сигналов показывают, что для применения методики достаточно измерения 30–40 экспериментальных кривых, при этом не менее половины экспериментальных данных должны быть получены при степенях заряженности элементов от 0 до 50 %.

Как показано на примере сети [12], применение созданной GAN-сети для аугментации обучающих наборов данных позволяет улучшить точность работы глубоких нейронных сетей, позволяя снизить ошибку до менее чем 5 %.

Финансирование

Данное исследование не получило внешнего финансирования.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

1. Li X., Jiang J., Zhang C., Wang L.Y., Zheng L. Robustness of SOC Estimation Algorithms for EV Lithium-Ion Batteries against Modeling Errors and Measurement Noise // *Mathematical Problems in Engineering*, 2015. P. 1–14. DOI: 10.1155/2015/719490.
2. Zhang L., Shen Z., Sajadi S.M., Prabuwno A.S., Mahmoud M.Z., Cheraghian G., ElSayed M., Tag El Din. The machine learning in lithium-ion batteries: A review // *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2022. V.141. P. 1–16. DOI: 10.1016/j.enganabound.2022.04.035.
3. Eleftheriadis P., Gangi M., Leva S., Rey A.V., Groppo E., Grande L. Comparative study of machine learning techniques for the state of health estimation of Li-Ion batteries // *Electric Power Systems Research*, 2024. V. 235. Article ID: 110889. DOI: 10.1016/j.epsr.2024.110889.
4. Faragher R. Understanding the Basis of the Kalman Filter Via a Simple and Intuitive Derivation [Lecture Notes] // *IEEE signal processing magazine*, 2012. V. 29. Iss.5. P.128–132. DOI: 10.1109/MSP.2012.2203621.
5. Xie J., Wei X., Bo X., Zhang P., Chen P., Hao W., Yuan M. State of charge estimation of lithium-ion battery based on extended Kalman filter algorithm // *Frontiers in Energy Research*, 2023. V. 11. Article ID: 1180881. DOI: 10.3389/fenrg.2023.1180881.
6. Tian Y., Lai R., Li X., Xiang L., Tian J. A combined method for state-of-charge estimation for lithium-ion batteries using a long short-term memory network and an adaptive cubature Kalman filter // *Applied Energy*, 2020 V.265(C). Article ID: 114789. DOI: 10.1016/j.apenergy.2020.114789.
7. Астафьев Е.А. Измерение электрохимических шумов твердополимерного топливного элемента под нагрузкой // *Электрохимия*, 2018. Т. 54. № 6. С. 638–645.
8. Астафьев Е.А. Измерение и анализ электрохимических шумов литий-ионного аккумулятора // *Электрохимия*, 2019. Т. 55. № 6. С. 654–662.
9. Astafev E.A. Electrochemical noise measurement of a lithium iron(II) phosphate (LiFePO₄) rechargeable battery // *Instrumentation Science and Technology*, 2019. V.10. DOI: 10.1080/10739149.2019.1658601.
10. Астафьев Е.А. Сравнение различных подходов в анализе электрохимических шумов на примере водородно-воздушного топливного элемента // *Электрохимия*, 2020. Т. 56. № 2. С. 167–174. DOI: 10.1134/S0424857020020036.
11. Astafev E.A. State-of-charge determination of Li/SOCl₂ primary battery by means of electrochemical noise measurement // *Journal of Solid State Electrochemistry*, 2019. V. 23. P. 1493–1504.
12. Попов А.Г., Мозговой Н.А., Суценя Г.Н., Пиджаков В.А., Ульянов С.А. Применение методов глубокого обучения для анализа флуктуаций напряжения литиевых источников тока // *Труды МФТИ*, 2023. Т. 15. № 4 (60). С. 150–161.
13. Martemianov S., Maillard F., Thomas A., Lagonotte P., Madier L. Noise Diagnosis of Commercial Li-Ion Batteries Using High-Order Moments // *Russian Journal of Electrochemistry*, 2016. V. 52. № 12. P. 1122–1130.
14. Sarker I.H. Machine learning: Algorithms, real-world applications and research directions // *SN Computer Science*, 2021. № 2. P. 1–21.
15. Попов А.Г., Еремин Н.В., Мозговой Н.А. Спектральное исследование электрохимических шумов литиевых источников тока // *Труды МФТИ*, 2021. Т.13. № 2(50). С. 23–31.
16. Goodfellow I.J., Pouget-Abadie J., Mirza M., Xu B., Warde-Farley D., Ozair S., Courville A., Bengio Y. Generative Adversarial Networks // *arXiv* 2014, arXiv:1406.2661.
17. Karras T., Aila T., Laine S., Lehtinen J. Progressive growing of GANs for improved quality, stability, and variation // *arXiv preprint*, 2017. arXiv:1710.10196.
18. Ledig C., Theis L., Huszar F., Caballero J., Cunningham A., Acosta A., Aitken A.P., Tejani A., Totz J., Wang Z. et al. Photo-realistic single image super-resolution using a generative adversarial network // *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2017. DOI: 10.1109/CVPR.2017.19.
19. Fedus W., Goodfellow I., Dai A.M. MaskGAN: Better text generation via filling in the _____ // *arXiv preprint*, 2018. arXiv:1801.07736. DOI: 10.48550/arXiv.1801.07736.
20. Liang X., Hu Z., Zhang H., Gan C., Xing E.P. Recurrent topictransition GAN for visual paragraph generation // *arXiv preprint*, 2017. arXiv:1703.07022.
21. Mogren O. C-RNN-GAN: Continuous recurrent neural networks with adversarial training // *arXiv preprint*, 2016. arXiv:1611.09904.
22. Yang L.-C., Chou S.-Y., Yang Y.-H. Midinet: A convolutional generative adversarial network for symbolic-domain music generation // *arXiv preprint*, 2017. arXiv:1703.10847.

23. Yang G., Ma Q., Sun H., Zhang X. State of Health Estimation Based on GAN-LSTM-TL for Lithium-ion Batteries // International Journal of Electrochemical Science, 2022. V. 17. № 221128. DOI: 10.20964/2022.11.07.
24. Wong K.L., Chou K.S., Tse R., Tang S.-K., Pau G.A. Novel Fusion Approach Consisting of GAN and State-of-Charge Estimator for Synthetic Battery Operation Data Generation // Electronics, 2023. V. 12. № 657. DOI: 10.3390/electronics12030657.
25. Glorot X., Bengio Y. Understanding the Difficulty of Training Deep Feedforward Neural Networks // Proceedings of the Thirteenth International Conference on Artificial Intelligence and Statistics, 2010. Sardinia, Italy: AISTATS, 2010. P. 249–356. <https://proceedings.mlr.press/v9/glorot10a/glorot10a.pdf>.
26. Van der Maaten L., Hinton G. Visualizing Data using *t*-SNE // Journal of Machine Learning Research, 2008. V. 9. Iss. 86. P. 2579–2605.
27. Sidorov G., Gelbukh A., Gómez-Adorno H., Pinto D. Soft Similarity and Soft Cosine Measure: Similarity of Features in Vector Space Model // Computación y Sistemas, 2014. V. 18. № 3. P. 491–504. DOI: 10.13053/CyS-18-3-2043.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2025, vol. 14, no. 4, pp. 339–351

Generative adversarial network for power sources' noise characteristics modeling

A.G. Popov^{1,2,✉}

¹ Moscow Institution of Physics and Technology, Moscow, 117303, Russia

² Central Scientific Research Institute of Chemistry and Mechanics, Moscow, 115487, Russia

✉ popov.ag@phystech.edu

Received July 11, 2025; revised July 25, 2025; accepted July 30, 2025

The article presents a new approach for modeling voltage noise of chemical power sources for the purpose of datasets augmentation. For the first time known machine learning methods were applied for modelling of the voltage noises of lithium-ion batteries: a generative adversarial neural network based on LSTM layers was designed for this task. A brief statistical and spectral analysis of experimental voltage fluctuations is given. A qualitative and quantitative study of synthetic noise signals is carried out based on the performed analysis of real data. It is shown how the classification of generated data by a deep neural network results in generation of noise characteristics for a given state of charge of the battery. It is recommended how to apply the proposed technique to improve precision of interpretation of voltage fluctuations in power sources. An experimental assessment of the method's effectiveness is given: a decrease in the determination error of the battery's state of charge from its noise went from 6.8% to 4.9%.

Keywords: generative adversarial networks, chemical power sources, power spectral density, voltage noise.

References

1. Li X., Jiang J., Zhang C., Wang L. Y., Zheng L. Robustness of SOC Estimation Algorithms for EV Lithium-Ion Batteries against Modeling Errors and Measurement Noise. Mathematical Problems in Engineering, 2015. Pp. 1–14. DOI: 10.1155/2015/719490.
2. Zhang L., Shen Z., Sajadi S.M., Prabuwno A.S., Mahmoud M.Z., Cheraghian G., ElSayed M., Tag El Din. The machine learning in lithium-ion batteries: A review. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2022. Vol. 141. Pp. 1–16. DOI: 10.1016/j.enganabound.2022.04.035.
3. Eleftheriadis P., Gangi M., Leva S., Rey A.V., Groppo E., Grande L. Comparative study of machine learning techniques for the state of health estimation of Li-Ion batteries. Electric Power Systems Research, 2024. Vol. 235. Article ID: 110889. DOI: 10.1016/j.epsr.2024.110889.
4. Faragher R. Understanding the Basis of the Kalman Filter Via a Simple and Intuitive Derivation [Lecture Notes]. IEEE signal processing magazine, 2012. Vol. 29. Iss. 5. Pp. 128–132. DOI: 10.1109/MSP.20212.2203621.

5. Xie J., Wei X., Bo X., Zhang P., Chen P., Hao W., Yuan M. State of charge estimation of lithium-ion battery based on extended Kalman filter algorithm. *Frontiers in Energy Research*, 2023. Vol. 11. Article ID: 1180881. DOI: 10.3389/fenrg.2023.1180881.
6. Tian Y., Lai R., Li X., Xiang L., Tian J. A combined method for state-of-charge estimation for lithium-ion batteries using a long short-term memory network and an adaptive cubature Kalman filter. *Applied Energy*, 2020. Vol. 265. Article ID: 114789. DOI: 10.1016/j.apenergy.2020.114789.
7. Astafiev E.A. Izmerenie elektrohimiicheskikh шумов tverdogopolimernogo toplivnogo elementa pod nagruzkoy [Measurement of electrochemical noise of a solid polymer fuel cell under load]. *Elektrokhimiya*, 2018. Vol. 54. No. 6. Pp. 638–645 (in Russian).
8. Astafiev E.A. Izmerenie i analiz elektrohimiicheskikh шумов litij-ionnogo akkumulyatora [Measurement and analysis of electrochemical noise of a lithium-ion battery]. *Elektrokhimiya*, 2019. Vol. 55. No. 6. Pp. 654–662 (in Russian).
9. Astafiev E.A. Electrochemical noise measurement of a lithium iron(II) phosphate (LiFePO₄) rechargeable battery. *Instrumentation Science and Technology*, 2019. Vol. 10. DOI: 10.1080/10739149.2019.1658601.
10. Astafiev E.A. Sravneniye razlichnykh podhodov v analize elektrokimiicheskikh шумов vodorodno-vozdushnogo toplivnogo elementa [Comparison of different approaches towards electrochemical noise analysis of air-hydrogen fuel cell]. *Electrochemistry*, 2020. Vol. 56. No. 2. Pp. 167–174 (in Russian). DOI: 10.1134/S0424857020020036.
11. Astafiev E.A. State-of-charge determination of Li/SOCl₂ primary battery by means of electrochemical noise measurement. *Journal of Solid State Electrochemistry*, 2019. Vol. 23. Pp. 1493–1504.
12. Popov A.G., Mozgovoy N.A., Sushchenya G.N., Pidzhakov V.A., Ulyanov S.A. Primeneniye metodov glubokogo obucheniya dlya analiza fluktuatsiy napryazheniya litievykh istochnikov toka [Application of deep learning methods for the analysis of voltage fluctuations of lithium power sources]. *Trudy MFTI*, 2023. Vol. 15. No. 4 (60). Pp. 150–161 (in Russian).
13. Martemianov S., Maillard F., Thomas A., Lagonotte P., Madier L. Noise Diagnosis of Commercial Li-Ion Batteries Using High-Order Moments. *Russian Journal of Electrochemistry*, 2016. Vol. 52. No. 12. Pp. 1122–1130.
14. Sarker I.H. Machine learning: Algorithms, real-world applications and research directions. *SN Computer Science*, 2021. No. 2. Pp. 1–21.
15. Popov A.G., Eremin N.V., Mozgovoy N.A. Spektral'noe issledovanie elektrohimiicheskikh шумов litievykh istochnikov toka [Spectral study of electrochemical noise in lithium power sources]. *Trudy MFTI*, 2021. Vol. 13. No. 2 (50). Pp. 23–31 (in Russian).
16. Goodfellow I.J., Pouget-Abadie J., Mirza M., Xu B., Warde-Farley D., Ozair S., Courville A., Bengio Y. Generative Adversarial Networks. *arXiv* 2014, arXiv:1406.2661
17. Karras T., Aila T., Laine S., Lehtinen J. Progressive growing of GANs for improved quality, stability, and variation. *arXiv preprint*, 2017. arXiv:1710.10196.
18. Ledig C., Theis L., Huszar F., Caballero J., Cunningham A., Acosta A., Aitken A.P., Tejani A., Totz J., Wang Z. et al. Photo-realistic single image super-resolution using a generative adversarial network. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2017. DOI: 10.1109/CVPR.2017.19.
19. Fedus W., Goodfellow I., Dai A.M. MaskGAN: Better text generation via filling in the _____. *arXiv preprint*, 2018. arXiv:1801.07736. DOI: 10.48550/arXiv.1801.07736.
20. Liang X., Hu Z., Zhang H., Gan C., Xing E.P. Recurrent topictransition GAN for visual paragraph generation. *arXiv preprint*, 2017. arXiv:1703.07022.
21. Mogren O. C-RNN-GAN: Continuous recurrent neural networks with adversarial training. *arXiv preprint*, 2016. arXiv:1611.09904.
22. Yang L.-C., Chou S.-Y., Yang Y.-H. Midinet: A convolutional generative adversarial network for symbolic-domain music generation. *arXiv preprint*, 2017. arXiv:1703.10847.
23. Yang G., Ma Q., Sun H., Zhang X. State of Health Estimation Based on GAN-LSTM-TL for Lithium-ion Batteries. *International Journal of Electrochemical Science*, 2022. Vol. 17. No. 221128. DOI: 10.20964/2022.11.07.
24. Wong K.L., Chou K.S., Tse R., Tang S.-K., Pau G. A. Novel Fusion Approach Consisting of GAN and State-of-Charge Estimator for Synthetic Battery Operation Data Generation. *Electronics*, 2023. Vol. 12. No. 657. DOI: 10.3390/electronics12030657.
25. Glorot X., Bengio Y. Understanding the Difficulty of Training Deep Feedforward Neural Networks. *Proceedings of the Thirteenth International Conference on Artificial Intelligence and Statistics*, 2010. Sardinia, Italy, AISTATS, 2010. Pp. 249–356. <https://proceedings.mlr.press/v9/glorot10a/glorot10a.pdf>.
26. Van der Maaten L., Hinton G. Visualizing Data using t-SNE. *Journal of Machine Learning Research*, 2008. Vol. 9. Iss. 86. Pp. 2579–2605.
27. Sidorov G., Gelbukh A., Gómez-Adorno H., Pinto D. Soft Similarity and Soft Cosine Measure: Similarity of Features in Vector Space Model. *Computación y Sistemas*, 2014. Vol. 18. No. 3. Pp. 491–504. DOI: 10.13053/CyS-18-3-2043.

УДК 51-32

Автомодельное решение задачи о растворении льда гидрофильной жидкостью

© 2025 г. О. В. Нагорнов, Т. И. Бухарова

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

Рассматривается решение одномерной задачи о взаимодействии льда и гидрофильной жидкости. В отличие от хорошо известной задачи Стефана о промерзании чистой воды при контакте со льдом, температура фазового перехода не постоянна и зависит от концентрации гидрофильной жидкости, описываемой уравнением диффузии. В работе используется линейное уравнение, связывающее равновесные температуру и концентрацию на границе контакта. Температура во льду и в жидкости описывается уравнениями теплопроводности. На фазовой границе происходит тепло-массообмен: вода из гидрофильной жидкости намерзает на поверхность льда, ее концентрация увеличивается, или наоборот, происходит растворение льда на границе и понижается концентрация гидрофильной жидкости. Это определяется входными параметрами задачи. С помощью введения автомодельной переменной уравнения в частных производных сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Получены аналитические решения для температуры во льду и жидкости и концентрации гидрофильной жидкости. Для автомодельного параметра получено трансцендентное уравнение, которое решается численно.

Ключевые слова: автомодельное решение, фазовый переход, задача Стефана, гидрофильная жидкость.

Введение

Рассмотрим контакт двух полупространств, содержащих гидрофильную жидкость (НЛ) при $x < 0$ и лед при $x > 0$, соответственно. Реальными примерами таких взаимодействий являются морская вода и лед, а также используемые при термобурении ледников гидрофильные жидкости (типа этанола) и лед [1–3]. В одномерном случае используем уравнения теплопроводности для льда, НЛ и уравнение диффузии в растворе с соответствующими начальными и граничными условиями [4]:

$$T_{f,t} = a_f^2 T_{f,xx}, \quad -\infty < x < 0, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$C_t = a_c^2 C_{xx}, \quad -\infty < x < 0, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$T_{i,t} = a_i^2 T_{i,xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \quad (3)$$

где T_f и T_i – температура НЛ и льда, соответственно; C – концентрация НЛ; x – координата, t – время; нижние индексы t и x в уравнениях обозначают соответствующие частные производные, a_f^2, a_i^2, a_c^2 – температуропроводности НЛ, льда и коэффициент диффузии НЛ, соответственно. Температуры

✉ О.В. Нагорнов: ovnagornov@mephi.ru

Поступила в редакцию: 01.08.2025

После доработки: 10.08.2025

Принята к публикации: 12.08.2025

и концентрация зависят от двух переменных (x, t) . Для простоты конвективные движения не учитываются. Начальные условия задачи имеют вид:

$$C(x, 0) = C_0, \quad T_f(x, 0) = T_1, \quad -\infty < x < 0, \quad (4)$$

$$T_i(x, 0) = T_0, \quad 0 < x < +\infty, \quad (5)$$

где C_0, T_1, T_0 – постоянные.

Граничные условия на фазовой границе $x = \xi(t)$:

$$k_f T_{f,x} - k_i T_{i,x} = L \rho \xi'(t), \quad x = \xi(t), \quad t > 0, \quad (6)$$

$$T_f(\xi, t) = T_i(\xi, t) = T_{eq}, \quad t > 0, \quad (7)$$

где k_f и k_i – коэффициенты теплопроводности НЛ и льда, соответственно; L – теплота плавления; ρ – плотность льда, равновесная температура и концентрация связаны соотношением:

$$C_{eq} = AT_{eq}, \quad x = \xi(t), \quad t > 0, \quad (8)$$

где A – постоянная [3]. Для широкого диапазона температур существуют и другие аппроксимации равновесных значений температуры и концентрации [5]. Кроме того, вследствие замерзания льда или его растворения на фазовой границе, и учитывая баланс массы растворителя получаем следующее уравнение:

$$-a_c^2 C_x = C \xi'(t), \quad x = \xi(t), \quad t > 0, \quad (9)$$

Здесь левая часть уравнения (9) определяет поток массы растворителя, а правая часть скорость изменения его массы у фазовой границы [6]. Система уравнений (1)–(9) допускает автомодельное решение так, что все неизвестные оказываются функциями комбинации переменных $x / \sqrt{t}$ [7].

Автомодельное решение

Переходя к автомодельной переменной, уравнения в частных производных (1) – (3) преобразуются в обыкновенные дифференциальные уравнения. Температуры и концентрация тогда могут быть найдены в следующем виде:

$$\begin{aligned} T_f(x, t) &= B_1 + D_1 \Phi\left(\frac{x}{2a_f \sqrt{t}}\right), \quad T_i(x, t) = B_2 + D_2 \Phi\left(\frac{x}{2a_i \sqrt{t}}\right), \\ C(x, t) &= B_3 + D_3 \Phi\left(\frac{x}{2a_c \sqrt{t}}\right), \end{aligned} \quad (10)$$

где B и D с индексами обозначают неизвестные постоянные; $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$ – функция ошибок.

Фазовая граница подчиняется уравнению $\xi(t) = \alpha \sqrt{t}$, где α – постоянная (автомодельный параметр), подлежащая определению. Чтобы определить семь неизвестных $B_1, B_2, B_3, D_1, D_2, D_3, \alpha$ подставляем уравнения (10) в систему (1)–(9). Тогда получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 B_1 - D_1 &= T_0, \\
 B_2 + D_2 &= T_1, \\
 B_3 - D_3 &= C_0, \\
 B_1 + D_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_f}\right) &= B_2 + D_2 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_i}\right), \\
 -\frac{2D_3}{\sqrt{\pi}} a_c e^{-\frac{\alpha^2}{4a_c^2}} &= \alpha \left(B_3 + D_3 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_c}\right) \right), \\
 B_3 + D_3 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_c}\right) &= A \left(B_1 + D_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_f}\right) \right), \\
 \frac{2D_1 k_f}{\sqrt{\pi} a_f} e^{-\frac{\alpha^2}{4a_f^2}} - \frac{2D_2 k_i}{\sqrt{\pi} a_i} e^{-\frac{\alpha^2}{4a_i^2}} &= \alpha L \rho,
 \end{aligned} \tag{11}$$

Эта система может быть сведена к трансцендентному уравнению с одной неизвестной α :

$$C_0 - \frac{C_0 \alpha (1 + \Phi_c)}{\alpha + \alpha \Phi_c + \frac{2}{\sqrt{\pi}} a_c E_c} - T_1 + \frac{(1 - \Phi_i) \left(T_1 - T_0 - \frac{\sqrt{\pi}}{2k_f} \alpha L \rho a_f E_f (1 + \Phi_f) \right)}{1 - \Phi_i + \frac{a_f k_i E_f}{a_i k_f E_i} (1 + \Phi_f)} = 0, \tag{12}$$

где введены следующие обозначения: $\Phi_f = \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_f}\right)$, $\Phi_i = \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_i}\right)$, $\Phi_c = \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_c}\right)$, $E_c = e^{-\frac{\alpha^2}{4a_c^2}}$, $E_f = e^{-\frac{\alpha^2}{4a_f^2}}$, $E_i = e^{-\frac{\alpha^2}{4a_i^2}}$.

Вычисление скорости фазовой границы, температур и концентрации НЛ

Уравнение (12) определяет параметр α при различных свойствах НЛ и льда, начальных температурах и концентрациях. Поэтому распределения температур и концентрации вдоль оси x может быть найдено из уравнений (11). Температурный скачок $T_0 - T_1$ влияет на скорость движения фазовой границы (рис. 1). Здесь вычисления проведены при $T_1 = 5^\circ\text{C}$. Другие параметры задачи приведены в таблице 1.

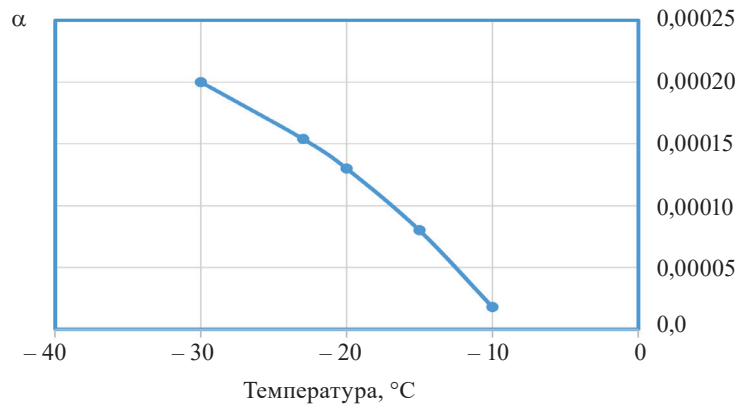


Рис. 1. Влияние начальной температуры льда на скорость фазовой границы

Таблица 1. Параметры задачи

a_i^2	a_f^2	a_e^2	k_i	k_f	k
$1,33 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^{-8}$	2,22	0,53	2,0

В таблице размерности температуропроводностей указаны в м²/с, коэффициенты теплопроводностей в Вт/(м·°К), плотность льда 917 кг/м³, теплота плавления льда $3,3 \cdot 10^5$ Дж/кг. Небольшие температурные скачки замедляют скорость движения фазовой границы (рис. 1).

Выводы

Найдено автомодельное решение задачи о взаимодействии льда с гидрофильной жидкостью. Фазовая граница движется согласно соотношению $x = \xi(t) = \alpha \sqrt{t}$ подобно хорошо известному решению задачи Стефана. Для параметра α , определяющего решение задачи, получено трансцендентное уравнение и определено численное решение при различных входных параметрах. Температура и концентрация гидрофильной жидкости, а также температура льда найдены в явной форме, удобной для дальнейшего анализа.

Финансирование

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации и выполнена по теме государственного задания FSWU-2023-0031.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Вклад авторов

О.В. Нагорнов – постановка задачи, выбор метода решения, анализ результатов.

Т.И. Бухарова – участие в проведении исследования, анализ и обсуждение результатов.

Список литературы

1. Nagornov O.V., Sergienko O.V. Temperature field of an ice shelf in the vicinity of a hot water-drilled well // Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 1998. V. 71. № 1. P. 154–160.
2. Zagorodnov V. S., Nagornov O. V., Kelley J. J., Stanford K. L. Causes of the appearance of stresses in an ice core // PICO. University of Alaska Fairbanks. Technical Report, 1992. V. 92–4. 28 p
3. Nagornov, O.V., Zagorodnov V.S., Kelley J.J. Interaction of hydrophilic liquid with ice // Proceedings of Fourth International Symposium on Thermal Engineering and Science for Cold Regions, September 28 – October 1, 1993.
4. Carslaw H.S., Jager J. C. Conduction of heat in solids. Oxford. Clarendon Press, 1986. 510 p.
5. Talalay P.G., Fan X. Alternative clean approaches to accessing subglacial Lake Vostok // Проблемы Арктики и Антарктики, 2024. Т.70(4). С.499–513.
6. Zagorodnov V.S., Morev V.A., Nagornov O.V., Kelley J.J., Gosink T.A., Koci B.R. Hydrophilic liquid in glacier boreholes // Cold Region Science and Technology, 1994.V. 24, P. 243–251.
7. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: ИД Интеллект, 2010. 368 с.

Self-similar solution of the problem on dissolution of ice by hydrophilic liquid

O. V. Nagornov , **T. I. Bukharova**

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409, Russia

 ovnagornov@mephi.ru

Received August 1, 2025; revised August 10, 2025; accepted August 12, 2025

The solution of the one-dimensional problem on interaction of ice and hydrophilic liquid is studied. Unlike the well-known Stefan problem of freezing of pure water upon contact with ice, the phase transition temperature is not constant and depends on the concentration of hydrophilic liquid. The concentration obeys the diffusion equation. We use a linear equation for the equilibrium temperature and concentration at the contact boundary. The temperature in ice and liquid is described by the heat conduction equations. Heat and mass transfer occurs at the phase boundary and water from the hydrophilic liquid freezes onto the surface of the ice, its concentration increases, or, conversely, ice dissolves at the boundary and the concentration of the hydrophilic liquid decreases. It is determined by the input parameters of the problem. By introducing a self-similar variable, partial differential equations are reduced to ordinary differential equations. Analytical solutions for the temperature in ice and liquid, and the concentration of the hydrophilic liquid are obtained. A transcendental equation determines the self-similar parameter, and is solved numerically.

Keywords: self-similar solution, phase transition, the Stefan problem, hydrophilic liquid.

References

1. Nagornov O.V., Sergienko O.V. Temperature field of an ice shelf in the vicinity of a hot water-drilled well. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 1998. Vol. 71. No.1. Pp. 154–160.
2. Zagorodnov V. S., Nagornov O. V., Kelley J. J., Stanford K. L. Causes of the appearance of stresses in an ice core. PICO. University of Alaska Fairbanks. Technical Report, 1992. Vol. 92–4. 28 p
3. Nagornov, O.V., Zagorodnov V.S., Kelley J.J. Interaction of hydrophilic liquid with ice. *Proceedings of Fourth International Symposium on Thermal Engineering and Science for Cold Regions*, September 28 – October 1, 1993.
4. Carslaw H.S., Jager J. C. *Conduction of heat in solids*. Oxford. Clarendon Press, 1986. 510 p.
5. Talalay P.G., Fan X. Alternative clean approaches to accessing subglacial Lake Vostok. *Problems of the Arctic and Antarctic*, 2024. Vol. 70(4). Pp.499–513.
6. Zagorodnov V.S., Morev V.A., Nagornov O.V., Kelley J.J., Gosink T.A., Koci B.R. Hydrophilic liquid in glacier boreholes. *Cold Region Science and Technology*, 1994. Vol. 24. Pp. 243–251.
7. Kudryashov N.A. *Metody nelinejnoj matematicheskoj fiziki [Methods of nonlinear mathematical physics]*. Dolgoprudnyj, ID Intellekt Publ., 2010. 368 p.

УДК 512.1; 517.58

Решение обобщенного сравнения степенных выражений с помощью W -функции Ламберта

© 2025 г. А. Е. Дубинов^{1,2}¹ Саровский физико-технический институт – филиал Научно-исследовательского ядерного университета «МИФИ» (СарФТИ НИЯУ МИФИ), Саров, Нижегородская обл., 607186, Россия² Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики (РФЯЦ-ВНИИЭФ), Саров, Нижегородская обл., 607188, Россия

Представлены некоторые свойства новой трансцендентной W -функции Ламберта: определение функции, ее график, координаты характерных точек, простейшие тождества. Даны несколько примеров, показывающих, как с помощью W -функции можно решать аналитически трансцендентные уравнения, содержащие степенные, логарифмические и экспоненциальные члены. Представлено полученное недавно решение сравнения двух функциональных выражений степенного типа x^y и y^x , которое возникает благодаря обобщению сравнения чисел e^π и π^e . Впервые получено точное решение нового обобщенного сравнения более сложных степенных выражений x^{y^α} и y^{x^α} на множествах положительных действительных чисел x и y для положительных значений показателя α . Решение представлено как в виде точной формулы с помощью W -функции Ламберта, так и с помощью графиков.

Ключевые слова: W -функция Ламберта, трансцендентное уравнение, сравнение.

Введение

Более полувека назад канадский математик Иван М. Нивен, автор доказательства иррациональности числа π , придумал интересную задачу для студентов колледжей [1], которая связывает две фундаментальные математические константы e и π : требуется определить, не используя вычислений, что больше, e^π или π^e (в краткой записи это сравнение можно записать: $e^\pi \stackrel{?}{>} \pi^e$). Было найдено несколько эффективных методов решений этой задачи с помощью математического анализа, например в [1–4], или даже с помощью физических соображений в [5]. Ответ к этой задаче: $e^\pi > \pi^e$.

Задача имеет естественное обобщение [6, 7]: необходимо решить сравнение $x^y \stackrel{?}{>} y^x$ на множестве действительных положительных чисел и определить границы областей на плоскости xOy , в которых выполняется первый знак неравенства « $<$ », и границы областей, в которых выполняется второй знак неравенства « $>$ ». Иными словами, требуется найти уравнения границ между указанными областями. К примеру, $2^3 < 3^2$, но $2^5 > 5^2$.

Сравнение $x^y \stackrel{?}{>} y^x$ недавно точно решено в [8]. В этом решении уравнения границ определяются при помощи сравнительно новой трансцендентной функции – W -функции Ламберта.

В данной статье выведено точное решение обобщенного сравнения $x^{y^\alpha} \stackrel{?}{>} y^{x^\alpha}$. Оказывается, что уравнения границ областей и для этого обобщенного сравнения также можно выразить через W -функцию

✉ А.Е. Дубинов: dubinov-ae@yandex.ru

Поступила в редакцию: 14.05.2025

После доработки: 26.05.2025

Принята к публикации: 26.06.2025

Ламберта. Статья также преследует образовательную цель: ознакомление широкого круга специалистов, преподавателей и студентов с теми новыми возможностями, которые дает использование W -функции Ламберта – решение широкого круга трансцендентных уравнений и неравенств (или сравнений).

W -функция Ламберта: определение и некоторые свойства

В середине 1990-х годов пятеро математиков R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare, D.J. Jeffrey и D.E. Knuth – изобрели новую математическую функцию [9], назвав ее W -функцией Ламберта в честь знаменитого математика, механика и оптика И.-Г. Ламберта, коллеги Л. Эйлера по Берлинскому университету. И.-Г. Ламберт наиболее известен своими трудами по фотометрии. Он, например, установил закон распределения яркости в излучении абсолютно черного тела, впоследствии названный его именем. В оптике даже существует специальная единица яркости – ламберт.

Определение. W -функция Ламберта есть функция, обратная к функции $y = x \exp x$.

Это определение позволяет легко установить ее простейшие свойства и построить график (рис. 1). W -функция Ламберта не является ни четной, ни нечетной. Она определена в интервале $[-1/e; \infty)$, на котором принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$, причем для отрицательных x функция двужанча. Точка A с координатами $(-1/e; -1)$ делит график функции на две сопряженные ветви, верхнюю $W_0(x)$ и нижнюю $W_{-1}(x)$ так, что обе ветви в точке A имеют вертикальную касательную. Верхняя ветвь $W_0(x)$, часто называемая основной [англ.: *the principal branch*], проходит через начало координат и больше не имеет особенностей. Нижняя же ветвь $W_{-1}(x)$ [англ.: *the negative branch*] имеет точку перегиба B с координатами $(-2/e^2; -2)$ и вертикальную асимптоту при $x = 0$. Другие целые значения индекса $k \neq -1; 0$ для функции $W_k(x)$ относятся к комплексно-значным ветвям, которых имеется бесконечно много [9, 19]. Заметим, что если индекс у W -функции Ламберта в каком-либо выражении не указан, то считается, что данное выражение справедливо для всех целых значений k .

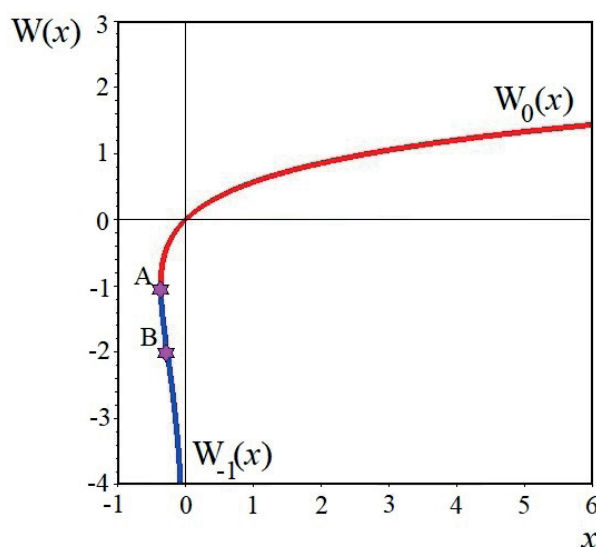


Рис. 1. График действительных ветвей W -функции Ламберта

Математические свойства W -функции Ламберта и многочисленные примеры ее применения в физических задачах представлены в обзорах [9–18] и книгах [19, 20].

W -функция Ламберта оказалась весьма востребованной для описания процессов и закономерностей во многих областях физики и техники. Укажем лишь несколько примеров: математическое описание ионного транспорта в электролитах [21], теплового излучения черного тела и, в частности, закона смещения Вина [10, 22], свойств термолюминесцентных дозиметров [23, 24], подъема жидкости в капиллярах [25], характеристик волны горения [26], диффузионно-дейфовых процессов в реальных газах [27].

Известно также несколько примеров эффективного использования комплекснозначных ветвей W -функции в задачах физики. Например, в [9] представлено решение задачи о распределении электрического поля в плоском конденсаторе конечных размеров, в [28] аналитически найден бесконечный набор решений дисперсионного уравнения Ландау для электронных колебаний плазмы, а в [29] – бесконечный набор решений дисперсионного уравнения для колебаний плазмы в рамках обобщенной больцмановской кинетики.

Кроме того, W -функция используется в теориях распространения эпидемий [9, 30]. Ряд примеров применения W -функции рассмотрен также в следующем разделе.

Рассмотрим только те, которые необходимы для решения сравнения $x^{y^a} \stackrel{?}{\leq} y^{x^a}$, а именно, методы решения трансцендентных уравнений.

W -функция Ламберта удовлетворяет следующим простым тождествам [19], которые следуют из ее определения:

$$\exp[W(a)] = \frac{a}{W(a)}; \quad (1)$$

$$\ln[W(a)] = \ln a - W(a). \quad (2)$$

И еще одно важное тождество, которое нам понадобится для решения основной задачи данной статьи:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\ln a} W_0\left(-\frac{\ln a}{a}\right) &\text{ при } 0 < a < e \\ -\frac{1}{\ln a} W_{-1}\left(-\frac{\ln a}{a}\right) &\text{ при } a \geq e \end{aligned} \right\} = -\ln a, \quad (3)$$

которое доказано в [8, 20]. Отметим, что выражение $-\frac{1}{\ln a} W_0\left(-\frac{\ln a}{a}\right)$ при $a \geq e$ и выражение $-\frac{1}{\ln a} W_{-1}\left(-\frac{\ln a}{a}\right)$ при $0 < a < e$ преобразовать подобным образом нельзя.

Решение трансцендентных уравнений

С помощью W -функции Ламберта можно легко решить трансцендентное уравнение

$$x \exp x = a. \quad (4)$$

Его решение есть $x = W(a)$. Мы осознанно здесь не поставили у функции индекс – номер ветви W -функции. Если $a \geq 0$, то действительное решение единственно, и оно определяется основной ветвью, а если же $-1/e < a < 0$, то действительных решений два, при $a = -1/e$ действительное решение снова единственное, и оно определяется точкой сопряжения действительных ветвей – точка A на рис. 1, а при $a < -1/e$ действительных корней нет. Если же задача заключается в нахождении всех комплексных корней уравнения (1), то ответ таков: $x_k = W_k(a)$, где номер k пробегает все целые числа от $-\infty$ до $+\infty$.

Однако было бы не интересно придумывать новую функцию для решения всего лишь одного трансцендентного уравнения. И W -функция Ламберта оказалась столь удачной, что с ее помощью можно решить много разных уравнений, систем уравнений и неравенств. Основная стратегия решения трансцендентных уравнений – сведение их к выражению вида $f \exp f$, воспроизводящему определение W -функции Ламберта. Приведем несколько примеров решения некоторых простейших трансцендентных уравнений, используя эту стратегию.

Рассмотрим уравнение

$$x + \exp x = a. \quad (5)$$

Уравнение, подобное (5), описывает простейшее критическое условие для гомогенного ядерного реактора без отражения нейтронов [31], и аналогичное уравнение, но с другими параметрами, возникает в задаче об электрической зарядке пылинки в плазме [32].

Уравнение (5) решается так. Сначала возьмем экспоненту от правой и левой его частей:

$$\exp(x + \exp x) = \exp a, \quad (6)$$

а затем перепишем в виде, воспроизводящем определение W -функции,

$$\exp x \cdot \exp(\exp x) = \exp a. \quad (7)$$

Тогда

$$\exp x = W_0(\exp a). \quad (8)$$

Мы взяли здесь основную ветвь W -функции, поскольку ее аргумент всегда положителен. Логарифмируя обе части (8), получим единственный действительный корень уравнения

$$x = \ln[W_0(\exp a)] = a - W_0(\exp a). \quad (9)$$

В завершающем решении в (9) мы воспользовались тождеством (2).

Рассмотрим теперь трансцендентное уравнение, которое возникает, например, при решении задач о распределении плотности плазмы в приэлектродных слоях [33] и задач о форме солитонов в плазме [18, 34]:

$$x + \ln x = a. \quad (10)$$

Для решения достаточно переписать его в виде

$$\ln(\exp x) + \ln x = \ln(x \exp x) = a. \quad (11)$$

Взяв экспоненты от обеих частей уравнения (11), можно привести это уравнение к виду, воспроизводящему определение W -функции. Тогда его корень есть

$$x = W_0(\exp a). \quad (12)$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$x \exp(ax^2) = 1, \quad (13)$$

которое возникает в теориях броуновского движения частиц [35] и, например, в задаче о предельной скорости ионно-звукового солитона в плазме [13, 36]. Возведем обе части (13) в квадрат, а затем умножим их на $2a$. В результате этих действий получим уравнение, в котором левая часть воспроизводит определение W -функции Ламберта:

$$2ax^2 \exp(2ax^2) = 2a. \quad (14)$$

Взяв от обеих частей (14) W -функцию Ламберта, легко получим решение уравнения (13):

$$x = \sqrt{\frac{W(2a)}{2a}}. \quad (15)$$

Решение сравнения $x^y \stackrel{?}{\lessgtr} y^x$ с использованием W -функции Ламберта (по [8])

Ознакомившись с точными решениями трансцендентных уравнений, содержащих степенные, логарифмические и экспоненциальные члены, рассмотрим решение сравнения $x^y \stackrel{?}{\lessgtr} y^x$ по материалам статьи [8]. Для нахождения уравнений границ областей следует решить трансцендентное уравнение на множестве положительных действительных чисел

$$x^y = y^x, \quad (16)$$

например, относительно y . Его решение легко получить, используя W -функцию Ламберта и рассмотренную в предыдущей секции стратегию:

$$y_{-1,0} = -\frac{x}{\ln x} W_{-1,0} \left(-\frac{\ln x}{x} \right) = \exp \left[-W_{-1,0} \left(-\frac{\ln x}{x} \right) \right]. \quad (17)$$

Поскольку функция $\ln x$ при положительных значениях x может быть как положительной, так и отрицательной, то в решении (17) должны быть задействованы две действительные ветви W -функции Ламберта. В (17) даны две эквивалентные формы записи решения. Их эквивалентность легко подтверждается с помощью тождества (1). Решение (17) представляет собой уравнения границ областей в первом квадранте плоскости xOy , в каждой из которых выполняется один из знаков неравенства в сравнении $x^y \stackrel{?}{\lessgtr} y^x$.

Заметим, что аргумент экспоненты представляет собой функциональное выражение, входящее в левую часть тождества (3). Пользуясь им, можно преобразовать (17) в более удобную форму, позволяющую увидеть, что некоторые ветви решения являются, по сути, тривиальным решением $y = x$:

$$y = \begin{cases} x & \text{при } 0 < x < 1; \\ \begin{cases} x \\ \exp \left[-W_{-1} \left(-\frac{\ln x}{x} \right) \right] \end{cases} & \text{при } 1 < x < e; \\ \begin{cases} x \\ \exp \left[-W_0 \left(-\frac{\ln x}{x} \right) \right] \end{cases} & \text{при } e < x < \infty. \end{cases} \quad (18)$$

Решение в форме (18) получено в [8].

Теперь можно построить в первом квадранте плоскости xOy графики границ, задаваемых уравнениями (18) (рис. 2). Квадрант поделен границами на четыре области, в двух из которых выполняется $x^{y^a} > y^{x^a}$, а в двух других $-x^{y^a} < y^{x^a}$.

Все границы стягиваются к единой точке пересечения A^* , координаты которой (e, e) . Значения координат в этой точке соответствуют точке сопряжения ветвей функции $W_{-1,0} \left(-\frac{\ln x}{x} \right)$, входящей

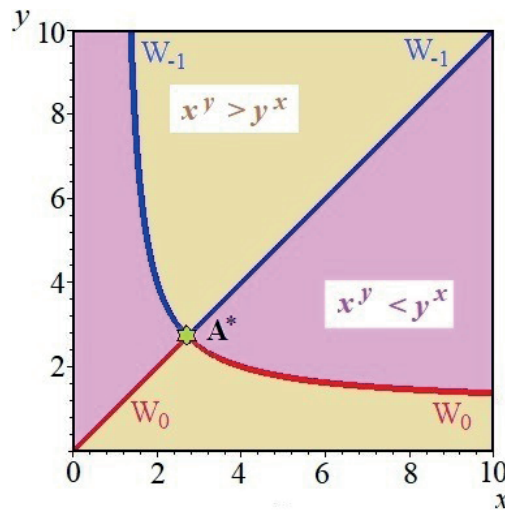


Рис. 2. Графики границ областей с различающимися знаками неравенства для сравнения $x^y \stackrel{?}{\lessgtr} y^x$

в (18), аналогичной точке A на рис. 1. Фактически, точка A^* на рис. 2 является образом точки A рис. 1 при преобразовании аргумента $x \rightarrow -\frac{\ln x}{x}$ W -функции Ламберта.

Точка с координатами (e, π) , соответствующая сравнению Нивена $e^\pi \stackrel{?}{\lessgtr} \pi^e$, лежит чуть выше точки A^* в области $x^y > y^x$, из чего сразу же следует ответ: $e^\pi > \pi^e$. Поразительно, что сам Нивен построил аналогичные графики границ, показанных на рис. 2, и определил координаты точки A^* почти на 20 лет раньше публикаций о новой W -функции Ламберта!

Решение обобщенного сравнения $x^{y^\alpha} \stackrel{?}{\lessgtr} y^{x^\alpha}$

Воспользовавшись свойствами W -функции Ламберта и стратегией решения трансцендентных экспоненциально-степенных уравнений, приступим к решению обобщенного сравнения $x^{y^\alpha} \stackrel{?}{\lessgtr} y^{x^\alpha}$, в котором показатель α задан положительным числом. Решим уравнение

$$x^{y^\alpha} = y^{x^\alpha}, \quad (19)$$

определяющее границы областей, например, относительно y :

$$y_{-1,0} = \exp \left[-\frac{1}{\alpha} W_{-1,0} \left(-\frac{\alpha \ln x}{x^\alpha} \right) \right]. \quad (20)$$

Если внести коэффициент α под знак логарифма, то аргумент W функции в (20) примет вид

$$-\frac{\ln x^\alpha}{x^\alpha} = -\frac{\ln \tilde{x}}{\tilde{x}}, \quad (21)$$

где $\tilde{x} = x^\alpha$, который также позволяет воспользоваться тождеством (3). В результате, получаем решение уравнение (19) в виде

$$y = \begin{cases} x & \text{при } 0 < x < 1; \\ \begin{cases} x & \text{при } 1 < x < e^{1/\alpha}; \\ \exp\left[-\frac{1}{\alpha} W_{-1}\left(-\frac{\alpha \ln x}{x^\alpha}\right)\right] & \text{при } 1 < x < e^{1/\alpha}; \end{cases} \\ \begin{cases} x & \text{при } e^{1/\alpha} < x < \infty. \\ \exp\left[-\frac{1}{\alpha} W_0\left(-\frac{\alpha \ln x}{x^\alpha}\right)\right] & \text{при } e^{1/\alpha} < x < \infty. \end{cases} \end{cases} \quad (22)$$

Построим в первом квадранте плоскости xOy графики границ, задаваемых уравнениями (22) для двух значений показателя α : $\alpha < 1$ и $\alpha > 1$ (рис. 3 а, б). В обоих случаях квадрант так же, как и на рис. 2, поделен границами на четыре области, в двух из которых выполняется $x^{y^\alpha} > y^{x^\alpha}$, а в двух других – $x^{y^\alpha} < y^{x^\alpha}$. При этом точка пересечения границ A^* имеет координаты $(e^{1/\alpha}, e^{1/\alpha})$.

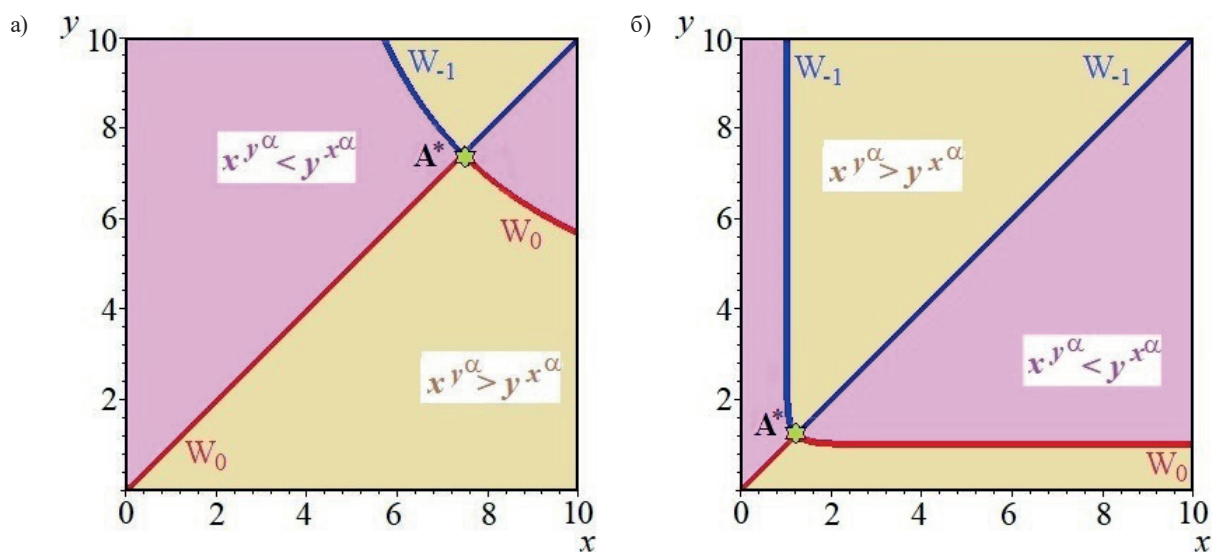


Рис. 3. Графики границ областей с различающимися знаками неравенства для обобщенного сравнения $x^{y^\alpha} \gtrless y^{x^\alpha}$:
а) при $\alpha = 1/2$; б) при $\alpha = 5$

Таким образом, обобщенное сравнение $x^{y^\alpha} \gtrless y^{x^\alpha}$ полностью решено на множестве положительных действительных чисел.

Заключение

В статье представлены некоторые важные свойства трансцендентной W -функции Ламберта: график, координаты характерных точек, тождества. Показано, как с помощью W -функции можно решать трансцендентные уравнения, содержащие степенные, логарифмические и экспоненциальные члены.

Представлено полученное в [8] решение сравнения $x^{y^2} \gtrless y^{x^2}$, возникшего благодаря обобщению сравнения чисел e^π и π^e .

Получено точное решение обобщенного сравнения $x^{y^\alpha} \gtrless y^{x^\alpha}$ на множестве положительных действительных чисел для положительных значений показателя α . Решение представлено в виде точной формулы с помощью W -функции Ламберта и графиков.

Финансирование

Автор заявляет об отсутствии прямых источников финансирования.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Список литературы

1. Niven I. Which is larger, e^π or π^e ? // Two-Year College Mathematics Journal, 1972. V. 3. № 2. Pp. 13–15. DOI: 10.1080/00494925.1972.11974209.
2. McCartin B.J. e : the master of all // Mathematical Intelligencer, 2006. V. 28. P. 10–21. DOI: 10.1007/BF02987150.
3. Chakraborty B. A visual proof that $\pi^e < e^\pi$ // Mathematical Intelligencer, 2019. V. 41. P. 56. DOI: 10.1007/S00283-018-9816-4.
4. Haque N. A visual proof that $e < A \Rightarrow e^A > A^e$ // Mathematical Intelligencer, 2020. V. 42. P. 74. DOI: 10.1007/S00283-019-09964-X.
5. Vallejo A., Bove I. Which is greater: e^π or π^e ? An unorthodox physical solution to a classic puzzle // American Journal of Physics, 2024. V. 92. P. 397–398. DOI: 10.1119/5.0188912.
6. Rosendahl J., Gilmore J. Comparing B^A and A^B for $A > B$ // College Mathematics Journal, 1987. V. 18. P. 50. DOI: 10.1080/07468342.1987.11973008.
7. Chakraborty B. A visual proof that $b^a < a^b$ when $e \leq a < b$ // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2024. V. 55. P. 1291–1292. DOI: 10.1080/0020739X.2022.2102547.
8. Haque N., Chakraborty B. Comparing a^b and b^a via location of zeros // Mathematical Intelligencer, 2025. V. 47. P. 40–43. DOI: 10.1007/s00283-024-10342-5.
9. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E. G., Jeffrey D.J., Knuth D.E. On the Lambert W function // Advances in Computational Mathematics, 1996. V. 5. P. 329–359. DOI: 10.1007/BF02124750.
10. Valluri S.R., Jeffrey D.J., Corless R.M. Some applications of the Lambert W function to physics // Canadian Journal of Physics, 2000. V. 78. P. 823–831. DOI: 10.1139/p00-065.
11. Дубинова И.Д. Применение W-функции Ламберта в математических задачах физики плазмы // Физика плазмы, 2004. Т. 30. С. 937–943. DOI: 10.1134/1.1809403.
12. Дубинова И.Д. Точные явные решения некоторых нелинейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 2004. Т. 40. С. 1129–1130. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000049837.34049.2d.
13. Dubinov A.E., Dubinova I.D. How can one solve exactly some problems in plasma theory // Journal of Plasma Physics, 2005. V. 71. P. 715–728. DOI: 10.1017/S0022377805003788.
14. Valluri S.R., Gil M., Jeffrey D.J., Basu S. The Lambert W function and quantum statistics // Journal of Mathematical Physics, 2009. V. 50. Article ID: 102103. DOI: 10.1063/1.3230482.
15. Veberič D. Lambert W function for applications in physics // Computer Physics Communications, 2012. V. 183. P. 2622–2628. DOI: 10.1016/j.cpc.2012.07.008.
16. Dence T.P. A brief look into the Lambert W function // Applied Mathematics, 2013. V. 4. P. 887–892. DOI: 10.4236/am.2013.46122.
17. Houari A. Additional applications of the Lambert W function in physics // European Journal of Physics, 2013. V. 34. P. 695–702. DOI: 10.1088/0143-0807/34/3/695.
18. Dubinov A.E. Mathematical tricks for pseudopotentials in the theories of nonlinear waves in plasmas // Physics of Plasmas, 2022. V. 29. Article ID: 020901-1–19. DOI: 10.1063/5.0078573.
19. Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К. W функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2006. 159 с.
20. Mezö I. The Lambert W function and its generalizations and applications. Boca Raton, FL: CRC Press, Taylor & Francis Group, LLC, 2022. 274 p.
21. Дубинов А.Е., Дубинова И.Д. Точное значение сопряженного тока в электролите в диффузионно-миграционной модели Гуревича – Харкаца // ЖТФ, 2004. Т. 74, С. 118–119. DOI: 10.1134/1.1826201.
22. Дубинов А.Е., Китаев И. Н. Обобщенные закон смещения Вина и закон Стефана – Больцмана для теплового излучения, имеющего ненулевой химический потенциал // Оптический журнал, 2018. Т. 85. С. 3–5. DOI: 10.1364/JOT.85.000314.
23. Kitis G., Pagonis V. New expressions for half life, peak maximum temperature activation energy and kinetic order of a thermoluminescence glow peak based on the Lambert W function // Radiation Measure, 2017. V. 97. P. 28–34. DOI: 10.1016/j.radmeas.2016.12.013.
24. Pagonis V., Kitis G., Chen R. A new analytical equation for the dose response of dosimetric materials, based on the Lambert W function // Journal of Luminescence, 2020. V.225. Article ID: 117333-1–7. DOI: 10.1016/j.jlumin.2020.117333.
25. Fries N., Dreyer M. An analytic solution of capillary rise restrained by gravity // Journal of Colloid and Interface Science, 2008. V. 320. P. 259–263. DOI: 10.1016/j.jcis.2008.01.009.
26. Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К. Точное решение задачи о распространении волны горения // Доклады Академии наук, 2004. Т. 394. С. 767–768. DOI: 10.1134/1.1686887.

27. Dubinov A.E. Einstein-Smoluchowski-type relations for real gases // Journal of Mathematical Chemistry, 2025. V. 63. P. 1116–1125. DOI: 10.1007/s10910-025-01711-2.
28. Дубинов А.Е., Дубинова И.Д. Точное решение дисперсионного уравнения Ландау для колебаний электронной плазмы // Письма в ЖТФ, 2006. Т. 32. С. 71–74. DOI: 10.1134/S1063785006010123.
29. Алексеев Б.В., Дубинов А.Е., Дубинова И.Д. Аналитические и численные решения обобщенных дисперсионных уравнений для одномерных затухающих колебаний плазмы // Теплофизика высоких температур, 2005. Т. 43. С. 485–491. DOI: 10.1007/s10740-005-0088-2.
30. Kudryashov N.A., Chmykhov M.A., Vigdorowitsch M.V. An estimative (warning) model for recognition of pandemic nature of virus infection // International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2023. V. 24. P. 213–226. DOI: 10.1515/ijnsns-2020-0154.
31. Siewert C.E. An exact analytical solutions of an elementary critical condition // Nuclear Science and Engineering, 1973. V. 51. P. 78. DOI: 10.13182/NSE73-A23260.
32. Barkan A., D'Angelo N., Merlino L.R. Charging of dust grains in a plasma // Physical Review Letters, 1994. V. 73. P. 3093–3096. DOI: 10.1103/PhysRevLett.73.3093.
33. Альтеркоп Б.А., Дубинова И.Д., Дубинов А.Е. О структуре заряженного слоя на границе плазмы с заряженным телом // ЖЭТФ, 2006. Т. 129. С. 197–206. DOI: 10.1134/S1063776106010201.
34. Гордиенко В.А., Дубинова И.Д., Дубинов А.Е. Нелинейная теория стационарных уединенных волн большой амплитуды в симметричных немагнитных e^-e^+ -плазме и $C_{60}^-C_{60}^+$ -плазме // Физика плазмы, 2006. Т. 32. С. 987–993. DOI: 10.1134/S1063780X06110043.
35. Sastry G. M., Agmon N. The span of one-dimensional multiparticle Brownian motion // Journal of Chemical Physics, 1996. V. 104. P. 3022–3025. DOI: 10.1063/1.471069.
36. Vedenov A.A., Velikhov E.P., Sagdeev R.Z. Nonlinear oscillations of rarified plasma // Nuclear Fusion, 1961. V. 1. P. 82–100. DOI: 10.1117/12.965080.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2025, vol. 14, no. 4, pp. 357–367

Solving a generalized comparison of power expressions using the Lambert W function

A. E. Dubinov^{1,2,✉}

¹ Sarov Institute of Physics and Technology – Branch of National Research Nuclear University «MEPhI» (SarFTI – NRNU MEPhI), 6 Dukhova St., Sarov, Nizhny Novgorod region, 607186, Russia

² Russian Federal Nuclear Center – All-Russia Scientific and Research Institute of Experimental Physics (RFNC – VNIIEF), 37 Mira Ave., Sarov, Nizhny Novgorod region, 607188, Russia

✉ dubinov-ae@yandex.ru

Received May 14, 2025; revised June 25, 2025; accepted June 26, 2025

Some properties of the new transcendental Lambert W function are presented: the definition of the function, its graph, coordinates of characteristic points, and simple identities. Several examples are given showing how the W function can be used to solve analytically transcendental equations that contain power, logarithmic, and exponential terms. A recently obtained solution of the comparison of two functional expressions of power type x^y and y^x is presented, which arises due to the generalization of the comparison of numbers e^π and π^e . An exact solution of the new generalized comparison of more complex power expressions x^{y^α} and y^{x^α} on sets of positive real numbers x and y for positive values of the exponent α is obtained for the first time. The solution is presented both as an exact formula using the Lambert W function and using graphs.

Keywords: the Lambert W function, transcendent equation, comparison.

References

1. Niven I. Which is larger, e^π or π^e ? Two-Year College Mathematics Journal, 1972. Vol. 3, No. 2. Pp. 13–15. DOI: 10.1080/00494925.1972.11974209.
2. McCartin B.J. e : the master of all. Mathematical Intelligencer, 2006. Vol. 28. Pp. 10–21. DOI: 10.1007/BF02987150.
3. Chakraborty B. A visual proof that $\pi^e < e^\pi$. Mathematical Intelligencer, 2019. Vol. 41. Pp. 56. DOI: 10.1007/s00283-018-9816-4.
4. Haque N. A visual proof that $e < A \Rightarrow e^A > A^e$. Mathematical Intelligencer, 2020. Vol. 42. Pp. 74. DOI: 10.1007/s00283-019-09964-x.
5. Vallejo A., Bove I. Which is greater: e^π or π^e ? An unorthodox physical solution to a classic puzzle. American Journal of Physics, 2024. Vol. 92. Pp. 397–398. DOI: 10.1119/5.0188912.
6. Rosendahl J., Gilmore J. Comparing B^A and A^B for $A > B$. College Mathematics Journal, 1987. Vol. 18. Pp. 50. DOI: 10.1080/07468342.1987.11973008.
7. Chakraborty B. A visual proof that $b^a < a^b$ when $e \leq a < b$. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2024. Vol. 55. Pp. 1291–1292. DOI: 10.1080/0020739X.2022.2102547.
8. Haque N., Chakraborty B. Comparing a^b and b^a via location of zeros. Mathematical Intelligencer, 2025. Vol. 47. Pp. 40–43. DOI: 10.1007/s00283-024-10342-5.
9. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E. G., Jeffrey D.J., Knuth D.E. On the Lambert W function. Advances in Computational Mathematics, 1996. Vol. 5. Pp. 329–359. DOI: 10.1007/BF02124750.
10. Valluri S.R., Jeffrey D.J., Corless R.M. Some applications of the Lambert W function to physics. Canadian Journal of Physics, 2000. Vol. 78. Pp. 823–831. DOI: 10.1139/p00-065.
11. Dubinova I. D. Primenenie W-funkcii Lamberta v matematicheskikh zadachah fiziki plazmy [Application of Lambert W-function in mathematical problems of plasma physics]. Fizika plazmy, 2004. Vol. 30. Pp. 937–943 (in Russian). DOI: 10.1134/1.1809403.
12. Dubinova I.D. Tochnye yavnye resheniya nekotorykh nelinejnykh differencial'nykh uravnenij [Exact explicit solutions of some nonlinear differential equations]. Differenciial'nye uravneniya, 2004. Vol. 40. Pp. 1129–1130 (in Russian). DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000049837.34049.2d.
13. Dubinov A.E., Dubinova I.D. How can one solve exactly some problems in plasma theory. Journal of Plasma Physics, 2005. Vol. 71. Pp. 715–728. DOI: 10.1017/S0022377805003788.
14. Valluri S.R., Gil M., Jeffrey D.J., Basu S. The Lambert W function and quantum statistics. Journal of Mathematical Physics, 2009. Vol. 50. Article ID: 102103. DOI: 10.1063/1.3230482.
15. Veberič D. Lambert W function for applications in physics. Computer Physics Communications, 2012. Vol. 183. Pp. 2622–2628. DOI: 10.1016/j.cpc.2012.07.008.0
16. Dence T.P. A brief look into the Lambert W function. Applied Mathematics, 2013. Vol. 4. Pp. 887–892. DOI: 10.4236/am.2013.46122.
17. Houari A. Additional applications of the Lambert W function in physics. European Journal of Physics, 2013. Vol. 34. Pp. 695–702. DOI: 10.1088/0143-0807/34/3/695.
18. Dubinov A.E. Mathematical tricks for pseudopotentials in the theories of nonlinear waves in plasmas. Physics of Plasmas, 2022. Vol. 29. Article ID: 020901-1–19. DOI: 10.1063/5.0078573.
19. Dubinov A.E., Dubinova I.D., Sajkov S.K. W funkciya Lamberta i ee primeneniye v matematicheskikh zadachah fiziki [Lambert's W function and its application in mathematical problems of physics]. Sarov, RFYAC-VNIIEF Publ., 2006. 159 p.
20. Mező I. The Lambert W function and its generalizations and applications. Boca Raton, FL, CRC Press, Taylor & Francis Group, LLC, 2022. 274 p.
21. Dubinov A.E., Dubinova I.D. Tochnoe znachenie sopryazhennogo toka v elektrolite v diffuzionno-migracionnoj modeli Gurevicha – Harkaca [The exact value of the conjugate current in the electrolyte in the Gurevich – Kharkats diffusion-migration model]. ZHTF, 2004. Vol. 74. Pp. 118–119 (in Russian). DOI: 10.1134/1.1826201.
22. Dubinov A.E., Kitaev I.N. Obobshchennyye zakon smeshcheniya Vina i zakon Stefana – Bol'cmana dlya teplovogo izlucheniya, imeyushchego nenulevoj himicheskij potencial [Generalized Wien displacement law and Stefan – Boltzmann law for thermal radiation having non-zero chemical potential]. Opticheskij zhurnal, 2018. Vol. 85. Pp. 3–5 (in Russian). DOI: 10.1364/JOT.85.000314.
23. Kitis G., Pagonis V. New expressions for half life, peak maximum temperature activation energy and kinetic order of a thermoluminescence glow peak based on the Lambert W function. Radiation Measure, 2017. Vol. 97. Pp. 28–34. DOI: 10.1016/j.radmeas.2016.12.013.
24. Pagonis V., Kitis G., Chen R. A new analytical equation for the dose response of dosimetric materials, based on the Lambert W function. Journal of Luminescence, 2020. Vol. 225. Article ID: 117333-1–7. DOI: 10.1016/j.jlumin.2020.117333.
25. Fries N., Dreyer M. An analytic solution of capillary rise restrained by gravity. Journal of Colloid and Interface Science, 2008. Vol. 320. Pp. 259–263. DOI: 10.1016/j.jcis.2008.01.009.

26. Dubinov A.E., Dubinova I.D., Sajkov S.K. Tochnoe reshenie zadachi o rasprostranenii volny goreniya [Exact solution of the problem of combustion wave propagation]. Doklady Akademii nauk, 2004. Vol. 394. Pp. 767–768 (in Russian). DOI: 10.1134/1.1686887.
27. Dubinov A.E. Einstein-Smoluchowski-type relations for real gases. Journal of Mathematical Chemistry, 2025. Vol. 63. Pp. 1116–1125. DOI: 10.1007/s10910-025-01711-2.
28. Dubinov A.E., Dubinova I.D. Tochnoe reshenie dispersionnogo uravneniya Landau dlya kolebanij elektronnoj plazmy [Exact solution of the Landau dispersion equation for electron plasma oscillations]. Pis'ma v ZHETF, 2006. Vol. 32. Pp. 71–74 (in Russian). DOI: 10.1134/S1063785006010123.
29. Alekseev B.V., Dubinov A.E., Dubinova I.D. Analiticheskie i chislennye resheniya obobshchennykh dispersionnykh uravnenij dlya odnomernykh zatuhayushchih kolebanij plazmy [Analytical and Numerical Solutions of Generalized Dispersion Equations for One-Dimensional Damped Plasma Oscillations]. Teplofizika vysokih temperatur, 2005. Vol. 43. Pp. 485–491 (in Russian). DOI: 10.1007/s10740-005-0088-2.
30. Kudryashov N.A., Chmykhov M.A., Vigdorowitsch M.V. An estimative (warning) model for recognition of pandemic nature of virus infection. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2023. Vol. 24. Pp. 213–226. DOI: 10.1515/ijnsns-2020-0154.
31. Siewert C.E. An exact analytical solutions of an elementary critical condition. Nuclear Science and Engineering, 1973. Vol. 51. P. 78. DOI: 10.13182/NSE73-A23260.
32. Barkan A., D'Angelo N., Merlino L.R. Charging of dust grains in a plasma. Physical Review Letters, 1994. Vol. 73. Pp. 3093–3096. DOI: 10.1103/PhysRevLett.73.3093.
33. Al'terkop B.A., Dubinova I.D., Dubinov A.E. O strukture zaryazhennogo sloya na granice plazmy s zaryazhennym telom [On the structure of a charged layer at the boundary of a plasma with a charged body]. ZHETF, 2006. Vol. 129. Pp. 197–206 (in Russian). DOI: 10.1134/S1063776106010201.
34. Gordienko V.A., Dubinova I.D., Dubinov A.E. Nelinejnaya teoriya stacionarnykh uedinennykh voln bol'shoj amplitudy v simmetrichnykh nezamagnichennykh e^-e^+ -plazme i $C_{60}^-C_{60}^+$ -plazme [Nonlinear Theory of Large-Amplitude Stationary Solitary Waves in Symmetric Unmagnetized e^-e^+ -Plasma and $C_{60}^-C_{60}^+$ -Plasma]. Fizika plazmy, 2006. Vol. 32. Pp. 987–993 (in Russian). DOI: 10.1134/S1063780X06110043.
35. Sastry G.M., Agmon N. The span of one-dimensional multiparticle Brownian motion. Journal of Chemical Physics, 1996. Vol. 104. Pp. 3022–3025. DOI: 10.1063/1.471069.
36. Vedenov A.A., Velikhov E.P., Sagdeev R.Z. Nonlinear oscillations of rarified plasma. Nuclear Fusion, 1961. Vol. 1. Pp. 82–100. DOI: 10.1117/12.965080.

УДК: 621.383.933:621.3.029.78

Методика определения электрофизических характеристик светодиодов

© 2025 г. К. Н. Орлова¹, А. В. Градобоев², А. В. Беклемишева³, А. Р. Аванесян¹¹ Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия² Отделение экспериментальной физики «Национального исследовательского Томского политехнического университета», Томск, 634034, Россия³ Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Москва, 123182, Россия

Представлена методика анализа электрофизических характеристик светодиодов (далее СД), изготовленных из различных полупроводниковых материалов группы $A^{III}B^V$ при воздействии таких внешних факторов, как ионизирующее излучение различных видов, длительная эксплуатация, повышенная температура, электрические поля и т.д. Данная методика предназначена для определения омического сопротивления СД и индивидуальных коэффициентов пропорциональности, которые позволяют целенаправленно исследовать деградационные процессы в СД. Показано, что на вольт-амперных характеристиках (ВАХ) выделяются характерные области протекания рабочего тока: область низких токов (НТ), область омического сопротивления СД – R -область, область высоких токов (ВТ). Отмечено, что сублинейный участок прямой ветви ВАХ прибора с p - n переходом можно экстраполировать линейной зависимостью, наклон которой определяется его омическим сопротивлением. Определены физико-математические соотношения для омического сопротивления СД, изготовленных из любых материалов. Для исследуемых СД на основе материалов $AlGaInP$ (с множественными квантовыми ямами и без), $AlGaN$ с множественными квантовыми ямами и монокристаллического GaP при протекании прямого тока определены диапазоны напряжений отсечки. Представлена методика, которая может быть использована для анализа работы любых приборов, принцип работы которых основан на использовании p - n перехода и барьера Шоттки.

Ключевые слова: светодиоды, омическое сопротивление, вольт-амперная характеристика, радиационная стойкость.

Введение

Разработчики элементной базы и аппаратуры широко используют излучающие в видимом или ИК-диапазоне длин волн СД, как полупроводниковые приборы, составляющие основу полупроводниковой техники. Представителям заказчика зачастую необходима информация по воздействию основных видов проникающей радиации (нейтронов, электронов, протонов и гамма квантов) на электрические и светотехнические параметры и характеристики светоизлучающих структур. В настоящее время СД широко применяются не только в гражданской аппаратуре, но также в составе полупроводниковой базы ядерной энергетики и объектов ЯТЦ, гражданской авиации и космонавтики, ядерной радиоэлектроники и прочей бортовой аппаратуры [1–3].

Одним из важнейших параметров для этих областей применения является стойкость к действию проникающей радиации. СД группы $A^{III}B^V$ в настоящее время изготавливаются на основе различных материалов: GaP , $GaAs$, $InAs$, $InAsSb$, $GaSb$, $GaInSb$, $GaAsSb$, $GaAlSb$, $InGaAs$, $InGaAsP$, $GaAsP$, $AlGaAs$, $AlGaInP$, приборы на основе фосфида галлия сохраняют свое значение вследствие их повышенной

✉ К.Н. Орлова: KNOrlova@mephi.ru

Поступила в редакцию: 14.03.2025

После доработки: 25.07.2025

Принята к публикации: 30.07.2025

EDN ZKYOXG

радиационной стойкости [4–6]. Светоизлучающие структуры на основе фосфида галлия с красным и зеленым цветом свечения позволили создать обобщенную модель светодиода, что существенно ускорило развитие оптоэлектроники. Исследование радиационной деградации позволило уточнить модель GaP (Zn-O) светодиода [7, 8].

Создание качественной методики определения и анализа электрофизических характеристик СД позволяет не только определить величину изменения напряжения при изменении тока. Важнейшая характеристика, которую можно получить, исследуя ВАХ СД, – омическое сопротивление (далее ОС), которое позволяет получить информацию при внешнем воздействии о физических механизмах, протекающих не только в активной области СД (p-n переходе), замыкающих слоях, но и в контактах с приконтактными слоями.

Цель настоящей работы – разработка методики анализа ВАХ СД для определения омического сопротивления СД и индивидуальных коэффициентов пропорциональности.

1. Объекты исследований и используемое оборудование

Для проведения исследования были использованы СД, изготовленные из различных материалов в условиях серийного производства: СД видимого диапазона длин волн на основе гетероструктур AlGaInP с множественными квантовыми ямами и без, светодиоды на основе гетероструктур InGaN с множественными квантовыми ямами и на основе GaP.

По типу конструкции исследуемые СД делились на:

- **выводные** (на базе корпусов КИ1 и КИ2);
- **поверхностного монтажа** (далее ДПМ), представлены под кодом IA590N2 и IA630N2, IB459, IB527 в табл. 1.

Таблица 1. Обозначения объектов исследования

Тип	Активный слой	Материал	Характеристика типа СД	Обозначение	Длина волны (нм), цвет
I	С множественными квантовыми ямами	AlGaInP	A	IA590N1	590, желтый
				IA587N2	587, желтый
				IA630N1	630, красный
				IA624N2	624, красный
		InGaN	B	IB459	459, синий
				IB527	527, зеленый
				IB465	465, белый
II	Без квантовых ям	AlGaInP	C	IC590N1	590, желтый
				IC590N2	590, желтый
				IC630	630, красный
		GaP	D	ID567	567, желтый
				ID693	693, красный

Типичная конструкция СД с выводными контактами корпусного типа с полимерной герметизацией имеет корпус и линзу, изготовленные из оптического компаунда, предназначенные для формирования заданной диаграммы направленности излучения. Для изготовления выводных СД использовались металлические корпуса КИ1 и КИ2, различающиеся геометрическими размерами [9], а также технология формирования корпуса диода из оптического компаунда одновременно с линзой. Для формирования направленного пучка излучения использовалась линза из оптического компаунда ПЭО-90МЭ.

В случае использования металлических корпусов КИ методом термокомпрессионной сборки кристалл монтировался в металлический корпус, а затем на основе оптического компаунда ПЭО-90МЭ формировалась линза, предназначенная для формирования направленного пучка излучения СД. На

этапе предварительных исследований было установлено, что используемый компаунд не оказывает существенного влияния на спад светимости СД видимого диапазона при воздействии спецфакторов.

Исследуемые СД и их особенности и характеристики также представлены в табл. 1. Здесь же приведена используемая система обозначений объектов исследований.

Светодиоды с характеристикой типа А и В являются ДПМ, а С и D – выводными. Таким образом, в настоящем исследовании были охвачены СД с различной шириной запрещенной зоны, различным квантовым выходом, с наличием и без наличия квантовых фрагментов. Однако исследуемые материалы ограничены материалами, принадлежащими к группе материалов $A^{III}B^V$.

Омическое сопротивление СД R характеризует сопротивление, состоящее из суммы сопротивлений омических контактов $R_{ок}$, сопротивления активного слоя кристалла $R_{ас}$, омического сопротивления контакта кристалл – теплоотвод $R_{кт}$ и омического сопротивления электрических выводов $R_{эв}$:

$$R = R_{ок} + R_{ас} + R_{кт} + R_{эв}. \quad (1)$$

Таким образом, нарушение теплового контакта однозначно должно сопровождаться локальным ростом омического сопротивления.

2. Экспериментальные результаты и их обсуждение

Рассмотрим методику анализа ВАХ СД для определения омического сопротивления СД и индивидуальных коэффициентов пропорциональности на примере ИС590N1 СД на основе гетероструктур AlGaInP.

Определение электрофизических характеристик СД путем анализа прямой ветви ВАХ.

1. Измерение прямой ветви ВАХ и ВтАХ СД в заданном диапазоне рабочих токов.

Если диапазон рабочих токов не задан, то максимально допустимый рабочий ток для заданного режима эксплуатации определяют следующим образом:

- устанавливают исследуемый СД в измерительное устройство, постепенно повышают рабочий ток, измеряя при этом ВАХ, до полного отказа СД;
- повторяют данную процедуру для выборки СД (не менее 10 шт.);
- определяют статистическим методом среднее значение рабочего тока $I_{раб\ KO}$ (КО – катастрофический отказ, вследствие которого СД выходят из строя);
- определяют величину максимально допустимого рабочего тока, как

$$I_{раб\ max} = (0.7 - 0.75) \cdot I_{раб\ KO}.$$

2. Нахождение характерных областей протекания рабочего тока ВАХ (рис. 1).

Такое представление ВАХ позволяет выделить три характерные области рабочих токов СД:

- область низких токов (НТ);
- область омического сопротивления активного слоя СД- R , где ВАХ СД имеет линейную форму;
- область высоких токов (ВТ).

При этом каждая из выделенных областей характеризуется собственной закономерностью изменения рабочего напряжения в зависимости от рабочего тока. Выявленные границы показаны на рис. 1 вертикальными стрелками.

Представленные ранее результаты позволяют сделать вывод о том, что в области R ВАХ СД определяется его омическим сопротивлением. При этом в области НТ ВАХ определяется нелинейным сопротивлением р-п перехода. В свою очередь, отклонение ВАХ в области ВТ (где сопротивление активной области СД минимально, и преобладает диффузионная составляющая тока, которая зависит от плотности распределения носителей заряда) можно объяснить ростом температуры активного слоя, что приводит к снижению ширины запрещенной зоны [10, 11].

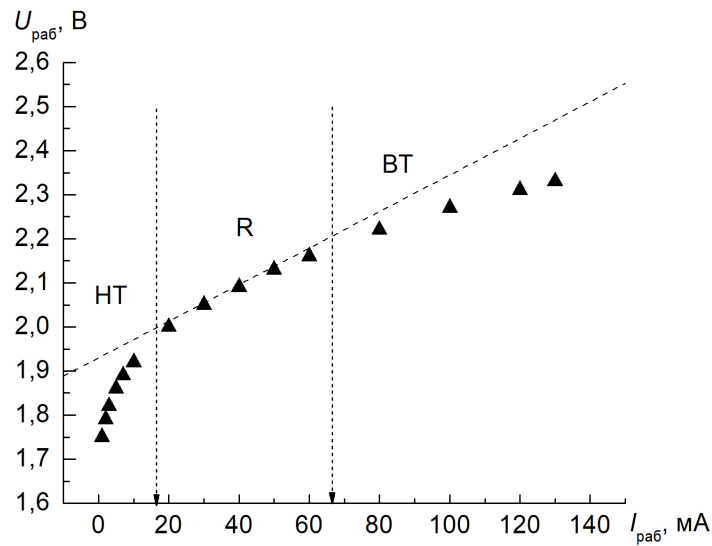


Рис. 1. Типичная ВАХ ИС590N1 СД на основе гетероструктур AlGaInP желтого цвета свечения ($\lambda = 590$ нм): символы – экспериментальные данные; пунктирная линия – расчет по формуле (2); вертикальные стрелки – границы между выделенными характерными областями рабочего тока

Аналогичные зависимости были выявлены для ВАХ всех исходных СД. Таким образом можно предполагать различное поведение приборов в областях НТ, R и ВТ.

3. ВАХ в области R описываем следующим физико-математическим соотношением:

$$U_{\text{раб}} = U_{00} + R_{\text{сд}} \cdot I_{\text{раб}}, \quad (2)$$

где $U_{00} = 1,92$ В – напряжение отсечки p - n перехода СД в данной системе координат; $R_{\text{сд}} = 7,25$ Ом – ОС СД в данной области; $I_{\text{раб}}$ – рабочий ток [А].

Величины U_{00} , $R_{\text{сд}}$ являются индивидуальными характеристиками СД и материала, из которого он изготовлен. На основе нескольких независимых измерений ВАХ одного и того же СД можно оценить величину доверительных интервалов для измеряемых величин статистическим методом. Предварительные исследования показали, что погрешность определения ОС СД не превышает $\pm 5\%$ при доверительной вероятности 0.95. Напряжение отсечки при этом определяется с точностью до $\pm 0,01$ В, и в большей степени характеризует полупроводниковый материал, из которого изготовлен СД.

Рассмотрим полученное в результате применения данной методики изменение ОС ИС590N1 СД на основе гетероструктур AlGaInP при воздействии гамма-квантов (рис. 2).

ОС СД монотонно растет, начиная с малых доз облучения. Следует отметить, что наблюдаемые при этом изменения ОС СД статистически значимы и не могут быть объяснены погрешностью измерений.

Контроль вольт-фарадной характеристик (далее ВФХ) показал, что в диапазоне используемых доз облучения отсутствуют изменения электрофизических характеристик активного слоя СД, что согласуется с известными литературными данными [12].

С другой стороны, в [13, 14] было показано, что при воздействии различных внешних факторов для СД наблюдается релаксация локальных механических напряжений, что приводит к ухудшению теплового контакта между кристаллом и теплоотводом.

В первой области наблюдается незначительный рост ОС. Второй этап характеризуется существенным повышением омического сопротивления. При этом после его роста на 20–30 % при облучении последующее облучение приводит к появлению области аномальных ВАХ, которая определяет вторую характерную область. При дальнейшем облучении развивается третья стадия появления катастрофических отказов.

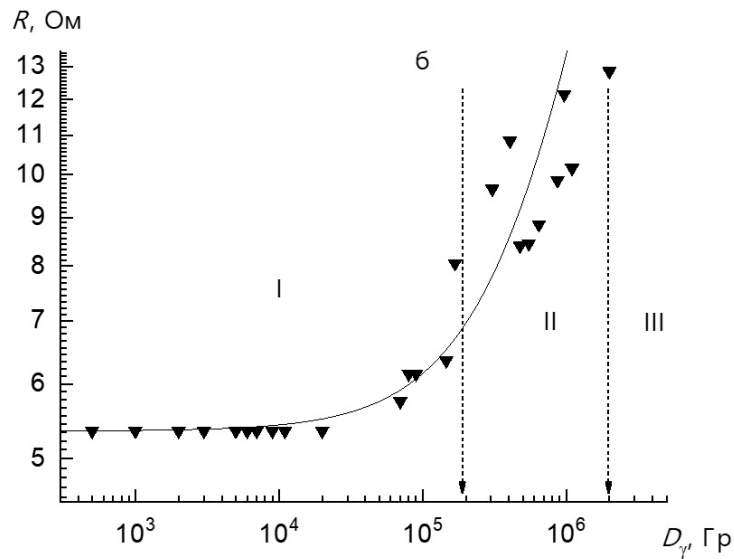


Рис. 2. Изменение ОС ПС590N1 СД при облучении гамма-квантами; символы – экспериментальные данные; линии – установленные соотношения

В результате анализа КО установлено, что для СД происходит отсоединение кристалла от теплоотвода, при этом сам кристалл сохраняет работоспособность. Подобное явление наблюдали ранее [15] при проведении ускоренных испытаний для оценки надежности и долговечности СД. Отсоединение кристалла от теплоотвода свидетельствует о том, что температура приблизилась к предельно допустимому значению, которое определяется температурой плавления омических контактов.

Таким образом, можно утверждать, что наблюдаемая нестабильность СД и появление области аномальных ВАХ на втором этапе обусловлено приближением температуры к предельно допустимому значению.

Увеличение теплового сопротивления для ПС590N1 достаточно хорошо можно видеть при сопоставлении ВАХ (см. рис. 1). Чем раньше выделяется область ВТ, тем более сильный разогрев СД. Кроме того, для ПС590N1 в явном виде проявляется стадия развития КО.

Полученные, используя вышеуказанную методику, индивидуальные коэффициенты пропорциональности позволяют целенаправленно исследовать деградиационные процессы в СД при воздействии различных внешних факторов (электрическое поле, температура, длительная эксплуатация, различные виды ионизирующего излучения и т.д.).

Таблица 2. Исходные сопротивления и напряжения отсечки СД

Тип СД	U_0 , В	R , Ом
IA590N1	$1.85 \div 1.92$	$1.7 \div 3.5$
IA587N2	$1.90 \div 1.92$	$7.9 \div 11.0$
IA630N1	$1.79 \div 1.82$	$1.4 \div 3.5$
IA624N2	$2.08 \div 2.13$	$5.2 \div 5.4$
IB459	$3.09 \div 3.12$	$2.6 \div 3.2$
IB527	3.09	3.10
IB465	$3.08 \div 3.10$	$2.7 \div 3.7$
ПС590N1	$1.91 \div 1.93$	$4.5 \div 5.1$
ПС590N2	$2.10 \div 2.13$	$3.1 \div 5.4$
ПС630	1.64	$4.6 \div 6.9$
IID567	1.645	$3.8 \div 5.7$
IID693	$1.63 \div 1.70$	$5.3 \div 5.8$

Полученные в результате применения настоящей методики напряжения отсечки исходных СД и их исходные сопротивления представлены в табл. 2. Наблюдаемые различия ОС СД, изготовленных из одного материала (например, IA590N1 и IA587N2), обусловлены не только различием партии приборов, но и в том числе различным технологическим исполнением СД, изготовленным из различных материалов.

Данная методика предназначена для определения электрофизических характеристик СД на основе анализа прямой ветви ВАХ, и дальнейшего их анализа в результате воздействия внешних факторов может быть использована для анализа работы всех известных типов СД.

4. Заключение

Установлено, что независимо от используемого полупроводникового материала, от наличия/отсутствия квантовых ям для всех типов исследуемых СД на прямой ветви ВАХ и ВТАХ можно выделить три характерные области рабочих токов:

- область НТ – на прямой ветви ВАХ и ВТАХ наблюдается характерная нелинейная собственная закономерность роста рабочего тока и мощности излучения;
- область R средних токов – прямая ветвь ВАХ описывается омическим сопротивлением p - n перехода, при этом для ВТАХ наблюдается спад с ростом рабочего тока;
- область ВТ – дополнительный спад мощности излучения за счет повышения температуры активного слоя СД.

Сублинейный участок прямой ветви ВАХ прибора с p - n переходом можно экстраполировать линейной зависимостью, наклон которой определяется его омическим сопротивлением.

Диапазон напряжений при протекании рабочего тока определяется высотой потенциального барьера между активной областью и буферными слоями СД. Так, для исследуемых СД при протекании прямого тока напряжение отсечки изменяется в пределах:

$U_0 = (1.63 - 1.70)$ В – для IID567 и IID693 СД, изготовленных на основе GaP;

$U_0 = (1.79 - 1.92)$ В – для IA590N1 и IA630N1 СД на основе гетероструктур AlGaInP с множественными квантовыми ямами;

$U_0 = (1.9 - 2.13)$ В – для IA587N2 и IA624N2 СД поверхностного монтажа на основе гетероструктур AlGaInP с множественными квантовыми ямами;

$U_0 = (1.64 - 2.13)$ В – для IIC590N1, IIC590N2 и IIC630 СД на основе гетероструктур AlGaInP;

$U_0 = (3.09 - 3.13)$ В – для IB459, IB527 и IB465 СД на основе гетероструктур AlGaN.

Разработана методика, предназначенная для определения электрофизических характеристик СД на основе анализа прямой ветви ВАХ? и может быть использована для анализа работы всех известных типов СД, а также для анализа работы других полупроводниковых приборов, работа которых основана на использовании p - n перехода и барьера Шоттки.

Финансирование

Работа выполнена в рамках финансирования НИОКР «Разработка новых имплантационных методов получения диэлектрических промежуточных слоёв в полупроводниковых подложках для систем управления термоядерных установок» № 25 от 9 января 2025 г.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Вклад авторов

К.Н. Орлова – разработка концепции исследования; разработка методик измерения; постановка эксперимента; разработка математической модели; участие в проведении исследования и обсуждении результатов; подготовка текста статьи.

А.В. Градобоев – формулировка идеи и целей исследования; постановка задачи; выбор методов исследования; участие в проведении исследования и обсуждении результатов.

А.В. Беклемишева – анализ нормативной базы; выполнение измерений; анализ экспериментальных данных; выявление закономерностей; подбор литературных источников; редактирование текста статьи.

А.Р. Аванесян – выполнение экспериментальных работ; обработка результатов; проведение численных расчетов; первичная обработка результатов исследования; выявление закономерностей; проведение расчетов и подготовка заключения.

Список литературы

1. *Танеро К.И., Демидась Г.В., Щемеров И.В.* Исследование деградации GAAS/GE солнечных элементов вследствие радиационно-индуцированных эффектов структурных повреждений // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Физика радиационного воздействия на радиоэлектронную аппаратуру, 2011. № 3. С. 46–51.
2. *Wilson D.J., Schneider K., Hönl S., Anderson M., Baumgartner Ya., Czornomaz L., Kippenberg T.J., Seidler P.* Integrated gallium phosphide nonlinear photonics // Nature Photonics, 2020. V. 14. № 1. P. 57–62.
3. *John S.* Different Types of in Light Emitting Diodes (LED) Materials and Challenges-A Brief Review // International Journal for Research in Applied Science and Engineering Technology, 2018. V. 6. P. 4418–4420.
4. *Фролов И.В., Радаев О.А., Сергеев В.А.* Динамические характеристики и квантовая эффективность отдельных спектральных составляющих спектра излучения InGaN светодиодов // Журнал радиоэлектроники, 2018. № 9. С. 1–14.
5. *Chang M.H., Das D., Varde P.V., Pecht M.* Light emitting diodes reliability review // Microelectronics Reliability, 2012. V. 52. № 5. P. 762–782.
6. *Brudnyi V., Prudaev I., Oleinik V., Marmaluk A.* Electron irradiation degradation of AlGaInP/GaAs light-emitting diodes // Physica status solidi (a), 2018. V. 215. № 8. P. 1700445.
7. *Мелебаев Д., Аннабердиева М.Р., Котыров М., Таулиева А.М.* Оптические свойства фосфида галлия и фотодиоды Шоттки на его основе // Национальная ассоциация ученых, 2021. № 65-2. С. 35–51.
8. *Ионычев В.К., Шестеркина А.А.* Исследование глубоких центров в микроплазменных каналах фосфидгаллиевых светодиодов зеленого спектра излучения // Физика и техника полупроводников, 2017. Т. 51. № 3. С. 386–389.
9. *Градобоев А.В., Орлова К.Н., Асанов И.А.* Деградация параметров гетероструктур AlGaInP при облучении быстрыми нейтронами и гамма-квантами // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Физика радиационного воздействия на радиоэлектронную аппаратуру, 2013. №. 2. С. 64–66.
10. *Романов Н.М., Мокрушина С.А.* Влияние гамма-облучения на МДП-структуры с тонким оксидом Al_2O_3 // Перспективные материалы, 2018. № 2. С. 17–24.
11. *Orlova K.N., Gradoboev A.V.* Change in radiating power of the algaInP heterostructures under irradiation by fast neutrons / 24th International Crimean Conference Microwave & Telecommunication Technology, Sevastopol, Ukraine, 2014. Pp. 874–875. DOI: 10.1109/CRMICO.2014.6959672
12. *Бурмистров, Е.Р., Авакянц, Л.П., Афанасова, М.М.* Пьезоэлектрическая релаксация двумерного электронного газа в гетероструктурах с квантовыми ямами InGaN/GaN // Известия высших учебных заведений. Физика, 2021. Т. 64. № 5 (762). С. 9–19.
13. *Градобоев А.В., Орлова К.Н., Арефьев К.П., Асанов И.А.* Исследование гетероструктур AlGaInP при облучении гамма-квантами в области перестройки дефектной структуры // Известия высших учебных заведений. Физика, 2013. Т. 56. № 11–3. С. 116–119.
14. *Генцарь П.А.* Радиационно-стимулированная релаксация внутренних механических напряжений в гомоэпитаксиальных пленках фосфида галлия // Физика и техника полупроводников, 2006. Т. 40. № 9. С. 1051–1053.
15. *Gradoboev A.V., Simonova A.V., Orlova K.N.* Influence of irradiation by ^{60}Co gamma-quanta on reliability of IR-LEDs based upon AlGaAs heterostructures // Physica status solidi (c), 2016. V. 13. № 10–12. Pp. 895–902.
16. *Симонова А.В.* Влияние ионизирующего излучения на деградационные процессы в светодиодах при эксплуатации: диссертация кандидата технических наук. Томск, 2019. 130 с.

Determining method for LEDs electrophysical characteristics

K.N. Orlova^{1,✉}, A.V. Gradoboev², A.V. Beklemisheva³, A.R. Avanesyan¹

¹ National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409, Russia

² Department of Experimental Physics, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, 634050, Russia

³ National Research Center «Kurchatov Institute», Moscow, 123182, Russia

✉ KNorlova@mephi.ru

Received March 14, 2025; revised July 25, 2025; accepted July 30, 2025

A method is presented for analyzing the electrophysical characteristics of LEDs (hereinafter referred to as LEDs) made from various semiconductor materials of group AIII BV under the influence of external factors (ionizing radiation, long-term operation, elevated temperature, electric fields, etc.). This technique is intended to determine the ohmic resistance of LEDs, and individual proportionality coefficients, which allow targeted investigation of degradation processes in LEDs. It is shown that characteristic areas of the operating current flow are distinguished on the volt-ampere characteristics (hereinafter referred to as I-V characteristics): the low-current region LT, the LED ohmic resistance region – R region, and the high-current region HT. It is shown that the sublinear section of the direct branch of the I-V characteristic of a device with a p-n junction can be extrapolated by a linear dependence, the slope of which is determined by its ohmic resistance. Physico-mathematical relationships have been determined for the ohmic resistance of LEDs made of any materials. For the studied LEDs based on AlGaInP (with and without multiple quantum wells), AlGaIn with multiple quantum wells and single-crystal GaP, the ranges of cutoff voltages are determined when forward current flows. A technique is presented that can be used to analyze the operation of any devices whose operating principle is based on the use of a p-n junction and a Schottky barrier.

Keywords: LEDs, ohmic resistance, current-voltage characteristic, radiation resistance.

References

1. *Tapero K.I., Demidas' G.V., Shchemerov I.V.* Issledovanie degradatsii GAAS/GE solnechnykh elementov vsledstvie radiatsionno-inducirovannykh effektov strukturnykh povrezhdenij [Study of GAAS/GE Solar Cell Degradation Due to Radiation-Induced Structural Damage Effects]. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Seriya: Fizika radiatsionnogo vozdeystviya na radioelektronnuyu apparaturu*, 2011. No. 3. Pp. 46–51 (in Russian).
2. *Wilson D.J., Schneider K., Hönl S., Anderson M., Baumgartner Ya., Czornomaz L., Kippenberg T.J., Seidler P.* Integrated gallium phosphide nonlinear photonics. *Nature Photonics*, 2020. Vol. 14. No. 1. Pp. 57–62.
3. *John S.* Different Types of in Light Emitting Diodes (LED) Materials and Challenges-A Brief Review. *International Journal for Research in Applied Science and Engineering Technology*, 2018. Vol. 6. Pp. 4418–4420.
4. *Frolov I.V., Radaev O.A., Sergeev V.A.* Dinamicheskie harakteristiki i kvantovaya effektivnost' ot del'nykh spektral'nykh sostavlyayushchih spektra izlucheniya InGaIn svetodiodov [Dynamic Characteristics and Quantum Efficiency of Individual Spectral Components of the Emission Spectrum of InGaIn LEDs]. *Zhurnal radioelektroniki*, 2018. No. 9. Pp. 1–14 (in Russian).
5. *Chang M.H., Das D., Varde P.V., Pecht M.* Light emitting diodes reliability review. *Microelectronics Reliability*, 2012. Vol. 52. No. 5. Pp. 762–782.
6. *Brudnyi V., Prudaev I., Oleinik V., Marmaluk A.* Electron irradiation degradation of AlGaInP/GaAs light-emitting diodes. *Physica status solidi (a)*, 2018. Vol. 215. No. 8. Pp. 1700445.
7. *Melebaev D., Annaberdieva M.R., Kotyrov M., Tashlieva A.M.* Opticheskie svoystva fosfida galliya i fotodiody Shottki na ego osnove [Optical properties of gallium phosphide and Schottky photodiodes based on it]. *Natsional'naya assotsiatsiya uchenykh*, 2021. No. 65-2. Pp. 35–51 (in Russian).
8. *Ionychev V.K., Shesterkina A.A.* Issledovanie glubokikh centrov v mikroplazmennyykh kanalah fosfidgallievyykh svetodiodov zelenogo spektra izlucheniya [Study of deep centers in microplasma channels of gallium phosphide LEDs of green emission spectrum]. *Fizika i tekhnika poluprovodnikov*, 2017. Vol. 51. No. 3. Pp. 386–389 (in Russian).

9. *Gradoboev A.V., Orlova K.N., Asanov I.A.* Degradaciya parametrov geterostruktur AlGaInP pri obluchenii bystryimi nejtronami i gamma-kvantami [Degradation of parameters of AlGaInP heterostructures under irradiation with fast neutrons and gamma rays] *Voprosy atomnoj nauki i tekhniki. Seriya: Fizika radiacionnogo vozdejstviya na radioelektronnuyu apparaturu*, 2013. No. 2. Pp. 64–66 (in Russian).
10. *Romanov N.M., Mokrushina S.A.* Vliyanie gamma-oblucheniya na MDP-struktury s tonkim oksidom Al₂O₃ [Effect of gamma irradiation on MIS structures with thin Al₂O₃ oxide]. *Perspektivnye materialy*, 2018. No. 2. Pp. 17–24 (in Russian).
11. *Orlova K.N., Gradoboev A.* Change in radiating power of the algaInP heterostructures under irradiation by fast neutrons. 24th International Crimean Conference Microwave & Telecommunication Technology. Sevastopol, Ukraine, 2014. Pp. 874–875. DOI: 10.1109/CRMICO.2014.6959672.
12. *Burmistrov, E.R., Avakyanc, L.P., Afanasova, M.M.* P'ezoelektricheskaya relaksaciya dvumernogo elektronogo gaza v geterostrukturah s kvantovymi yamami InGaN/GaN [Piezoelectric Relaxation of Two-Dimensional Electron Gas in InGaN/GaN Quantum Well Heterostructures]. *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Fizika*, 2021. Vol. 64. No. 5 (762). Pp. 9–19 (in Russian).
13. *Gradoboev A.V., Orlova K.N., Aref'ev K.P., Asanov I.A.* Issledovanie geterostruktur AlGaInP pri obluchenii gamma-kvantami v oblasti perestrojki defektnoj struktury [Investigation of AlGaInP heterostructures under gamma-ray irradiation in the area of defect structure rearrangement]. *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Fizika*, 2013. Vol. 56. No. 11–3. Pp. 116–119 (in Russian).
14. *Gentsar' P.A.* Radiatsionno-stimulirovannaya relaksatsiya vnutrennikh mekhanicheskikh napryazhenii v gomoepitaksial'nykh plenkakh fosfida galliya [Radiation-induced relaxation of internal mechanical stresses in homoepitaxial gallium phosphide films]. *Fizika i tekhnika poluprovodnikov*, 2006. Vol. 40. No. 9. Pp. 1051–1053 (in Russian).
15. *Gradoboev A.V., Simonova A.V., Orlova K.N.* Influence of irradiation by ⁶⁰Co gamma-quanta on reliability of IR-LEDs based upon AlGaAs heterostructures. *Physica status solidi (c)*, 2016. Vol. 13. No. 10–12. Pp. 895–902.
16. *Simonova A.V.* Vliyanie ioniziruyushchego izlucheniya na degradacionnye processy v svetodiodah pri ekspluatatsii. Diss. kand. tekhn. nauk [The influence of ionizing radiation on degradation processes in LEDs during operation Diss. Cand. Tech. Sci.]. Tomsk, 2019. 130 p.