-

Том 9, номер 1, 2020

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА	
Характеристики полей нейтронов в бетоне от источника фотонов с энергией 30 МэВ	
И. Х. Альхагаиш, В. К. Сахаров	3
ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА	
Расчетно-экспериментальное исследование работоспособности скоростной видеокамеры, установленной на ракетном поезде	
С. И. Герасимов, В. И. Ерофеев, В. А. Кикеев, О. В. Кривошеев, В. И. Костин, И. А. Одзерихо, Р. В. Герасимова, А. А. Глухов, В. В. Писецкий	11
Определение параметров кристаллических решеток соединений кюрия с никелем, кобальтом и железом	
В. М. Радченко, М. А. Рябинин, Т. А. Чернакова	16
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ	
Точные решения нелинейного дифференциального уравнения для описания оптических импульсов с нелинейностью третьей и пятой степени	
Н. А. Кудряшов, Д. В. Сафонова	25
Построение точных решений нелинейных дифференциальных уравнений методом расщепления	
А. Д. Полянин, Л. В. Линчук	32
Нелинейные динамические процессы, описываемые системой уравнений Радхакришнана—Кунду—Лаксманана	
С. Ф. Лаврова, Н. А. Кудряшов	45
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА	
Генеративно-дискриминативная нейросетевая модель для задачи авторского профилирования	
А. Г. Сбоев, Р. Б. Рыбка, А. В. Грязнов, И. А. Молошников	50
Проверка адекватности восстановления ПФ по EBSD измерениям, выполненным при различных значениях параметров эксперимента	
А. О. Овчинникова, Т. И. Савелова	58
Статистические методы в задачах виртуализации	
А. А. Моисеев	66
Влияние корреляции спайковых последовательностей на обучение нейронной сети под действием Spike-Timing-Dependent Plasticity	
А. Г. Сбоев, Р. Б. Рыбка, А. В. Серенко	82

_

_

Volume 9, Number 1, 2020

Theoretical and Experimental Physics	
Characteristics of Neutron Fields in Concrete from a Photon Source with an Energy of 30 MeV	
I. K. Alhagaish and V. K. Sakharov	3
Technical Physics	
Computational and Experimental Study of the Performance of a High-Speed Video Camera Installed on a Rocket Train	
S. I. Gerasimov, V. I. Erofeev, V. A. Kikeev, O. V. Krivosheev, V. I. Kostin, I. A. Odzericho, R. V. Gerasimova, A. A. Glukhov, and V. V. Pisetskiy	11
Determination of the Parameters of Crystal Lattices Compounds of Curium with Nickel, Cobalt and Iron	
V. M. Radchenko, M. A. Ryabinin, and T. A. Chernakova	16
Differential Equations and Dynamic Systems	
Exact Solutions of a Nonlinear Differential Equation with Third and Fifth Degree Nonlinearities for Description of Optical Pulses	
N. A. Kudryashova, and D. V. Safonova	25
Construction of Exact Solutions of Nonlinear Differential Equations by the Splitting Method	
A. D. Polyanin and L.V. Linchuk	32
Nonlinear Dynamic Processes Described by the Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan Equations	
S. F. Lavrova and N. A. Kudryashov	45
Applied Mathematics and Informatics	
Generative-Discriminative Neural Network Model for the Task of Author Profiling	
A. G. Sboev, R. B. Rybka, A. V. Gryaznov, and I. A. Moloshnikov	50
Verification of the Reconstruction of Pole Figures from Electron Backscatter Diffraction Measurements Performed under Variation of Experimental Parameters	
A. O. Ovchinnikova and T. I. Savyolova	58
Statistical Methods in Virtualization	
A. A. Moiseev	66
Effect of Spike Train Correlation on Spiking Neural Network Learning by Spike-Timing-Dependent Plasticity	
A. G. Sboeva, R. B. Rybka, and A. V. Serenko	82

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 1, с. 3–10

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

УДК 621.039-78

ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЕЙ НЕЙТРОНОВ В БЕТОНЕ ОТ ИСТОЧНИКА ФОТОНОВ С ЭНЕРГИЕЙ 30 МэВ

© 2020 г. И. Х. Альхагаиш¹, В. К. Сахаров¹

¹ Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия Поступила в редакцию 23.11.2019 г. После доработки 23.11.2019 г. Принята к публикации 24.12.2019 г.

В литературе имеются сведения о прохождении фотонного излучения в различных защитных материалах [7—9] для источников энергии фотонов в диапазоне от 6 до 24 МэВ и, при толщине для этих материалов в диапазоне от 15 см до 80 см [9, 10]. Использование электронных ускорителей в промышленности и медицине с энергией первичного электронного пучка больше, чем эти энергия и толщина, приводит к необходимости получить данные по характеристикам ослабления фотонов тормозного излучения для энергии большей этих энергий, и при толщинах, больших этих толщин. В качестве защитных материалов от тормозного излучения ускорителей используются бетон, железо и свинец. В работе были произведены расчеты энергетических распределений плотностей потока фотонов и эффективных доз в плоской защите из бетона, а также аналогичные характеристики полей нейтронного и вторичного фотонного излучений. Расчеты были выполнены для двух видов источников: плоского мононаправленного моноэнергетического источника фотонов с энергией 30 МэВ, и источника тормозного излучения с максимальной энергией 30 МэВ.

Ключевые слова: эффективная доза, бетон, метод Монте–Карло, нейтрон, электронные ускорители **DOI:** 10.1134/S2304487X20010022

ВВЕДЕНИЕ

Фотонное излучение, возникающее при торможении ускоренных электронов на мишени линейного электронного ускорителя на высокие энергии, является основным источником излучения, определяющим радиационную безопасность, при расчетах противорадиационной защиты ускорителей. Помимо этого необходимо учитывать создаваемое им фотонейтронное излучение, которое формируется в защите и на мишени.

"Гигиенические требования к размещению и эксплуатации ускорителей электронов до 100 МэВ" [11] представляют собой в настоящий момент единственный документ в Российской Федерации, регламентирующий методику расчета защиты электронных ускорителей. Согласно этим требованиям, расчет защиты от тормозного излучения выполняется с помощью приближенных методов, использующих длины релаксации фотонов с энергиями в основном до 5 МэВ для бетона. железа и свинца, полученным для моноэнергетических источников фотонов. Использование такого приближенного подхода приводит к значительным погрешностям в определении толщины защиты. Последние могут составлять несколько десятков процентов. Это показано сравнениями результатов расчетов, полученных согласно "Гигиеническим требованиям...", и данными, полученными в аналогичной геометрии методом Монте-Карло [12–14]. Фотонейтроны же в приведенных рекомендациях не учитываются вовсе.

ГЕОМЕТРИЯ КОМПОЗИЦИИ И МЕТОДИКА РАСЧЕТА

Характеристики полей фотонного и нейтронного излучений были рассчитаны методом Монте-Карло, реализованным в программе FLUKA [15]. При этом использовались библиотеки оцененных ядерных данных ENDF/B-VI с непрерывной зависимостью сечения взаимодействия излучения с веществом от энергии.

Для проведения расчетов характеристик полей фотонного и фотонейтронного излучений использовалась модель, показанная на рис. 1. Расчеты были выполнены для двух типов источников первичных фотонов. Оба типа источников считались плоскими и мононаправленными. Различие заключалось в задании энергии фотонов. Первый тип источника — моноэнергетический, с энергиями фотонов 30 МэВ. Второй тип — источник тормозного излучения с такими же максимальными энергиями фотонов. Параметры источника фотонов следует рассмотреть более подробно.

АЛЬХАГАИШ, САХАРОВ



Рис. 1. Геометрия расчетной модели.

Излучение плоского мононаправленного источника фотонов диаметром 200 см падало нормально на торцевую поверхность цилиндрической защиты диаметром 300 см. Для задания источников второго типа использовались спектры фотонов тормозного излучения, возникшего при торможении электронов на вольфрамовой мишени, полученные в статье [3]. Энергия электронов источника принималась равной 30 МэВ. Использовалась оценка по пересечениям поверхностей, указанных на рис. 1, располагаемых на различных расстояниях от фотонного источника в глубине защиты. Для снижения статистических погрешностей при расчетах требуемых величин использовалось неаналоговое моделирование в виде расщепления и русской рулетки на отмеченных поверхностях. В качестве материала защиты выбран бетон с плотностью 2.3 г/см³ [2]. В работе использовался бетон с нуклидным составом и процентным содержанием отдельных изотопов, приведенные в справочнике [2]. При этом также было учтено содержание конкретных изотопов в природных материалах [4].

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ПРОСТРАНСТВЕННО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ФОТОНОВ В МАТЕРИАЛЕ ЗАЩИТЫ

Расчет пространственно-энергетических распределений плотности потока фотонов на различных толщинах защиты от плоского мононаправленного моноэнергетического источника, с энергиями фотонов 30 МэВ, а также источника тормозного излучения с максимальными энергиями фотонов в том же диапазоне, проводился в диапазоне энергий фотонов 1-30 МэВ с энергетическим интервалом 1 МэВ. Все расчетные результаты нормировались на 1 фотон/см² с исходного источника. На рис. 2 представлены графики пространственно-энергетических распределений фотонов от моноэнергетического источника и источника тормозного излучения с такой же максимальной энергией фотонов на различной глубине бетонной защиты.

Полученные расчетные результаты по пространственно-энергетическому распределению плотности потока фотонов от фотонных источников показывают, что форма спектров фотонов слабо зависит от толщины защиты. Для пространственноэнергетических распределений, полученных от моноэнергетических источников, характерно наличие пика нерассеянных фотонов. Практически при всех толщинах защиты остается заметным вклад нерассеянных фотонов источника.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЕЧЕНИЙ ФОТОНЕЙТРОННЫХ РЕАКЦИЙ ДЛЯ БЕТОНА

Процесс образования фотонейтронов в результате (γ , *n*)-реакции относится к числу ядерных реакций, связанных с передачей энергии возбуждения ядра одному из нейтронов. Этот процесс является пороговым, так как для него необходимо, чтобы энергия налетающего фотона



Рис. 2. Энергетическое распределение фотонов в бетонной защите от различных источников с максимальной энергией фотонов 30 МэВ на различных глубинах защит, нормированные на 1 фотон/см² с источника.

была больше энергии связи нейтронов в ядре. Зачастую влиянием вторичного нейтронного излучения при проектировании защиты пренебрегают, однако оно может вносить существенный вклад в формирование дозы излучений в определенных материалах защиты либо при достаточно большой энергии первоначальных фотонов. Процесс образования фотонейтронов определяется поперечным сечением (γ , *n*)-реакции, которое зависит от энергии падающих фотонов и изотопа, входящего в состав материала.

Отметим из табл. 2, что при сравнении значений сечения для (γ , *n*) со значениями сечения для (γ , 2*n*). Отметим значение сечения для (γ , 2*n*) относительно невелико и, таким образом, можно пренебречь значением сечения для (γ , 2*n*) в расчетах.

В расчетах использовались данные библиотеки сечений TENDL-2014 [5]. Сечения фотонейтронной реакции имеют "гигантский резонанс", который приходится на область энергий 10...25 МэВ. Для задания объемного источника фотонейтронов, который необходимо было получить для выполнения второго этапа расчетов, требовалось вычислить значение макроскопического сечения фотонейтронной реакции для бетона в зависимости от энергии фотонов. Поскольку бетон представляет собой гомогенную смесь элементов, названных выше и в табл. 1, для вычисления сечения (γ , *n*)-реакции для бетона использовалась указанная ниже формула массового макроскопического сечения взаимодействия для смеси [1]:

$$\sum_{\text{fer}}^{m} = \sum_{i} \frac{N_{\text{A}}}{A_{i}} \sigma_{i} p_{i}^{m}, \qquad (1)$$

где σ_i — сечение (γ , *n*)-реакции для *i*-го изотопа, p_i^m — массовая доля *i*-го изотопа в материале защиты; N_A — число Авогадро; A_i — атомные массы изотопов.

На рис. 3 показаны микроскопические сечения (γ , *n*)-реакции для основных изотопов, входящих в состав бетона. Оно, очевидно, имеет пик в области энергий приблизительно от 15 до 25 МэВ.

Таблица 1. Нуклидный состав бетона и процентное содержание отдельных изотопов в нем (с учетом содержания этих изотопов в природных материалах)

Нуклид	Содержание, %
H-1	0.56
O-16	49.71
O-18	0.10
Na-23	1.71
Mg-24	0.19
Al-27	4.56
Si-28	29.12
Si-29	1.48
Si-30	0.98
S-32	0.11
K-39	1.79
K-41	0.13
Ca-40	8.01
Ca-44	0.17
Fe-56	1.12

$E = 30 \text{ M} \Rightarrow \text{B}$	Иготопы	σ, barn			
	PISOTOIIBI	(γ, n)	$(\gamma, 2n)$		
	O-16	3.6857E-05	1.2912E-06		
	Al-27	8.3869E-04	4.1356E-04		
	Si-28	4.1740E-04	0.0		
	Ca-40	4.4924E-04	2.1393E-06		

Таблица 2. Поперечное сечение для (γ , *n*) и (γ , 2*n*) для основного нуклидного состава бетона

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ НЕЙТРОНОВ, ОБРАЗУЮЩИХСЯ В РЕЗУЛЬТАТЕ (у, *n*)-РЕАКЦИИ В МАТЕРИАЛЕ ЗАЩИТЫ

Определение энергии нейтронов, образующихся в реакции (γ , n), осуществлялось по формуле [2]

$$E = \frac{(A-1)}{A} \left[E_{\gamma} - E_{cB} - \frac{E_{\gamma}^{2}}{1862 \cdot (A-1)} \right] - E_{\gamma} \left[\frac{2(A-1)(E_{\gamma} - E_{cB})}{931A^{3}} \right]^{1/2} \cos \theta,$$
(2)

где A — атомная масса ядра мишени, θ — угол вылета нейтрона относительно направления движения фотона; $E_{\rm cB}$ — энергия связи нейтронов в ядре; все энергии в формуле подставляются в МэВ.

В формуле (2) второе слагаемое (содержащее $\cos \theta$) много меньше, чем изотропное (первое) слагаемое, поэтому пренебрегаем вторым слагаемым.

В первом слагаемом $(E_{\gamma} - E_{cB}) \gg \frac{E_{\gamma}^2}{1862 \cdot (A-1)}$, поэтому мы пренебрегаем выражением $\left(\frac{E_{\gamma}^2}{1862 \cdot (A-1)}\right)$. При этом можно записать одно-

значную связь между энергией поглощенного фотона и энергией испускаемого нейтрона:

$$E \approx \frac{A-1}{A} (E_{\gamma} - E_{\rm cB}). \tag{3}$$

Дальнейшие расчеты были выполнены в предположении, что энергия фотона идет только на преодоление связи нейтрона в ядре и придание ему кинетической энергии. Для определения суммарной энергии связи всех нуклонов в ядре изотопа с массой А и атомного числа Z была использована приближенная формула Вайцзекера [6]:

$$E_{\rm cB} = 15.75A - 17.8A^{2/3} - 0.71Z^2/A^{1/3} - -94.8(A/2 - Z)^2/A + 34/A^{3/4}.$$
 (4)

Отсюда удельная энергия связи нейтронов в ядре:

$$\mathbf{E}_{\text{CB.YZ.}} = \frac{\mathbf{E}_{\text{CB}}}{\mathbf{A}}.$$

Вычисления показали, что удельная энергия связи нейтронов в ядре слабо зависит от изотопа. Поэтому для дальнейших расчетов по формуле (3) можно использовать усредненную энергию связи. Чтобы ее вычислить, необходимо посчитать энергию связи нейтрона в ядре для каждого изотопа, а затем провести усреднение с учетом концентрации и сечение каждого изотопа. Таким образом было получено значение 8.35 МэВ. После подстановки известных значений в формулу (3), получена зависимость энергии образующегося фотонейтрона от энергии первичного фотона.



Рис. 3. Микроскопические сечения (у, *n*)-реакции для основных изотопов, входящих в состав бетона.



Рис. 4. Энергетические распределения плотности потока нейтронов от моноэнергетического источника фотонов с энергией фотонов 30 МэВ и источника тормозного излучения с максимальной энергией фотонов 30 МэВ.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ВТОРОГО ЭТАПА ВЫЧИСЛЕНИЙ

Формирование распределенного по пространству источника образовавшихся нейтронов проводилось следующим образом. Вычислялась плотность нейтронов на бетонной оси защиты в точках, где на первом этапе рассчитаны спектры фотонного излучения. Предполагая, что плотность нейтронов не зависит от расстояния от оси цилиндрической защиты в перпендикулярном оси направлении в диапазоне от 0 до 100 см и не изменяется вдоль оси в промежутке между выделенными расчетными плоскостями, вычислялось среднее число нейтронов в цилиндрической пространственной ячейке, ограниченной плоскостями, на которых на первом этапе получены спектры фотонов, и радиусом 200 см:

$$N_i(E_n) = \varphi_i(E_\gamma) \sum_{\gamma,n} (E_\gamma) \pi R^2 \Delta t_i, \qquad (5)$$

где ϕ_i – средняя плотность потока средняя плотность потока фотонов с энергией E_{γ} в i-й пространственной ячейке, ограниченной плоскостями, в которых рассчитывалось энергетическое распределение плотности потока фотонов; $\Sigma_{\gamma, n}(E_{\gamma})$ — макроскопическое сечение фотонейтронной реакции для бетона при энергии фотона E_{γ} ; R – радиус ячейки; Δt_i – толщина ячейки, определяемая как расстояние между соседними плоскостями, на которых определялась плотность потока фотонов; $N_i(E_n)$ — число нейтронов с энергией E_n , соответствующей энергии фотона E_{γ} , испускаемое *і*-й ячейкой в единицу времени. При расчете мощности эффективной дозы нейтронов использовались удельные максимальные мощности эффективной дозы на единичный флюенс, взятые из работы [8].

На рис. 4 показаны энергетические распределения плотности потока нейтронов, образующихся в результате (γ , *n*)-реакции при облучении бетонной защиты различными источниками фотонного излучения. На рис. 6 приведены графики пространственно-энергетических распределений плотности потока нейтронов от моноэнергетического источника фотонов с энергией фотонов 30 МэВ и источника тормозного излучения с максимальной энергией фотонов 30 МэВ. Оба распределения получены на расстоянии 40, и 200 см от источника. Полученные распределения плотности потока нейтронов подобны для источников фотонов разных энергий и для различных глубин детектирования источника с определенной энергией фотонов, то есть форма спектров слабо зависит от толщины защиты из бетона.

Полученные распределения плотности потока нейтронов также имеют ряд типичных признаков для подобных величин. Так, в области тепловых нейтронов (энергий 10^{-8} ... 10^{-7} МэВ) заметен характерный максвелловский пик. Для нейтронов с энергией из промежуточной области спектр близок к спектру вида 1/E.

На этом же этапе были рассчитаны пространственно-энергетические распределения плотности потока вторичных фотонов, образовавшихся при рассеянии фотонейтронов, которые, в свою очередь, появились в результате взаимодействия высокоэнергетичных фотонов с веществом. Вычисления также производились для источников двух типов: моноэнергетического и тормозного излучения. На рис. 5 приведены распределения плотностей потока в различных точках детектирования для одного источника (источник тормозного излучения с максимальной энергией фотонов 30 МэВ).



Рис. 5. Энергетические распределения вторичных фотонов в результате облучения бетонной защиты источником тормозного излучения с максимальной энергией фотонов 30 МэВ на различных толщинах.



Рис. 6. Распределения первичных фотонов, нейтронов и вторичных фотонов для моноэнергетического источника фотонов с энергией 30 МэВ и источника тормозного излучения с максимальной энергией фотонов 30 МэВ.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ДОЗОВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НЕЙТРОНОВ И ВТОРИЧНЫХ ФОТОНОВ

Дозовые распределения для всех видов излучения рассчитывались в тех же точках, что и плотности потока. На рис. 6 приведены полученные дозовые распределения первичных фотонов, нейтронов и вторичных фотонов по глубине бетонной защиты для моноэнергетического источника фотонов и источника тормозного излучения (для примера показан случай, когда моноэнергетический источник испускает фотоны с энергией 30 МэВ, а источник тормозного излучения — фотоны с максимальной энергией 30 МэВ). На рис. 6 приведены дозовые распределения первичных фотонов, нейтронов и вторичных фотонов для моноэнергетических источников с энергией фотонов 30 МэВ в зависимости от расстояния от источника до плоскости, содержащей детектор. Как видно из приведенных графиков, дозовые распределения для указанных источников определяются первичным фотонным излучением. Вклад нейтронного и вторичного фотонного излучений значительно (приблизительно на три порядка) меньше. Мощность дозы, обуславливаемой фотонами, почти экспоненциально снижается в зависимости от глубины бетонной защиты.

Рис. 6 распределения первичных фотонов, нейтронов и вторичных фотонов для моноэнергетического источника фотонов с энергией 30 МэВ и источника тормозного излучения с максимальной энергией фотонов 30 МэВ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе удалось сделать следующее.

Были рассчитаны пространственно-энергетические распределения фотонов в бетоне от плоских мононаправленных моноэнергетических источников фотонов с энергией 30 МэВ и источников тормозного излучения с максимальной энергией фотонов 30 МэВ.

Были проанализированы библиотеки сечений фотонейтронной реакции для разных изотопов, входящих в состав бетона. Полученные зависимости использовались для вычисления макроскопического сечения (γ , *n*)-реакции, которое, в свою очередь, использовалось для расчета характеристик фотонейтронного источника.

Был предложен способ задания пространственно-энергетического распределения фотонейтронного источника в виде неравномерного объемного источника.

Были рассчитаны энергетические распределения фотонейтронов в зависимости от энергии фотонов, приводящих к их образованию.

Были выполнены расчеты дозовых распределений фотонов и нейтронов в бетонной защите для источников фотонного излучения различных энергий. Полученные результаты можно использовать для решения задач расчета защиты линейных электронных ускорителей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Сахаров В.К. Введение в теорию переноса и физику защиты от ионизирующих излучений. Учебное пособие. М., 2013. 268 с.
- Машкович В.П., Кудрявцева А.В. Защита от ионизирующих излучений. Справочник. М. Энергоатомиздат. 1995. 494 с.
- 3. *Сахаров В.К.* Спектры тормозного излучения и фотонейтронов из вольфрамовой мишени ускорителя электронов энергией 5–90 МэВ. Атомная энергия. 2016. Т. 120. № 4. С. 228–231.
- 4. *De Laeter J.R., Heumann K.G., Rosman K.G.R.* Isotopic Compositions of the Elements. Journal of Physical and

Chemical Reference Data. 1991. V. 6. № 20. P. 1327–1338.

- 5. http://www.talys.eu/tendl-2014/
- Mirzaei Mahmoud Abadi Vahid, Mirhabibi Mohsen, Askari Mohammad Bagher. Estimation of Semi-Empirical Mass Formula Coefficients. Nuclear Science. 2017. V. 2. № 1. P. 11–15. doi: Received: December 26, 2016; Accepted: January 12, 2017; Published: February 4, 2017

https://doi.org/10.11648/j.ns.20170201.13

- 7. Gamma-Ray Attenuation Coefficients and Buildup Factors for Engineering Materials. American National Standard, ANSI/ANS-6.4.3-1991.
- Машкович В.П., Кудрявцева А.В. Защита от ионизирующих излучений. Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1995. 494 с.
- 9. Shielding study on iron and concrete assemblies of bremsstrahlung photons and photoneutrons from copper target bombarded by 18, 28 and 38 MeV electrons, Kazuaki Kosako, Koji Oishi, Takashi Nakamura, Kouichi Sato, Takashi Kamiyama & Yoshiaki Kiyanagi, Journal of Nuclear Science and Technology, ISSN: 0022-3131 (Print) 1881-1248.
- Bremsstrahlung and Photoneutron Leakage from Steel Shielding Board Impinged by 12-24 MeV Electrons Beams, Yukio FUJITA*, Hidetoshi SAITOH and Atsushi MYOJOYAMA, J. Radiat. Res. 2009. V. 50. P. 363– 369.
- Гигиенические требования о размещении и эксплуатации ускорителей электронов с энергией до 100 МэВ. СанПин 2.6.1.2573-10, 2010.
- Сахаров В.К., Борисенко А.В. Дозовые факторы накопления в бетоне, железе и свинце для источников моноэнергетических фотонов с энергиями от 10 до 50 МэВ. Ж. Атомная энергия. 2014. Вып. 6. С. 114.
- 13. *Сахаров В.К.* Кратности ослабления дозы фотонов в бетоне, железе и свинце для моноэнергетических источников с энергиями от 10 до 90 МэВ. Ж. Ядерная физика и инжиниринг. 2016. Т. 7. № 3. С. 268–272.
- 14. Пропалова О.И., Сахаров В.К., Соловьев И.П., Чайкина С.А. Погрешности результатов расчетов защиты линейных электронных ускорителей при использовании данных для моноэнергетических источников фотонов.
- Ferrari A., Sala P.R., Fasso A., Ranft J. FLUKA: A Multi-Particle Transport Code, CERN-2005-010 INFN TC 05/11 SLAC-R-773 12 October 2005.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 1, pp. 3-10

Characteristics of Neutron Fields in Concrete from a Photon Source with an Energy of 30 MeV

I. K. Alhagaish^{*a*} and V. K. Sakharov^{*a*}

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia Received November 23, 2019; revised November 23, 2019; accepted December 24, 2019

Abstract—Information on the passage of photon radiation from photon sources in the energy range from 6 to 24 MeV in various protective materials with thicknesses in the range from 15 to 80 cm is reported in [7–10]. The use of electron accelerators in industry and medicine with the primary electron beam energy higher than these energies requires data on the characteristics of the attenuation of bremsstrahlung photons for energy higher than these energies and thickness larger than these thicknesses. Concrete, iron, and lead are used as protective materials against the bremsstrahlung of electron accelerators. In this work the energy distributions of photon flux densities and effective doses in planes of concrete protections, as well as similar characteristics of the fields of neutron and secondary photon radiation, have been calculated. The calculations have been performed for two types of sources: a flat unidirectional monoenergetic photon source with an energy of 30 MeV.

Keywords: effective dose, concrete, Monte-Carlo method, neutron, electron accelerators

DOI: 10.1134/S2304487X20010022

REFERENCES

- 1. Sakharov V.K. *Vvedenie v teoriyu perenosa i fiziku zashchity ot ioniziruyushchih izluchenij* [Introduction to transport theory and physics of protection against ionizing radiation]. Moscow, Tutorial. 2013, 268 p.
- Mashkovich V.P., Kudryavtseva A.V. Zashchita ot ioniziruyushchih izluchenij. Spravochnik [Protection against ionizing radiation. Directory]. Mscow, Energoatomizdat. 1995. 494 p.
- Sakharov V.K. Spectra of bremsstrahlung and photoneutrons from a tungsten target of an electron accelerator with an energy of 5–90 MeV. Atomic Energy. 2016. V. 120. No. 4. P. 228–231.
- De Laeter J.R., Heumann K.G., Rosman K.G.R. Isotopic Compositions of the Elements. Journal of Physical and Chemical Reference Data, pp. 1337–1338, Vol. 6, No. 20, 1991.
- 5. http://www.talys.eu/tendl-2014/
- Mirzaei Mahmoud Abadi Vahid, Mirhabibi Mohsen, Askari Mohammad Bagher. Estimation of Semi-Empirical Mass Formula Coefficients. Nuclear science. Vol. 2, No. 1, 2017, pp. 11–15. doi: 10.11648/ j.ns.20170201.13 Received: December 26, 2016; Accepted: January 12, 2017; Published: February 4, 2017.
- 7. Gamma-Ray Attenuation Coefficients and Buildup Factors for Engineering Materials. American National Standard, ANSI / ANS-6.4.3-1991.
- Mashkovich V.P., Kudryavtseva A.V. Zashchita ot ioniziruyushchih izluchenij. Spravochnik [Protection against ionizing radiation. Directory]. Moscow, Energoatomizdat. 1995. 494 p.

- Shielding study on iron and concrete assemblies of bremsstrahlung photons and photoneutrons from copper target bombarded by 18, 28 and 38 MeV electrons, Kazuaki Kosako, Koji Oishi, Takashi Nakamura, Kouichi Sato, Takashi Kamiyama & Yoshiaki Kiyanagi, Journal of Nuclear Science and Technology, ISSN: 0022-3131 (Print) 1881-1248.
- Bremsstrahlung and Photoneutron Leakage from Steel Shielding Board Impinged by 12–24 MeV Electrons Beams, Yukio FUJITA *, Hidetoshi SAITOH and Atsushi MYOJOYAMA, J. Radiat. Res., 50, 363–369 (2009).
- 11. Gigienicheskie trebovaniya o razmeshchenii i ekspluatacii uskoritelej elektronov s energiej do 100 MeV [Hygienic requirements for the placement and operation of electron accelerators with energies up to 100 MeV]. SanPin 2.6.1.2573-10, 2010.
- 12. Sakharov V.K., Borisenko A.V. Dose accumulation factors in concrete, iron and lead for monoenergetic photon sources with energies from 10 to 50 MeV. J. Atomic energy, 114, issue 6, 2014.
- Sakharov V.K. Multiple attenuation of the dose of photons in concrete, iron and lead for monoenergetic sources with energies from 10 to 90 MeV. J. Nuclear physics and engineering. 2016. V. 7. No. 3. P. 268–272.
- 14. Propalova O.I., Sakharov V.K., Soloviev I.P., Chaykina S.A. Errors in the results of calculations of the protection of linear electron accelerators when using data for monoenergetic photon sources. *J. Atomic energy*, 125, issue 2, 2018.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 1, с. 11–15

__ ТЕХНИЧЕСКАЯ _____ ФИЗИКА

УДК 533.6.05

РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТОСПОСОБНОСТИ СКОРОСТНОЙ ВИДЕОКАМЕРЫ, УСТАНОВЛЕННОЙ НА РАКЕТНОМ ПОЕЗДЕ

© 2020 г. С. И. Герасимов^{1,2,*}, В. И. Ерофеев¹, В. А. Кикеев¹, О. В. Кривошеев², В. И. Костин¹, И. А. Одзерихо^{1,2}, Р. В. Герасимова², А. А. Глухов², В. В. Писецкий²

¹ Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, 603024, Россия ² Саровский физико-технический институт НИЯУ МИФИ, Саров, 607186, Россия

*e-mail: s.i.gerasimov@mail.ru Поступила в редакцию 28.10.2019 г. После доработки 28.10.2019 г. Принята к публикации 10.12.2019 г.

Любая перевозка отработанного ядерного топлива представляет собой сложную многофакторную задачу, требующую согласования взаимодействия при использовании большого числа технических средств: специализированных транспортных контейнеров, крепежных приспособлений, перегрузочных приспособлений, захватов, демпферов, спецвагонов. Одним из способов решения подобных задач является проведение испытаний макета топливного упаковочного комплекта в условиях, имитирующих авиационную аварию (столкновение с жесткой преградой со скоростью 90 м/с). В данной статье представлена постановка испытаний с использованием возможностей ракетного трека. Выполнен расчет аэродинамического обтекания участка блока видеорегистрации в условиях аэробаллистического эксперимента. Произведена оценка прочности и собственных частот регистрирующей аппаратуры, используемой в аэробаллистическом эксперименте. Методом конечных элементов был произведен модальный расчет регистрирующей аппаратуры. Были получены 10 форм свободных колебаний регистрирующей аппаратуры. Сделан вывод о работоспособности аппаратуры. Приведенные расчеты позволили установить скоростную камеру на ступень ракетного поезда для повышения информативности в опыте для получения кадров разгона и отделения топливного упаковочного комплекта. Приводятся кадры разгона и отделения топливного упаковочного комплекта от ракетного поезда, снятые камерой с борта. Проведенные исследования позволили обосновать и применить скоростную съемку с борта разгонной ступени ракетного поезда при моделировании авиационной аварии для испытания транспортно упаковочных комплектов по нормам МАГАТЭ.

Ключевые слова: топливный упаковочный комплект, аэробаллистические испытания, аэробаллистическая трасса, численное моделирование аэродинамических процессов, конечно-элементное моделирование, прочностной анализ, модальный анализ

DOI: 10.1134/S2304487X20010034

Обеспечение безопасности транспортирования радиоактивных веществ, ядерных делящихся материалов и изделий на их основе имеет большое значение в связи с наличием потенциального риска нанесения ущерба людям, окружающей среде и имуществу в процессе перевозки, выполнения погрузочно-разгрузочных операций и промежуточного хранения. Выбор воздушного транспорта для международных перевозок позволяет снять сразу несколько проблем, связанных с транзитными странами: исчезает необходимость в многосторонних международных транзитных соглашениях, упрощаются таможенные процедуры, облегчается задача обеспечения физзащиты, существенно сокращаются затраты на многостороннее утверждение сертификатов-разрешений на конструкцию упаковки и перевозку отработанного ядерного топлива и оформление разрешительных документов в транзитных странах. Виды испытаний, которые должна выдержать упаковка в нормальных условиях перевозки, являются едиными и не зависят от вида используемого транспорта. Для достижения указанной цели необходимо, в том числе, проведение испытаний макета топливного упаковочного комплекта (ТУК) в условиях, имитирующих авиационную аварию (столкновение с жесткой преградой со скоростью 90 м/с).

Также требуются решения и согласования множества вопросов логистики (маршрут, места



Рис. 1. Часть расчетной сетки при моделировании обтекания модели.

перегрузки, стыковки транспортных средств). Выбор воздушного транспорта для международных перевозок позволяет снять сразу несколько проблем, связанных с транзитными странами. Транспортные упаковочные комплекты, используемые для транспортировки и долговременного хранения радиоактивных материалов и отработавшего ядерного топлива должны отвечать различным требованиям безопасности перевозки радиоактивных веществ. В частности, одним из них является обязательное проведение экспериментальной проверки головных образцов на соответствия конструкции требованиям, предъявляемым к упаковкам для воздушной перевозки РМ, указанным в п. 3.4.6.4 НП-053-04 [1] и п. 737 TS-R-1 [2].

Испытания представляют из себя разгон ТУК до требуемой скорости и последующее соударение с имитатором мишени. Для этого объект испытаний монтируется на ракетную тележку, способную перемещаться вдоль рельсовых направляющих, разгон тележки осуществляется ракетными двигателями [3, 4].

Для регистрации процесса разгона, полета и соударения используется как различная фотографическая аппаратура и различные методы визуализации аэродинамических процессов, так и средства видеорегистрации. Для получения качественных видеоданных необходимо обеспечить работоспособность видеооборудования, а также другой регистрирующей техники, монтируемой на блоке видеорегистрации.

Для того, чтобы оценить уровень давления, воспринимаемого аппаратурой на данной скорости, был произведен расчет обтекания конструкции потоком газа.

В качестве объекта моделирования выбрана модель части блока видеонаблюдения. В качестве

метода моделирования выбран метод численного решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, дополненный *k*-*ε*-моделью турбулентности. Этот метод реализован в современном инженерном программном пакете SolidWorks-FlowSimulation [5]. Пакет представляет собой комбинацию полной версии системы SolidWorks как графической среды, и гидрогазодинамического решателя FlowSimulation, препроцессор которого позволяет реализовывать автоматизированный или ручной метод блочного построения расчетной сетки и ее последующей адаптации в зонах больших градиентов параметров потока. Пакет FlowSimulation позволяет решать пространственные трехмерные задачи внешнего сверхзвукового обтекания твердых тел с учетом вязкости, теплопереноса, шероховатости стенки, степени турбулентности потока. В результате решения могут быть определены аэродинамические силы и моменты, действующие на обтекаемую поверхность объекта, получены все параметры обтекающего газа в расчетном объеме – поля давлений, плотностей, температур, скоростей. Полученные результаты могут выводиться в виде контурных распределений параметров течения в объеме и на поверхности тела и в виде соответствующих графиков для любого выбранного сечения.

Расчетная сетка, используемая в вычислениях в области крепления камеры и светочувствительного датчика к блоку видеорегистрации, приведена на рис. 1.

В результате аэродинамического расчета получены значения давления, воздействующего на камеру и светочувствительный элемент. Данные значения использовались в прочностном анализе элементов конструкции.

Конечно-элементная сетка, используемая в расчетах видеокамеры показана на рис. 2. Ограничения по перемещению прикладывались в местах крепления камеры к фундаменту блока видеорегистрации (по контуру корпуса). Давление, приложенное на фронтальные плоскости деталей взято из результатов аэродинамического анализа, проведенного ранее.

Контурные изображения полей напряжений и суммарного вектора перемещений показаны на рис. 3 и 4.

С целью оценки значений первых собственных частот конструкции производился модальный анализ КЭМ-камеры. Закрепления узлов при модальном анализе были приняты идентично прочностному анализу. В результате анализа получены и проиллюстрированы (рис. 5–7) первые моды собственных колебаний конструкции. Первая собственная частота (10.44 кГц) соответствует вертикальному перемещению задней части камеры, вторая частота (10.52 кГц) — поперечному.



Рис. 2. Конечно-элементная сетка модели видеокамеры.



Рис. 4. Распределение эквивалентных по Мизесу напряжений в модели видеокамеры.

Третья собственная частота (10.86 кГц) соответствует повороту корпуса камеры относительно продольной оси.

В результате произведенных расчетов можно заключить, что уровень эквивалентных по Мизесу напряжений в элементах конструкции не превышает значения 13 МПа, что для материалов, используемых в конструкции блока видеорегистрации является допустимым.

Приведенные расчеты позволили установить скоростную камеру на ступень ракетного поезда для повышения информативности в опыте для получения кадров разгона и отделения ТУК. Постановка опыта была следующей. Разгон ТУК до заданной скорости по рельсовым направляющим ракетного трека и его столкновение с мишенью при заданном направлении и угле встречи обес-



Рис. 3. Суммарный вектор перемещений модели видеокамеры.



Рис. 5. Первая форма колебаний (10.44 кГц) камеры.

печивались комплектом специальной оснастки, который включал в себя ракетную тележку (РТ) и элементы (башмаки), связывающие ТУК с рельсовыми направляющими ракетного трека. Передачи тяги к ТУК от РТ обеспечивалась за счет упора РТ.

Ракетная тележка снабжена тормозными башмаками, с помощью которых осуществляется ее связь с рельсовыми направляющими ракетного трека. Тормозные башмаки ракетной тележки оснащены пороховыми аккумуляторами давления для остановки тележки на заданном отрезке.

Разгон ракетного поезда осуществлялся твердотопливным ракетным двигателем, установленным на ракетной тележке. Ракетная тележка устанавливалась на 4 тормозных башмаках, содержащих по 2 пороховых аккумулятора давления.

13



Рис. 6. Вторая форма колебаний (10.52 кГц) камеры.

Непосредственное жесткое соединение между ракетной тележкой и ТУК отсутствовало.

После запуска ракетного двигателя ракетный поезд начинал движение по рельсовым направляющим ракетного трека. По окончании работы ракетного двигателя и достижении ракетным поездом заданной скорости движения происходило задействование пороховых аккумуляторов давления тормозных башмаков и остановка РТ на рельсовых направляющих ракетного трека. При этом ТУК за счет полученного импульса продолжал движение по рельсовым направляющим. После схода с рельсовых направляющих ракетного трека



Рис. 7. Третья форма колебаний (10.86 кГц) камеры.

ТУК двигался в свободном полете до столкновения с мишенью.

Зависимости скорости движения и продольной перегрузки от времени приведены на рис. 8.

На рис. 9 представлены отдельные кадры отделения ТУК от тормозящегося ракетного поезда.

Проведенные исследования позволили обосновать и применить скоростную съемку с борта разгонной ступени ракетного поезда при моделировании авиационной аварии для испытания транспортно упаковочных комплектов по нормам МАГАТЭ. Это позволяет повысить информативность и достоверность подобных испытаний.



Рис. 8. Параметры движения ракетного поезда с ТУК, скорость движения (а), продольная перегрузка (б).



Рис. 9. Кадры разгона и отделения ТУК от ракетного поезда, снятые камерой с борта.

15

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МК-2078.2019.8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Правила безопасности при транспортировании радиоактивных материалов: НП-053-04.-М., 2004. 70 с.
- Правила безопасной перевозки радиоактивных материалов. Требования безопасности: TS-R-1.-МАГАТЭ, Вена, 2009. 196 с.
- 3. Gerasimov S.I., Erofeev V.I., Kamchatnyi V.G., Odzerikho I.A. The Sliding Contact Condition in Stability Analysis of Stage Motion for a Rocket Sled Track Facility // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2018. V. 47. № 3. P. 221–226.
- 4. Герасимов С.И., Бутова С.В., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г. Устойчивость движения высокоскоростных объектов по направляющим ракетного трека // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2015. № 1. С. 3–8.
- http://www.solidworks.ru/index.php?option=com_content&view=article&id=151&Itemid=66

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 1, pp. 11-15

Computational and Experimental Study of the Performance of a High-Speed Video Camera Installed on a Rocket Train

S. I. Gerasimov^{*a,b,#*}, V. I. Erofeev^{*a*}, V. A. Kikeev^{*a*}, O. V. Krivosheev^{*b*}, V. I. Kostin^{*a*}, I. A. Odzericho ^{*a,b*}, R. V. Gerasimova^{*b*}, A. A. Glukhov^{*b*}, and V. V. Pisetskiy^{*b*}

^a Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, 603024 Russia ^b Sarov Physical Technical Institute, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Sarov, 607186 Russia

[#]e-mail: s.i.gerasimov@mail.ru

Received October 28, 2019; revised October 28, 2019; accepted December 10, 2019

Abstract—Any transportation of spent nuclear fuel is a complex multifactorial problem requiring the coordination of numerous technical means including specialized transport containers, fasteners, reloading devices, grippers, dampers, and special wagons. One of the ways to solve such problems is to test a prototype of the fuel package unit under conditions simulating an aviation accident (collision with a rigid barrier at a velocity of 90 m/s). Tests using the capabilities of a rocket track have been presented in this work. An aerodynamic flow around the section of a video recording unit has been calculated under the conditions of an aeroballistic experiment. The strength and natural frequencies of the recording instrument used in the aeroballistic experiment have been evaluated. The modal calculation of the recording instrument has been performed using the finite element method. Ten forms of free oscillations of the recording instrument have been obtained. It has been concluded that the instrument is performable. The calculations have allowed installing a high-speed camera on the stage of a rocket train to increase the information content in the experiment for obtaining frames of acceleration and separation of the fuel package unit. Photos of the acceleration and separation of the fuel package unit. Photos of the acceleration and separation of the fuel package unit. Photos of the acceleration and separation of the fuel package unit. Photos of the acceleration and separation of the fuel package unit. Photos of the acceleration and separation of the fuel package unit. Photos of the acceleration and separation of the fuel package unit. Photos of the acceleration and separation of the fuel package unit. Photos of the acceleration and separation of the fuel package unit. Photos of the acceleration and separation of the fuel package unit possible to justify and apply high-speed shooting from the upper stage of the rocket train in the simulation of the aviation accident for testing transport packaging kits according t

Keywords: fuel package unit, aeroballistic tests, aeroballistic route, numerical simulation of aerodynamic processes, finite element simulation, strength analysis, modal analysis

DOI: 10.1134/S2304487X20010034

REFERENCES

- 1. Pravila bezopasnosti pri transportirovanii radioaktivnykh materialov: NP-053-04.-M., 2004. 70 p.
- Pravila bezopasnoy perevozki radioaktivnykh materialov. Trebovaniya bezopasnosti: TS-R-1.-MAGATE, Vena, 2009. 196 p.
- 3. Gerasimov S.I., Erofeev V.I., Kamchatnyi V.G., Odzerikho I.A. The Sliding Contact Condition in Stability Analysis of Stage Motion for a Rocket Sled Track Fa-

cility// Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2018, vol. 47, no. 3, pp. 221–226.

- 4. Gerasimov S.I., Butova S.V., Erofeev V.I., Kamchatnyi V.G. Ustoychivost' dvizheniya vysokoskorostnykh ob'yektov po napravlyayushchim raketnogo treka // Problemy mashinostroyeniya i nadezhnosti mashin, № 1, 2015, pp. 3–8.
- 5. http://www.solidworks.ru/index.php?option=com_content&view=article&id=151&Itemid=66

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 1, с. 16—24

— ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА —

УДК 546.798.24:546.74:546.73:546.72

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ РЕШЕТОК СОЕДИНЕНИЙ КЮРИЯ С НИКЕЛЕМ, КОБАЛЬТОМ И ЖЕЛЕЗОМ

© 2020 г. В. М. Радченко¹, М. А. Рябинин¹, Т. А. Чернакова^{1,*}

¹ Научно-исследовательский институт атомных реакторов, Димитровград, Россия *e-mail: taticher@mail.ru Поступила в редакцию 25.09.2019 г.

Поступила в редакцию 25.09.2019 г. После доработки 07.10.2019 г. Принята к публикации 15.10.2019 г.

Представлены результаты синтеза и рентгенографического исследования микрообразцов соединений кюрия-244 с кобальтом и железом, полученных методом высокотемпературной конденсации паров металлического кюрия на соответствующие подложки. В системе Cm–Co обнаружены интерметаллиды: $Co_{17}Cm_2$ (гексагональная решетка пространственной группы $P6_3/mcm$), Co_5Cm (гексагональная решетка пространственной группы P6/mmm) и Co_2Cm (кубическая решетка пространственной группы Fd3m). В системе Cm–Fe обнаружены два интерметаллических соединения: Fe₁₇Cm₂ (гексагональная кристаллическая решетка пространственной группы $P6_3/mcm$) и Fe₂Cm (кубическая решетка пространственной группы Fd3m). Приведено сравнение полученных интерметаллических соединений в системах Cm–Co и Cm–Fe с результатом исследования взаимодействия Cm-244 с никелем.

Ключевые слова: кюрий-244, высокотемпературная конденсация паров, интерметаллиды, кобальт, никель

DOI: 10.1134/S2304487X19060105

введение

Металлы трансплутониевых элементов (ТПЭ) и их сплавы используют для изготовления источников ионизирующих излучений, применяемых в различных областях промышленности, медицине и научных исследованиях. Чаще всего для изготовления источников использовали оксиды металлов [1–5]. Однако существующие при этом ограничения потребовали применения иных соединений, более стойких в различных условиях и более технологичных в процессе изготовления. В частности, были рассмотрены сплавы ТПЭ с наиболее доступными металлами – кобальтом, железом и никелем.

Физические и химические свойства элементов восьмой группы Периодический системы, а именно элементы первой триады: железо, кобальт и никель очень сходны между собой и в тоже время сильно отличаются от элементов других триад (рутений, родий, палладий и осмий, иридий, платина) [6]. Ожидалось, что подобное сходство проявится и в интерметаллических соединений ТПЭ с железом, кобальтом и никелем. Кроме того, изучение кристаллических структур бинарных соединениях ТПЭ с переходными (3d) элементами, обладающими, в частности, ферромагнитными свойствами, важно для более глубокого понимания закономерностей строения и изменения свойств актинидных элементов.

В АО "ГНЦ НИИАР" для изготовления источников различного типа и назначения на основе ТПЭ разработан и реализован метод высокотемпературной конденсации паров на подложки из различных материалов [7, 8]. Данный процесс состоит из двух стадий: восстановление оксида и вакуумная перегонка полученного металла. Обе стадии проводят не только в высоком вакууме, но и при высокой температуре (вплоть до 2000°С), что обеспечивает достаточную скорость испарения трансплутониевого металла. Аппараты, в которых происходит этот процесс, изготавливают в основном из тантала, сочетающего в себе высокую жаропрочность, химическую инертность и очень низкую упругость паров с удовлетворительными технологическими свойствами.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Методом высокотемпературной вакуумной конденсации паров металлического кюрия-244 на соответствующие плоские подложки получены первые микрообразцы. Исходный препарат кюрия содержал ~93% нуклида ²⁴⁴Ст и менее 0.4% катионных примесей.

.	Dever	Параметры решетки			
Фаза	Решетка	n	<i>a</i> , Å	<i>c</i> , Å	<i>V</i> , Å ³
		Образец 1 (24	45 мкг ²⁴⁴ Cm)		
Ni ₁₅ Cm ₂	Гекс (<i>P</i> 6 ₃ / <i>mcm</i>)	59	8.3470(3)	8.0685(4)	486.82(6)
Ni ₅ Cm	Гекс (<i>P</i> 6/ <i>mmm</i>)	25	4.8713(3)	4.0142(9)	82.49(3)
Ni ₃ Cm?	Куб (<i>I</i> 43 <i>d</i>)	8	4.145(2)	_	-
		Образец 2 (40	00 мкг ²⁴⁴ Cm)		
Ni ₁₅ Cm ₂	Гекс (<i>P</i> 6 ₃ / <i>mcm</i>)	33	8.3525(5)	8.0686(5)	487.47(9)
Ni ₅ Cm	Гекс (<i>P</i> 6/ <i>mmm</i>)	19	4.8674(5)	4.0306(4)	82.70(3)
Ni ₃ Cm?	Куб (<i>I</i> 43 <i>d</i>)	7	4.153(2)	—	-

Таблица 1. Расчетные ПКР интерметаллидов системы Cm-Ni

Примечания (здесь и далее). В столбце "Решетка" в скобках указана пространственная группа кристаллической решетки. В скобках после значений параметров решетки приведены ошибки определения последнего знака. *n* – число рефлексов в расчетном наборе.

Система Cm—Ni [9]: подложки для конденсации паров кюрия представляли собой полированные пластины металлического никеля. Изготовлено два образца с площадью активной части около 0.3 см² и содержанием кюрия 245 и 400 мкг.

Система Ст—Со: подложки для конденсации паров представляли собой полированные пластины из металлического кобальта (содержание кобальта не менее 99.98%). Содержание кюрия в образце 1 составило 79 мкг, в образце 2—1843 мкг.

Система Ст–Fe: подложка для образца представляла собой фольгу из железа "Армко". Конденсацию кюрия на нее проводили при постепенном увеличении температуры испарения до ~2050°С. В образце содержание кюрия-244 составило 917 мкг.

Идентификацию новых соединений ТПЭ проводили рентгеновским дифрактометрическим методом, который позволяет: производить структурный анализ исследуемого материала (определять координаты атомов в элементарной ячейке); определять параметры элементарной ячейки исследуемого вещества; определять состояния твердого тела (кристаллическое, аморфное, аморфное с кристаллическими включениями); исследовать фазовый состав вещества (качественный и количественный анализы).

Рентгенографическую идентификацию фаз выполняли с использованием "Рентгенометрической картотеки", издаваемой Объединенным комитетом по порошковым дифракционным стандартам [10].

Содержание кюрия в образцах определяли альфа, гамма-спектрометрическим методами сравнением с эталонами.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Интерметаллиды кюрия с никелем

Авторы работы [9] представили результаты получения и исследования интерметаллидов кюрия с никелем. На исходных рентгенограммах образцов № 1 (245 мкг ²⁴⁴Ст) и № 2 (400 мкг ²⁴⁴Ст), снятых через 4 ч после их получения, зафиксированы интенсивные рефлексы, принадлежащие в основном кристаллическим решеткам интерметаллидов никеля: гексагональной решетке типа Ni₁₇Th₂, принадлежащей, по аналогии с решеткой Ni₁₅Gd₂ [11] интерметаллиду Ni₁₅Cm₂ (или Ni₁₇Cm₂); гексагональной решетке типа Cu₅Ca, принадлежащей по аналогии с решеткой Ni₅Gd [11] и Pt₅Cm [12], интерметаллиду Ni₅Cm; кубической решетке с параметром a = 4.153 Å (предположительно интерметаллиду Ni₃Cm). Расчетные параметры кристаллических решеток (ПКР) обнаруженных интерметаллидов приведены в табл. 1.

Авторам данной работы удалось изучить влияние интенсивного альфа-распада ²⁴⁴Ст на решетки обнаруженных фаз в ходе выдержки образцов при комнатной температуре. Это влияние проявляется исчезновением слабых рефлексов, ослаблением интенсивности и уширением более интенсивных рефлексов с одновременным смещением их в сторону малых углов (т.н. распуханием решетки). Распухание объема ячейки интерметаллида Ni₁₅Cm₂ составило ~1.2% [9], оно обусловлено примерно одинаковым увеличением обоих параметров решетки. Распухание объема ячейки интерметаллида Ni₅Cm составило около 0.3% в образце 1 и примерно 1.2% [9] в образце 2 при заметном отличии исходных параметров решетки. Полная рентгеноаморфизация решеток

Фаза	Ваннатиа	7 H	и	Пај	A 1/1/ 0%		
	гешетка	τ, ч	п	<i>a</i> , Å	c, Å	<i>V</i> , Å ³	$\Delta V / V, 70$
ci Co	ГПУ	4	7	2.5063(1)	4.0928(2)	22.26(1)	0
u-co	1119	24	5	2.495(5)	4.075(3)	21.97(10)	-1.2(5)
ßCa	FIIV	4	5	3.5447(1)	_	44.539(3)	0
p-C0	ΙЦК	24	3	3.5455(5)	_	44.57(2)	+0.07(5)
Cm ₂ Co ₁₇	Гекс (<i>P</i> 6 ₃ / <i>mcm</i>)	4	8	8.353(8)	8.067(6)	487(1)	
CmCo ₅	Гекс (<i>P6/mmm</i>)	4	6	4.917(3)	4.057(2)	84.9(2)	
Cm ₂ C ₃		4	4	8.323(6)			0
	Куб (143а)	24	1	8.34(1)*			+2.3(6)

Таблица 2. Расчетные ПКР интерметаллидов, обнаруженных на рентгенограммах образца 1 системы Cm–Co

Примечания (здесь и далее). т – время выдержки образца при комнатной температуре; *) – одинаковые наборы рефлексов.

интерметаллидов $Ni_{15}Cm_2$ и Ni_5Cm произошла в образце 2 в период между 5 и 7 сут выдержки.

Интерметаллиды кюрия с кобальтом

Металлический кобальт оказался двухфазным: на рентгенограмме отчетливо выявлялись рефлексы гексагональной плотноупакованной (ГПУ) решетки α -Со (низкотемпературная аллотропическая модификация [13]) с параметрами a == 2.506(1) Å, c = 4.092(2) Å и рефлексы гранецентрированной (ГЦК) решетки β-Со (высокотемпературная аллотропическая модификация [10]) с параметром a = 3.5465(1) Å (здесь и далее в скобках указывается ошибка определения последнего знака). Даже после отжига в вакууме, сохранилась двухфазная структура кобальтовой подложки. Но параметры обеих решеток заметно уменьшились: α -Со: a = 2.500(3) Å, c = 4.086(5) Å; β -Со: a == 3.5451(1) Å.

На исходной рентгенограмме образца 1, снятой через 4 ч после его получения, зафиксирован 61 рефлекс. Кроме решеток α - и β -Со и B-Сm₂O₃, удалось выявить рефлексы еще, по крайней мере. 6 решеток: гексагональной решетки пространственной группы Р6₃/*тст*, приписанной, по аналогии с Ni₁₇Cm₂ [9], интерметаллиду Co₁₇Cm₂; гексагональной решетки пространственной группы Р6/тт, приписанной, по аналогии с интерметаллидом Ni₅Cm [9], интерметаллиду Co₅Cm; кубической решетки с пространственной группой I43d, приписанной, по аналогии с Th₂C₃[10], карбиду кюрия Cm₂C₃; двух кубических решеток типа шпинели (пространственная группа Fd3m), приписанных оксиду Со₃О₄; моноклинной решетки ThC₂. Результаты расчетов параметров некоторых кристаллических решеток фаз, обнаруженных при исследовании образца 1, приведены в табл. 2.

На повторной рентгенограмме образца, снятой через ~24 ч после его приготовления, отмечено исчезновение практически всех обнаруженных на первой рентгенограмме кристаллических структур, кроме моноклинной структуры полуторного оксида кюрия ($B-Cm_2O_3$) и отдельных рефлексов карбида кюрия Cm_2C_3 , для которых удалось проследить и рассчитать распухание кристаллических решеток под действием интенсивного альфа-распада ²⁴⁴Cm.

На исходной рентгенограмме образца 2, снятой через 4 ч после его получения, зафиксированы рефлексы, принадлежащие по крайней мере 8 решеткам: ГПУ α-Со; ГЦК β-Со; моноклинной решетке B-Cm₂O₃ ГЦК решетке ThO₂; моноклинной решетке ThC₂, двум гексагональным решеткам, интерпретированным как решетки интерметаллидов Cm₂Co₁₇ и CmCo₅, а также кубической решетке с пространственной группой Fd3m, интерпретированной, по аналогии с решеткой GdCo₂ [10], как решетка интерметаллида CmCo₂ (фаза Лавеса). Расчетные параметры решеток фаз, обнаруженных при исследовании образца 2, приведены в табл. 3. Повторную рентгенограмму образца сняли через 5 сут. Количество рефлексов сократилось практически в два раза: полностью сохранились рефлексы β-Со и ThO₂; сократилось число рефлексов B-Cm₂O₃, α-Co и ThC₂; полностью исчезли рефлексы интерметаллидов кюрия.

Выявлению рефлексов интерметаллических соединений Cm_2Co_{17} и $CmCo_5$ на рентгенограммах полученных образцов помогло порефлексное сравнение исходных рентгенограмм с рентгенограммами образцов системы Cm-Ni [9]. Образцы Cm-Ni получали тем же способом; Ni и Co – соседи в Периодической системе; их металлические радиусы очень близки (1.246 Å у Ni и 1.252 Å у Co, если исходить из параметров ГЦК решеток соответствующих подложек). Также аналогами кюрия в редкоземельном ряде (4*f* элементов) являются

Фаза	Тин рошотки			Пај	раметры реше	гки	A 17/17 0%
	тип решетки	ι, суг.	п	a, Å	c, Å	<i>V</i> , Å ³	$\Delta V / V, / o$
er Ca	ΓΠV	0.16	5	2.5078(1)	4.0716(1)	22.18(1)	
u-C0	1119	5	6	2.508(1)	4.073(3)	22.18(4)	
	ГЦК	0.16	6	3.5450(1)	_	44.550(4)	
β-Co		5	6	3.5447(1)	_	44.539(4)	
		7	1	3.548(2)	—	44.66(8)	+2.5(1)
$\operatorname{Co}_{17}\operatorname{Cm}_2$	Гекс. (<i>Р</i> 6 ₃ / <i>mmc</i>)	0.16	9	8.367(9)	8.080(6)	490(1)	
Co ₅ Cm	Гекс. (<i>Р</i> 6/ <i>mmm</i>)	0.16	6	4.88(1)	4.08(4)	84(1)	
Co ₂ Cm	Куб. <i>Fd</i> 3m	0.16	6	7.242(2)	—	379.8(3)	

Таблица 3. Расчетные ПКР отдельных фаз, обнаруженных на рентгенограммах образца 2 системы Cm–Co

Nd и Gd [14, 15]. В системе Gd–Co существуют интерметаллиды Gd₁₇Co₂ и GdCo₅ [10], изоструктурные интерметаллидам Ni₁₇Co₂ и NiCo₅, а радиус Gd (1.804 Å [14]) больше радиуса Cm (1.744 Å [15]). Ожидания, что на исходных рентгенограммах исследуемых образцов системы Ст-Со могут присутствовать рефлексы интерметаллидов Со₁₇Ст и Со₅Ст подтвердились. Причем угловые положения данных рефлексов попадают в довольно узкую "вилку" между положениями соответствующих рефлексов Ni₁₇Cm₂ и Ni₅Cm - с одной стороны – и рефлексов $Gd_{17}Co_2$ и $GdCo_5 - c$ другой. Выявленные таким образом рефлексы собраны в табл. 4, которая представляет собой идентификационную таблицу двух новых соединений: $Co_{17}Cm_2$ и Co_5Cm . Как видно, на исходной рентгенограмме образца 1 выявлено 11 рефлексов Со₁₇Ст₂ и 8 рефлексов Со₅Ст, образца 2 – соответственно 10 и 6 рефлексов.

Расчет ПКР интерметаллидов проводили в различных наборах рефлексов, представленных в табл. 4. Перебрали несколько десятков вариантов, из которых отобрали 11. Результаты представлены вместе с ПКР изоструктурных интерметаллидов в системах Ni-Cm [9] и Co-Gd [10] в табл. 5. Отбор проводили по объему ячейки, который для интерметаллидов системы Со-Ст должен быть несколько больше, чем для интерметаллидов системы Ni-Cm, но меньше, чем для интерметаллидов Co-Gd. Введен также критерий с/а, по которому гексагональные решетки Со₁₇Ст₂ и Со₅Ст должны быть гораздо ближе к решеткам Ni₁₇Cm₂ и Ni₅Cm, чем к решеткам Co₁₇Gd₂ и Co₅Gd; на этот критерий сильнее влияет различие в металлических радиусах Gd и Cm (на 3.4%), чем небольшое различие в радиусах Со и Ni (на 0.56%).

Анализ данных табл. 4 и 5 показывает, что решетка интерметаллида $Co_{17}Cm_2$ лучше выражена в образце 2, а решетка $Co_5Cm - в$ образце 1. С учетом критерия адекватности и ошибок, учитывающих наложения, справочными можно считать следующие значения:

- для интерметаллида $\text{Co}_{17}\text{Cm}_2$: a = 8.372(9) Å, c = 8.075(5) Å;

— для интерметаллида Co₅Cm: a = 4.917(3) Å, c = 4.057(2) Å.

Несколько слов о возможности существования в системе Co-Cm интерметаллида Co₂Cm с кубической решеткой (см. табл. 3). Подобные соединения ("фазы Лавеса") существуют во многих бинарных системах редкоземельных и актинидных элементов с Pt, Ir, Rh, Fe, Ni, Co, Al. Наиболее близкими к Со₂Ст (по положению элементов в периодической системе) являются соединения Co_2Pu (*a* = 7.08 Å) [10], Co_2La (*a* = 7.449 Å) [10], Co₂Gd (a = 7.256 Å) [10], Ni₂Am (a = 6.99 Å) [10] и Fe₂Am (*a* = 7.30 Å) [10]. Расчетный ПКР предполагаемого интерметаллида Co_2Cm (a = 7.242 Å, см. табл. 3) в сравнении с ПКР этих соединений оказывается несколько завышенным (интерполяции дают значения от 6.97 до 7.09 Å), что может быть связано с частичной заменой в решетке атомов Cm на атомы Th: состав $Co_2(Cm, Th)$.

На рентгенограммах обоих образцов Ni–Cm рефлексы интерметаллида Ni₂Cm также четко не выявляются. Таким образом, о существовании интерметаллида Co₂Cm по экспериментальным данным настоящей работы говорим только предположительно.

РАДЧЕНКО и др.

Co ₁₇ C	Cm ₂	Co ₅ Cm			Образец 1 Образец 2						
hkl	<i>I</i> , %	hkl	I, %	$2\vartheta_{ m skcn}$	<i>I</i> , %	Наложения	$2\vartheta_{pacy}$	2ϑ _{эксп}	I, %	Наложения	$2\vartheta_{pac4}$
110	1	100	1.5	_	_	_	_	20.90	3	Нет	20.88
002	1	001	6	—	—	_	—	21.68	9	20-2 B-Cm ₂ O ₃	21.69
112	29	101	50	30.90	81	B-Cm ₂ O ₃ . ThC ₂	30.87	30.38	7	003 B-Cm ₂ O ₃	30.38
210	_	_	_	_	_	_	_	32.25	4	Нет	32.32
211	2	_	_	_	_	_	_	34.34	14	Нет	34.24
103	13	—	_	35.69	3	11-2 ThC ₂ (н)	35.68	35.21	5	11-2 ThC ₂	35.22
_	_	110	33	36.96	4	311 Co ₃ O ₄	36.96	36.49	1	Нет	36.63
300	43	_	_	37.29	2	Нет	37.31	_	_	_	_
203	8	_	_	_	_	_	_	41.48	7	100 α-Co	41.45
—	_	200	36	42.82	11	020 ThC ₂	42.82	—	-	_	_
220	47	111	100	43.35	10	Нет	43.34	43.24	1	Нет	43.22
302	100	—	_	43.73	33	$400 \text{ Cm}_2\text{C}_3$	43.73	—	-	—	—
—	—	201	6	48.32	1	310 ThC ₂	48.35	—	_	_	—
222	22	_	_	49.49	6	Нет	49.25	_	_	—	
204	1.5	_	_	_	_	_	_	51.47	50	200 β-Co	51.49
402	0.5	—	_	55.74	2	422 Co ₃ O ₄	55.70	—	-	—	—
105	1.5	_	_	58.62	15	40-2. 400 ThC ₂	58.61	_	_	—	_
(304)	7.5	112	14	59.24	5	B-Cm ₂ O ₃ . Co ₃ O ₄	59.33	_	-	—	_
_	_	211	13	_	_	_	_	62.33	5	102 α-Co	62.34
_	_	300	5.5	_	_	_	_	66.31	6	400 ThO_2	66.28
315	6	_	_	75.17	6	42-2 ThC ₂	75.17	_	_	_	_
_	_	113	12.5	81.42	5	B-Cm ₂ O ₃ . ThC ₂	81.41	_	-	—	_
(306)	16.5	222	17	94.52	4	201 α-Co	94.50	_	-	_	_

Таблица 4. Идентификация интерметаллидов Co₁₇Cm₂ и Co₅Cm

Примечания. 1. "Теоретические" интенсивности рефлексов I_T взяты по интерметаллидам $Gd_{17}Co_2$ и $GdCo_5$; 2. В скобках указаны HKL рефлексов, которые не вошли в конечные наборы при расчете ПКР.

Интерметаллиды кюрия с железом

Рентгенограммы образца системы Cm—Fe снимали через 1, 2, 3 и 4 сут после его получения. На первых двух рентгенограммах образца, зафиксировано соответственно 50 и 34 рефлекса. С помощью компьютерного банка данных и сложных расчетов установлено, что рефлексы принадлежат по крайней мере восьми кристаллическим решеткам:

 тетрагональной решетке твердого раствора углерода в α-Fe;

- ГЦК решетке Th(O, C)₂ (исходный параметр a = 5.642 Å);

- моноклинной решетке ThC₂;

— моноклинной решетке В-формы Cm_2O_3 с заметно выраженной текстурой;

— кубической решетке с пространственной группой Fd3m (фаза Лавеса) интерметаллида Cm-Fe₂ (исходный параметр решетки a = 7.213(2) Å);

— гексагональной решетке с пространственной группой P6₃/mmc и с исходными параметрами a = 8.406(3) Å, c = 8.122(2) Å;

- ДГПУ решетке α -Сm;

– ГЦК решетке CmO или моноклинной решетке соединения CmOC.

Расчетные параметры некоторых кристаллических решеток, обнаруженных на рентгенограмме, представлены в табл. 6.

Соединение	Образец	τ, ч	п	a, Å	c, Å	<i>c/a</i> , Å	$V_{ m _{gq}}, { m \AA}$
Ni ₁₇ Cm ₂ [9]	1	4	59	8.3470(3)	8.0685(4)	0.9666(1)	486.82 ± 0.06
	2	4	33	3.3525(5)	8.0686(5)	0.9661(1)	487.47 ± 0.09
Co ₁₇ Cm ₂	1	4	8	8.353(8)	8.0667(6)	0.966(1)	487.4 ± 1.3
	2	4	9	8.367(9)	8.080(6)	0.966(1)	489.9 ± 1.4
Co ₁₇ Gd ₂ [10]	—	—	85	8.373	8.134	0.971	493.8
Ni ₅ Cm [9]	1	4	25	4.8713(3)	4.0142(9)	0.8241(2)	82.49 ± 0.03
	2	4	19	4.8674(5)	4.0306(4)	0.8281(1)	82.70 ± 0.03
Co ₅ Cm	1	4	8	4.912(7)	4.061(6)	0.827(2)	84.9 ± 0.3
	2	4	7	4.867(9)	4.03(3)	0.829(7)	82.7 ± 0.9
Co ₅ Gd [10]	_	_	37	4.970	3.970	0.799	84.92

Таблица 5. Результаты расчета параметров гексагональных решеток интерметаллидов Co₁₇Cm₂ и Co₅Cm и их сравнение с ПКР изоструктурных интерметаллидов в системах Cm–Ni [9] и Gd–Co [10]

Таблица 6. Расчетные ПКР отдельных фаз, обнаруженных на исходной рентгенограмме образца системы Ст-Fe

Фаза	Douromuo	5 01 7		Параметры решетки		
	Решетка	t, cyf	n	a, Å	<i>c</i> , Å	<i>V</i> , Å ³
		1	8	7.213(2)		
CmFe ₂	куб. Куб (<i>Fd</i> 3m)	2	5	7.240(3)		
		3	5	7.231(7)		
	гекс. (<i>Р</i> 6 ₃ / <i>mmc</i>)	1	12	8.406(3)	8.122(2)	497.0(5)
Cm ₂ Fe ₁₇		2	9	8.377(5)	8.081(6)	491(1)
		3	9	8.401(8)	8.12(1)	496(2)
		1	6	$2.8635(5)^2$	2.9083(6)	23.85(1)
Fe(C)	тетр.	2	5	2.858(1)	2.889(3)	23.60(4)
		3	5	2.860(1)	2.874(9)	23.51(9)
α-Fe	ОЦК	3	4	2.861(1)		23.42(3)

Между съемками образец хранили в герметичном контейнере, слегка поджатым между двумя танталовыми фольгами, т.е. при минимальном доступе воздуха. Тем не менее, перед третьей съемкой визуально фиксировалось появление бурого неметаллического налета на части подложки, покрытой кюрием.

По аналогии с интерметаллидами редкоземельных элементов с железом, а также с учетом опыта получения и идентификации кристаллических решеток интерметаллидов системы Cm–Ni [9] и Cm–Co, рассматривали возможность существования на рентгенограммах 1 и 2 рефлексов интерметаллических соединений Cm₂Fe₁₇ (гексагональная решетка), CmFe₅ (гексагональная решетка) и CmFe₂ (кубическая решетка с периодом $a \approx 7.2$ Å). Рефлексы, которые могут принадлежать кубической решетке CmFe₂ (фазе Лавеса с хорошо известными индексами Миллера), удалось выделить на рентгенограммах 1 и 2 сравни-

M $r_{_M}$, k	۳Å	Ofpasau	П	М ₁₇	3/11	Примания		
	Γ _M , Α	Образец	<i>a</i> , Å	c, Å	c/a	<i>V</i> , Å ³	$\sqrt[N]{V}/r_M$	примечание
Fe	1.26	2	8.406(3)	8.122(2)	0.966(1)	497.0(5)	6.29	τ = 24 ч
Ca	1.05	1	8.353(8)	8.067(6)	0.966(1)	487(1)	6.29	$\tau = 4 \mathrm{y}$
Co	1.23	2	8.372(9)	8.075(5)	0.965(1)	490(1)	6.31	$\tau = 4 \mathrm{y}$
NT:		1 [9]	8.362(1)	8.076(2)	0.966(1)	489.0(3)	6.35	τ = 20 ч
Ni	1.24	2 [9]	8.363(2)	8.084(3)	0.967(1)	489.6(4)	6.36	τ = 23 ч

Таблица 7. Параметры гексагональной решетки интерметаллидов Cm_2M_{17} (M = Fe, Co, Ni) и их связь с металлическими радиусами переходных металлов

Таблица 8. Сравнение систем Cm-Ni [9], Cm-Co, Cm-Fe

Содержание ²⁴⁴ Ст	Cm-	Ni [9]	Cm	Cm–Fe	
в образце	245 мкг	400 мкг	79 мкг	1843 мкг	917 мкг
$\mathbf{Cm} \mathbf{M}$ Foxe ($\mathbf{P}\mathbf{c}$ /mme)	a = 8.362(1) Å	a = 8.363(2) Å	a = 8.353(8) Å	a = 8.372(9) Å	a = 8.406(3) Å
$Cm_2 M_{17} T ekc (Po_3/mmc)$	c = 8.076(2) Å	c = 8.084(3) Å	c = 8.067(6) Å	c = 8.075(5) Å	c = 8.122(2) Å
CmM Fore (<i>P</i> (/mmm))	a = 4.8713(3) Å	a = 4.8674(5) Å	a = 4.912(7) Å	a = 4.88(1) Å	—
$\operatorname{CIII}_{5} \operatorname{Iekc}(P0/mmm)$	c = 4.0142(9) Å	c = 4.0306(4) Å	c = 4.061(6) Å	c = 4.08(4) Å	
СтМ₃ Куб (<i>Рт3m</i>)	a = 4.145(2) Å	a = 4.153(2) Å	_	_	_
СтМ ₂ Куб (<i>Fd</i> 3 <i>m</i>)	_	_	_	a = 7.242(2) Å	a = 7.213(2) Å

тельно быстро. Более успешным оказалось прямое сравнение рентгенограмм 1 и 2 с исходными рентгенограммами образцов Cm—Ni [9]. Такой прием вполне оправдан, поскольку металлические радиусы Ni и Fe очень близки, а способ получения образцов один и тот же. На рентгенограмме 1 удалось выделить 20 рефлексов, которые могут принадлежать решетке Cm_2Fe_{17} , а на рентгенограмме 2 — 10 таких рефлексов. Попытка выделить тем же методом рефлексы решетки CmFe₅ оказались безуспешными.

Практически все фазы, кристаллические решетки которых выявлены на исходной рентгенограмме образца Cm–Fe, являются неравновесными: они были получены при кратковременном высокотемпературном взаимодействии атомов Cm, Th, O и C с твердым кристаллическим Fe, за которым последовало быстрое охлаждение (закалка) образца. Последующее облучение (рентгенографируемой) поверхности образца α-частицами и ядрами отдачи при интенсивном альфараспаде ²⁴⁴Cm привело к своеобразному радиационному отжигу неравновесных фаз, их переходу в более равновесное состояние. Рентгенографически это за 4 сут выдержки проявилось следующим образом:

1. Распадался твердый раствор углерода в α -Fe, что проявлялось исчезновением "расщепления" рефлексов и уменьшением атомного объема решетки α -Fe.

2. Для гексагональной решетки интерметаллида Cm_2Fe_{17} в интервале 1–2 сут наблюдалось уменьшение обоих ПКР; в интервале 2–3 сут – обратный процесс (см. табл. 6), а после 4 сут выдержки уже ничего не наблюдалось: произошла рентгеноаморфизация решетки.

3. ПКР интерметаллида CmFe₂ изменялся следующим образом: a = 7.213 (2) Å ($\tau = 1 \text{ сут}$) $\rightarrow 7.240$ (3) Å ($\tau = 2 \text{ сут}$) $\rightarrow 7.231$ (7) Å ($\tau = 3 \text{ сут}$) \rightarrow аморфизация ($\tau = 4 \text{ сут}$ выдержки). В целом, фазы, в состав которых не входил ²⁴⁴Cm, переходили в более равновесное состояние, а кристаллические решетки фаз, сдержавших ²⁴⁴Cm, частично или полностью рентгеноаморфизировались.

Сравнение систем Cm-Ni [9], Cm-Co, Cm-Fe

Во всех трех системах кюрия с переходными элементами ²⁶Fe, ²⁷Co и ²⁸Ni обнаружены интерметаллиды состава Cm_2M_{17} , имеющие гексагональную решетку с пространственной группой P6₃/mmc. Параметры решетки этих соединений собраны в табл. 7. Для системы Cm–Ni приведены данные по образцам 1 и 2, полученные соответственно после 20 и 23 сут их выдержки [9] (для системы Cm–Co имеются только данные для 4 ч выдержки).

Из приведенных данных видно, что:

параметр *с/а* для всех трех интерметаллидов совпадает (для сравнения: этот параметр для Gd₂Co₁₇ равен 0.971 [10], а для Gd₂Fe₁₇ – 0.982 [10]);

имеется явная корреляция между параметрами "*a*", "*c*" и "*V*" интерметаллидов и металлическими радиусами Fe, Co, и Ni;

 прослеживается тенденция к увеличению объема ячейки интерметаллида в зависимости от

радиуса переходного металла (критерий $\sqrt[3]{V}/r_{\rm M}$).

Все три системы характеризуются отсутствием взаимной растворимости компонентов при комнатной температуре, чего и следовало ожидать, поскольку металлический радиус кюрия на ~40% больше радиусов переходных металлов.

Однако на этом сходство между тремя системами заканчивается. В системах Cm–Ni и Cm– Со существуют интерметаллиды CmNi₅ и CmCo₅ с гексагональными решетками; в настоящей работе рефлексов изоструктурного интерметаллида CmFe₅ выявить не удалось (см. табл. 8).

В системе Cm—Fe с высокой долей вероятности обнаружен интерметаллид CmFe₂ (фаза Лавеса) с периодом кубической решетки a = 7.213(2) Å; в системе Cm—Co существование изоструктурного интерметаллида CmCo₂ лишь предполагается, причем, параметр его решетки (a = 7.242 Å) представляется явно завышенным.

Имеется еще одно важное отличие между рассматриваемыми системами. Оба интерметаллида в системе Cm—Ni имели весьма совершенную кристаллическую решетку с большим количеством выявленных рефлексов. В системах Cm— Со и Cm—Fe интерметаллиды рентгенографически выявились с большим трудом, лишь по аналогии с рентгенограммами образцов Cm—Ni. Увеличение температуры подложек и количества сконденсированного на них кюрия оказалось малоэффективным. Это означает, что химическая активность Ni к Cm выше, чем Co и Fe к Cm.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методом высокотемпературной вакуумной конденсации паров кюрия-244 на соответствующие подложки получены первые образцы для систем: Ст-Со, Ст-Fe.

Рентгенодифрактометрическим методом идентифицированы **новые ранее не известные** соединения: $\mathbf{Cm}_2\mathbf{Co}_{17}$ гексагональная решетка (пространственная группа *P*6.3/*mmc*), \mathbf{CmCo}_5 гексагональная решетка (пространственная группа *P*6/*mmm*), \mathbf{CmCo}_2 кубическая решетка (пространственная группа Fd3m), $\mathbf{Fe}_{17}\mathbf{Cm}_2$ гексагональная решетка (пространственная группа *P*6.3/*mmc*), $\mathbf{Fe}_2\mathbf{Cm}$ кубическая решетка (пространственная группа Fm3m).

Сравнение взаимодействия кюрия-244 с элементами первой триады VIII группы Периодической системы Д.И. Менделеева, такими как железо, кобальт и никель, показало, что химическая активность никеля к кюрию-244 выше, чем у кобальта и железа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Сытин В.П., Теплов Ф.П., Череватенко Г.А. Радиоактивные источники ионизирующих излучений. М.: Энергоатомиздат, 1984. 128 с.
- Lorch E.A. Industrial and analytical applications of radioisotope radiation sources // J. Radioanal. Chem. 1979. V. 48. № 1–2. P. 209–215.
- Ainsworth A. Review of Actinide Source Technology // J. Less-Common Metals, 1986. V. 122. P. 383–399.
- 4. *Крандалл Дж*. Применение трансплутониевых элементов // Атомная техника за рубежом. 1972. № 12. С. 19–25.
- Madic C., Bourges J., Koehly G. Preparation of Nucledes and Sources of Actinide Elements // Nucl. Instrum. and Methods in Phys. Res. 1985. V. A236. № 3. P. 474–484.
- 6. Глинка Н.Л. Общая химия: Учебное пособие для вузов / Под ред. А.И. Ермакова.—изд. — 2003.
- Радченко В.М., Селезнев А.Г., Рябинин М.А. и др. Синтез и изучение бинарных соединений актиноидов и лантаноидов. XVII. Исследование сплавов ²⁴⁴Ст с платиной, иридием и родием, полученных конденсацией паров металлического кюрия // Радиохимия. 1994. Т. 36. Вып. 4. С. 229–303.
- Пат. 2030804 Российская Федерация. Способ изготовления активной части радионуклидного источника / В.М. Радченко, А.Г. Селезнев, М.А. Рябинин и др. // Бюллетень изобретений. 1995. № 7.
- Радченко В.М., Селезнев А.Г., Рябинин М.А. и др. Синтез и изучение бинарных соединений актиноидов и лантаноидов. XX. Интерметаллиды кюрия с никелем // Радиохимия. 1995. Т. 37. Вып. 4. С. 317–321.
- X-ray Diffraction Data Cards Joint Committee on Powder Diffraction Standards. Amer. Soc. for Testing Materials (ASTM). Philadelphia, 1950 и др. годы.
- 11. Савицкий Е.М., Терехова В.Ф. Металловедение редкоземельных металлов. М.: Наука, 1975. 272 с.

- 12. Радченко В.М., Селезнев А.Г., Шушаков В.Д. и др. Синтез и изучение бинарных соединений актиноидов и лантаноидов. VII. Сплавы кюрия с платиной // Радиохимия. 1985. Т. 27. Вып. 1. С. 38–42.
- 13. Справочник по редким металлам / Пер. с англ. под ред. В.Е. Плющеева. М.: МИР, 1965.
- Zachariasen W.H. // J. Inorg Nucl. Chem. 1973. V. 35. № 10. P. 3487.
- Получение и свойства трансплутониевых металлов: Обзор / Селезнев А.Г. и др. М. ЦНИИатоминформ, 1987.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 1, pp. 16-24

Determination of the Parameters of Crystal Lattices Compounds of Curium with Nickel, Cobalt and Iron

V. M. Radchenko^{*a*}, M. A. Ryabinin^{*a*}, and T. A. Chernakova^{*a*,#}

^a JSC "SSC – Research Institute of Atomic Reactors", Dimitrovgrad, 433510 Russia [#]e-mail: taticher@mail.ru

Received September 25, 2019; revised October 7, 2019; accepted October 15, 2019

Abstract—This paper presents the results of production and radiographic examination of micro-samples of curium-244 compounds with ion, cobalt and carbon, prepared by high temperature condensation of metal curium vapor onto corresponding substrates. In the Cm–Co system three intermetallic compounds were detected: Co17Cm2 (hexagonal lattice of spatial group P63/mcm), Co5Cm (hexagonal lattice of spatial group P6/mmm) and intermetallide Co2Cm (cubic lattice of spatial group Fd3m). In the Cm–Fe system two intermetallic compounds were detected: Fe17Cm2 (hexagonal lattice of spatial group P63/mcm) and Fe2Cm (cubic lattice of spatial group Fd3m). A comparison of the obtained intermetallic compounds in the Cm–Co and Cm–Fe systems with the result of studying the interaction of Cm–244 with nickel is given.

Keywords: curium-244, high temperature condensation of metal, intermetallic compounds, nickel, cobalt, iron

DOI: 10.1134/S2304487X19060105

REFERENCES

- Sytin V.P., Teplov F.P., Cherevatenko G.A. *Radioaktivnye istochniki ioniziruyuschikh izluchenij* [Radioactive sources of ionizing radiation]. M. Energoatomizdat, 1984. 128 p.
- Lorch E.A. Industrial and analytical applications of radioisotope radiation sources. J. Radioanal. Chem., 1979, vol. 48, no. 1–2, pp. 209–215.
- 3. Ainsworth A. Review of Actinide Source Technology J. Less-Common Metals, 1986, vol. 122, pp. 383–399.
- Crandall J. Primenenie transplutonievykh elementov [Applications of transplutonium elements]. Atomnaya Tekhnika za Rubezhom, 1972, pp. 19–25.
- Madic C., Bourges J., Koehly G. Preparation of Nucledes and Sources of Actinide Elements. Nucl. Instrum. and Methods in Phys. Res., 1985, vol. A236, no. 3. pp. 474–484.
- Glinka N.L. Obschaya khimiya: Uchebnoe posobie dlya vuzov [General chemistry: Textbook for high schools]. Ed. Ermakova A.I., 2003.
- Radchenko V.M. e.a. Sintez i izuchenie binarnykh soedinenij aktinoidov i lantanoidov. XVII. Issledovanie splavov 244 Cm s platinoy, iridiem i rodiem, poluchennykh kondensaciej parov metallicheskogo kuriya [Synthesis and study of binary compounds of actinides and lanthanides. XVII. A study of 244 Cm alloys with platinum, iridium and rhodium prepared by condensation of curium metal vapors]. Radiokhimiya, 1994, vol. 36, no. 4, pp. 299–303.

- Radchenko V.M., Seleznev A.G., Ryabinin M.A. e.a. Sposob izgotovleniya aktivnoj chaste radionuklidnogo istochnika [A method of manufacturing the active part of a radionuclide source]. Patent RF no. 2030804, Bulleten' izobretenij, 1995, no. 7.
- Radchenko V.M. e.a. Sintez i izuchenie binarnykh soedinenij aktinoidov i lantanoidov. XX. Intermetallidy kuriya s nikelem [Synthesis and study of binary compounds of actinides and lanthanides. XX. Curium alloys with nikel]. Radiokhimiya, 1995, vol. 37, no. 4, pp. 317–321.
- X-ray Diffraction Data Cards Joint Committee on Powder Diffraction Standards. Amer. Soc. for Testing Materials (ASTM). Philadelphia, 1999.
- 11. Savitsky E.M., Terekhova V.F. *Metallovedenie redkozemel'nykh metallov* [Metallurgy of rare earth metals]. M. Nauka, 1975. 272 p.
- Radchenko V.M. e.a. Sintez i izuchenie binarhykh soedinenij aktinoidov i lantanoidov. VII. Splavy kuriya s platinoy [Synthesis and study of binary compounds of actinides and lanthanides. VII. Platinum-curium alloys]. Radiokhimiya, 1985, vol. 27, no. 1, pp. 38–42.
- Spravochnik po redkim metallam [Handbook of rare metals]. Translation from English edited by V.E. Plyushcheeva. M. Mir, 1965.
- Zachariasen W.H. J. Inorg Nucl. Chem., 1973, vol. 35, no. 10, p. 3487.
- Poluchenie i svoistva transplutonievykh metallov: Obzor [Obtaining and properties of transplutonium metals: Overview] / Seleznev A.G. e.a. – M. Central Research Institute of Atominform, 1987.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ" том 9 № 1 2020

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 1, с. 25–31

> __ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ _____ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ТРЕТЬЕЙ И ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

© 2020 г. Н. А. Кудряшов^{1,*}, Д. В. Сафонова^{1,**}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия *e-mail: nakudr@gmail.com **e-mail: safonovadashav@gmail.com

Поступила в редакцию 05.12.2019 г. После доработки 10.12.2019 г. Принята к публикации 24.12.2019 г.

В данной работе рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка с нелинейностью третьей и пятой степени. Это уравнение может быть использовано для описания импульсов в оптических волокнах. Задача Коши для него не решается методом обратной задачи рассеяния, поэтому уравнение рассмотрено в переменных бегущей волны. В результате подстановки решения определенного вида найдена система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для мнимой и действительной частей уравнения. Для полученной системы ОДУ проведен тест Пенлеве. В результате применения теста установлено, что рассматриваемая система ОДУ не обладает свойством Пенлеве, поскольку в разложении общего решения в ряд Лорана имеются комплексные индексы Фукса. При использовании теста на свойство Пенлеве получено условие для скорости бегущей волны, при котором система упрощается до одного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Для этого уравнения найден первый интеграл. Использован метод простейших уравнений для построения точного решения рассматриваемого ОДУ. Найденное решение имеет две произвольные постоянные и выражено через эллиптическую функцию Вейерштрасса. Рассмотрен частный случай, когда решение принимает вид уединенной волны. Иллюстрируются периодические и уединенные волновые решения при различных значениях параметров.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, точное решение, первый интеграл **DOI:** 10.1134/S2304487X20010046

1. ВВЕДЕНИЕ

Анализ распространения импульсов в оптическом волокне является важной задачей, решение которой в настоящее время в полной мере не закончено. Существуют различные модели описания распространения оптических солитонов. Упомянем здесь: уравнение Радхакришнана-Кунду-Лакшманана [1, 2], уравнение Чена-Ли-Лу [3, 4], уравнение Кунду–Мекури–Наскара [5, 6] и другие [7–9]. Большое количество используемых моделей связано со сложной структурой оптических волокон. Поэтому представляет интерес поиск новых уравнений полезных для нелинейной оптики.

В работе [10] предложены уравнения в частных производных высокого порядка, которые могут быть использованы для описания распространения импульсов в оптических волокнах. Основная идея для построения уравнений заключалась в наличие у них солитонных решений определенной формы.

В настоящей работе изучается одно из уравнений, предложенных в работе [10]. Это уравнение не относится к классу интегрируемых методом обратной задачи рассеяния уравнений. Поэтому оно рассматривается в переменных бегущей волны. Цель работы — исследовать аналитические свойства полученного уравнения и построить общее решение в переменных бегущей волны.

2. ТЕСТ ПЕНЛЕВЕ

Рассмотрим уравнение в частных производных, которое может быть использовано для описания импульсов в оптической среде:

$$iu_{t} + \alpha u_{xx} + i\beta u_{xxx} + u_{xxxx} + \mu |u|^{2}u + \nu |u|^{4}u = 0.$$
(1)

Будем искать решение уравнения (1), используя переменные бегущей волны

$$u(x,t) = y(z) \exp(i(\psi(z) - \omega t)), \quad z = x - C_0 t.$$
 (2)

Подставляя зависимость (2) в уравнение (1), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для мнимой и действительной части. Обозначив $\psi_z = \phi$, имеем

$$y_{z}C_{0} - 2\alpha y_{z}\varphi + 3\beta y_{z}\varphi^{2} + 6y\varphi^{2}\varphi_{z} - \alpha y\varphi_{z} - -4y_{z}\varphi_{zz} - \beta y_{zzz} - 6y_{zz}\varphi_{z} - 4y_{zzz}\varphi - y\varphi_{zzz} + + 3\beta y\varphi_{z}\varphi + 4y_{z}\varphi^{3} = 0,$$
(3)

$$\mu y + vy + \alpha y_{zz} - 6y_{zz}\phi - 3y\phi_z + y\phi +$$

+ $y\omega - 3\beta y_z\phi_z - 3\beta y_{zz}\phi - 12y_z\phi_z\phi - \beta y\phi_{zz} +$ (4)
+ $y\phi C_0 - \alpha y\phi^2 + \beta y\phi^3 - 4y\phi_{zz}\phi + y_{zzzz} = 0.$

Найдем ведущие члены уравнений (3), (4), ис-

пользуя подстановку $y(z) = y_0 z^{-p}$ и $\phi(z) = \phi_0 z^{-q}$.

Получаем два варианта разложения общего решения.

В первом случае получаем

$$y_0^4 = -\frac{24}{\nu}, \quad p = 1,$$

 $\phi_0 = -\frac{\beta}{4}, \quad q = 0.$
(5)

Система уравнений с ведущими членами (3), (4) имеет вид

$$\begin{cases} -\beta y_{zzz} - 4y_{zzz} \phi = 0, \\ y_{zzzz} + vy^5 = 0. \end{cases}$$
(6)

Во втором случае находим

$$y_0^4 = \frac{126}{v}, \quad p = 1,$$

 $\phi_0 = \pm \sqrt{5}, \quad q = 1.$
(7)

При этом система уравнений с ведущими членами имеет вид

$$\begin{cases} -4y_{z}\phi_{zz} - 6y_{zz}\phi_{z} - 4y_{zzz}\phi - y\phi_{zzz} + 6y\phi^{2}\phi_{z} + 4y_{z}\phi^{3} = 0, \\ y_{zzzz} - 6y_{zz}\phi^{2} - 3y\phi_{z}^{2} + y\phi^{4} - 12y_{z}\phi_{z}\phi - 4y\phi_{zz}\phi + vy^{5} = 0. \end{cases}$$
(8)

Рассмотрим первый случай. Подставляя

$$y(z) = \frac{y_0}{z} + a_1 z^{j-1}, \quad \phi(z) = \phi_0 + a_2 z^j$$
 (9)

в (6) и приравнивая нулю коэффициенты при a_1 и a_2 , получаем матрицу для определения индексов Фукса в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & -(-24v^{-1})^{1/4}z^{j-4}(j-4)(j^2-3j+6) \\ z^{j-5}(j-6)(j+1)(j^2-5j+16) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Из равенства нулю определителя этой матрицы, находим индексы Фукса

$$j_1 = -1, \quad j_2 = 6, \quad j_{3,4} = \frac{5}{2} \pm i \frac{1}{2} \sqrt{39},$$

 $j_1 = 4, \quad j_{6,7} = \frac{3}{2} \pm i \frac{1}{2} \sqrt{15}.$ (10)

Используем разложение y(z) и $\phi(z)$ в следующем виде

$$y(z) = \frac{y_0}{z} + y_1 + y_2 z + y_3 z^2 + y_4 z^3 + y_5 z^4 + y_6 z^5,$$

$$\phi(z) = \phi_0 + \phi_1 z + \phi_2 z^2 + \phi_3 z^3 + \phi_4 z^4.$$
(11)

Подставляя (11) в уравнения (3), (4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *z*, найдем константы в разложениях (11). Они являются следующими:

$$y_{0}^{4} = -\frac{24}{\nu}, \quad y_{1} = 0,$$

$$y_{2} = -\frac{4\mu y_{0}^{2} + 3\beta^{2} + 8\alpha}{20y_{0}^{3}\nu}, \quad y_{3} = 0,$$

$$y_{4} = (15\beta^{4}y_{0}^{4}\nu + 80\alpha\beta^{2}y_{0}^{4}\nu + 320C_{0}\beta y_{0}^{4}\nu +$$

$$+ 256\mu^{2}y_{0}^{4} - 1280\omega y_{0}^{4}\nu - 192\beta^{2}\mu y_{0}^{2} -$$

$$- 512\alpha\mu y_{0}^{2} - 288\beta^{4} - 1536\alpha\beta^{2} -$$

$$- 2048\alpha^{2})/(6400\nu^{2}y_{0}^{7}), \quad y_{5} = 0,$$

$$\phi_{0} = -\frac{\beta}{4}, \quad \phi_{1} = 0,$$

$$\phi_{2} = \frac{1}{64}\beta^{3} + \frac{1}{16}\alpha\beta + \frac{1}{8}C_{0}, \quad \phi_{3} = 0,$$
(12)

 y_6 , ϕ_4 — произвольные постоянные, другие коэффициенты зависят от параметров уравнения и от произвольных постоянных y_6 и ϕ_4 . Рассмотрим второй случай. Подставляя

$$y(z) = \frac{y_0}{z} + a_1 z^{j-1}, \quad \phi(z) = \frac{\phi_0}{z} + a_2 z^{j-1}$$
 (13)

в (8) и также приравнивая нулю коэффициенты при a_1 и a_2 , получаем матрицу для определения индексов Фукса в виде

$$\begin{pmatrix} -2\sqrt{(5)}z^{j-5}(j-5)j(2j-5) & -\sqrt{3}(14v^{-1})^{1/4}z^{j-5}(j-5)(j^2-5j-20) \\ z^{j-5}(j^4-10j^3+5j^2+100j+504) & -2\sqrt{15}(14v^{-1})^{1/4}z^{j-5}(2j-5)(j-5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Из равенства нулю определителя этой матрицы, находим следующие индексы Фукса

$$j_1 = -1, \quad j_2 = 6, \quad j_3 = 5,$$

 $j_{4,5,6,7} = \frac{5}{2} \pm i \frac{1}{2} \sqrt{-67 \pm 4i \sqrt{1151}}.$ (14)

Используя разложения решений для y(z) и $\phi(z)$ в следующем виде

$$y(z) = \frac{y_0}{z} + y_1 + y_2 z + y_3 z^2 + y_4 z^3 + y_5 z^4 + y_6 z^5,$$

$$\phi(z) = \frac{\phi_0}{z} + \phi_1 + \phi_2 z + \phi_3 z^2 + \phi_4 z^3 + \phi_5 z^4 + \phi_6 z^5$$
(15)

и подставляя (15) в уравнения (3), (4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, найдем константы в разложениях (15). Получаем, что y_6 , ϕ_5 – произвольные постоянные, другие коэффициенты зависят от параметров уравнения и произвольных постоянных y_6 , ϕ_5 .

В результате выполнения теста Пенлеве получаем, что рассматриваемая система уравнений (3)—(4) не проходит тест Пенлеве, так как индексы Фукса являются комплексными.

Если взять $\phi(z)$ как укороченное разложение (11) при $\phi_2 \neq 0$, то уравнения (3)–(4) не удовлетворяются. Полагая дополнительно $\phi_2 = 0$, получаем условие на скорость бегущей волны

$$C_0 = -\frac{1}{2}\alpha\beta - \frac{1}{8}\beta^3.$$
 (16)

При этом из (12) следует, что $\psi = \psi_0 = -\beta/4$ в соответствии с (5). В этом случае система (3)–(4) упрощается, так как уравнение (3) тождественно удовлетворяется и остается одно уравнение (4), имеющее вид

$$y_{zzzz} + \left(\alpha + \frac{3}{8}\beta^{2}\right)y_{zz} + \left(\omega + \frac{\alpha\beta^{2}}{16} + \frac{5}{256}\beta^{4}\right)y + (17) + \mu y^{3} + \nu y^{5} = 0.$$

Умножив уравнение (17) на y_z и проинтегрировав его по z, получаем первый интеграл в виде

$$y_{z}y_{zzz} - \frac{1}{2}y_{zz}^{2} + \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{3}{8}\beta^{2}\right)y_{z}^{2} + \frac{1}{2}\left(\omega + \frac{\alpha\beta^{2}}{16} + \frac{5}{256}\beta^{4}\right)y^{2} + \frac{\mu}{4}y^{4} + \frac{\nu}{6}y^{6} = C,$$
(18)

где C — постоянная интегрирования. Это уравнение так же не проходит тест Пенлеве, поэтому у него не существует общего решения. Но из последнего шага теста Пенлеве получаем, что могут существовать точные решения уравнения с двумя произвольными постоянными. Следующий раздел посвящен поиску таких решений.

3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ

Для нахождения точных решений уравнения (18) будем использовать метод простейших уравнений [11], [12], с использованием простейшего уравнения в виде

$$Y_z^2(z) - aY^4(z) - cY^2(z) - d = 0.$$
(19)

Продифференцировав (19) по *z*, получаем, что решение уравнения (19) так же удовлетворяет следующим уравнениям:

$$Y_{zz} = 2aY^{3} + cY,$$

$$Y_{zzz} = 6aY^{2}Y_{z} + cY_{z},$$

$$Y_{zzzz} = 6aY^{2}Y_{zz} + 12aYY_{z}^{2} + cY_{zz}.$$
(20)

Покажем, что решение уравнения (19) выражается через эллиптическую функцию Вейерштрасса [10].

$$Y = \sqrt{\wp}\left(\sqrt{a(z-z_0)}; \frac{4c^2}{3a^2} - \frac{4d}{a}; \frac{4cd}{3a^2} - \frac{8c^3}{27a^3}\right) - \frac{c}{4a}.$$
 (21)

Будем искать решение уравнения (18), выраженное через решение уравнения (19). Порядки полюсов решений этих уравнений совпадают и равны единице, поэтому решение уравнения (18) ищем в ввиде

$$y(z) = AY(z) + B,$$
(22)

где Y(z) — решение уравнения (19), A и B — неизвестные постоянные, которые требуется найти. Дифференцируя (22) и подставляя производные *Y* из (20), получаем выражения для производных функции *y*:

$$y_{z} = A\sqrt{aY^{4}(z) + cY^{2}(z) + d},$$

$$y_{zz} = 2aAY^{3} + cAY,$$

$$y_{zzz} = 6aAY^{2}\sqrt{aY^{4}(z) + cY^{2}(z) + d} +$$

$$+ cA\sqrt{aY^{4}(z) + cY^{2}(z) + d},$$

$$y_{zzzz} = 24a^{2}AY^{5} + 20acAY^{3} + 12aAdY + c^{2}AY.$$

(23)

Подставляя (22), (23) в (18) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях *Y*, получаем вместо дифференциального уравнения (18) полином шестой степени, который равен нулю:

$$(A^{6}v + 24A^{2}a^{2})Y^{6} + 6vA^{5}Y^{5}B + + \left(\frac{3}{2}\mu A^{4} + 30A^{2}ac + 15vA^{4}B^{2} + 3A^{2}\alpha a + \frac{9}{8}A^{2}\beta^{2}a\right)Y(z)^{4} + (20A^{3}B^{3}v + 6A^{3}B\mu)Y^{3} + + \left(3A^{2}c^{2} + 3\omega A^{2} + 36A^{2}ad + 3A^{2}\alpha c + + \frac{15}{256}\beta^{4}A^{2} + 15vA^{2}B^{4} + \frac{9}{8}A^{2}\beta^{2}c - (24) - \frac{3}{16}\alpha\beta^{2}A^{2} + 9\mu A^{2}B^{2}\right)Y^{2} + \left(6vAB^{5} + \frac{15}{128}\beta^{4}AB + + 6\omega AB - \frac{3}{9}\alpha\beta^{2}AB + 6\mu AB^{3}\right)Y(z) + \frac{9}{9}A^{2}\beta^{2}d +$$

$$+3A^{2}\alpha d + 3\omega B^{2} + \frac{15}{256}\beta^{4}B^{2} + 6A^{2}cd + \frac{3}{2}\mu B^{4} + 6C + \nu B^{6} - \frac{3}{16}\alpha\beta^{2}B^{2} = 0.$$

Из (24) находим, что при

$$A^{4} = -\frac{24a^{2}}{v}, \quad B = 0,$$

$$c = -\frac{3}{80}\beta^{2} - \frac{A^{2}\mu}{20a} - \frac{1}{10}\alpha, \quad v > 0,$$

$$d = -\frac{5}{3072}\frac{\beta^{4}}{a} + \frac{1}{192}\frac{\alpha\beta^{2}}{a} - \frac{\beta^{2}c}{32a} - \frac{-\frac{\alpha c}{12a} - \frac{c^{2}}{12a} - \frac{\omega}{12a},$$

$$C = \frac{1}{61440}\frac{A^{2}}{a^{2}}(15a\beta^{6} - 5A^{2}\beta^{4}\mu + 16A^{2}\alpha\beta^{2}\mu - \frac{-96A^{2}\beta^{2}c\mu - 8a\alpha\beta^{4} + 288a\beta^{4}c - 256A^{2}\alpha c\mu - \frac{-256A^{2}c^{2}\mu - 128a\alpha^{2}\beta^{2} + 1536a\alpha\beta^{2}c + \frac{-256A^{2}c^{2}\mu}{2} - \frac{-26A^{2}c^{2}\mu}{2} - \frac{-28a\alpha^{2}\beta^{2}}{2} + \frac{1536a\alpha\beta^{2}c}{2} + \frac{-256A^{2}c^{2}\mu}{2} - \frac{-256A^{2}c^{2}\mu}{2}$$

$$-256A^{2}c^{2}\mu - 128a\alpha^{2}\beta^{2} + 1536a\alpha\beta^{2}c + + 768a\beta^{2}c^{2} - 256A^{2}\mu\omega + 2048a\alpha^{2}c + + 2048a\alpha c^{2} + 768a\beta^{2}\omega + 2048a\alpha\omega)$$

выражение (22) будет решением уравнения (18). Таким образом получаем решение в виде

$$y = A_{\sqrt{b^2}} \left(\sqrt{a(z-z_0)}; \frac{4c^2}{3a^2} - \frac{4d}{a}; \frac{4cd}{3a^2} - \frac{8c^3}{27a^3} \right) - \frac{c}{4a}, (26)$$

где z_0 , *а* – произвольные постоянные.

Решение (21) при условиях (25) и различных значениях параметров: a = 1, $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\nu = -1$, $\mu = 3$, $\omega = 10$, $z_0 = 0$ и a = 1, $\alpha = -1$, $\beta = 10$, $\nu = -1$, $\mu = 3$, $\omega = 10$, $z_0 = 0$ предоставлено на рис. 1.

Если в уравнении (19) выбрать d = 0, то решение уравнения (19) принимает вид уединенной волны:

$$Y(z) = \frac{4ce^{\sqrt{c(z-z_0)}}}{e^{2\sqrt{c(z-z_0)}} - 4ac}.$$
 (27)

Проделав вычисления описанные выше, получаем условия:

$$A^{4} = -\frac{24a^{2}}{v}, \quad B = 0, \quad c = -\frac{3}{80}\beta^{2} - \frac{A^{2}\mu}{20a} - \frac{1}{10}\alpha,$$

$$\omega = -\frac{5}{256}\beta^{4} + \frac{1}{16}\alpha\beta^{2} - \frac{3}{8}\beta^{2}c - \alpha c - c^{2}, \quad C = 0.$$
 (28)

Таким образом, искомое решение имеет вид уединенной волны

$$y = A \frac{4ce^{\sqrt{c(z-z_0)}}}{e^{2\sqrt{c(z-z_0)}} - 4ac},$$
 (29)

где z_0 , *а* – произвольные постоянные.

Решение (29) при условиях (28) и различных значениях параметров: a = -1, -0.005, -0.00001, $\alpha = -20$, $\beta = 2$, $\nu = -1$, $\mu = 3$, $z_0 = 10$ и a = -1, $\alpha = -1$, -10, -20, $\beta = 2$, $\nu = -1$, u = 3, $z_0 = 10$ построены на рис. 2.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка. С помощью переменных бегущей волны получена система обыкновенных дифференциальных уравнений. Установлено, что полученная система ОДУ не является интегрируемой в смысле Пенлеве, так как имеются комплексные индексы Фукса. Получен первый интеграл уравнения для реальной части. С помощью метода простейших уравнений построены точные решения с двумя произвольными постоянными, выраженные через эллиптическую функцию Вейерштрасса и экспоненциальную функцию. Пери-



Рис. 1. Решение (21) при условиях (25) и параметрах a = 1, $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\nu = -1$, $\mu = 3$, $\omega = 10$, $z_0 = 0$ (слева), при параметрах a = 1, $\alpha = -1$, $\beta = 10$, $\nu = -1$, $\mu = 3$, $\omega = 10$, $z_0 = 0$ (справа).



Рис. 2. Решение (29) при условиях (28) и параметрах a = -1 (1), -0.005 (2), -0.00001 (3), $\alpha = -20$, $\beta = 2$, $\nu = -1$, $\mu = 3$, $z_0 = 10$ (справа), при параметрах a = -1, $\alpha = -1$ (1), -10 (2), -20 (3), $\beta = 2$, $\nu = -1$, $\mu = 3$, $z_0 = 10$ (слева).

одические и уединенные волновые решения демонстрируются на рисунках.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), № 18-29-10039.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Biswas A*. 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan–Kundu–Laksmanan equation, Physics Letters A. 2009. V. 373. P. 2546–2548.
- Kudryashov N.A., Safonova D.V., Biswas A. Painlevé analysis and solution to the traveling wave reduction of Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation. Regu-

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ" том 9 № 1 2020

lar and Chaotic Dynamics. 2019. V. 24. No 6. P. 607–614.

- 3. *Biswas A*. Chirp-free bright optical soliton perturbation with Chen–Lee–Liu equation by traveling wave hypothesis and semi-inverse variational principle. Optik. 2018. V. 172. P. 772–776.
- 4. *Kudryashov N.A.* General solution of the traveling wave reduction for the perturbed Chen-Lee-Liu equation. Optik. 2019. V. 186. P. 339–349.
- Kundu A., Mukherjee A. Novel integrable higher-dimensional nonlinear Schrödingerequation: properties, solutions, applications, 2013.
- Kudryashov N.A. General solution of traveling wave reduction for the Kundu-Mukherjee-Naskar equation. Optik. 2019. V. 186. P. 22–27.

- Kudryashov N.A. Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with cubicquintic nonlinearity. Optik. 2019. V. 188. P. 27–35.
- Kudryashov N.A. First integral and general solution of traveling wave reduction for the Triki-Biswas equation. Optik. 2019. V. 185. P. 275–281.
- 9. *Kudryashov N.A.* Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with antyi-cubic nonlinearity. Optik. 2019. V. 185. P. 665–671.
- 10. *Kudryashov N.A.* Construction of nonlinear equations for description of propagation pulses in optical fiber. Optik. 2019. V. 192. 162964.
- 11. *Kudryashov N.A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. Chaos Soliton Fractals. 2005. V. 24. P. 1217–1231.
- Kudryashov N.A. Exact solitary waves of the Fisher equations. Physics Letters A. 2005. V. 342. P. 99–106.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 1, pp. 25-31

Exact Solutions of a Nonlinear Differential Equation with Third and Fifth Degree Nonlinearities for Description of Optical Pulses

N. A. Kudryashov^{*a*,#} and D. V. Safonova^{*a*,##}

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409, Russia

[#]e-mail: nakudr@gmail.com,

##e-mail: safonovadashav@gmail.com

Received December 5, 2019; revised December 10, 2019; accepted December 24, 2019

Abstract—A fourth-order nonlinear partial differential equation with the third- and fifth-degree nonlinearities has been considered. This equation can be used to describe pulses in optical fibers. The Cauchy problem for this equation cannot be solved by the inverse scattering transform method; for this reason, the equation is considered using the traveling wave variables. The substitution of a certain type solution gives a system of ordinary differential equations (ODEs) for the imaginary and real parts of the equation. The Painlevé test is applied to the resulting system of ODEs. According to the test, the considered ODE system does not have the Painlevé property because the expansion of the general solution into the Laurent series contains complex Fuchs indices. When using the Painlevé test, a condition for the velocity of a traveling wave at which the system is simplified to one ordinary fourth-order differential equation is obtained. The first integral is found for this equation. The method of the simplest equations is used to construct the exact solution of the considered ODE. The found solution has two arbitrary constants and is expressed in terms of the elliptic Weierstrass function. A special case where the solution has the form of a solitary wave is considered. Periodic and solitary wave solutions at different parameter values are illustrated.

Keywords: nonlinear differential equation, exact solution, first integral

DOI: 10.1134/S2304487X20010046

REFERENCES

- 1. Biswas A. 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan–Kundu–Laksmanan equation. *Physics Letters A*, 2009, vol. 373, pp. 2546–2548.
- Kudryashov N.A., Safonova D.V., Biswas A. Painlevé analysis and solution to the traveling wave reduction of Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation. *Regular* and Chaotic Dynamics, 2019, vol. 24, no. 6, pp. 607–614.
- Biswas A. Chirp-free bright optical soliton perturbation with Chen–Lee–Liu equation by traveling wave hypothesis and semi-inverse variational principle. *Optik*, 2018, vol. 172, pp. 772–776.
- 4. Kudryashov N.A. General solution of the traveling wave reduction for the perturbed Chen-Lee-Liu equation. *Optik*, 2019, vol. 186, pp. 339–349.

- Kundu A., Mukherjee A. Novel integrable higher-dimensional nonlinear Schrödingerequation: properties, solutions, applications, 2013.
- 6. Kudryashov N.A. General solution of traveling wave reduction for the Kundu-Mukherjee-Naskar equation. *Optik*, 2019, vol. 186, pp. 22–27.
- Kudryashov N.A. Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with cubicquintic nonlinearity. *Optik*, 2019, vol. 188, pp. 27–35.
- Kudryashov N.A. First integral and general solution of traveling wave reduction for the Triki-Biswas equation. *Optik*, 2019, vol. 185, pp. 275–281.
- 9. Kudryashov N.A. Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with antyi-cubic nonlinearity. *Optik*, 2019, vol. 185, pp. 665–671.
- 10. Kudryashov N.A. Construction of nonlinear equations for description of propagation pulses in optical fiber. *Optik*, 2019, vol. 192, 162964.
- 11. Kudryashov N.A. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. *Chaos Soliton Fractals*, 2005, vol. 24, pp. 1217–1231.
- 12. Kudryashov N.A. Exact solitary waves of the Fisher equations. *Physics Letters A*, 2005, vol. 342, pp. 99–106.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 1, с. 32-44

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ _____ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РАСЩЕПЛЕНИЯ

© 2020 г. А. Д. Полянин^{1,*}, Л. В. Линчук^{2,3,**}

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия ² Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, 195251, Россия ³ Российский государственный педагогический университет им А.И. Герцена, Санкт-Петербург, 191186, Россия

> *e-mail: polyanin@ipmnet.ru **e-mail: lidiya_linchuk@mail.ru Поступила в редакцию 16.01.2020 г. После доработки 16.01.2020 г. Принята к публикации 21.01.2020 г.

Рассматриваются различные классы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Для построения точных решений в неявной форме используется метод расщепления, основанный на обобщенном разделении переменных. Основное внимание уделяется нелинейным уравнениям достаточно общего вида, которые содержат одну или несколько произвольных функций (важно отметить, что точные решения нелинейных дифференциальных уравнений, которые зависят от произвольных функций и поэтому обладают достаточной общностью, представляют наибольший практический интерес для тестирования численных и приближенных методов решения различных задач). Приведены примеры конкретных нелинейных уравнений и их точных решений. В отдельных случаях удается найти общие решения уравнений или понизить их порядок. Используемый подход допускает обобщение на нелинейные уравнения с частными производными. Для уравнений реакционно-диффузионного типа получены новые точные решения с функциональным разделением переменных.

Ключевые слова: нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, реакционно-диффузионные уравнения, точные решения в неявном виде, обобщенное разделение переменных, функциональное разделение переменных, метод расщепления

DOI: 10.1134/S2304487X20010071

1. ВВЕДЕНИЕ

Методы, основанные на разделении переменных, чаще всего используются для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка [1–7], для поиска полных интегралов нелинейных уравнений с частными производными первого порядка специального вида [7–9], для построения точных решений линейных уравнений математической физики [7, 10–13]. Для поиска точных решений нелинейных уравнений математической физики применяются методы обобщенного и функционального разделения переменных (см., например, [7, 14–22]).

В классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений принято рассматривать методы, позволяющие получать общие решения уравнений в замкнутой форме (см., например, [1–5, 7]). При этом практически не уделяется внимание методам поиска частных точных решений нелинейных уравнений. Подобное положе-

ние дел тормозит развитие методов поиска точных решений нелинейных уравнений математической физики, которые можно выразить в терминах элементарных или специальных функций.

Важно отметить, что для приложений нередко оказывается полезнее найти частное решение достаточно широкого класса дифференциальных уравнений, зависящего от свободных физико-химических параметров a_n , чем найти общее решение входящего в него более узкого класса уравнений при фиксированных значениях отдельных a_n .

В литературе описано сравнительно мало методов построения частных точных решений ОДУ (см., например, [23–43]), которые обычно имеют весьма узкую область применимости. Эти методы чаще всего основаны на явном задании вида решения (иногда после некоторого простого точечного преобразования рассматриваемого уравнения) и содержат свободные параметры, значения которых определяются далее методом неопределенных коэффициентов [23–28, 30–34, 36–41]

(для этого нередко используются методы компьютерной алгебры). Существенным ограничением подобных прямых методов является то, что решение ищется в явном априорно заданном виде, в то время как подавляющее большинство известных общих решений нелинейных уравнений представляется в неявной или параметрической форме (подобный вывод следует из статистической обработки материалов наиболее полных справочников по точным решениям ОДУ [6, 44]). Более перспективными представляются методы, которые основаны на использовании решений более простых вспомогательных уравнений [29, 35, 42, 43] (см., также, [6]).

В данной работе будет показано, что метод расщепления, основанный на обобщенном разделении переменных, может применяться для построения точных решений в неявной форме различных нелинейных дифференциальных уравнений.

Прежде чем перейти к детальному описанию предлагаемого метода, сначала продемонстрируем его характерную особенность на простом конкретном примере.

Пример 1. Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

$$a(x)f(y)y'_x = b(x)g(y)$$

можно записать в виде

$$\vartheta(x) = \int \zeta(y) dy, \tag{1}$$

где

$$\vartheta(x) = \int \frac{b(x)}{a(x)} dx + C, \quad \zeta(y) = \frac{f(y)}{g(y)},$$

С – произвольная постоянная.

Интегральное соотношение с разделенными переменными вида (1) и его обобщения далее будем использовать для построения точных решений и упрощения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, которые зависят от произвольных функций.

2. ПРОЦЕДУРА ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОДУ. ПРИНЦИП РАСЩЕПЛЕНИЯ

Будем рассматривать нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения

$$F(x, y, y'_x, y''_{xx}, ...) = 0.$$
 (2)

Предлагаемый метод построения точных решений ОДУ состоит из нескольких последовательных этапов. На первом этапе используем преобразование (1), где $\vartheta = \vartheta(x)$ и $\zeta = \zeta(y) - \varphi$ ункции, которые подлежат определению в ходе дальнейшего анализа. После того, как эти функции будут определены, интегральное соотношение (1) будет задавать точное решение рассматриваемого уравнения в неявной форме.

Продифференцировав (1) по x, находим про-изводные

$$y'_{x} = \vartheta'_{x} \frac{1}{\zeta}, \quad y''_{xx} = \vartheta''_{xx} \frac{1}{\zeta} - (\vartheta'_{x})^{2} \frac{\zeta'_{y}}{\zeta^{3}},$$

$$y'''_{xxx} = \vartheta'''_{xxx} \frac{1}{\zeta} - 3\vartheta'_{x} \vartheta''_{xx} \frac{\zeta'_{y}}{\zeta^{3}} - (\vartheta'_{x})^{3} \frac{1}{\zeta} \left(\frac{\zeta'_{y}}{\zeta^{3}}\right)'_{y}, \quad \dots$$
(3)

Будем считать, что после подстановки выражений (3) в (2) полученное уравнение можно преобразовать к билинейному виду:

$$\sum_{n=1}^{N} \Phi_n \Psi_n = 0, \qquad (4)$$

где

 $\Phi_n = \Phi_n(x, \vartheta'_x, \vartheta''_{xx}, \ldots), \quad \Psi_n = \Psi_n(y, \zeta, \zeta'_y, \zeta''_{yy}, \ldots).$ (5)

Для построения точных решений уравнения (4)– (5) используем принцип расщепления, описанный ниже.

Принцип расщепления. Рассматриваем линейные комбинации двух наборов элементов $\{\Phi_j\}$ и $\{\Psi_j\}$, входящих в (4), которые связаны соотношениями

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_{ni} \Phi_n = 0, \quad i = 1, ..., l;$$

$$\sum_{n=1}^{N} \beta_{nj} \Psi_n = 0, \quad j = 1, ..., m,$$
(6)

где $1 \le l \le N - 1$ и $1 \le m \le N - 1$. Константы α_{ni} и β_{nj} в (6) выбираются так, чтобы билинейное равенство (4) удовлетворялось тождественно (это всегда можно сделать, см. далее). Важно отметить, что соотношения (6) носят чисто алгебраический характер и не связаны с конкретным видом дифференциальных форм (5).

После получения соотношений (6) в них подставляются дифференциальные формы (5), что приводит к системам дифференциальных уравнений (часто переопределенным) для искомых функций $\vartheta = \vartheta(x)$ и $\zeta = \zeta(y)$, которые входят в (1).

Замечание 1. Необходимо отдельно рассматривать также вырожденные случаи, когда, помимо линейных соотношений (6), некоторые дифференциальные формы Φ_n или Ψ_n равны нулю.

Замечание 2. Билинейные уравнения, внешне похожие на (4)—(5), возникают при поиске точных решений нелинейных уравнений с частными производными методами обобщенного и функ-

ционального разделения переменных [18–22] (см. также разд. 7).

Замечание 3. Так как выражения Φ_n в (5) не зависят явно от ϑ (а только от *x* и производных ϑ'_x , ϑ'_{xx} , ...), вместо преобразования (1) однопараметрические семейства решений иногда удобнее искать в виде

$$\int \theta(x) dx + C = \int \zeta(y) dy, \tag{7}$$

где *С* — произвольная постоянная. В этом случае в формулах для производных (3) и соотношениях (5) следует положить $\vartheta'_x = \theta$, $\vartheta'_{xx} = \theta'_x$,

3. ФОРМУЛЫ, ПОЗВОЛЯЮЩИЕ ТОЖДЕСТВЕННО УДОВЛЕТВОРИТЬ БИЛИНЕЙНОМУ СООТНОШЕНИЮ (4)

1. Для любого *N* билинейному соотношению (4) можно удовлетворить, если все Φ_i положить пропорциональными одному и тому же выбранному элементу Φ_i ($j \neq i$). В результате получим

$$\Phi_{i} = -A_{i}\Phi_{j}, \quad i = 1, ..., j - 1, j + 1, ..., N;$$

$$\Psi_{j-1} = A_{l}\Psi_{1} + \dots + A_{j-l}\Psi_{j} +$$

$$+ A_{j+1}\Psi_{j+1} + \dots + A_{N}\Psi_{N},$$
(8)

где A_i – произвольные постоянные. В формулах (8) можно сделать переобозначения символов $\Phi \rightleftharpoons \Psi$.

2. Для четных *N* равенство (4) удовлетворяется, если обращаются в нуль изолированные парные суммы $\Phi_i \Psi_i + \Phi_j \Psi_j = 0$. В этом случае имеем соотношения

$$\Phi_i - A_{ij}\Phi_j = 0, \quad A_{ij}\Psi_i + \Psi_j = 0 \quad (i \neq j),$$

где A_{ij} – произвольные постоянные, а индексы *i* и *j* в совокупности принимают все значения от 1 до N.

3. При $N \ge 3$ равенство (4) также будет удовлетворяться тождественно, если задать линейные соотношения

$$\Phi_{m} - A_{m} \Phi_{N-1} - B_{m} \Phi_{N} = 0, \qquad m = 1, 2, ..., N - 2;$$

$$\Psi_{N-1} + A_{1} \Psi_{1} + \dots + A_{N-2} \Psi_{N-2} = 0, \qquad (9)$$

$$\Psi_{N} + B_{1} \Psi_{1} + \dots + B_{N-2} \Psi_{N-2} = 0,$$

где A_i и B_i – произвольные постоянные. В формулах (9) можно сделать переобозначения символов $\Phi \rightleftharpoons \Psi$ или одновременные парные перестановки $\Phi_i \rightleftharpoons \Phi_i$ и $\Psi_i \rightleftharpoons \Psi_i$.

Существуют и более сложные линейные комбинации вида (6), тождественно удовлетворяющие билинейному соотношению (4).

4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (1) ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОДУ

Проиллюстрируем возможности метода расщепления для построения точных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$y''_{xx} + a(x)f(y)y'_{x} + b(x)g(y) + c(x)h(y) = 0.$$
 (10)

Далее для краткости часто будем опускать аргументы, входящие в преобразование (1) и исследуемые уравнения.

Сделаем замену (1) и подставим производные (3) в (10). После умножения на ζ получим уравнение

$$\vartheta_{xx}'' - (\vartheta_x')^2 \zeta^{-2} \zeta_y' + a(x) f(y) \vartheta_x' + + b(x) g(y) \zeta + c(x) h(y) \zeta = 0.$$
(11)

Обозначая

$$\Phi_{1} = \vartheta_{xx}^{"}, \Phi_{2} = (\vartheta_{x}^{'})^{2}, \quad \Phi_{3} = a\vartheta_{x}^{'},$$

$$\Phi_{4} = b, \quad \Phi_{5} = c;$$

$$\Psi_{1} = 1, \quad \Psi_{2} = -\zeta^{-2}\zeta_{y}^{'}, \quad \Psi_{3} = f,$$

$$\Psi_{4} = g\zeta, \quad \Psi_{5} = h\zeta,$$

(12)

приводим уравнение (11) к билинейной форме (4) при N = 5:

$$\sum_{n=1}^{5} \Phi_n \Psi_n = 0.$$
 (13)

Рассмотрим два случая.

1. Уравнению (13) можно, например, тождественно удовлетворить, если положить

$$\Phi_1 = k_1 \Phi_4, \quad \Phi_2 = k_2 \Phi_5, \quad \Phi_3 = 0; \Psi_4 = -k_1 \Psi_1, \quad \Psi_5 = -k_2 \Psi_2,$$
(14)

где k_1 , k_2 — произвольные постоянные. Подставив (12) в (14), приходим к системе уравнений

$$\vartheta'_{xx} = k_1 b, \quad (\vartheta'_x)^2 = k_2 c, \quad a = 0;$$

 $g\zeta = -k_1, \quad h\zeta = k_2 \zeta^{-2} \zeta'_y.$
(15)

При $k_1 = k_2 = 1$ решение системы (15) имеет вид

$$c = B^{2}, \quad h = -gg'_{y},$$
$$B = \int bdx + b_{0}, \quad \vartheta = \int Bdx + C$$

где b_0 и C — произвольные постоянные. В результате получим уравнение

$$y'_{xx} + b(x)g(y) - B^{2}(x)g(y)g'_{y}(y) = 0,$$

$$B(x) = \int b(x)dx + b_{0},$$
(16)

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ" том 9 № 1 2020

где b(x) и g(y) — произвольные функции, которое допускает однопараметрическое семейство точных решений

$$\int B(x)dx + C = -\int \frac{dy}{g(y)}.$$
(17)

Отметим, что трехпараметрическое уравнение типа Эмдена-Фаулера

$$y''_{xx} + \alpha x^{n} y^{m} - \frac{m\alpha^{2}}{(n+1)^{2}} x^{2n+2} y^{2m-1} = 0$$

является частным случаем уравнения (16) при $b(x) = \alpha x^{n}, g(y) = y^{m}, b_{0} = 0.$

2. Уравнение (13) удовлетворяется при выполнении условий

$$\Phi_{1} = k_{1}\Phi_{3}, \quad \Phi_{2} = k_{2}\Phi_{4}, \quad \Phi_{5} = 0; \Psi_{3} = -k_{1}\Psi_{1}, \quad \Psi_{4} = -k_{2}\Psi_{2},$$
(18)

где k_1 , k_2 — произвольные постоянные. Подставив (12) в (18), приходим к системе

$$\vartheta_{xx}'' = k_1 a \vartheta_x', \quad (\vartheta_x')^2 = k_2 b, \quad c = 0;$$

 $f = -k_1, \quad g\zeta = k_2 \zeta^{-2} \zeta_y',$
(19)

решение которой при $k_1 = k_2 = -1$ имеет вид

$$b = -e^{-2A}, \quad A = \int a dx, \quad \vartheta = \int e^{-A} dx + C_1,$$

$$f = 1, \quad \zeta = \pm (2G + C_2)^{-1/2}, \quad G = \int g dy + C_2,$$
(20)

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, a = a(x)и g = g(y) – произвольные функции. В итоге получим нелинейное уравнение

$$y''_{xx} + a(x)y'_{x} - \exp[-2A(x)]g(y) = 0,$$

$$A(x) = \int a(x)dx,$$
(21)

общее решение которого имеет две ветви и может быть представлено в неявной форме

$$\int \exp[-A(x)]dx + C_1 = \int \zeta(y)dy,$$

$$\zeta(y) = \pm \left[2\int g(y)dy + C_2\right]^{-1/2}.$$
(22)

Пример 3. Рассмотрим теперь уравнение с квадратичной нелинейностью относительно про-изводной

$$y''_{xx} + a(x)f(y)(y'_{x})^{2} + b(x)g(y)y'_{x} + c(x)h(y) = 0.$$
(23)

Сделав замену (1), подставим производные (3) в (23). После элементарных преобразований получим уравнение

$$\frac{\vartheta_{xx}'}{\zeta} - \frac{(\vartheta_x')^2 \zeta_y'}{\zeta^3} + \frac{af(\vartheta_x')^2}{\zeta^2} + \frac{bg \vartheta_x'}{\zeta} + ch = 0, \qquad (24)$$

которое можно представить в билинейном виде (13), где

$$\Phi_{1} = \vartheta_{xx}^{"}, \quad \Phi_{2} = (\vartheta_{x}^{'})^{2}, \quad \Phi_{3} = a(\vartheta_{x}^{'})^{2},$$

$$\Phi_{4} = b\vartheta_{x}^{'}, \quad \Phi_{5} = c;$$

$$\Psi_{1} = \frac{1}{\zeta}, \quad \Psi_{2} = -\frac{\zeta_{y}^{'}}{\zeta^{3}}, \quad \Psi_{3} = \frac{f}{\zeta^{2}},$$

$$\Psi_{4} = \frac{g}{\zeta}, \quad \Psi_{5} = h.$$
(25)

Уравнению (13) можно удовлетворить, если положить

$$\Phi_{1} = k_{1}\Phi_{5}, \quad \Phi_{2} = k_{2}\Phi_{4}, \quad \Phi_{3} = k_{3}\Phi_{5} + k_{4}\Phi_{4};
\Psi_{4} = -k_{2}\Psi_{2} - k_{4}\Psi_{3}, \quad \Psi_{5} = -k_{1}\Psi_{1} - k_{3}\Psi_{3},$$
(26)

где k_1 , k_2 , k_3 — произвольные постоянные. Подставим (25) в (26). Получим переопределенную систему

$$\vartheta_{xx}'' = k_1 c, \quad (\vartheta_x')^2 = k_2 b \vartheta_x',$$
$$a(\vartheta_x')^2 = k_3 c + k_4 b \vartheta_x'; \qquad (27)$$

$$\frac{g}{\zeta} = k_2 \frac{\zeta_y}{\zeta^3} - k_4 \frac{f}{\zeta^2}, \quad h = -k_1 \frac{1}{\zeta} - k_3 \frac{f}{\zeta^2}.$$

При $k_1 = k_2 = 1, k_3 = \alpha, k_4 = \beta$ решение уравнений (27) можно представить в виде

$$a = \alpha b^{-2} b'_{x} + \beta, \quad c = b'_{x}, \quad \vartheta = \int b dx + C;$$

$$g = -\beta f \xi - \xi'_{y}, \quad h = -(\alpha f \xi + 1)\xi, \quad \zeta = \frac{1}{\xi},$$
(28)

где b = b(x), f = f(y), $\xi = \xi(y)$ – произвольные функции, C, α , β – произвольные постоянные.

Подставив (28) в (23) и (1), приходим к уравнению

$$y''_{xx} + (\alpha b^{-2}b'_{x} + \beta)f(y'_{x})^{2} - b(\beta f\xi + \xi'_{y})y'_{x} - b'_{x}\xi(\alpha f\xi + 1) = 0,$$
(29)

которое допускает однопараметрическое семейство решений

$$\int bdx + C = \int \frac{dy}{\xi}.$$
(30)

Пример 4. Будем искать точные решения уравнений вида

$$y'_{x}y''_{xx} + a(x)f(y)(y'_{x})^{2} + b(x)g(y)y'_{x} + c(x)h(y) = 0.$$
(31)

Сделаем замену (1) и подставим производные (3) в (31). В результате получим

$$\frac{\vartheta'_x\vartheta''_{xx}}{\zeta^2} - \frac{(\vartheta'_x)^3\zeta'_y}{\zeta^4} + \frac{af(\vartheta'_x)^2}{\zeta^2} + \frac{bg\vartheta'_x}{\zeta} + ch = 0.$$
(32)

Это уравнение можно представить в билинейной форме (13), если обозначить

$$\Phi_{1} = \vartheta'_{x} \vartheta''_{xx}, \quad \Phi_{2} = (\vartheta'_{x})^{3}, \quad \Phi_{3} = a(\vartheta'_{x})^{2},$$

$$\Phi_{4} = b\vartheta'_{x}, \quad \Phi_{5} = c;$$

$$\Psi_{1} = \frac{1}{\zeta^{2}}, \quad \Psi_{2} = -\frac{\zeta'_{y}}{\zeta^{4}}, \quad \Psi_{3} = \frac{f}{\zeta^{2}},$$

$$\Psi_{4} = \frac{g}{\zeta}, \quad \Psi_{5} = h.$$
(33)

Рассмотрим два случая.

1. Уравнению (13) можно тождественно удовлетворить, если использовать линейные соотношения

$$\Phi_{3} = k_{3}\Phi_{1}, \quad \Phi_{4} = k_{1}\Phi_{2}, \quad \Phi_{5} = k_{2}\Phi_{2};
\Psi_{1} = -k_{3}\Psi_{3}, \quad \Psi_{2} = -k_{1}\Psi_{4} - k_{2}\Psi_{5},$$
(34)

где k_1 , k_2 , k_3 — произвольные постоянные. Подставляя в (34) зависимости (33), приходим к системе

$$b = k_1(\vartheta'_x)^2, \quad a\vartheta'_x = k_3\vartheta'_{xx}, \quad c = (\vartheta'_x)^3; 1 = -k_3f, \quad \zeta'_y = k_1g\zeta^3 + k_2h\zeta^4.$$
(35)

Решение первых четырех уравнений (35) имеет вид

$$a = k_3 \frac{v'_x}{v}, \quad b = k_1 v^2, \quad c = k_2 v^3, \vartheta = \int v dx + C; \quad f = -\frac{1}{k_3},$$
(36)

где v = v(x) – произвольная функция, C – произвольная постоянная. Подставляя (36) в (31) и полагая $k_1 = k_2 = 1$, получим уравнение

$$y'_{x}y''_{xx} - \frac{v'_{x}}{v}(y'_{x})^{2} + v^{2}gy'_{x} + v^{3}h = 0,$$
 (37)

которое содержит три произвольные функции v = v(x), g = g(y), h = h(y). Его общее решение определяется неявной зависимостью

$$\int v dx + C = \int \zeta dy, \tag{38}$$

где C — произвольная константа, а функция $\zeta = \zeta(y)$ является решением последнего уравнения (35) при $k_1 = k_2 = 1$:

$$\zeta'_{y} = h\zeta^{4} + g\zeta^{3}. \tag{39}$$

В уравнении (39) переменные разделяются, если $\alpha g + \beta h = 0$, где α и β – произвольные постоянные. Поэтому уравнение (39) интегрируется в квадратурах, например, при $g \equiv 0$ или $h \equiv 0$.

2. Уравнению (13) можно удовлетворить, если положить $\Phi_1, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5$ пропорциональными Φ_2 . Тогда получим следующие зависимости:

$$\Phi_{1} = k_{1}\Phi_{2}, \quad \Phi_{3} = k_{2}\Phi_{2},$$

$$\Phi_{4} = k_{3}\Phi_{2}, \quad \Phi_{5} = k_{4}\Phi_{2}; \quad (40)$$

$$\Psi_{2} = -k_{1}\Psi_{1} - k_{2}\Psi_{3} - k_{3}\Psi_{4} - k_{4}\Psi_{5},$$

где k_1, k_2, k_3, k_4 — произвольные константы. Подставив (33) в (40), имеем систему для поиска неизвестных функций

$$\vartheta_{xx}'' = k_1 (\vartheta_x')^2, \quad a = k_2 \vartheta_x', b = k_3 (\vartheta_x')^2, \quad c = k_4 (\vartheta_x')^3; \frac{\zeta_y}{\zeta^4} = \frac{k_1}{\zeta^2} + \frac{k_2 f}{\zeta^2} + \frac{k_3 g}{\zeta} + k_4 h.$$
(41)

Решение первых четырех уравнений (41) описывается формулами

$$a = -\frac{C_1 k_2}{k_1 (C_1 x + C_2)}, \quad b = \frac{C_1^2 k_3}{k_1^2 (C_1 x + C_2)^2},$$

$$c = -\frac{C_1^3 k_4}{k_1^3 (C_1 x + C_2)^3}, \quad \vartheta = -\frac{\ln(C_1 x + C_2)}{k_1} + C,$$
(42)

где C, C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Подставим (42) в (31). Полагая $C_1 = 1, C_2 = 0, k_1 = -1, k_2 = k_3 = k_4 = 1$, приходим к уравнению

$$y'_{x}y''_{xx} + x^{-1}f(y)(y'_{x})^{2} + x^{-2}g(y)y'_{x} + x^{-3}h(y) = 0,$$
(43)

где f(y), g(y), h(y) – произвольные функции. Общее решение уравнения (43) можно представить в неявной форме

$$\ln x + C = \int \zeta(y) dy, \tag{44}$$

где функция $\zeta = \zeta(y)$ определяется из ОДУ первого порядка

$$\xi_{y} + [1 - f(y)]\xi^{2} - g(y)\xi^{3} - h(y)\xi^{4} = 0, \qquad (45)$$

которое получено из последнего уравнения (41) при $k_1 = -1, k_2 = k_3 = k_4 = 1.$

Замечание 4. Уравнение (43) является однородным по переменной *х*.

Пример 5. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$[a(x)f(y)y'_{x}]'_{x} + b(x)g(y)y'_{x} + c(x)h(y) = 0.$$
(46)

Сделав замену (1), получим уравнение

$$(a\vartheta'_{x})'_{x}f + a(\vartheta'_{x})^{2}\left(\frac{f}{\zeta}\right)'_{y} + b\vartheta'_{x}g + ch\zeta = 0, \qquad (47)$$

которое можно представить в билинейной форме

$$\sum_{n=1}^{4} \Phi_n \Psi_n = 0, \qquad (48)$$
где

$$\Phi_1 = (a\vartheta'_x)'_x, \quad \Phi_2 = a(\vartheta'_x)^2,$$

$$\Phi_3 = b\vartheta'_x, \quad \Phi_4 = c; \tag{49}$$

 $\Psi_1 = f, \quad \Psi_2 = (f/\zeta)'_y, \quad \Psi_3 = g, \quad \Psi_4 = h\zeta.$

Далее рассмотрим два случая.

1. Уравнению (48) можно удовлетворить, если положить

$$\Phi_{1} = -k_{1}\Phi_{3}, \quad \Phi_{2} = -k_{2}\Phi_{4};
\Psi_{3} = k_{1}\Psi_{1}, \quad \Psi_{4} = k_{2}\Psi_{2},$$
(50)

где k_1 , k_2 — произвольные числа. Подставив (49) в (50), имеем уравнения

$$(a\vartheta'_{x})'_{x} = -k_{1}b\vartheta'_{x}, \quad a(\vartheta'_{x})^{2} = -k_{2}c;$$

$$h\zeta = k_{2}(f/\zeta)'_{y}, \quad g = k_{1}f.$$
(51)

Решая систему (51), получим следующие зависимости:

$$c = -\frac{C^2}{k_2 a} \exp\left(-2k_1 \int \frac{b}{a} dx\right),$$

$$\vartheta = C \int \frac{1}{a} \exp\left(-k_1 \int \frac{b}{a} dx\right) dx + C_1; \qquad (52)$$

$$g = k_1 f, \quad \zeta = \pm f(y) \left[\frac{2}{k_2} \int f(y) h(y) dy + C_2 \right]^{-1/2},$$

где a = a(x), b = b(x), f = f(y), h = h(y) – произвольные функции, C, C_1, C_2 – произвольные постоянные. Полагая $C = k_1 = k_2 = 1$ в (52), приходим к уравнению

$$[a(x)f(y)y'_{x}]'_{x} + b(x)f(y)y'_{x} - \frac{1}{a(x)}\exp\left(-2\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\right)h(y) = 0,$$
(53)

общее решение которого можно представить в неявной форме

$$\int \exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx\right) \frac{dx}{a(x)} + C_1 =$$

$$= \pm \int f(y) \left[2\int f(y)h(y)dy + C_2\right]^{-1/2} dy,$$
(54)

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

2. Соотношение (48) обращается в верное тождество, если имеют место линейные связи

$$\Phi_{1} = -k_{1}\Phi_{4}, \quad \Phi_{3} = -k_{2}\Phi_{4};
\Psi_{2} = 0, \quad \Psi_{4} = k_{1}\Psi_{1} + k_{2}\Psi_{3},$$
(55)

где k_1, k_2 — произвольные константы. Подставив (49) в (55), получим систему

$$(a\vartheta'_{x})' = -k_{1}c, \quad b\vartheta'_{x} = -k_{2}c;$$

$$(f/\zeta)'_{y} = 0, \quad h\zeta = k_{1}f + k_{2}g,$$
(56)

решение которой можно представить в виде

$$b = \frac{k_2}{k_1} \frac{av'_x}{v}, \quad c = -\frac{v'_x}{k_1}, \quad \vartheta = \int \frac{v}{a} dx + C;$$

$$h = \frac{k_1 f + k_2 g}{\gamma f}, \quad \zeta = \gamma f,$$

(57)

где a = a(x), v = v(x), f = f(y), g = g(y) – произвольные функции, C, γ – произвольные постоянные. Полагая $k_1 = k_2 = \gamma = 1$ в (57), приходим к уравнению

$$[a(x)f(y)y'_{x}]'_{x} + a(x)\frac{v'_{x}(x)}{v(x)}g(y)y'_{x} - -v'_{x}(x)\left[1 + \frac{g(y)}{f(y)}\right] = 0,$$
(58)

которое допускает однопараметрическое семейство решений

$$\int \frac{v(x)}{a(x)} dx + C = \int f(y) dy,$$

где С – произвольная постоянная.

5. ОБОБЩЕНИЯ, ОСНОВАННЫЕ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Другие точные решения можно получить, если вместо преобразованного уравнения (4)–(5) рассматривать эквивалентные дифференциальные уравнения, которые сводятся к (4)–(5) на множестве функций, удовлетворяющих соотношению (1).

Укажем здесь два класса эквивалентных уравнений, которые будут использованы далее.

1. Можно использовать уравнения вида

$$\sum_{n=1}^{N} \tilde{\Phi}_{n} \tilde{\Psi}_{n} = 0, \quad \tilde{\Phi}_{n} = \Phi_{n} \eta_{n}(\vartheta),$$

$$\tilde{\Psi}_{n} = \Psi_{n} / \eta_{n}(Z), \quad Z = \int \zeta(y) dy,$$
(59)

которые сохраняют билинейную структуру и, в силу (1) (т.е. $\vartheta = Z$), эквивалентны уравнению (4)—(5) для любых функций $\eta_u(\vartheta)$.

2. Также можно использовать уравнения вида

$$G(x, y, \vartheta) - G(x, y, Z) + \sum_{n=1}^{N} \Phi_n \Psi_n = 0, \qquad (60)$$

которые для любых функций G(x, y, z) эквивалентны уравнению (4)–(5).

Использование принципа расщепления к уравнениям (59) и (60) в случае общего положения будет приводить к другим точным решениям рассматриваемого класса ОДУ, чем использование этого принципа к уравнению (4).

Для иллюстрации вышесказанного вернемся к дифференциальному уравнению (46). Как и ранее, его решения ищем в виде (1). Подставляя производные (3) в (46), получим уравнение (47). Вместо этого уравнения рассмотрим более сложное уравнение

$$(a\vartheta'_{x})'_{x}f + a(\vartheta'_{x})^{2}\left(\frac{f}{\zeta}\right)'_{y} + b\vartheta'_{x}g + ch\zeta\frac{\eta(\vartheta)}{\eta(Z)} = 0, \quad (61)$$
$$Z = \int \zeta(y)dy,$$

где η(ϑ) – произвольная функция. Уравнение (61) эквивалентно уравнению (47) в силу (1).

Уравнение (61) можно представить в билинейном виде

$$\sum_{n=1}^{4} \tilde{\Phi}_n \tilde{\Psi}_n = 0, \tag{62}$$

где использованы обозначения

$$\tilde{\Phi}_{1} = (a\vartheta'_{x})'_{x}, \quad \tilde{\Phi}_{2} = a(\vartheta'_{x})^{2},
\tilde{\Phi}_{3} = b\vartheta'_{x}, \quad \tilde{\Phi}_{4} = c\eta(\vartheta);
\tilde{\Psi}_{1} = f, \quad \tilde{\Psi}_{2} = (f/\zeta)'_{y},
\tilde{\Psi}_{3} = g, \quad \tilde{\Psi}_{4} = h\zeta/\eta(Z).$$
(63)

Уравнению (62) можно удовлетворить, если положить

$$\tilde{\Phi}_1 = -\tilde{\Phi}_4, \ \tilde{\Phi}_2 = -\tilde{\Phi}_3; \ \tilde{\Psi}_1 = \tilde{\Psi}_4, \ \tilde{\Psi}_2 = \tilde{\Psi}_3.$$
(64)

Подставив (63) в (64), приходим к системе уравнений

$$(a\vartheta'_{x})'_{x} = -c\eta(\vartheta), \quad a\vartheta'_{x} = -b;$$

$$f = h\zeta/\eta(Z), \quad (f/\zeta)'_{y} = g,$$

(65)

решение которой можно представить в виде

$$b = -a\vartheta'_{x}, \quad c = -(a\vartheta'_{x})'_{x}/\eta(\vartheta);$$

$$\zeta = \frac{f}{G}, \quad h = G\eta\left(\int \frac{f}{G}dy\right), \quad G = \int gdy + C_{1},$$
(66)

где a = a(x), $\vartheta = \vartheta(x)$, f = f(y), g = g(y), $\eta(\vartheta)$ – произвольные функции, C_1 – произвольная постоянная. Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 6. Положим в (66):

$$a = 1, \quad b = -(\alpha e^{x} + \beta e^{-x}), \quad c = -1,$$

$$\vartheta = \alpha e^{x} - \beta e^{-x}, \quad \eta(\vartheta) = \vartheta, \quad C_{1} = 0.$$

В результате приходим к нелинейному уравнению

$$[f(y)y'_{x}]'_{x} - (\alpha e^{x} + \beta e^{-x})g(y)y'_{x} - G(y)\int \frac{f(y)}{G(y)}dy = 0,$$

$$G(y) = \int g(y)dy,$$
(67)

зависящему от двух произвольных функций f(y)и g(y) и двух свободных параметров α и β , которое допускает точное решение в неявной форме

$$\alpha e^{x} - \beta e^{-x} = \int \frac{f(y)}{G(y)} dy.$$
(68)

При $f(y) = y^2$, g(y) = y уравнение (67) принимает вид

$$(y^{2}y'_{x})'_{x} - (\alpha e^{x} + \beta e^{-x})yy'_{x} - y^{3} = 0,$$

а его точное решение точное решение (68) может быть представлено в явной форме

$$y=\frac{1}{2}(\alpha e^x-\beta e^{-x}).$$

Пример 7. Положим в (66):

$$a = 1, \quad b = -k\cos x, \quad c = 1,$$

$$\vartheta = k\sin x, \quad \eta(\vartheta) = \vartheta, \quad C_1 = 0.$$

В результате приходим к уравнению

$$[f(y)y'_{x}]'_{x} - k\cos xg(y)y'_{x} + G(y)\int \frac{f(y)}{G(y)}dy = 0,$$

$$G(y) = \int g(y)dy,$$
(69)

которое допускает точное решение в неявном виде

$$k\sin x = \int \frac{f(y)}{G(y)} dy.$$
 (70)

В (69) и (70) подставим функции $f(y) = y^2$, g(y) = y. Получим уравнение

$$(y^{2}y'_{x})'_{x} - k\cos xyy'_{x} + y^{3} = 0,$$

которое допускает точное решение в явном виде

$$y = \frac{1}{2}k\sin x.$$

6. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (1) ДЛЯ УПРОЩЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Покажем, что преобразование (1) может использоваться также для упрощения уравнений.

Пример 8. Рассмотрим уравнение

$$y''_{xx} + f(y)(y'_{x})^{2} + b(x)g(y)y'_{x} + c(x)h(y) = 0.$$
 (71)
Преобразование (1) приводит (71) к виду

$$\vartheta_{xx}'' + (\vartheta_x')^2 \frac{1}{\zeta} \left[f(y) - \frac{\zeta_y'}{\zeta} \right] +$$
(72)

$$+ b(x)g(y)\vartheta'_x + c(x)h(y)\zeta = 0.$$

В (72) положим

$$f(y) - \frac{\zeta'_y}{\zeta} = 0, \quad g(y) = 1, \quad h(y)\zeta = 1,$$
 (73)

что дает

$$\zeta = \exp\left[\int f(y)dy\right], \quad h(y) = \exp\left[-\int f(y)dy\right].$$
(74)

В результате имеем нелинейное уравнение

$$y''_{xx} + f(y)(y'_{x})^{2} + b(x)y'_{x} + c(x)\exp\left[-\int f(y)dy\right] = 0,$$
(75)

где b(x), c(x), f(y) — произвольные функции, которое с помощью преобразования

$$\vartheta = \int \exp\left[\int f(y)dy\right]dy,\tag{76}$$

приводится к линейному уравнению

$$\vartheta_{xx}'' + b(x)\vartheta_x' + c(x) = 0.$$
(77)

Это уравнение легко интегрируется с помощью подстановки $u = \vartheta'_x$.

Пример 9. Автономное уравнение второго порядка общего вида

$$y''_{xx} + F(y, y'_x) = 0$$
(78)

преобразованием (1) при $\vartheta(x) = x + C_1$, где C_1 – произвольная постоянная, приводится к уравнению первого порядка

$$\zeta'_{y} = \zeta^{3} F(y, 1/\zeta). \tag{79}$$

Аналогичным образом понижается порядок автономного уравнения любого порядка.

Замечание 5. Решение более общего, чем (78), нелинейного уравнения

$$y''_{xx} - \frac{v'_x}{v}y'_x + v^2 F(y, y'_x/v) = 0,$$
 (80)

где v = v(x) и F(y, z) – произвольные функции, можно представить в неявной форме (38), где функция $\zeta = \zeta(y)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка (79).

Замечание 6. Уравнение (21) является частным случаем уравнения (80) при

$$v(x) = \exp\left[-\int a(x)dx\right], \quad F(y,z) = -g(y).$$

Замечание 7. Уравнение (37) является частным случаем уравнения (80) при $F(y, z) = g(y) + h(y)z^{-1}$.

7. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. МЕТОД ПОИСКА ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

Описанный в разд. 2 метод построения точных решений допускает обобщение на случай нелинейных уравнений с частными производными. Для простоты будем рассматривать уравнения с двумя независимыми переменными

$$F(x,t,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},...) = 0,$$
 (81)
где $u = u(x,t)$ – искомая функция.

Для построения точных решений уравнения (81) на начальном этапе используем нелинейное преобразование [20–22]

$$\vartheta = \int \zeta(u) du, \tag{82}$$

где $\vartheta = \vartheta(x,t)$ и $\zeta = \zeta(u) - функции, которые ищутся в ходе дальнейшего анализа. После того, как эти функции будут определены, интегральное соотношение (82) будет задавать точное решение рассматриваемого уравнения в неявной форме.$

Дифференцируя (82) по независимым переменным, находим частные производные

$$u_{x} = \frac{\vartheta_{x}}{\zeta}, \quad u_{t} = \frac{\vartheta_{t}}{\zeta}, \quad u_{xx} = \frac{\vartheta_{xx}}{\zeta} - \frac{\vartheta_{x}^{2}\zeta_{u}}{\zeta^{3}},$$

$$u_{xt} = \frac{\vartheta_{xt}}{\zeta} - \frac{\vartheta_{x}\vartheta_{t}\zeta_{u}}{\zeta^{3}}, \quad \dots$$
(83)

Будем считать, что после подстановки выражений (83) в (81) полученное уравнение можно преобразовать к билинейному виду (4), где

$$\Phi_n = \Phi_n(x, t, \vartheta_x, \vartheta_t, \vartheta_{xx}, ...),$$

$$\Psi_n = \Psi_n(u, \zeta, \zeta'_u, \zeta''_{uu}, ...).$$
(84)

Дальнейшая процедура построения точных решений основана на использовании метода расщепления к уравнению (4), в которое подставляются функции (84), и полностью аналогична процедуре, изложенной в разд. 2.

Применяя описанный метод в [20, 22] был получен ряд точных решений нелинейных уравнений диффузионного типа. Ниже этим методом будут построены несколько новых точных решений.

Рассмотрим класс нелинейных уравнений реакционно-диффузионного типа с переменными коэффициентами

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u) + c(x)h(u).$$
(85)

Далее для краткости аргументы функций, входящих в преобразование (82) и уравнение (85), часто будут опускаться.

Сделав замену (82), подставим производные (83) в (85). После элементарных преобразований получим

$$-\vartheta_t + (a\vartheta_x)_x f + a\vartheta_x^2 \left(\frac{f}{\zeta}\right)_u' + bg\zeta + ch\zeta = 0.$$
(86)

При $\zeta = 1$ уравнение (86) совпадает с исходным уравнением (85), где $u = \vartheta$. Поэтому на данном этапе никакие решения не теряются.

Введем обозначения:

$$\Phi_{1} = -\vartheta_{t}, \quad \Phi_{2} = (a\vartheta_{x})_{x}, \quad \Phi_{3} = a\vartheta_{x}^{2},$$

$$\Phi_{4} = b, \quad \Phi_{5} = c;$$

$$\Psi_{1} = 1, \quad \Psi_{2} = f, \quad \Psi_{3} = (f/\zeta)'_{u},$$

$$\Psi_{4} = g\zeta, \quad \Psi_{5} = h\zeta.$$
(87)

В результате уравнение (86) можно представить в билинейном виде (4) при N = 5:

$$\sum_{n=1}^{5} \Phi_n \Psi_n = 0.$$
 (88)

Пример 10. Уравнению (88) можно тождественно удовлетворить, если использовать линейные соотношения

Подставляя (87) в (89), приходим к уравнениям

$$\vartheta_t = b, \quad (a\vartheta_x)_x = 0, \quad a\vartheta_x^2 = -c;$$

 $g\zeta = 1, \quad (f/\zeta)'_u = h\zeta.$
(90)

Общее решение переопределенной системы, состоящей из первых трех уравнений (90), имеет вид

$$b(x) = \beta, \quad c(x) = -\frac{\lambda^2}{a(x)},$$

$$\vartheta(x,t) = \beta t + \lambda \int \frac{dx}{a(x)} + C_1,$$
(91)

где a(x) — произвольная функция, C_1 , β , λ — произвольные постоянные. Общее решение системы, состоящей из двух последних уравнений (90), записывается так (берутся одновременно либо верхние, либо нижние знаки):

$$g = \pm \frac{\sqrt{2E(u) + C_2}}{f}, \quad h = \pm \frac{f}{\sqrt{2E(u) + C_2}}, \quad (92)$$
$$E(u) = \int f(u)h(u)du,$$

где f(u) и g(u) — произвольные функции. Из формул (91) и (92) получим два уравнения

$$u_{t} = [a(x)f(u)u_{x}]_{x} \pm \beta \frac{\sqrt{2E(u) + C_{2}}}{f(u)} - \frac{\lambda^{2}}{a(x)}h(u), \quad (93)$$

которые допускают точные решения типа обобщенной бегущей волны в неявной форме

$$\pm \int \frac{f(u)du}{\sqrt{2E(u)+C_2}} = \beta t + \lambda \int \frac{dx}{a(x)} + C_1.$$
(94)

Сделав переобозначения $\beta \Rightarrow \pm \beta$, $C_1 \Rightarrow \pm C_1$, $h(u) \Rightarrow h(u)/2$ в (93) и (94), приходим к одному уравнению

$$u_{t} = [a(x)f(u)u_{x}]_{x} + \frac{\beta}{f(u)}\sqrt{E(u) + C_{2}} - \frac{\lambda^{2}}{2a(x)}h(u),$$

(95)
$$E(u) = \int f(u)h(u)du,$$

которое допускает два точных решения

$$\int \frac{f(u)du}{\sqrt{E(u) + C_2}} = \beta t \pm \lambda \int \frac{dx}{a(x)} + C_1.$$
(96)

Отметим, что уравнение (95) содержит три произвольные функции a(x), f(u), h(u) и три произвольные постоянные C_2 , β , λ .

В частном случае h(u) = 1 уравнение (95) и его точные решения (96) были получены в [45].

Замечание 8. Более общее, чем (95), уравнение

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \frac{\beta(t)}{f(u)}\sqrt{E(u) + C_2} - \frac{\lambda^2 h(u)}{2a(x)}$$
$$E(u) = \int f(u)h(u)du,$$

зависящее от четырех произвольных функций $a(x), f(u), h(u), \beta(t),$ допускает два точных решения

$$\int \frac{f(u)du}{\sqrt{E(u)+C_2}} = \int \beta(t)dt \pm \lambda \int \frac{dx}{a(x)} + C_1.$$

Опуская промежуточные выкладки, приведем еще два новых точных решения нелинейных уравнений диффузионного типа достаточно общего вида, которые зависят от пяти произвольных функций.

Пример 11. Нелинейное уравнение параболического типа

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u)u_x + b'_x(x)G(u) + \frac{\lambda(t)G(u)}{f(u)}, \quad G(u) = \int g(u)du$$

допускает точное решение с функциональным разделением переменных в неявной форме

$$\int \lambda(t)dt - \int \frac{b(x)}{a(x)}dx + C = \int \frac{f(u)}{G(u)}du$$

где a(x), b(x), $\lambda(t)$, f(u), g(u) – произвольные функции, C – произвольная постоянная.

Пример 12. Уравнение

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)f(u)u_x + c(x)F(u) + \frac{\lambda(t)F(u)}{f(u)}, \quad F(u) = \int f(u)du$$

имеет точное решение с функциональным разделением переменных в неявном виде

$$\exp\left(\int \lambda(t)dt\right)\varphi(x) = \int f(u)du,$$

где a(x), b(x), c(x), f(u), $\lambda(t)$ — произвольные функции, а функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет линейному ОДУ второго порядка

$$[a(x)\varphi'_x]'_x + b(x)\varphi'_x + c(x)\varphi = 0.$$

8. КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Описаны различные классы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которые допускают построение точных решений методом расщепления. Решения ищутся в виде неявной зависимости, которая содержит несколько свободных функций (эти функции определяются в ходе дальнейшего анализа). Особое внимание уделено нелинейным уравнениям общего вида, которые зависят от одной или нескольких произвольных функций. Получен ряд новых точных решений нелинейных ОДУ. Показано, что используемый подход допускает обобщение на нелинейные уравнения с частными производными. Построены новые точные решения с функциональным разделением переменных для уравнений реакционно-диффузионного типа.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-АА20-120011690135-5) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10025).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений, 8-е изд. М.: Физматлит, 1959.
- 2. *Murphy G.M.* Ordinary Differential Equations and Their Solutions. New York: D. Van Nostrand, 1960.
- Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, 2-е изд. М.: Высшая школа, 1963.
- Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, 5-е изд. М.: Наука, 1976.
- 5. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.
- 6. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. Boca Raton: CRC Press, 2018.
- 7. *Polyanin A.D., Manzhirov A.V.* Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.
- 8. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966.
- 9. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. М.: Физматлит, 2003.
- 10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
- Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г. и др. Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 1964.
- 12. Корн Г.А., Корн Т.М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968.
- 13. *Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd ed. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2016.
- 14. Galaktionov V.A., Posashkov S.A., Svirshchevskii S.R. Generalized separation of variables for differential

equations with polynomial nonlinearities // Differential Equations. 1995. V. 31. № 2. P. 233–240.

- Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
- 16. *Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R.* Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.
- 17. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.
- Polyanin A.D. Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients // Int. J. Non-Linear Mech. 2019. V. 111. P. 95–105.
- Polyanin A.D. Construction of functional separable solutions in implicit form for non-linear Klein–Gordon type equations with variable coefficients // Int. J. Non-Linear Mech. 2019. V. 114. P. 29–40.
- Polyanin A.D., Zhurov A.I. Separation of variables in PDEs using nonlinear transformations: Applications to reaction-diffusion type equations // Applied Math. Letters. 2020. V. 100. 106055.
- 21. Полянин А.Д. Методы функционального разделения переменных и их применение в математической физике // Мат. моделирование и числ. методы. 2019. № 1. С. 65–97.
- Polyanin A.D. Functional separation of variables in nonlinear PDEs: General approach, new solutions of diffusion-type equations // Mathematics. 2020. V. 8. № 1.90.
- 23. *Malfliet W., Hereman W.* The tanh method: exact solutions of nonlinear evolution and wave equations // Phys Scripta. 1996. V. 54. P. 563–568.
- Parkes E.J., Duffy B.R. An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations // Computer Physics Communications. 1996. V. 98. P. 288–300.
- Fan E. Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations // Phys. Letters A. 2000. V. 277. № 4–5. P. 212–218.
- Elwakila S.A., El-Labany S.K., Zahran M.A., Sabry R. Modified extended tanh-function method for solving nonlinear partial differential equations // Phys. Letters A. 2002. V. 299. № 2–3. P. 179–188.
- 27. *Yan Z.* The extended Jacobian elliptic function expansion method and its application in the generalized Hirota–Satsuma coupled KdV system // Chaos, Solitons & Fractals. 2003. V. 15. № 3. P. 575–583.
- 28. *Wazwaz A.-M.* The sine-cosine method for obtaining solutions with compact and noncompact structures // Appl. Math. & Comput. 2004. V. 159. № 2. P. 559–576.
- 29. *Kudryashov N.A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // Chaos, Solitons & Fractals, 2005. V. 24. № 5. P. 1217–1231.
- 30. *Wazwaz A.-M.* The tanh method and the sine-cosine method for solving the KP-MEW equation // Int. J. Computer Math. 2005. V. 82. № 2. P. 235–246.

- 31. He J.H., Wu X.H. Exp-function method for nonlinear wave equations // Chaos, Solitons & Fractals. 2006. V. 30. № 3. P. 700–708.
- 32. He J.H., Abdou M.A. New periodic solutions for nonlinear evolution equation using Exp-method // Chaos Solitons & Fractals. 2007. V. 34. P. 1421–1429.
- 33. Bekir A., Boz A. Exact solutions for nonlinear evolution equations using Exp-function method // Phys. Letters A. 2008. V. 372. № 10. P. 1619–1625.
- 34. Chun C. Soliton and periodic solutions for the fifth-order KdV equation with the Exp-function method // Phys. Letters A. 2008. V. 372. № 16. P. 2760-2766.
- 35. Kudryashov N.A., Loguinova N.B. Extended simplest equation method for nonlinear differential equations // Appl. Math. & Comput. 2008. V. 205. № 1. P. 396- $40\bar{2}.$
- 36. Salas A.H. Exact solutions for the general fifth KdV equation by the exp function method // Appl. Math. & Comput. 2008. V. 205. № 1. P. 291–297.
- 37. Erbas B., Yusufoglu E. Exp-function method for constructing exact solutions of Sharma-Tasso-Olver equation // Chaos, Solitons & Fractals. 2009. V. 41. № 5. P. 2326-2330.
- 38. Kudryashov N.A., Loguinova N.B. Be careful with the Exp-function method // Commun. Nonlinear Science & Numer. Simulation. 2009. V. 14. № 5. P. 1881–189.

- 39. Zhang S., Tonga J.L., Wanga W. Exp-function method for a nonlinear ordinary differential equation and new exact solutions of the dispersive long wave equations // Comp. Math. Appl. 2009. V. 58. № 11-12. P. 2294-2299.
- 40. Parkes E.J. Observations on the tanh-coth expansion method for finding solutions to nonlinear evolution equations // Appl. Math. Comp. 2010. V. 217. № 4. P. 1749-1754.
- 41. Zhang L. The extended tanh method and the exp-function method to solve a kind of nonlinear heat equation // Math. Prob. Engng. 2010. V. 2010. 935873.
- 42. Полянин А.Л. Переопределенные системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами и их приложения // Вестник НИЯУ "МИФИ". 2016. Т. 5. № 2. С. 122–136.
- 43. Polvanin A.D., Shingareva I.K. Overdetermined systems of ODEs with parameters and their applications: The method of differential constraints and the generalized separation of variables in PDEs // Math. Advances in Pure & Appl. Sciences. 2018. V. 1. № 1. P. 1–22.
- 44. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, 2nd Edition. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2003.
- 45. Полянин А.Д., Журов А.И. Об одном методе построения точных решений нелинейных уравнений математической физики // Доклады Академии наук. 2019. T. 489. № 3. C. 235–239.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 1, pp. 32-44

Construction of Exact Solutions of Nonlinear Differential Equations by the Splitting Method

A. D. Polyanin^{*a*,#} and L.V. Linchuk^{*b*,*c*,##}

^a Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia ^b Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, 195251 Russia ^c Herzen State Pedagogical University of Russia, St. Petersburg, 191186 Russia *[#]e-mail: polyanin@ipmnet.ru*, ##e-mail: lidiya_linchuk@mail.ru

Received January 16, 2020; revised January 16, 2020; accepted January 21, 2020

Abstract-Various classes of nonlinear ordinary differential equations are considered. To construct exact solutions in an implicit form, the splitting method based on the generalized separation of variables is used. The main attention is paid to nonlinear equations of a sufficiently general form that contain one or more arbitrary functions. It is important to note that the exact solutions of nonlinear differential equations that depend on arbitrary functions and, therefore, are sufficiently general are of the greatest practical interest for testing numerical and approximate methods for solving various problems. Examples of particular nonlinear equations and their exact solutions are given. In some cases, it is possible to find general solutions of the equations or lower their order. The approach used can be generalized to nonlinear partial differential equations. New exact solutions with functional separation of variables are obtained for reaction-diffusion type equations.

Keywords: nonlinear ordinary differential equations, reaction-diffusion equations, exact solutions in an implicit form, generalized separation of variables, functional separation of variables, splitting method

DOI: 10.1134/S2304487X20010071

REFERENCES

- 1. Stepanov V.V., *Kurs differentsial'nykh uravneniy* [Course of Differential Equations], 8th ed., Fizmatlit, Moscow, 1959 (in Russian).
- 2. Murphy G.M., Ordinary Differential Equations and Their Solutions, D. Van Nostrand, New York, 1960.
- 3. Matveev N.M., *Metody integrirovaniya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Integration Methods of Ordinary Differential Equations], 2nd ed., Vysshaya shkola, Moscow, 1963 (in Russian).
- 4. Kamke E., *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* [Handbook of Ordinary Differential Equations], 5th ed., Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
- 5. Elsgolts L.E., *Differentsial'nyye uravneniya i variatsionnoye ischisleniye* [Differential Equations and Calculus of Variations], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
- 6. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems, CRC Press, Boca Raton, 2018.
- 7. Polyanin A.D., Manzhirov A.V., *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2007.
- 8. Kamke E., *Spravochnik po differentsial'nym uravneniyam v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka* [Handbook of First-Order Partial Differential Equations], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
- 9. Zaitsev V.F., Polyanin A.D., *Spravochnik po differentsial'nym uravneniyam s chastnymi proizvodnymi pervogo poryadka* [Handbook of First-Order Partial Differential Equations] Fizmatlit, Moscow, 2003 (in Russian).
- Tikhonov A.N., Samarsky A.A., Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1972 (in Russian).
- 11. Babich V.M., Kapilevich M.B., Mikhlin S.G. et al., *Lineynyye uravneniya matematicheskoy fiziki* [Linear Equations of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1964 (in Russian).
- 12. Korn G.A., Korn T.M., *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Handbook of Mathematics for Scientists and Engineers], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
- Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E., Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd ed., Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2016.
- Galaktionov V.A., Posashkov S.A., Svirshchevskii S.R., Generalized separation of variables for differential equations with polynomial nonlinearities, *Differential Equations*, 1995, vol. 31, no. 2, pp. 233–240.
- Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I., Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki [Solution methods for nonlinear equations of mathematical physics and mechanics], Fizmatlit, Moscow, 2005 (in Russian).
- Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R., Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2007.

- 17. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed.*, CRC Press, Boca Raton, 2012.
- Polyanin A.D., Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2019, vol. 111, pp. 95–105.
- Polyanin A.D., Construction of functional separable solutions in implicit form for non-linear Klein–Gordon type equations with variable coefficients, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2019, vol. 114, pp. 29–40.
- 20. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Separation of variables in PDEs using nonlinear transformations: Applications to reaction-diffusion type equations, *Applied Math. Letters*, 2020, vol. 100, 106055.
- 21. Polyanin A.D., Metody funktsional'nogo razdeleniya peremennykh i ikh primeneniye v matematicheskoy fizike [Methods of functional separation of variables and their application in mathematical physics], *Math. Modeling and Comput. Methods*, 2019, no. 1, pp. 65–97.
- 22. Polyanin A.D., Functional separation of variables in nonlinear PDEs: General approach, new solutions of diffusion-type equations, *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 1. 90.
- 23. Malfliet W., Hereman W., The tanh method: exact solutions of nonlinear evolution and wave equations, *Phys Scripta*, 1996, vol. 54, pp. 563–568.
- 24. Parkes E.J., Duffy B.R. An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations, *Computer Physics Communications*, 1996, V. 98, pp. 288–300.
- 25. Fan E., Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations, *Phys. Letters A*, 2000, V. 277, no. 4–5, pp. 212–218.
- Elwakila S.A., El-Labany S.K., Zahran M.A., Sabry R., Modified extended tanh-function method for solving nonlinear partial differential equations, *Phys. Letters A*, 2002, V. 299, no. 2–3, pp. 179–188.
- 27. Yan Z., The extended Jacobian elliptic function expansion method and its application in the generalized Hirota–Satsuma coupled KdV system, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2003, vol. 15, no. 3, pp. 575–583.
- 28. Wazwaz A.-M., The sine-cosine method for obtaining solutions with compact and noncompact structures, *Appl. Math. & Comput.*, 2004, vol. 159, no. 2, pp. 559–576.
- Kudryashov N.A., Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, vol. 24, no. 5, pp. 1217–1231.
- Wazwaz A.-M., The tanh method and the sine-cosine method for solving the KP-MEW equation, *Int. J. Computer Math.*, 2005, vol. 82, no. 2, pp. 235–246.
- He J.H., Wu X.H., Exp-function method for nonlinear wave equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2006, vol. 30, no. 3, pp. 700–708.
- 32. He J.H., Abdou M.A., New periodic solutions for nonlinear evolution equation using Exp-method, *Chaos Solitons & Fractals*, 2007, vol. 34, pp. 1421–1429.

- 33. Bekir A., Boz A., Exact solutions for nonlinear evolution equations using Exp-function method, *Phys. Letters A*, 2008, vol. 372, no. 10, pp. 1619–1625.
- 34. Chun C., Soliton and periodic solutions for the fifthorder KdV equation with the Exp-function method, *Phys. Letters A*, 2008, vol. 372, no. 16, pp. 2760–2766.
- Kudryashov N.A., Loguinova N.B., Extended simplest equation method for nonlinear differential equations, *Appl. Math. & Comput.*, 2008, vol. 205, no. 1, pp. 396– 402.
- Salas A.H., Exact solutions for the general fifth KdV equation by the exp function method, *Appl. Math. & Comput.*, 2008, vol. 205, no. 1, pp. 291–297.
- Erbas B., Yusufoglu E., Exp-function method for constructing exact solutions of Sharma–Tasso–Olver equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2009, vol. 41, no. 5, pp. 2326–2330.
- Kudryashov N.A., Loguinova N.B., Be careful with the Exp-function method, *Commun. Nonlinear Science & Numer. Simulation*, 2009, vol. 14, no. 5, pp. 1881–189.
- Zhang S., Tonga J. L., Wanga W., Exp-function method for a nonlinear ordinary differential equation and new exact solutions of the dispersive long wave equations, *Comp. Math. Appl.*, 2009, vol. 58, no. 11–12, pp. 2294–2299.

- 40. Parkes E.J., Observations on the tanh-coth expansion method for finding solutions to nonlinear evolution equations, *Appl. Math. Comput.*, 2010, vol. 217, no. 4, pp. 1749–1754.
- 41. Zhang L., The extended tanh method and the expfunction method to solve a kind of nonlinear heat equation, *Math. Prob. Eng.*, 2010, vol. 2010, 935873.
- 42. Polyanin A.D., Pereopredelennyye sistemy nelineynykh obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy s parametrami i ikh prilozheniya [Overdetermined systems of nonlinear ordinary differential equations with parameters and their applications], Vestnik NIYaU MIFI, 2016, vol. 5, no. 2, pp. 122–136 (in Russian).
- 43. Polyanin A.D., Shingareva I.K., Overdetermined systems of ODEs with parameters and their applications: The method of differential constraints and the generalized separation of variables in PDEs, *Math. Advances in Pure & Appl. Sciences*, 2018, vol. 1, no. 1, pp. 1–22.
- 44. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, 2nd ed.*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2003.
- 45. Polyanin A.D., Zhurov A.I., On one method for constructing exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics, *Doklady Mathematics*, vol. 100, no. 3, pp. 1–4.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 1, с. 45–49

_ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ _____ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ СИСТЕМОЙ УРАВНЕНИЙ РАДХАКРИШНАНА–КУНДУ–ЛАКСМАНАНА

© 2020 г. С. Ф. Лаврова^{1,*}, Н. А. Кудряшов^{1,**}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия *e-mail: infuriatedot@gmail.com **e-mail: nakudr@gmail.com Поступила в редакцию 17.12.2019 г. После доработки 17.12.2019 г. Принята к публикации 21.01.2020 г.

Для описания распространения уединенных волн в оптических средах в настоящее время используется ряд нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. В данной работе исследуется нелинейная динамика, описываемая уравнением Радхакришнана—Кунду—Лаксманана для нелинейных дисперсионных волн в сохраняющих поляризацию оптических волокнах с нелинейностью Керра. С целью исследования динамических процессов в исходном уравнении использованы безразмерные переменные. Введены переменные бегущей волны, которые позволили записать его в виде системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. Для векторного поля нормального вида этой системы в шестимерном фазовом пространстве рассчитана дивергенция. Установлено, что изучаемая система уравнений не является диссипативной. По алгоритму Беннетина проведен расчет старших ляпуновских показателей исследуемой системы уравнений при различных значениях одного из параметров модели. Установлено, что несмотря на то, что при некоторых значениях параметра в системе присутствует положительный старший ляпуновский показатель, существование аттрактора и хаотического режима динамики не реализуется, поскольку по одной из переменных решение неограниченно убывает, а алгоритм Беннетина требует выбор начальной точки на аттракторе.

Ключевые слова: оптические солитоны, уравнения в частных производных, ляпуновские показатели, хаос

DOI: 10.1134/S2304487X20010058

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование распространения импульсов в оптических средах является важной проблемой и в настоящее время интенсивно изучается [1–5]. Как правило динамика таких процессов описывается с помощью целого ряда нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, таких как нелинейное уравнение Шредингера [6], уравнение Фокаса–Леннелса [7].

Одним из важных факторов, определяющих динамику оптических солитонов, является учет дисперсионных выражений. Они возникают тогда, когда дисперсионный член в оптическом уравнении доминирует, что ведет к существованию уединенных волн солитонного типа. В данной работе рассматривается уравнение Радхакришнана—Кунду—Лаксманана, которое было использовано ранее в ряде работ, в которых были получены его точные решения [8–13].

Уравнение Радхакришнана-Кунду-Лаксманана, описывающее дисперсивные нелинейные волны в сохраняющих поляризацию волокнах с нелинейностью Керра, имеет вид

$$iu_t + au_{xx} + b|u|^2 u = i\alpha(|u|^2 u)_x - i\beta u_{xxx},$$
 (1.1)

где a, b, α, β — параметры уравнения. Здесь u(x,t) — комплекснозначный профиль волны с независимыми переменными x и t, учитывающими пространственную и временную компоненты. Параметр a отвечает за дисперсию групповой скорости, b — коэффициент Керра, параметр α устраняет возможность появления ударных волн, β характеризует дисперсию третьего порядка, приводящую к оптическим импульсам.

Нелинейные динамические процессы, описываемые уравнением (1.1), до настоящего времени практически не изучались. Уравнение (1.1) имеет определенное применение в медицине [14], поэтому интерес представляет изучение его динамики и выявление в нем хаотического поведения, так как на практике его присутствие нежелательно.

2. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ПЕРЕМЕННЫХ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ, ПОЛУЧЕННОЙ ИЗ УРАВНЕНИЯ RKL

Для исследования нелинейной динамики, описываемой уравнением (1.1), удобно ввести безразмерные переменные. Введем переменные

$$u = Au', \quad x = Xx', \quad t = Tt',$$

где A, Xи T – постоянные, тогда для удобства сразу пренебрегая штрихами, получим, что уравнение (1.1) примет вид

$$iu_{t} + \frac{aT}{X^{2}}u_{xx} + b|A|^{2}T|u|^{2}u =$$

$$= \frac{i\alpha|A|^{2}T}{X}(|u|^{2}u)_{x} - \frac{i\beta T}{X^{3}}u_{xxx}.$$
(2.1)

В (2.1) приравняем к единице коэффициенты при третьем члене левой части и членах правой части. В результате имеем

$$|A|^2 = \frac{b^2\beta}{\alpha^3}, \quad T = \frac{\alpha^3}{b^3\beta}, \quad X = \frac{\alpha}{b}.$$
 (2.2)

Пусть $\frac{a\alpha}{b\beta}$ = к. С учетом (2.2) уравнение (2.1) имеет вил

$$iu_t + \kappa u_{xx} + |u|^2 u = i(|u|^2 u)_x - u_{xxx}.$$
 (2.3)

Будем искать решение уравнения (2.3) в виде

$$u(x,t) = y(z)e^{i\psi(z)-\omega t}, \quad z = x - C_0 t, \quad (2.4)$$

подставляя (2.4) в (2.3), получаем следующее уравнение

$$i(-C_{0}y_{z} + 2\kappa y_{z}\psi_{z} + \kappa y\psi_{zz} - 3y^{2}y_{z} + y_{zzz} - - 3y_{z}\psi_{z}^{2} - 3y\psi_{z}\psi_{zz}) + C_{0}y\psi_{z} + \omega y + + \kappa y_{zz} - \kappa y\psi_{z}^{2} + y^{3} + y^{3}\psi_{z} - 3y_{zz}\psi_{z} - - y\psi_{zzz} - 3y_{z}\psi_{zz} + y\psi_{z}^{3} = 0.$$
(2.5)

Приравнивая к нулю действительную и комплексную части уравнения (2.5), получим следующую систему уравнений

$$-C_{0}y_{z} + 2\kappa y_{z}\psi_{z} + \kappa y\psi_{zz} - 3y^{2}y_{z} + y_{zzz} - - 3y_{z}\psi_{z}^{2} - 3y\psi_{z}\psi_{zz} = 0,$$

$$\omega y + C_{0}y\psi_{z} + \kappa y_{zz} - \kappa y\psi_{z}^{2} + y^{3} + y^{3}\psi_{z} - - 3y_{zz}\psi_{z} - y\psi_{zzz} - 3y_{z}\psi_{zz} + y\psi_{z}^{3} = 0.$$
(2.6)

В нормальной форме она выглядит следующим образом

$$v_{z} = C_{0}u - 2\kappa u\phi - \kappa y\mu + 3y^{2}u + 3u\phi^{2} + 3y\phi\mu,$$

$$\mu_{z} = \omega + C_{0}\phi + \kappa \frac{v}{y} - \kappa\phi^{2} + y^{2} +$$

$$+ y^{2}\phi - \frac{3v\phi}{y} - \frac{3u\mu}{y} + \phi^{3},$$

$$y_{z} = u, \quad u_{z} = v, \quad \psi_{z} = \phi, \quad \phi_{z} = \mu.$$
(2.7)

Векторное поле системы (2.7) в шестимерном фазовом пространстве имеет вид

$$\mathbf{L}(v,\mu, y, u, \psi, \phi) = \left\{ C_0 u - 2ku\phi - ky\mu + 3y^2 u + 3u\phi^2 + 3y\phi\mu, \omega + C_0\phi + k\frac{v}{y} - k\phi^2 + (2.8) + y^2 + y^2\phi - \frac{3v\phi}{y} - \frac{3u\mu}{y} + \phi^3, u, v, \phi, \mu \right\}.$$

Дивергенция этого поля

$$\operatorname{div}(\mathbf{L}) = \frac{\partial L_{v}}{\partial v} + \frac{\partial L_{\mu}}{\partial \mu} + \frac{\partial L_{y}}{\partial y} + \frac{\partial L_{u}}{\partial u} + \frac{\partial L_{\psi}}{\partial \psi} + \frac{\partial L_{\phi}}{\partial \phi} = -\frac{3u}{y}.$$
(2.9)

На рис. 1 приведены зависимости переменных *у* и *и* от *z*. Из них видно, что ансамбль начальных условий, занимающий объем ΔV_0 , не концентрируется на аттракторе, так как объем изменяется по закону $\Delta V = \Delta V_0 \exp\left(\frac{3uz}{v}\right)$, а знак вы-

ражения под экспонентой не является постоянно отрицательным.

Динамику уравнений (2.7) исследуем при помощи вычисления старшего ляпуновского показателя при варьировании параметра к. Старший ляпуновский показатель вычислялся по алгоритму Беннетина [15].

Ляпуновские показатели качественно описывают степень расхождения близких траекторий системы. Для обнаружения хаотического поведения достаточно рассчитать старший ляпуновский показатель.

Алгоритм его вычисления следующий. После достаточного времени для выхода системы на аттрактор выбирается начальная точка фазового пространства \mathbf{v}_0 . Затем рассматриваются выходящая из точки \mathbf{v}_0 невозмущенная траектория и выходящая из точки $\mathbf{v}_0 + \delta \mathbf{v}_0$ возмущенная траектория. При расчетах использован вектор начального возмущения с единичной нормой $\delta \mathbf{v}_0 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$. Выбирая интервал времени T = 1 и одновременно решая численно систему уравнений (2.7) и систему уравнений, описывающую эволюцию малого возмущения $\delta \mathbf{v} = (\delta v, \delta \mu, \delta y, \delta u, \delta \psi, \delta \phi)$

$$\delta v_z = C_0 \delta u - 2\kappa \delta u \phi - 2\kappa u \delta \phi - \kappa \delta y \mu -$$

- κy δμ + 6y δy u + 3y²δu + 3u φ² + 6u φ δφ +
+ 3δy φμ + 3y δφμ + 3y φ δμ,

$$\delta\mu_{z} = C_{0}\delta\phi + \kappa\frac{\delta v}{y} - \kappa\frac{v\delta y}{y^{2}} - 2\phi\delta\phi + 2y\delta y + + 2y\delta y\phi + y^{2}\delta\phi - \frac{3\delta v\phi}{y} + \frac{6v\delta y\phi}{y^{2}} - \frac{3v\delta\phi}{y} -$$
(2.10)



Рис. 1. Зависимость переменных *у* и *и* от *z* при $C_0 = 1$, $\omega = 1$, $\kappa = -79.5$.

$$-\frac{3\delta u\mu}{y} - \frac{3u\delta \mu}{y} + \frac{3u\mu\delta y}{y^2} + 3\phi^2\delta\phi,$$

$$\delta y_z = \delta u, \quad \delta u_z = \delta v, \quad \delta \psi_z = \delta\phi, \quad \delta \phi_z = \delta\mu.$$

получаем вектор состояния и его возмущение в момент *T*: $\mathbf{v}(T) = \mathbf{v}_1$, $\delta \mathbf{v}(T) = \delta \tilde{\mathbf{v}}_1$. Величина $\|\delta \tilde{\mathbf{v}}_1\|$ описывает изменение нормы вектора возмущения за время Т. Переопределив вектор возмущения так, чтобы у него была единичная норма: $\delta \mathbf{v}_1 = \delta \tilde{\mathbf{v}}_1 / \|\delta \tilde{\mathbf{v}}_1\|$, продолжим численно решать системы уравнений (2.7) и (2.10) с начальными условиями \mathbf{v}_1 и $\mathbf{v}_1 + \delta \mathbf{v}_1$. Затем снова переопределим вектор возмущения в момент времени 27 и продолжим решать рассматриваемые системы уравнений с меняющимися на каждом шаге начальными условиями в течение М шагов. Эволюция амплитуды возмущения системы характеризуется старшим ляпуновским показателем, так как начальное условие \mathbf{v}_0 взято на аттракторе, а начальное возмущение траектории выбрано наугад. Фактор изменения амплитуды за *М* шагов определяется в соответствии с нормой

$$P = \frac{1}{M} \prod_{n=1}^{M} \|\delta \tilde{\mathbf{v}}_{1}\|, \qquad (2.11)$$

Старший ляпуновский показатель оценивается по формуле

$$\Lambda = \frac{1}{M} \ln(P) = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{M} \ln(\|\delta \tilde{\mathbf{v}}_1\|).$$
(2.12)

Количество шагов, используемое при проведении рассчетов, M = 10000.

График зависимости старшего ляпуновского показателя от параматра к представлен на рис. 3. Из графика видно, что при некоторых значениях к старший ляпуновский показатель положителен, но информации о хаотическом режиме в системе это не дает, так как в алгоритме Беннетина начальная точка должна выбираться на аттракторе, а аттрактора в системе нет, потому что переменная ψ неограниченно убывает (рис. 2).



Рис. 2. Фазовый портрет при $C_0 = 1$, $\omega = 1$, $\kappa = -79.5$.



Рис. 3. Зависимость ляпуновских показателей от κ при $C_0 = 1$, $\omega = 1$.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена система дифференциальных уравнений в нормальном виде, полученная из уравнения в частных производных Радхакришнана-Кунду-Лаксманана путем перехода к переменным бегущей волны. Показано, что система уравнений не является диссипативной. Описан алгоритм вычисления старшего ляпуновского показателя исследуемой системы и по нему рассчитаны старшие ляпуновские показатели для большого числа различных значений параметра к при фиксированных параметрах бегущей волны ω и C_0 . Несмотря на то, что при некоторых к старший ляпуновский показатель положителен, наличие хаотического поведения в системе не подтверждается, так как решение системы по переменной у неограниченно убывает.

Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00209).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Biswas Anjan. "Optical solitons: Quasi-stationarity versus Lie transform." Optical and Quantum Electronics. 2003. 35.10. P. 979–998.
- 2. *Khalique C.M., Biswas A.* "Optical solitons with parabolic and dual-power law nonlinearity via Lie symmetry analysis." Journal of Electromagnetic Waves and Applications. 2009. 23.7. P. 963–973.
- 3. *Kohl Russell et al.* "Optical soliton perturbation in a non-Kerr law media." Optics & Laser Technology. 2008. 40.4. P. 647–662.
- Topkara Engin et al. "Optical solitons with non-Kerr law nonlinearity and inter-modal dispersion with timedependent coefficients." Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2010. 15.9. P. 2320–2330.
- 5. Konar S., Mishra M., Soumendu Jana. "Nonlinear evolution of cosh-Gaussian laser beams and generation of

flat top spatial solitons in cubic quintic nonlinear media." Physics Letters A. 2007. 362.5-6. P. 505–510.

- 6. *Yan Zhenya*. "Generalized method and its application in the higher-order nonlinear Schrodinger equation in nonlinear optical fibres." Chaos, Solitons & Fractals. 2003. 16.5. P. 759–766.
- Triki Houria, and Abdul-Majid Wazwaz. "Combined optical solitary waves of the FokasвЪ"Lenells equation." Waves in Random and Complex Media. 2017. 27.4. P. 587–593.
- Biswas A. "1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan, Kundu, Lakshmanan equation." Physics Letters A. 2009. 373.30. P. 2546–2548.
- Zhang Jianming, Shuming Li, and Hongpeng Geng. "Bifurcations of exact travelling wave solutions for the generalized RKL equation." J. Appl. Anal. Comput. 2016. 6.4. P. 1205–1210.
- 10. *Biswas A*. Optical soliton perturbation with Radhakrishnan–Kundu–Laksmanan equation by traveling wave hypothesis, Optik. 2018. V. 171. P. 217–220.
- Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., Alshomrani A.S., Optical soliton with Radhakrishnan–Kundu–Laksmanan by extended trial function scheme, Optik. 2018. V. 160. P. 415–427.
- 12. *Gonzalez-Gaxiola O.*, Anjan Biswas, Optical solitons with Radhakrishnan–Kundu–Laksmanan equation by Laplace–Adomian decomposition method, Optik. 2019. V. 179. 434–442.
- 13. *Kydryashov N.A., Safonova D.V., A. Biswas*, Painleve analysis and solution to travelling wave reduction of Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation, Regular and Chaotic Dynamics. 2019. 24.6. P. 607–614
- Lu Dianchen, Aly R. Seadawy, and Mostafa M.A. Khater. "Dispersive optical soliton solutions of the generalized Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan dynamical equation with power law nonlinearity and its applications." Optik. 2018. 164. P. 54–64.
- 15. *Benettin Giancarlo et al.* "Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory." Meccanica. 1980. 15.1. P. 9–20.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo vadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 1, pp. 45–49

Nonlinear Dynamic Processes Described by the Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan **Equations**

S. F. Lavrova^{*a*,##} and N. A. Kudryashov^{*a*,#}

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia *[#]e-mail: infuriatedot@gmail.com.* ##e-mail: nakudr@gmail.com

Received December 17, 2019; revised December 17, 2019; accepted January 21, 2020

Abstract—The propagation of solitary waves through optical media is described by a variety of nonlinear partial differential equations. In this work, the nonlinear dynamics of dispersive nonlinear waves in polarization-preserving fibers having Kerr nonlinearity has been described by the Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation. Dimensionless variables are used in the initial equation to study of dynamic processes. The introduction of the traveling wave variables reduces the equation to the system of two third order ordinary differential equations. The divergence is calculated for the normal form vector field of this system. It has been found that this system of equations is not dissipative. The largest Lyapunov exponents are computed by the Bennetin algorithm for the different values of one of the model parameters. Despite the presence of a positive largest Lyapunov exponent for some parameter values, there are no attractors or chaotic dynamical regimes in this system, since the solution unboundedly decreases in one variable and the initial point in the algorithm has to be chosen on the attractor.

Keywords: optical solitons, partial differential equations, Lyapunov exponents, chaos

DOI: 10.1134/S2304487X20010058

REFERENCES

- 1. Biswas Anian. "Optical solitons: Ouasi-stationarity versus Lie transform." Optical and Quantum Electronics 35.10. 2003. P. 979-998.
- 2. Khalique C. M., and Biswas A. "Optical solitons with parabolic and dual-power law nonlinearity via Lie symmetry analysis." Journal of Electromagnetic Waves and Applications 23.7. 2009. P. 963–973.
- Kohl Russell et al. "Optical soliton perturbation in a non-Kerr law media." Optics & Laser Technology 40.4. 2008. P. 647-662.
- Topkara Engin et al. "Optical solitons with non-Kerr 4 law nonlinearity and inter-modal dispersion with timedependent coefficients." Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 15.9. 2010. P. 2320-2330.
- 5. Konar S., Mishra M., and Soumendu Jana. "Nonlinear evolution of cosh-Gaussian laser beams and generation of flat top spatial solitons in cubic quintic nonlinear media." Physics Letters A 362.5-6. 2007. P. 505-510.
- 6. Zhenya Yan. "Generalized method and its application in the higher-order nonlinear Schrodinger equation in nonlinear optical fibres." Chaos, Solitons & Fractals 16.5. 2003. P. 759-766.
- 7. Houria Triki, and Wazwaz Abdul-Majid. "Combined optical solitary waves of the Fokasbb"Lenells equation." Waves in Random and Complex Media 27.4. 2017. P. 587-593.
- Biswas A. "1-soliton solution of the generalized Rad-8. hakrishnan, Kundu, Lakshmanan equation." Physics Letters A 373.30. 2009. P. 2546-2548.

- 9. Zhang Jianming, Shuming Li, and Hongpeng Geng. "Bifurcations of exact travelling wave solutions for the generalized RKL equation." J. Appl. Anal. Comput. 6.4. 2016. P. 1205–1210.
- 10. Biswas A. Optical soliton perturbation with Radhakrishnan-Kundu-Laksmanan equation by traveling wave hypothesis, Optik, 171. 2018. P. 217-220.
- 11. Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., Alshomrani A.S. Optical soliton with Radhakrishnan-Kundu-Laksmanan by extended trial function scheme, Optik, 160. 2018. P. 415-427.
- 12. Gonzalez-Gaxiola O., Biswas Anjan. Optical solitons with Radhakrishnan-Kundu-Laksmanan equation by Laplace – Adomian decomposition method, Optik, 179, 2019, P. 434-442.
- 13. Kydryashov N.A., Safonova D.V., A. Biswas, Painleve analysis and solution to travelling wave reduction of Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation, Regular and Chaotic Dynamics, 2019, 24.6. 2019. P. 607-614.
- 14. Lu Dianchen, Aly R. Seadawy, and Mostafa M.A. Khater. "Dispersive optical soliton solutions of the generalized Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan dynamical equation with power law nonlinearity and its applications." Optik 164. 2018. P. 54-64.
- 15. Benettin Giancarlo et al. "Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory." Meccanica 15.1. 1980. P. 9-20.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 1, с. 50–57

> __ ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА ______ И ИНФОРМАТИКА

УДК 004.032.26

ГЕНЕРАТИВНО-ДИСКРИМИНАТИВНАЯ НЕЙРОСЕТЕВАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ЗАДАЧИ АВТОРСКОГО ПРОФИЛИРОВАНИЯ^{1,2}

© 2020 г. А. Г. Сбоев^{1,2,*}, Р. Б. Рыбка¹, А. В. Грязнов¹, И. А. Молошников¹

¹ Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", Москва, 123098, Россия ² Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия

**e-mail: sag111@mail.ru* Поступила в редакцию 07.10.2019 г. После доработки 11.10.2019 г. Принята к публикации 15.10.2019 г.

В работе рассматривается генеративно-дискриминативная модель (GAN) применительно к задаче анализа текстовых данных, в частности определения пола автора русскоязычного текста. Разработанный подход относится к классу алгоритмов обучения с частичным привлечением учителя, когда в процессе настройки модели задействуются множества размеченных и неразмеченных примеров. GAN модель реализована в виде глубокой нейронной сети, состоящей из полносвязных, рекуррентных и сверточных слоев. Основу генеративной части GAN модели составляет вариационный автоенкодер, который кодирует входной пример в пространство скрытых переменных и декодирует из них в исходное представление. При декодировании используется метка класса входного примера: известная в случае размеченного множества или определенная классификатором в случае неразмеченного. Входными данными для модели являются последовательности векторов главных компонент для морфологических признаков слов. Для обеспечения функции восстановления текстов, имеющих более 50 слов, используются принципы работы языковых моделей. Дискриминативная часть настраивается определять, был ли поданный пример сгенерирован автоэнкодером или был взят из исходного множества. Оценка качества GAN модели производилась на множестве примеров корпуса текстов блогов LiveJournal. Показано, что применение генеративно-дискриминативной модели позволяет улучшить качество классификации на 2% в F1 метрике, одновременно снижая в 2-3 раза погрешность при обучении на малом количестве размеченных примеров. Исследованы различные режимы обучения и вариации топологии GAN модели. Продемонстрированы наиболее эффективные режимы работы моделей данного типа для задачи классификации текстов.

Ключевые слова: машинное обучение, искусственные нейронные сети, обработка естественного языка, автоматизированный анализ текстов, генеративно-дискриминативные нейронные сети, авторское профилирование, определение пола автора текста

DOI: 10.1134/S2304487X19060129

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из развивающихся направлений в создании классификационных моделей, основанных на глубоких нейронных сетях, являются методы обучения с частичным привлечением учителя (в лит. Semi-supervised). Это обуславливается наличием и постоянным ростом в современных условиях неразмеченных и неструктурированных данных. В то время как развитие успешных топологий глубоких сетей требует наличия большого числа размеченных примеров, получение которых порой затруднительно и связано с дорогостоящим процессом их разметки. Примером класса подобных задач, где это необходимо, является область авторского профилирования, когда требуется автоматическими средствами определить такие признаки автора как пол, возраст и разные психологические особенности. Процесс разметки при этом состоит в сборе набора текстовых данных респондентов в условиях, когда можно точно проверить искомые признаки, что является трудоемкой задачей. Методы semi-supervised обучения достаточно разнообразны, но идейно сводятся к формированию дополнительного набора примеров, позволяющего улучшить эффективность существующей классификационной модели. Можно выделить 2 основных подхода создания такого множества: 1) генерация новых при-

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-10084 "мк".

² Работа была выполнена с использованием оборудования центра коллективного пользования "Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мегакласса" НИЦ "Курчатовский институт", http://ckp.nrcki.ru/.



Рис. 1. Схема генеративно-дискриминативной модели GAN на основе условного вариационного автоэнкодера (CVAE) для классификации текста. Vectoriser – векторизатор для кодирования текстовых признаков, Е кодировщик, D декодировщик, Cls классификатор, Disc дискриминатор.

меров, 2) использование примеров из числа неразмеченных. Для первого применяются методы генерации текстов на основе специальных топологий нейронных сетей LeakGAN [1], SeqGAN, RankGAN, RelGAN [2], GPT-2 [3] и других, которые обладают значительной сложностью и содержат более 100 млн настраиваемых параметров. Для их обучения необходимы большие массивы данных, близких по специфике к имеющемуся размеченному множеству. Менее ресурсоемки методы второго типа. К ним относятся методы предварительной автоматической разметки большого массива данных несколькими независимыми слабыми моделями с последующим выбором примеров с согласованной оценкой (triragger и др.), вариационные автоэнкодеры, позволяющие кодировать входные примеры в внутреннее пространство и декодировать из него в исходное представление. Добавление в такую архитектуру классификатора позволяет учитывать вклад от неразмеченных примеров в рамках непрерывного обучения классификационной модели [4] и др. Их недостатком является возможность работы только с небольшими размерами текстов, в среднем около 50 слов [5, 6]. На практике для увеличения размеров анализируемых текстов при использовании условного вариационного автоен-(CVAE) кодера применяются специальные алгоритмы, такие как: последовательное декодирование вектора документа в вектора предложений и далее в вектора отдельных слов [7], или подача информации о входной последовательности, например, предыдущие слова.

В данной работе на примере задачи установления пола автора текста мы исследуем метод, основанный на сочетании нескольких подходов в рамках GAN архитектуры (см. рис. 1).

В качестве генеративной части применяется архитектура CVAE с включением механизмов

обучения языковых моделей. Дискриминативная часть в виде сети на базе GRU (General Recurrent Unit) [8] и полносвязных слоев используется для бинарной классификации истинности входного примера. Такая комбинация методов объединяет оба подхода и дает возможность в рамках единой модели проводить обучение классификатора с использованием размеченной и неразмеченной частей данных. Кроме того, использование модульной структуры позволяет более детально контролировать обучение единой модели, за счет синхронизации настройки ее отдельных компонент.

Далее в разделе 2 изложены основные математические предпосылки для построения генеративной части модели. В разделе 3 описаны используемые конфигурации составных частей в рамках единой модели. В разделе 4 представлены описание данных и экспериментальные результаты.

2. МЕТОДЫ И ПОДХОДЫ (МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ)

2.1. Условный вариационный автоэнкодер

Условный вариационный автоэнкодер (CVAE) объединяет классификатор и вариационный автоенкодер, обучаемые совместно. Вариационный автоэнкодер (VAE) состоит из кодировщика и декодировщика. Первый из них осуществляет процесс отображения входного текста на пространство вещественных векторов, а второй позволяет осуществить генеративный процесс. В общем случае такой процесс описывается как: $P(X) = \int_{Z} P(X|Z) P(Z) dZ$, где X – это набор примеров исходных данных, Z -это скрытые переменные. Скрытые переменные для каждого Х определяются из распределения O(Z|X). Считается, что модель автоэнкодера настроена верно, ес-



 \bigcirc - if "y" for document is known then "y" else "y" (+) - concatenation

Рис. 2. Конфигурация Кодировщика, Декодировщика и Дискриминатора в составе единой GAN модели, блок "+" означает конкатенацию векторов, блок " \rightarrow " – блок возвращает реальный *у*, если он задан (часть размеченных примеров), и предсказанный классификатором *у*' – в случае использования неразмеченных примеров. Ø нулевой вектор, *w*₁ *w*_n, [words] слова документа, входы сети, word 1-word n выход CVAE и вход для Дискриминатора.

ли подобранное распределение Q(Z|X) и реальное распределение P(Z|X) близки. Критерием близости этих распределений является дивергенция Кульбака-Лейблера. Применительно к VAE, задачей кодировщика является представление входного текста в пространстве скрытых переменных *Z*, распределенных по нормальному закону. Таким образом, кодировщик отражает функцию $Q(Z|X, W_Q)$. W_Q – параметры кодировщика.

Задачей декодировщика является восстановление примера из Z обратно в X, т.е. декодировщик выполняет функцию $P(X|Z, W_P)$. W_P – параметры декодировщика.

Основным отличием CVAE от VAE является добавление классификационной модели (классификатора) в состав генератора таким образом, чтобы учесть вклад восстановительной ошибки в процессе обучения классификатора. При этом функция декодировщика изменяется на $P(X|Z, W_P, Y)$, где Y — метка класса текста, которая зависит от входного набора примеров: Y известен в случае размеченного множества, а в случае неразмеченного множества, конфигурация CVAE позволяет использовать для обучения классификатора.

2.2. Генеративно-дискриминативная модель

СVAE в составе генеративно-дискриминативной модели обеспечивает генеративную функцию в составе единой ГАН модели, а задачей дискриминатора является определение того, восстановлен ли входной пример генератором (Fake) или он является реальным текстом из выборки (Real).

Модель классификатора состоит из двух сверточных слоев, обрабатывающих входной текст как последовательность закодированных слов. Каждый состоит из 64 нейронов с функцией активации ReLU: $f(x) = \max(x, 0)$, обрабатывающих входной массив с окном 4. После каждого слоя выполняется операция MaxPooling1D с окном 3. Далее для всего текста формируется один вектор при помощи операции GlobalMaxPooling1D. Полученный вектор обрабатывается последовательно двумя полносвязными слоями. Первый содержит 32 нейрона с сигмоидальной функцией активации: $f(x) = 1/[1 + \exp(-x)]$, а второй – 2 нейрона с функцией активации softmax: $f(x)_i = e^{x_i} / \sum_k e^{x_k}$ (где *i* и *k* – индексы нейронов слоя, а х значение их активации) отвечающих за класс пола автора в решаемой классификационной задаче.

Конфигурация кодировщика, декодировщика и дискриминатора основана на рекуррентных GRU и полносвязных (Dense) слоях (см. рис. 2).

Кодировщик. После обработки входной последовательности GRU слоем кодировщика последнее скрытое состояние подается в качестве входа двум полносвязным слоям для получения векторов средних значений и логарифмов дисперсий $\mu(X)$ и ln($\Sigma(X)$). Далее формируется код документа с использованием функции сэмплирования (sampling): $z = \mu(X) + \sqrt{\Sigma(X)}\varepsilon$, где $\varepsilon \in N(0;1) -$ случайный вектор шума выбранный из нормального распределения.

Полученный код документа *z* конкатенируется с эталонной меткой класса удокумента, если она известна, в противном случае с выходом классификатора *y*".

Декодировщик. На этапе восстановления примера с использованием декодировщика, полученный вектор $\langle z, y \rangle$ копируется N раз, где N – количество слов во входном примере. Вход для декодировщика формируется путем добавления каждой *i*-й паре $\langle z, y \rangle$ кода i - 1 слова входного примера, т.е. X_{i-1} .

Выходом декодировщика, состоящего из слоя GRU, является восстановленный входной пример *X*['].

Дискриминатор. Дискриминатор состоит из последовательности GRU слоев, двух полносвязных слоев по 32 нейрона с функцией активации tanh, и 1 одного полносвязного слоя с одним нейроном и функцией активации sigmoid. По активности нейрона последнего слоя определяется класс входного примера. Входом для дискриминатора является набор примеров, как исходных из размеченного множества, так и восстановленных из неразмеченного множества с использованием генеративной части. Предварительно примеры конкатенируются с метками классов, взятыми либо из тренировочного набора, либо полученными из классификатора. Для реализации и настройки модели используются библиотеки Keras [9] 2.2.4 и Tensorflow [10] 1.12.

2.3. Процесс обучения

Процесс обучения всей модели выполняется по этапам. На первом этапе учится классификатор на доступном размеченном множестве, обучение производится до 1000 эпох с контролем переобучения по валидационному множеству с применением метода раннего останова. При росте ошибки на валидационном множестве в течении 30 эпох производится остановка обучения и загрузка лучших весов.

При обучении классификатора используется функция потерь категориальная кросс-энтропия (categorical crossentropy) [11], и оптимизатор Adam [12] (параметры по умолчанию).

На втором этапе проводится обучение генеративной части: CVAE. В качестве функции потерь используется комбинация из:

1. функции потерь классификатора (cls_loss), рассчитываемой на примерах с известной меткой класса у и предсказанных метках у'. Для расчета используется функция средней квадратичной ошибки (MSE): cls_loss = MSE(y, y');

 дивергенции Кульбака-Лейблера (KL_loss), рассчитываемого на основе близости распределения скрытых переменных, полученных после работы Кодировщика, к нормальному распределению по формуле:

$$KL_loss =$$

= -0.5 $\sum_{k=1}^{256} [1 + \ln(\Sigma(X)_k) - \mu(X)_k^2 - \Sigma(X)_k]$

где k — индекс компоненты вектора Z.

3. функции потерь при декодировании примеров (D_loss), рассчитываемой для всех примеров функцией MSE: потерь восстановления D_loss = MSE(X, X'), где X – набор входных примеров, а X' – набор восстановленных примеров.

Для обучения различных компонент CVAE части используются комбинации описанных выше функций. Веса декодировщика изменяются под действием D_loss, для настройки весов классификатора используется сумма функций потерь 1 для размеченной части данных и 3 для неразмеченной. Для настройки весов кодировщика применяется сумма функций потерь 2 и 3.

При обучении используется контроль переобучения по суммарной функции потерь $CVAE_loss = cls_loss + (KL_loss + D_loss)/2$ на валидационном множестве с ранним остановом, аналогично классификатору. После раннего останова производится дообучение классификатора на размеченном множестве (аналогично этапу 1).

На третьем этапе производится обучение всей модели GAN, которая состоит из генеративной части на основе CVAE и дискриминативной на базе GRU слоев. Задача дискриминатора – отличить восстановленные примеры (метка fake) от оригинальных (метка real) (см. рис. 1). Задача генератора – научиться генерировать примеры так, чтобы дискриминатор ошибался. Обучение GAN длится до 50 эпох, при этом на одно обновление весов при обучении дискриминатора (режим обучения: "пакетный") приходится две итерации обучения генератора. По прошествии 50 эпох классификатор дообучается на размеченном множестве с параметрами обучения с этапа 1.

3. ЭКСПЕРИМЕНТЫ

3.1. Корпус размеченных примеров

Корпус содержит 21194 текстов от 2694 авторов LiveJournal [13]. Блоги отбирались вручную на основе анализа текстов экспертами и указанных данных авторов: пола и имени. Для предобработки текстов, токенизации по словам и отдельным предложениям, а также для морфологического разбора использовалась библиотека UDPipe [14].

Для экспериментов была выбрана часть текстов корпуса длиной менее 250 слов (далее корпус). Выбранный корпус содержит 3967 текстов от 1872 авторов LiveJournal, средняя длина текста: 13 предложений, 214 слов. Соотношение текстов от авторов разного пола: 1429 от женщин и 2538 от мужчин.

3.2. Кодирование текстов

Метка класса текста, т.е. пола автора, представляется в виде унитарного кода [1,0] — женщины, [0, 1] — мужчины. Последовательности слов в текстах кодируется только комбинацией морфологических признаков (тегов) без учета словоформ и лемм для создания контекстно-независимой модели классификатора.

Для корректной работы генеративной части GAN модели необходимо представить вектора признаков слов в непрерывном пространстве. Для этого набор морфологических тэгов кодируется бинарно, размерность вектора равна всем встречающимся значениям морфологических признаков в тренировочном множестве. Если признак присутствует в векторе морфологических признаков, то в позиции, соответствующей этому признаку в векторе, ставится 1, если нет -0. Далее для перехода к непрерывному пространству из бинарного производится преобразование полученных бинарных векторов методом главных компонент [15] до 32 главных компонент. Вектор главных компонент используется в качестве входных данных для GAN модели.

3.3. Разделение корпуса на подмножества

Для экспериментов проводилась балансировка корпуса по классам путем удаления текстов более представительного класса. После балансировки проводилось разбиение на несколько множеств:

• размеченное (тренировочное) — содержит метки пола для документа;

• неразмеченное содержит тексты без указания пола автора;

• валидационное содержит тексты с указанием пола автора и используется для раннего останова;

• тестовое содержит метки пола и используется для оценки точности модели на разных этапах обучения.

Разбиение на размеченное, неразмеченное, валидационное и тестовые множества делалось по текстам без учета идентификатора автора текста. Во всех экспериментах на выбранном корпусе примеров размер валидационного и тестового множеств равен 448 и 544, соответственно. Размеры размеченного множества изменялись в зависимости от эксперимента. Для тренировочного множества использовались 3 набора по 128, 224, 416 текстов.

Неразмеченное множество выбиралось исходя из предположения, что оно должно отражать генеральную совокупность для текущей задачи.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Предварительно был проведен ряд экспериментов для составления неразмеченного множества примеров. Для этого были построены графики зависимости точности классификатора от размера тренировочных данных для двух случаев. На рис. 3 показаны результаты экспериментов при выборе примеров для тестировочной, валидационной и тренировочной частей случайно. На экспериментах, результаты которых отражены на рис. 4, наборы данных для тестирования и валидации фиксировались, а к тренировочному множеству постепенно добавлялись новые данные примеры. На каждый размер обучающего набора



Рис. 3. Зависимость точности классификатора от количества размеченных данных при выборе случайных наборов примеров для обучения, валидации и тестирования.



Рис. 4. Зависимость точности классификатора от количества размеченных данных при зафиксированных валидационном и тестировочном множествах и с постепенным увеличением тренировочного набора.

было проведено по 5 запусков для усреднения результатов и оценки отклонения от среднего.

В результате установлено, что точность решения классификационной задачи не увеличивается при использовании набора тренировочных примеров размером более 1000 текстов. Таким образом, подмножество такого объема достаточно для описания задачи и будет использоваться для проведения дальнейших экспериментов в качестве неразмеченного множества.



Рис. 5. Результаты обучения классификатора и дообучения с СVAE и GAN при зафиксированных тестовом, валидационном и неразмеченном наборах.

На рис. 5 показана точность классификатора после различных этапов обучения GAN модели и в зависимости от размера тренировочного множества. При этом состав и размеры валидационного и тестового множеств не изменялись, а состав тренировочного изменялся от запуска к запуску случайно. Каждый эксперимент для заданного размера тренировочного множества запускался 30 раз.

Из графика следует, что обучение классификатора в составе генеративной части на базе CVAE повышает среднюю точность классификатора на 2%. Более значимым является эффект уменьшения разброса в результатах при множественных запусках (кросс валидации). Как следует из рис. 4. стандартное отклонение при маленьких тренировочных выборках высокое и составляет порядка 5-6%. В то время как использование обучения на неразмеченном множестве снижает этот разброс в 2-3 раза и делает его приемлемым. Использование дискриминатора также позволяет улучшить точность классификатора после обучения CVAE при небольшом наборе тренировочных примеров. Это подтверждает рис. 5, где показаны точности настройки сети с усреднением по нескольким запускам обучения на независимых разбиениях по всей совокупности размеченных примеров, а также с фиксированными валидационным и тестировочным множествами.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты проведенных экспериментов показывают, что при небольших размерах размеченных текстовых выборок при наличии достаточной небольшой выборки можно получать, с одной стороны, более точные результаты, а с другой стороны, с меньшей погрешностью. В плане проведения дальнейших работ надо отметить, что требует исследования оптимальность выбора в качестве распределения латентных признаков для текстовых задач нормального распределения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Guo J. et al.* Long text generation via adversarial training with leaked information // Thirty-Second AAAI Conference on Artificial Intelligence. 2018.
- 2. *Nie W., Narodytska N., Patel A.* RelGAN: Relational generative adversarial networks for text generation. 2018.
- 3. *Radford A. et al.* Language models are unsupervised multitask learners // OpenAI Blog. 2019. T. 1. № 8.
- 4. *Bao J. et al.* CVAE-GAN: fine-grained image generation through asymmetric training // Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision. 2017. C. 2745–2754.
- Xu W. et al. Variational autoencoder for semi-supervised text classification // Thirty-First AAAI Conference on Artificial Intelligence. 2017.
- 6. *Semeniuta S., Severyn A., Barth E.* A hybrid convolutional variational autoencoder for text generation // arXiv preprint arXiv:1702.02390. 2017.

- 7. *Shen D. et al.* Hierarchically-Structured Variational Autoencoders for Long Text Generation. 2018.
- 8. *Chung J. et al.* Empirical evaluation of gated recurrent neural networks on sequence modeling // arXiv pre-print arXiv:1412.3555. 2014.
- 9. Chollet F. et al. Keras. 2015.
- Abadi M. et al. Tensorflow: Large-scale machine learning on heterogeneous distributed systems // arXiv preprint arXiv:1603.04467. 2016.
- 11. Arjovsky M., Shah A., Bengio Y. Unitary evolution recurrent neural networks // International Conference on Machine Learning. 2016. C. 1120–1128.
- 12. *Kingma D.P., Ba J.* Adam: A method for stochastic optimization // arXiv preprint arXiv:1412.6980. 2014.
- Litvinova T.A., Sboev A.G., Panicheva P.V. Profiling the Age of Russian Bloggers // Conference on Artificial Intelligence and Natural Language. Springer, Cham, 2018. C. 167–177.
- Straka M., Hajic J., Straková J. UDPipe: trainable pipeline for processing CoNLL-U files performing tokenization, morphological analysis, pos tagging and parsing // Proceedings of the tenth international conference on language resources and evaluation (LREC 2016). 2016. C. 4290–4297.
- 15. *Tipping M.E., Bishop C.M.* Probabilistic principal component analysis // Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology).

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 1, pp. 50-57

Generative-Discriminative Neural Network Model for the Task of Author Profiling^{3,4}

A. G. Sboev^{*a,b,#*}, R. B. Rybka^{*a*}, A. V. Gryaznov^{*a*}, and I. A. Moloshnikov^{*a*}

^a National Research Center "Kurchatov Institute", Moscow, 123098, Russia

^b National Research Nuclear University "MEPhI" (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409, Russia

[#]e-mail: sag111@mail.ru

Received October 7, 2019; revised October 11, 2019; accepted October 15, 2019

Abstract—The paper considers the generative-discriminative model (GAN) as applied to the task of analyzing text data, in particular, determining the gender of the author of a Russian-language text. The approach developed belongs to semi-supervised learning algorithms, when both labeled and unlabeled samples are involved in the model fitting process. The GAN model is implemented as a deep neural network consisting of fully connected, recurrent and convolution layers. The basis of the generative part of the GAN model is a variational auto-encoder, which encodes the input sample into the space of hidden variables and then decodes the latter into the original representation. When decoding, the class label of the input example is used, known in the case of the labeled set or predicted by the classifier for unlabeled samples. The input for the model is a sequence of words, each encoded by a vector of the principal components of its morphological features. To provide the function of recovering texts with more than 50 words, the principles of the work of language models are used. The discriminant part is configured to determine whether a given sample was generated by an auto-encoder or taken from the original set. Quality assessment of the GAN model was carried out on a set of texts from LiveJournal blogs. It is shown that the use of the generative-discriminative model allows to improve the quality of classification by 2% in the F1 metric, while reducing the standard deviation by 2–3 times when learning on a small number of labeled examples. Various modes of training and variations in the topol-

⁴ This work has been carried out using computing resources of the federal collective usage center Complex for Simulation and Data Processing for Mega-science Facilities at NRC "Kurchatov Institute", http://ckp.nrcki.ru/.

³ The reported study was funded by RFBR according to the research project № 18-29-10084 "мк"

ogy of the GAN model are investigated, and the most effective modes of operation of models of this type for the task of classifying texts are demonstrated.

Keywords: machine learning, artificial neural networks, natural language processing, automated text analysis, generative-discriminative neural networks, author profiling, author gender identification

DOI: 10.1134/S2304487X19060129

REFERENCES

- 1. Guo J. et al. Long text generation via adversarial training with leaked information // Thirty-Second AAAI Conference on Artificial Intelligence. 2018.
- Nie W., Narodytska N., Patel A. RelGAN: Relational generative adversarial networks for text generation. 2018.
- 3. Radford A. et al. Language models are unsupervised multitask learners // OpenAI Blog. 2019. V. 1. № 8.
- Bao J. et al. CVAE-GAN: fine-grained image generation through asymmetric training // Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision. 2017. P. 2745–2754.
- Xu W. et al. Variational autoencoder for semi-supervised text classification // Thirty-First AAAI Conference on Artificial Intelligence. 2017.
- Semeniuta S., Severyn A., Barth E. A hybrid convolutional variational autoencoder for text generation // arXiv preprint arXiv:1702.02390. 2017.
- 7. Shen D. et al. Hierarchically-Structured Variational Autoencoders for Long Text Generation. 2018.
- Chung J. et al. Empirical evaluation of gated recurrent neural networks on sequence modeling // arXiv preprint arXiv:1412.3555. 2014.

- 9. Chollet F. et al. Keras. 2015.
- Abadi M. et al. Tensorflow: Large-scale machine learning on heterogeneous distributed systems // arXiv preprint arXiv:1603.04467. 2016.
- 11. Arjovsky M., Shah A., Bengio Y. Unitary evolution recurrent neural networks // International Conference on Machine Learning. 2016. P. 1120–1128.
- 12. Kingma D.P., Ba J. Adam: A method for stochastic optimization // arXiv preprint arXiv:1412.6980. 2014.
- Litvinova T.A., Sboev A.G., Panicheva P.V. Profiling the Age of Russian Bloggers // Conference on Artificial Intelligence and Natural Language. Springer, Cham, 2018. P. 167–177.
- 14. Straka M., Hajic J., Straková J. UDPipe: trainable pipeline for processing CoNLL-U files performing tokenization, morphological analysis, pos tagging and parsing // Proceedings of the tenth international conference on language resources and evaluation (LREC 2016). 2016. P. 4290–4297.
- 15. Tipping M.E., Bishop C.M. Probabilistic principal component analysis // Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology).

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 1, с. 58–65

> __ ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА _____ И ИНФОРМАТИКА

УДК 539.26.01

ПРОВЕРКА АДЕКВАТНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПФ ПО EBSD ИЗМЕРЕНИЯМ, ВЫПОЛНЕННЫМ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

© 2020 г. А. О. Овчинникова^{1,*}, Т. И. Савелова¹

¹ Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия

*e-mail: aoantonova@mail.ru Поступила в редакцию 16.11.2019 г. После доработки 10.12.2019 г. Принята к публикации 18.12.2019 г.

В данной работе выполнена проверка адекватности восстановления полюсных фигур (ПФ) по результатам EBSD (Electron Back Scattering Diffraction) эксперимента с помощью новой методики оценки близости двух ПФ. Данный метод основан на аналоге критерия Колмогорова—Смирнова на сфере S^2 и учитывает вероятностную природу ПФ, а также предлагает количественную меру близости сравниваемых ПФ. В данном исследовании выбранный метод был предложен для количественного сравнения ПФ, вычисленной по результатам EBSD эксперимента, с ПФ исследуемого поликристаллического образца с целью оценки влияния выбранных значений параметров EBSD эксперимента на распределение, порождающее ПФ. Подобное сравнение становится возможным благодаря математическому моделированию поликристаллического образца и EBSD эксперимента по его исследованию. Представлен расчет новой метрики близости ПФ образца и IDФ, полученной в результате модельных EBSD измерений при варьировании параметров эксперимента: шага сканирования и порогового угла разориентации. Для сравнения приведены аналогичные результаты вычисления *RP*-фактора, широко используемого для оценки различий между двумя ПФ. Обе метрики были применены для изучения влияния параметра остроты текстуры образца на результат EBSD эксперимента при различных значениях шага сканирования и порогового угла разориентации.

Ключевые слова: EBSD, шаг сканирования, пороговый угол разориентации, поликристалл, математическое моделирование, полюсные фигуры, *RP*-фактор, критерий Колмогорова—Смирнова, количественный текстурный анализ

DOI: 10.1134/S2304487X2001006X

введение

Параметры эксперимента EBSD (Electron Back Scattering Diffraction), шаг сканирования и пороговый угол разориентации имеют большое значение для получения достоверных результатов EBSD эксперимента [1-4]. Однако экспериментальный характер исследований материалов с помощью EBSD метода не позволяет сравнить результаты эксперимента с оригинальными характеристиками образца для настройки параметров измерений [5, 6]. Подобное исследование становится возможным с помощью математического моделирования образца и EBSD эксперимента. Ранее авторами была предложена модель поверхности поликристаллического образца и эксперимента по измерению ориентаций зерен на данной поверхности методом EBSD [7, 8], которая в последствии была модифицирована за счет усовершенствования модели зеренной структуры [8]. Для оценки адекватности выбора значений параметров EBSD эксперимента сравниваются текстурные и структурные характеристики, вычисленные по результатам модельного эксперимента, с соответствующими характеристиками модельного образца, которые считаются эталонными.

Наиболее полной характеристикой текстуры является функция распределения ориентаций (ФРО) [10]. Традиционно для исследования текстуры экспериментально измеряются лишь интегральные проекции ФРО – полюсные фигуры (ПФ), отвечающие определенному кристаллографическому направлению [11-13]. ПФ является удобной для визуального анализа характеристикой материала (изображается в виде линий уровня полюсной плотности на единичной сфере S^2). Для сравнения двух ПФ в количественном текстурном анализе наиболее часто используется *RP*-фактор, предложенный в работе [14], чтобы характеризовать сходство измеренных и рассчитанных ПФ. Однако, данная метрика для сравнения текстур может применяться только к кон-



Рис. 1. EBSD карта образца стали, на которой зерна аппроксимированы эллипсами.

кретным ПФ и не позволяет сделать какие-либо выводы о порождающих распределениях. В работе [15] предложена мера *KSP* сравнения двух ПФ, основанная на аналоге критерия Колмогорова– Смирнова [16, 17] для сферы S^2 . Данная метрика делает возможным статистически значимое сравнения ПФ для разных образцов.

В данном исследовании было предложено использовать метрику KSP для количественного сравнения ПФ, вычисленной по результатам модельных измерений, с ПФ исследуемого модельного образца с целью оценки влияния выбранных значений параметра EBSD эксперимента на распределение, порождающее ПФ. Для моделирования поверхности образца поликристалла и дальнейшего EBSD эксперимента использована модель, предложенная в работе [9]. С помощью метрики *KSP* оценено влияние остроты текстуры исследуемого образца на восстановление ПФ по набору EBSD измерений при варьировании параметров эксперимента. Результат представлен в виде графика зависимости значения KSP от параметра остроты текстуры. Для сравнения аналогичные вычисления проведены для *RP*-фактора.

МЕТОДЫ

Описание моделей поликристаллического образца и EBSD эксперимента

Модельный поликристалл рассматривается как статистический объект S, состоящий из N зерен:

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{U}_i, i = 1, \dots, N\}, \ \mathbf{U} = [x, c, \omega, g(\mathbf{\varphi}, \mathbf{\theta}, \mathbf{\psi}), \delta].$$
(1)

Так определенный вектор U рассматривается как модель сечения отдельного зерна на поверх-



Рис. 2. Схема модельного образца (а) и модели сечения отдельного зерна в виде эллипса (б).

ности образца. В U плоское сечение зерна определяется как повернутый эллипс по аналогии с реальным экспериментом, проводимым с использованием программного обеспечения НКL CHANNEL 5 (Oxford Instruments, Великобритания) [18] и сканирующего электронного микроскопа EVO 50 XVP SEM (ZEISS, Германия), рис. 1. Размер сечения х рассчитывается также как диаметр круга, равного по площади эллипсу. При этом последующие модельные EBSD измерения выполняются вдоль хорд с эллипсов, аппроксимирующих сечения зерен (рис. 26, 2в). Размеры зерен х моделируются с помощью метода Неймана как случайные величины, подчиняющиеся Г-распределению $\Gamma(2,1)$, средний размер зерна \bar{x} равен 2.0 мкм [7, 8].

Границы зерен δ определены как случайные величины, равномерно распределенные в интервале [0,2 \overline{x} /10), так что общий размер границ составляет 10% от размера всех зерен.

Моделирование ориентаций зерен выполнено с помощью специализированного метода Монте-Карло для ФРО в форме центрального нормального распределения (ЦНР) [19, 20]:

$$f(t)dt = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \exp\{-l(l+1)\varepsilon^2\} \chi_l \frac{1}{\pi} \sin^2 \frac{t}{2} dt , \quad (2)$$

где
$$t \in [-\pi;\pi], \quad \cos\frac{t}{2} = \cos\frac{\phi + \psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}; \quad \chi_l =$$

 $\sin\left(l+\frac{1}{2}\right)t/\sin\frac{t}{2}$ – характеры представлений группы вращений SO(3); $\frac{1}{\pi}\sin^2\frac{t}{2}dt$ – инвариантная мера, ε – параметр остроты текстуры. При $\varepsilon \to 0$ текстура поликристаллического образца стремится к текстуре монокристалла; $\varepsilon = 1$ соответствует равномерному распределению зерен по ориентациям.

В формулах (1) ω обозначают углы разориентаций между двумя соседними зернами [19].

Определим оператор $\Phi(\mathbf{S}, h, \omega_0)$, моделирующий результат EBSD исследования образца \mathbf{S} с параметрами (h, ω_0) , где $h \in (0, H), H > 0$ – шаг сканирования по модельной поверхности образца, $\omega_0 \in \Omega_0 \subseteq (0, \pi)$ – пороговый угол разориентации. Предполагается, что сканирование ориентаций выполняется вдоль хорд эллипсов. Хорда эллипса вычисляется как

$$c = \frac{x}{\sqrt{(\cos \alpha)^2 / k + k(\sin \alpha)^2}},$$
 (3)

где x — это диаметр круга, равный по площади данному эллипсу, α — угол поворота эллипса, k = = a/b (см. рис. 26). Предложенная модель с зернами в форме эллипсов представляется более достоверной, согласно процедуре обработки данных в реальном EBSD эксперименте (рис. 1).

Результаты модельных EBSD измерений образца S могут быть представлены в виде

$$\tilde{\mathbf{S}} = \{ \tilde{\mathbf{U}}_i, i = 1, \dots, \tilde{N} \}, \quad \tilde{\mathbf{U}} = [\tilde{x}, \tilde{\omega}, \tilde{g}(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}, \tilde{\Psi})].$$
(4)

Метрики для количественной оценки близости ПФ образца и EBSD измерений

ПФ называется графическое изображение функции $P_h(\mathbf{y})$, заданной на единичной сфере $\mathbf{y} = \{\eta, \chi\} \in S^2$ [21]. В отличие от ФРО, которая аналитически описывает кристаллографическую текстуру во всем объеме исследуемого образца, ПФ предоставляют информацию о пространственном распределении кристаллографических направлений **h** и являются проекциями ФРО на эти направления.

Для расчета значений П Φ по выборке ориентировок g_i , i = 1, ..., N в данной работе использовалась статистическая оценка П Φ с ядром в виде ЦНР [22]

$$\hat{P}_{\mathbf{h}}(\mathbf{y}) = \sum_{l(2)=0}^{\infty} (2l+1) \exp\{-l(l+1)\alpha^{2}\} \times \\ \times \sum_{i=1}^{N} C_{i} P^{l}(g_{\bar{y}}^{-1}g_{i}^{-1}g_{\bar{h}}(3,3)), \\ \mathbf{y} = \{\eta, \chi\}, \quad -\pi \le \eta \le \pi, \quad 0 \le \chi \le \pi, \\ \mathbf{h} = \{\varphi, \theta\}, \quad -\pi \le \varphi, \psi \le \pi, \quad 0 \le \theta \le \pi,$$
(5)

где α — параметр ядра сглаживания (выступающий параметром регуляризации), P' — полиномы



Рис. 3. Стереографическая проекция точек спирали, n = 600.

Лежандра, $g_{\bar{y}}^{-1}g_{i}^{-1}g_{h}(3,3)$ — элемент с индексом 3 × 3 матрицы вращения $g_{y}^{-1}g_{i}^{-1}g_{h}, g_{y} = \{\mathbf{y}, 0\},$ $g_{h} = \{\mathbf{h}, 0\}, C_{i} = \frac{1}{N} > 0, i = 1, ..., N$ — веса, одинаковые для всех зерен. Суммирование ведется только по четным *l*.

Как видно из выражения (5), ПФ является функцией двух переменных $\{\eta, \chi\}$, описывающих точку на единичной сфере. Между тем, критерий Колмогорова—Смирнова применим для распределений, являющихся функциями одной переменной.

Для представления ПФ в виде функции одного переменного ее значения вычислялись в точках спирали на сфере. При этом точки спирали формировали на поверхности сферы разбиение Вороного, являясь при этом центрами ячеек разбиения. Таким образом, точки спирали делят единичную сферу на равные по площади части (рис. 3). Методика построения спирали описана в [23]. Таким образом, формировалась выборка из значений ПФ в точках спирали: $\{P_h(t_i)\}_{i=1...n}$, где t_i , i = 1, ..., n – точки спирали.

Для сравнения двух ПФ: $\{P_h^1(t_i)\}_{i=1...n}, \{P_h^2(t_i)\}_{i=1...n}$ с точки зрения близости функций распределения, которыми они порождаются, вычислялось значение статистики критерия Колмогорова—Смирнова [24]:

$$D_{obs} = \sup_{t} |F_{1}(t) - F_{2}(t)|,$$

$$F_{k}(t) = \frac{1}{C} \sum_{i=1}^{n} P_{h}^{k}(t_{i} < t), \quad C = \sum_{i=1}^{n} P_{h}^{k}(t_{i}), \quad (6)$$

где $F_1(t)$, $F_2(t)$ – эмпирические функции распределения.



Рис. 4. Зависимость метрик близости ПФ образца и модельных измерений при выбранном наборе параметров EBSD эксперимента: (a) *KSP*, (б) *RP*-фактор, – от параметра остроты текстуры є в исследуемом модельном образце.

Вероятность, что $\{P_h^l(t_i)\}_{i=1...n}, \{P_h^2(t_i)\}_{i=1...n}$ относятся к одному и тому же распределению, вычисляется по формуле

$$KSP = \Phi\left[\left(n^{1/2} + 0.12 + \frac{0.11}{n^{1/2}}\right)D_{\rm obs}\right].$$
 (7)

Для численной реализации вычисления значений *KSP* был использован алгоритм, описанный в [25]. Если значение, полученное по формуле (7), оказывается меньше уровня значимости, то нулевая гипотеза о совпадении $\{P_h^1(t_i)\}_{i=1...n}, \{P_h^2(t_i)\}_{i=1...n}$ отвергается.

В данном исследовании $\{P_h^1(t_i)\}_{i=1...n}$ соответствует ПФ модельного образца, $\{P_h^2(t_i)\}_{i=1...n} - \Pi \Phi$, восстановленная по EBSD измерениям модельного образца. Обозначим их $\{P_h^{\text{spec}}(t_i)\}_{i=1...n}$ и $\{P_h^{\text{meas}}(t_i)\}_{i=1...n}$ соответственно.

Для сравнения также был выполнен расчет *RP*-фактора [14], вычисляемого по формуле:

$$RP(\Delta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n'} \frac{|P_h^{\text{spec}}(t_i) - P_h^{\text{meas}}(t_i)|}{P_h^{\text{spec}}(t_i)} \times 100\%, \qquad (8)$$

где суммирование ведется по всем точкам спирали $\{t_i\}, i = 1, ..., n'$ на сфере S^2 , в которых выполнено условие $P_h^{\text{spec}}(t_i) > \Delta > 0, n'$ – общее количество таких точек. Введение параметра обусловлено обрезанием значений полюсной плотности ниже заданного уровня, так как наибольшие погрешности возникают именно для малых значений полюсной плотности вследствие недостаточной статистики зерен.

РЕЗУЛЬТАТЫ

С помощью метрики *KSP* оценено влияние остроты текстуры исследуемого модельного образца на восстановление $\Pi \Phi\{001\}$ по EBSD измерениям при варьировании параметров эксперимента. Результаты представлены в виде графиков зависимостей значений *KSP* от параметра остроты текстуры ε (рис. 4а). Для сравнения приведена также аналогичная зависимость *RP*-фактора от параметра остроты текстуры образца.

Начнем обсуждение с графика *RP*-фактора, т.к. данная метрика наиболее распространена при сравнении ПФ. Но прежде заметим, что ω_0 особенно значим для сильнотекстурированных образцов, для которых данный параметр следует задавать не более 10° , и чем сильнее текстура, тем меньшее ω_0 следует выбирать [8]. Это обусловлено тем, что чем сильнее текстура, тем меньше углы разориентации между соседними зернами, т.к. зерна имеют преимущественную ориентацию. Следовательно, меньший пороговый угол разориентации позволяет точнее разделять точки сканирования на поверхности образца на зерна и определять границы зерен для построения карты поверхности образца, пример которой представлен на рис. 1. При ослаблении остроты текстуры в образце углы разориентации на границах зерен увеличиваются и становятся различимы в EBSD эксперименте даже с большим значением ω_0 , например 20°. Данные рассуждения согласуются с полученным графиком RP-фактора (рис. 4б): при острых текстурах, $\varepsilon < 2^{-4}$, наиболее низкая погрешность вычисления ПФ по EBSD измерениям получается при $\omega_0 = 5^\circ$. В интервале текстур $2^{-4} \le$ $\leq \epsilon \leq 2^{-1}$ значения $\omega_0 = 5^\circ$, 10° приводят к близким результатам. Это значит, что при $2^{-4} \le \varepsilon$ текстура стала менее острой, и допускает использование в качестве порогового угла разориентации $\omega_0 = 10^\circ$. В интервале текстур $2^{-1} \le \varepsilon$ образец является слабо текстурированным, и использование $\omega_0 = 20^\circ$ становится приемлемо, на что указывают близкие значения *RP*-фактора при все трех рассматриваемых значениях ω_0 .

По графику *RP*-фактора видно, что чем меньше шаг сканирования, тем больше погрешность вычисления ПФ по EBSD измерениям (при подходящем выборе ω_0 , описанном выше). Неустойчивость вычисления ПФ от шага сканирования упоминалась также в работе [8]. Подобное наблюдение, полученное с помощью моделирования EBSD измерений, согласуется с экспериментальными результатами, представленными в работах [25, 26]. В работе [26], чем меньше шаг, тем вероятнее попадание узла сетки сканирования вблизи границы и искажение величины напряжения. В [27] авторы делают вывод, что сравнение результатов рентгеновского и EBSD методов показало, что малый шаг измерения не нужен для получения компонент макротекстуры.

Мера близости ПФ *KSP* дает дополнительную информацию при сравнении ПФ образца и результатов эксперимента. Полученный график *KSP* (рис. 4a) показывает, что вероятность сохранения вида распределения, порождающего ПФ образца, в ходе EBSD измерений снижается, если выбирать большой пороговый угол разориентации $\omega_0 = 20^\circ$. При этом данное наблюдение при всех рассматриваемых значениях шага имеет место при $\varepsilon = 2^{-3}$. Однако в отличие от *RP*-фактора, *KSP* указывает на то, что для образцов очень сильной текстурой $\varepsilon \leq 2^{-4}$, выбор параметров существенно не влияет на вид распределения, т.е. распределение, порождающее ПФ образца, устойчиво к выбору параметров эксперимента при восстановлении ПФ по EBSD измерениям. Кроме этого, для слабых текстур КSP-метрика также предоставляет дополнительную информацию о вычисленной по измерениям ПФ в дополнении в той, что получена с помощью *RP*-фактора. При ослаблении текстуры образца ($2^{-2} < \varepsilon$) на сохранение вида порождающего распределения начинает оказывать шаг сканирования:

– если шаг сканирования равен среднему размеру зерна или половине от него, то независимо от выбора значения порогового угла разориентации вероятность совпадения порождающих распределений ПФ образца и ПФ измерений близка к 100%;

– выбор шага равным h = 0.5 мкм приводит к существенному снижению вероятности того, что ПФ образца и измерений принадлежат одному распределению, т.е. измерения существенно искажают картину текстуры. Самое сильное искажение результатов измерений происходит, если при этом выбрать $\omega_0 = 20^\circ$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено исследование влияния остроты текстуры поликристаллического образца на результат EBSD эксперимента. В качестве результата эксперимента были рассчитаны ПФ{001} с помошью статистической ядерной оценки по набору зерен. Благодаря моделированию исследуемой поверхности поликристаллического образца и дальнейших EBSD измерений ориентаций на данной поверхности, было выполнено сравнение ПФ, вычисленных по результатам модельного эксперимента, проведенного с различными значениями параметров измерений, с истинной ПФ исследуемого образца. В качестве метрик сравнения ПФ были использованы RPфактор и KSP-метрика, как характеристики близости ПФ, дополняющие друг друга.

Было получено, что обе метрики показали преобладающую важность шага сканирования при EBSD исследовании слаботекстурированных образцов, и порогового угла разориентации для образцов сильных текстур. Однако поведение метрик от выбранных параметров носит несколько разный характер. *КSP*-метрика позволила заметить, что независимо от текстуры, если задавать шаг сканирования, не менее половины среднего размера зерна, и пороговый угол разориентации не больше 10°, то это позволяет сохранить вид порождающего ПФ распределения при восстановлении П Φ по EBSD измерениям. *RP*фактор, оценивающий различие двух конкретных $\Pi \Phi$, оказался более чувствителен к выбору параметров эксперимента при различной остроте текстуры образца, особенно к пороговому углу разориентации. Совместное использование обеих метрик предоставляет более полную картину влияния параметров эксперимента на результат восстановления ПФ как с точки зрения точности вычисления ПФ, так и со стороны сохранения вида порождающего распределения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00036.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Wright S.I., Field D.P.* Scalar of Texture Heterogeneity. Materials Science Forum. 2005. V. 495–7. P. 207.
- 2. Wright S.I. A Parametric Study of Electron Backscatter Diffraction based Grain Size Measurements. Practical Metallography, 2010. V. 47. № 1. P. 16.
- Миронов С.Ю., Даниленко В.Н., Мышляев М.М., Корнева А.В. Анализ пространственного распределения ориентировок элементов структуры поликристаллов, получаемого методами просвечивающей

электронной микроскопии и обратно рассеянного пучка электронов в сканирующем электронном микроскопе. ФТТ. 2005. Т. 47. № 7. С. 1217.

- Tonga V, Jianga J., Wilkinsonb A.J., Brittona T.B. The effect of pattern overlap on the accuracy of high resolution electron backscatter diffraction measurements. Ultramicroscopy. 2015. V. 155. P. 62.
- Randle V. Introduction to texture analysis: macrotexture, microtexture and orientation mapping: 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2010. P. 488.
- 6. *Humphreys F.J.* Grain and subgrain characterisation by electron backscatter diffraction, Journal of materials science. 2001. V. 36. P. 3833.
- 7. Антонова А.О., Савелова Т.И. Оценка погрешностей вычисления характеристик текстуры поликристаллов путем изменения параметров измерений методами электронной микроскопии. Журн. вычислит. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 2. С. 322.
- Антонова А.О., Савелова Т.И. Исследование методами электронной микроскопии влияния параметров эксперимента на вычисление полюсных фигур поликристаллических материалов. Кристаллография. 2016. Т. 61. № 3. С. 495.
- 9. Ovchinnikova A.O., Savyolova T.I. A novel approach of the grain structure modelling in the framework of polycrystalline specimen and EBSD experiment simulation. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2019. V. 1205. P. 012043.
- Виелин А.С. Количественная мера текстуры поликристаллического материала. Текстурная функция. ФТТ. 1960. Т. 2. № 10. С. 2463.
- 11. *Bunge H.J.* Experimental Techniques of Texture Analysis. Experimental Techniques of Texture Analysis: ed. by Bunge H.J. DGM Informationsgesellschaft mbH. 1986. P. 1.
- Welch P.I. Neutron Diffraction Texture Analysis. Experimental Techniques of Texture Analysis: ed. by Bunge H.J. DGM Informationsgesellschaft mbH. 1986. P. 183.
- 13. Bunge H.J., Grossterlinden R., Haase A., Ortega R., Szpunar J.A., Van Houtte P. Advanced Experimental Techniques in X-ray Texture Analysis. Materials Science Forum. 1994. V. 157. P. 71.
- 14. Matthies S., Wenk H.-R., Vinel G.W. Some Basic Concepts of Texture Analysis and Comparison of Three

Methods to Calculate Orientation Distributions from Pole Figures. Journal of Applied Crystallography. 1988. V. 21. P. 285.

- 15. *Lychagina T., Nikolayev D.* Quantitative comparison of measured crystallographic texture Journal of Applied Crystallography. 2016. V. 49. P. 1290.
- Kolmogoroff A.N. Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. G. Inst. Ital. Attuari. 1933. V. 4. P. 83.
- 17. *Smirnov N.V.* On the estimation of the discrepancy between empirical curves of distributions for two independent samples. Moscow State Univ. Bull. 1939. V. 2. P. 3.
- 18. HKL CHANNEL 5 Software [https://www.oxinst.com/].
- Савелова Т.И., Иванова Т.М., Сыпченко М.В. Методы решения некорректных задач текстурного анализа и их приложения. Москва: НИЯУ МИФИ, 2012. С. 268.
- Borovkov M., Savelova T. The computational approaches to calculate normal distributions on the rotation group. Mag. Appl. Cristallogr. 2007. V. 40. P. 449.
- Bunge H.J. Texture Analysis in Material Sciences. Mathematical Methods. Butterworths Publ. London, 1982. P. 593.
- Рогинский К.Н., Савелова Т.И. Вычисление полюсных фигур ядерным методом по набору отдельных ориентаций зерен на группе SO(3). Журн. вычислит. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 5. С. 949.
- 23. *Koay C.G.* A simple scheme for generating nearly uniform distribution of antipodally symmetric points on the unit sphere. J. Comput. Sci. 2011. V. 2. P. 88.
- 24. *Айвазян С.А.* Прикладная статистика и основы эконометрики. М.: ЮНИТИ-ДАТА, 2001. С. 656.
- Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes: the Art of Scientific Computing 3rd Edition. Cambridge University Press, 2007. P. 1235.
- Tonga V., Jianga J., Wilkinsonb A.J., Brittona T.B. The effect of pattern overlap on the accuracy of high resolution electron backscatter diffraction measurements. Ultramicroscopy. 2015. V. 155. P. 62.
- Lin H.P., Ng T.S., Chen C.L., Kuo J.C., Ding S.X. Comparison of deformation texture in FePd alloy via X-ray diffraction and electron backscatter diffraction techniques. Micron. 2013. V. 44. P. 433.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 1, pp. 58-65

Verification of the Reconstruction of Pole Figures from Electron Backscatter Diffraction Measurements Performed under Variation of Experimental Parameters

A. O. Ovchinnikova^{*a*,#} and T. I. Savyolova^{*a*}

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia [#]e-mail: aoantonova@mail.ru

Received November 16, 2019; revised December 10, 2019; accepted December 18, 2019

ОВЧИННИКОВА, САВЕЛОВА

Abstract—The adequacy of the reconstruction of pole figures (PFs) from the results of the electron backscatter diffraction (EBSD) experiment has been verified using a new technique for estimating the similarity of two PFs. This method is based on an analog of the Kolmogorov—Smirnov criterion on the S_2 sphere and takes into account the probabilistic nature of PFs. This method also proposes a quantitative similarity measure for the compared PFs. In this study, this method is utilized to quantitatively compare the PF reconstructed from the results of the EBSD experiment to the PF of a polycrystalline sample in order to estimate the effect of the selected values of the EBSD experiment parameters on the underlying distribution. Such a comparison becomes possible by mathematical modeling of a polycrystalline sample and a subsequent EBSD experiment. A new similarity measure between the sample PF and the PF obtained from the result of model EBSD measurements under the variation of the experimental parameters, namely, the scanning step and tolerance angle, has been calculated. The results have been compared to similar results for the *RP* factor widely used to estimate the differences between two PFs. Both metrics are utilized to study the effect of the texture sharpness parameter of the polycrystalline sample on the results of the EBSD experiment with various scanning steps and tolerance angles.

Keywords: EBSD, scanning step, tolerance angle, polycrystall, mathematical modelling, pole figures, *RP*-factor, Kolmogorov–Smirnov test, quantitative texture analysis

DOI: 10.1134/S2304487X2001006X

REFERENCES

- Wright S.I., Field D.P. Scalar of Texture Heterogeneity. *Materials Science Forum*, 2005, vol. 495–7, pp. 207–212.
- Wright S.I. A Parametric Study of Electron Backscatter Diffraction based Grain Size Measurements. *Practical Metallography*, 2010, vol. 47, no. 1, pp. 16–33.
- Mironov S.Yu., Danilenko V.N., Myshlyaev M.M., Korneva A.V. Analysis of the Spatial Orientation Distribution of Building Blocks in Polycrystals as Determined Using Transmission Electron Microscopy and a Backscattered Electron Beam in a Scanning Electron Microscope, 2005, *Physics of the Solid State*, vol. 47, №7, pp. 1258–1266.
- 4. Tonga V., Jianga J., Wilkinsonb A.J., Brittona T.B. The effect of pattern overlap on the accuracy of high resolution electron backscatter diffraction measurements. *Ultramicroscopy*, 2015, vol. 155, pp. 62–73.
- 5. Randle V. Introduction to texture analysis: macrotexture, microtexture and orientation mapping: 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2010. 488 p.
- 6. Humphreys F.J. Grain and subgrain characterisation by electron backscatter diffraction, *Journal of materials science*, 2001, vol. 36, pp. 3833–54.
- Antonova A.O., Savyolova T.I. Error Estimation for Computed Polycrystalline Texture Characteristics by Varying Measurement Parameters in Electron Microscopy Methods. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, № 2, pp. 317–329.
- 8. Antonova A.O., Savyolova T.I. Study of the Influence of the Parameters of an Experiment on the Simulation of Pole Figures of Polycrystalline Materials Using Electron Microscopy. *Cristallogr. Rep.*, 2016, vol. 61, № 3, pp. 523–531.
- Ovchinnikova A.O., Savyolova T.I. A novel approach of the grain structure modelling in the framework of polycrystalline specimen and EBSD experiment simulation. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*, 2019, vol. 1205, no. 012043.

- Viglin S.A. Kolichestvennaya mera tekstury polikristallicheskogo materiala. Teksturnaya funkciya [A quantitative measure of the texture of a polycrystalline material. Texture function]. *Fizika tvyordogo tela*, 1960, vol. 2, № 10, pp. 2463–2476.
- Bunge H.J. Experimental Techniques of Texture Analysis. Experimental Techniques of Texture Analysis: ed. by Bunge H.J. *DGM Informationsgesellschaft mbH*, 1986, pp. 1–28.
- 12. Welch P.I. Neutron Diffraction Texture Analysis. Experimental Techniques of Texture Analysis: ed. by Bunge H.J. *DGM Informationsgesellschaft mbH*, 1986, pp. 183–207.
- Bunge H.J., Grossterlinden R., Haase A., Ortega R., Szpunar J.A., Van Houtte P. Advanced Experimental Techniques in X-ray Texture Analysis. *Materials Science Forum*, 1994, vol. 157, pp. 71–96.
- Matthies S., Wenk H.-R., Vinel G.W. Some Basic Concepts of Texture Analysis and Comparison of Three Methods to Calculate Orientation Distributions from Pole Figures. *Journal of Applied Crystallography*, 1988, vol. 21, pp. 285–304.
- 15. Lychagina T., Nikolayev D. Quantitative comparison of measured crystallographic texture *Journal of Applied Crystallography*, 2016, vol. 49, pp. 1290–1309.
- Kolmogoroff A.N. Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. *G. Inst. Ital. Attuari.*, 1933, vol. 4, pp. 83.
- Smirnov N.V. On the estimation of the discrepancy between empirical curves of distributions for two independent samples. *Moscow State Univ. Bull.*, 1939, vol. 2, pp. 3–14.
- 18. HKL CHANNEL 5 Software. Available at: [https://www.oxinst.com/].
- Savyolova T.I., Ivanova T.M. and Sypchenko M.V. Metody resheniya nekorrektnyh zadach teksturnogo analiza i ih prilozheniya[Methods for Solving Ill-Posed Problems in Texture Analysis and Their Applications]. Moscow, NRNU MEPHI, 2012. 268 p.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ" том 9 № 1 2020

64

65

- Borovkov M., Savelova T. The computational approaches to calculate normal distributions on the rotation group, *Mag. Appl. Cristallogr.*, 2007, vol. 40, pp. 449–455.
- Bunge H.J. Texture Analysis in Material Sciences. Mathematical Methods. London, Butterworths Publ., 1982. 593 p.
- 22. Roginskii K.N., Savyolova T.I. Polar figure computation by a kernel method from a set of individual grain orientations on SO(3). *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2010, vol. 50, pp. 949.
- 23. Koay C.G. A simple scheme for generating nearly uniform distribution of antipodally symmetric points on the unit sphere. *J. Comput. Sci.*, 2011, vol. 2, pp. 88–91.
- 24. Aivazyan S.A., Mhitaryan V.S. Prikladnaya statistika. Osnovy ekonometriki. Tom 1: Teoriya veroyatnosti i

prikladnaya statistika [Applied statistics. Fundamentals of Econometrics, Vol. 1: Probability theory and applied statistics]. Moscow, Unity Data, 2001. 656 p.

- Press W.H, Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes: the Art of Scientific Computing 3rd Edition. Cambridge University Press, 2007. 1235 p.
- Tonga V., Jianga J., Wilkinsonb A.J., Brittona T.B. The effect of pattern overlap on the accuracy of high resolution electron backscatter diffraction measurements. *Ultramicroscopy*, 2015, vol. 155, pp. 62–73.
- 27. Lin H.P., Ng T.S., Chen C.L., Kuo J.C., Ding S.X. Comparison of deformation texture in FePd alloy via X-ray diffraction and electron backscatter diffraction techniques. *Micron*, 2013, vol. 44, pp. 433–441.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 1, с. 66-81

_____ ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА ______ И ИНФОРМАТИКА

УДК 519.23:519.242

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ВИРТУАЛИЗАЦИИ

© 2020 г. А.А. Моисеев*

НПП "Технос-РМ", Мытищи, 141002, Россия *e-mail: slow.coach@yandex.ru Поступила в редакцию 23.04.2019 г. После доработки 31.08.2019 г. Принята к публикации 17.09.2019 г.

Важной составляющей виртуализационного инструментария является статистическая составляющая для решения следующих задач: идентификации статистических моделей по результатам квалификационных испытаний, параметризации критериальных моделей для проведения прогнозирования в рамках виртуальной квалификации, синтеза регрессионных моделей, статистического анализа их адекватности и последовательной оптимизации в ходе факторного планирования. При этом линейность регрессионной модели позволяет осуществить контроль значимости факторов и полноты их системы с использованием традиционных статистических методов, а также оптимизацию параметров с помощью методов линейного программирования.

В ходе идентификации измерений характеристик нефтепродуктов показана ненормальность распределений их погрешности. Для построения рациональных алгоритмов обработки этих измерений был синтезирован ряд альтернативных аппроксимаций. Для аппроксимации бимодального распределения плотности использована сумма различающихся нормальных, а для аппроксимации одномодальных распределений прочих характеристик – аппроксимация по Вейбуллу. Параметризация построенных распределений осуществлялась методом моментов, что обеспечило удовлетворительность построенных аппроксимаций. Для оценки воспроизводимости результатов виртуальной квалификации были построены аналитические распределения статистики Кохрейна на базе F-распределения Фишера и статистики Граббса на базе Т-распределения Стьюдента. Показано, что предварительная нормализация позволяет избежать необоснованного заключения о неоднородности исследуемых выборок и тем самым снижает вероятность ошибки первого рода при принятии решения о воспроизводимости результатов квалификационного эксперимента. Параметризацию критериальной модели по результатам квалификационных испытаний предложено проводить по результатам прогнозирования эффекта в экстремальных условиях, что позволяет сформировать гарантированные квалификационные нормативы. Предварительный выбор этих условий предложено осуществлять методом последовательных приближений в рамках процедуры факторного анализа. Разработанная методика синтеза широкого класса критериев подобия базируется на интерпретации логарифма критерия подобия как линейной формы от логарифмов, трактуемых как независимые факторы. Оценка коэффициентов указанной формы – нагрузок факторов – осуществляется с использованием факторного анализа. Разработан также интуитивный метод ранжирования факторов в рамках линейно-регрессионной модели с использованием насышенных планов и последующем отсеивании наименее нагруженных факторов. Его основным преимуществом является использование при анализе только нефиктивных факторов, а основным же недостатком – отсутствие регулярной методики установления порогов значимости.

Ключевые слова: инструментарий, идентификация, параметризация, критериальная модель, прогнозирование, регрессионная модель, факторное планирование, линейное программирование, бимодальное распределение, аппроксимация, статистика Кохрейна, статистика Граббса, квалификационные нормативы, критерий подобия, число подобия, фиктивный фактор, значимость, ранжирование

DOI: 10.1134/S2304487X19060063

Основой для проведения виртуализации служит виртуализационный инструментарий, включающий семейства базовых функциональных средств и базовых математических моделей [1]. Функциональные средства обычно используются для синтеза или симуляции программного обеспечения различного назначения, включая обработку результатов квалификационных испытаний. Базовые модели используются для тестирования программного обеспечения, синтеза идентификационных моделей для модельно-ориентированных систем управления, а также алго-

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ВИРТУАЛИЗАЦИИ



Виртуализационный инструментарий

Рис. 1. Виртуализационный инструментарий.

ритмов обработки результатов квалификационных испытаний.

Важной составляющей виртуализационного инструментария, приведенного на рис. 1, является статистическая составляющая для решения следующих задач: идентификации статистических моделей по результатам квалификационных испытаний, параметризации критериальных моделей для проведения прогнозирования в рамках виртуальной квалификации, синтеза регрессионных моделей, статистического анализа их адекватности и последовательной оптимизации в ходе факторного планирования. Регрессионная модель в составе инструментария, калибруемая по результатам квалификационных испытаний, используется для планирования квалификационных экспериментов. Как правило, это планирование базируется на использовании насыщенных планов и предоставляет следующие возможности:

 исследовать значимость и полноту системы введенных факторов; • осуществить последовательную оптимизацию параметров, соответствующих значимым факторам, в ходе квалификационных испытаний;

• осуществить прогнозирование результатов квалификационных испытаний с использованием откалиброванной регрессионной модели.

При этом линейность используемой регрессионной модели позволяет осуществить контроль значимости факторов и полноты их системы с использованием традиционных статистических методов, а оптимизацию параметров с помощью методов линейного программирования.

Статистический анализ адекватности регрессионной модели предполагает использование ряда статистических критериев. В работе [2] проведено усовершенствование методов Кохрейна и Граббса, обеспечивающее их робастность и базирующееся на предварительной нормализации исследуемой выборки с помощью соответствующего преобразования Смирнова. Показано, что разработанная процедура обеспечения робастности снижает вероятность ошибки первого рода при принятии решения о воспроизводимости результатов квалификационного эксперимента.

Распределение статистики Кохрейна на базе *F*-распределения Фишера и статистики Граббса на базе Т-распределения Стьюдента построены из следующих соображений. По нормализованным выборкам отношений Стьюдента рассчитываются дисперсии, которые затем анализируются по критерию Кохрейна [2]. Решающая статистика Кохрейна представляет собой отношение макси-

мальной частной дисперсии $\max_{i=1..l} S_i^2$ и суммы частных дисперсий $S_1^2 + \ldots + S_l^2$ отношений Стьюдента. Здесь l – число выборок измерений, по которым рассчитываются частные дисперсии для лробей Стьюлента. Кажлая из них прелставляет собой несмещенную выборочную оценку вида:

$$S_{i}^{2} = \frac{S_{i1}^{2} + \dots + S_{il}^{2}}{l-1},$$

$$S_{ij}^{2} = \left(\xi_{ij} - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\xi_{ik}\right)^{2},$$

которая может быть преобразована следующим образом:

$$C = \frac{\max_{i=1.l} S_i^2}{S_1^2 + \dots + S_l^2} = \max_{i=1.l} C_i$$
$$C_i = \frac{S_i^2}{S_1^2 + \dots + S_l^2}.$$

В предположении о нормальности распределения числитель в C_i распределен по χ^2 со степенью свободы пр – 1, а знаменатель представляет собой сумму *l* величин с таким распределением, и следовательно, распределен по χ^2 со степенью свободы *l(np - 1)*. Отсюда следует, что статистика \mathbf{C}^2

$$F_{i} = lC_{i} = \frac{\frac{S_{i}}{np-1}}{\frac{S_{1}^{2} + ... + S_{l}^{2}}{l(np-1)}}$$
имеет *F*-распределение

Фишера со степенями свободы np - 1 и l(np - 1). Статистика Кохрейна принимает, таким образом,

вид
$$C = \frac{F_M}{l}$$
, где $F_M = \max_{i=1...l} F_i$.

Аналогичным образом строится критерий Граббса для нормализованных отношений Стьюдента. Эти отношения образуют вариационный ряд $\xi_1, ..., \xi_p$, решающими статистиками в котором являются минимальное и максимальное от-ношения Стьюдента: $G_{\min} = \xi_1$, $G_{\max} = \xi_p$. В случае нормальности выборки отношения Стьюдента распределены по Стьюденту, а порядковые статистики G_{min} и G_{max} имеют распределения вида $T_{n-1}^{p}(-G_{\min})$ и $T_{n-1}^{p}(G_{\max})$, где T_{n-1} – распределение

Стьюдента с n - 1 степенью свободы. Решение об отсутствии воспроизводимости принимается, если выполняется условие $T^{p}_{n-1}(-G_{\min}) > P$ или $T_{n-l}^{p}(G_{\max}) > P$, где P – заданная доверительная вероятность. В противном случае считается, что измерения воспроизводимы.

Эквивалентным критерию Граббса является критерий Хокинса, решающая статистика которого H связана со статистиками $G_{\text{max}}, G_{\text{min}}$ соотношением:

$$H = \max(|G_{\max}|, |G_{\min}|).$$

С учетом того, что Н является порядковой статистикой, ее распределение в предположении о нормальности генеральной совокупности изме-

рений имеет вид $(2T_{n-1}(H) - 1)^p$. Соответствующее решающее правило при этом таково: принимается решение об отсутствии воспроизводимости из-

мерений, если $(2T_{n-1}(H) - 1)^p > P$, и об их воспроизводимости в противном случае.

Важной составляющей межлабораторных измерений характеристик нефтепродуктов является идентификация распределения их погрешности, определяющего методику дальнейшей обработки измерений. В статье [3] проведен анализ распределения этих погрешностей, включая измерения плотности, вязкости при температурах 20°С и 100°С, а также температур отгона и вспышки. Анализ погрешностей измерений этих характеристик, проведенный методом χ^2 , показал, что используемое обычно предположение о нормальности этого распределения представляется неосновательным. В этих условиях возникает необходимость провести идентификацию указанного закона распределения и на этой основе разработать алгоритм рациональной обработки измерений. Решению первой части этой задачи посвящена работа [4], в которой исследуются возможные аппроксимации распределения погрешности измерений.

Рассмотрим некоторые методы построения аппроксимирующих распределений и их параметризации. Исходным пунктом построения аппроксимирующего распределения погрешности измерения плотности являлось построение частотной гистограммы указанной погрешности, отображенной на рис. 2. Она явно указывает на бимодальный характер распределения погрешности соответствующих измерений. Для аппроксимации этого распределения предложено использовать распределение вида:

$$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)}{2\sigma_1\sqrt{2\pi}} + \frac{\exp\left(-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)}{2\sigma_2\sqrt{2\pi}}.$$
 (1)

Соответствующее интегральное распределение представляется при этом в форме:

$$F = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right) + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-m_2}{\sigma_2}\right).$$
 (2)

Мы видим, что аппроксимирующее распределение включает следующие параметры:

 $-m_1, m_2$ — математические ожидания составляющих распределения;

 $-\sigma_1, \sigma_2 - CKO$ составляющих распределения.

Для оценки этих параметров предлагается использовать метод моментов. Он позволяет получить для них следующую систему алгебраических уравнений:

$$\frac{m_{1} + m_{2}}{2} = m;$$

$$\sigma_{1}^{2} = \sigma^{2} - \frac{(m_{2} - m_{1})^{2}}{2} - \frac{A}{3\left(\frac{m_{2} - m_{1}}{2}\right)};$$

$$3\left(\frac{m_{2} - m_{1}}{2}\right)\frac{\sigma_{2}^{2} - \sigma_{1}^{2}}{2} = A;$$

$$3\frac{\sigma_{1}^{4} + \sigma_{2}^{4}}{2} + \left(\frac{m_{2} - m_{1}}{2}\right)^{4} + 6\left(\frac{m_{2} - m_{1}}{2}\right)^{2}\frac{\sigma_{1}^{2} + \sigma_{2}^{2}}{2} = E.$$
(3)

Здесь *А* и *Е* – выборочные асимметрия и эксцесс для выборки погрешностей измерений. Решение построенной системы уравнений осуществлялось методом перебора по параметру m_1 в диапазоне (0, *m*). Значение m_2 находилось для данного m_1 из первого уравнения системы (3), σ_1^2 – из второго по заданному m_1 и рассчитанному m_2 , а σ_2^2 – из четвертого уравнения, которое при заданном m_1 и рассчитанных m_2 , σ_1^2 представляет собой квадратное уравнение относительно σ_2^2 . В ходе варьирования параметр m_1 подбирался так, что бы обеспечить минимальные отклонения вычисленных параметров от выборочных. Результатом прове-

параметров:

$$m_1 = -0.353;$$

 $m_2 = 0.314;$
 $\sigma_1 = 1.384;$
 $\sigma_2 = 0.519.$

шие значения

денного таким образом расчета явились следую-

Подставляя эти значения в (1) и (2), получаем аппроксимирующие распределения погрешности измерений плотности. Результат сравнения интегрального аппроксимирующего распределения с выборочным приведен на рис. 2 и указывает на качественно удовлетворительную аппроксима-

цию распределения указанной погрешности.

Частотные гистограммы для стандартизированной погрешности измерений прочих характеристик нефтепродуктов – вязкости при температурах 20°С и 100°С, а также температур отгона и вспышки – приведены на рис. 3 и указывают на унимодальный характер распределений погрешности их измерений. В качестве возможных аппроксимаций этих распределений в работе [4] рассматривались наряду с нормальной аппроксимации по Пирсону и Вейбуллу, а также логнормальная. Параметризация этих распределений также осуществлялась методом моментов. Проведенный сравнительный анализ построенных аппроксимаций унимодальных распределений погрешности показывает, что наилучшей по точности является аппроксимация по Вейбуллу. Сравнение полученных распределений погрешности с бимодальной аппроксимацией для погрешности измерения плотности и вейбулловской аппроксимацией для погрешности измерения прочих характеристик указывает на удовлетворительность используемых аппроксимаций.

Модифицированный алгоритм контроля воспроизводимости межлабораторных измерений базируется на выравнивании последних путем перехода к дробям Стьюдента, что позволяет осуществлять контроль воспроизводимости по измерениям изменяющихся величин [5]. Однако в случае нормальной выборки измерений распределение дробей Стьюдента оказывается стандартным и не может быть использовано для контроля воспроизводимости. Поэтому отношение Стью-

дента целесообразно определить в виде $\xi = \frac{x - m}{s(m)}$, где s(m) – аппроксимация зависимости СКО от математического ожидания. При этом трансформация измерений в отношения Стьюдента предусматривает предварительный расчет математических ожиданий и СКО, соответствующие разным уровням. По ним строится функция s(m) линейной регрессии, которая совместно с расчетными математическими ожиданиями используется для построения дробей (отношений) Стьюдента.

Дальнейшие статистические выводы опираются на анализ построенных дробей Стьюдента, которые анализируются по критерию Граббса. В случае невоспроизводимости измерений по критерию Граббса серия, соответствующая экстремальной статистике, бракуется. Забракованная серия удаляется из выборки измерений, а решающие статистики пересчитываются для оставшихся уровней в предположении, что аппроксимация s(m) остается неизменной. Это можно интерпретировать как замену забракованной серии такой, которая не изменяет аппроксимацию, т.е. мы пренебрегаем влиянием аномальной серии на последнюю. Если и в усеченной выборке оказывается возможным выделить аномальную серию,



Рис. 2. Аппроксимация распределения погрешности измерения плотности.

предположение о слабом влиянии отброшенной серии на аппроксимацию считается несостоятельным и необходимо осуществить перерасчет аппроксимации без учета забракованной серии.

По сформированным таким образом выборкам отношений Стьюдента рассчитываются дисперсии, которые затем анализируются по критерию Кохрейна. Она является порядковой и имеет распределение $F^{l}(F_{M}, np-1, l(np-1)) = F^{l}(lC, np-1, l(np-1)),$ где *F* – распределение Фишера. Условие неоднородности этих условиях в имеет вид $F^{l}(lC, np-1, l(np-1)) > P$, где P – доверительная вероятность решения о невоспроизводимости. При невыполнении этого условия принимается решение об однородности выборки, и, следовательно, воспроизводимости. Таким образом, модифицированный алгоритм контроля воспроизводимости применяется в условиях возможного изменения измеряемых величин. В этом смысле

он отличается универсальностью от обычной методики классификации, ориентированной на неизменность измеряемых значений. Использование выравнивания измерений путем перехода к дробям Стьюдента позволяет применять эту методику без всяких ограничений.

В соответствии с [6] критериальная модель позволяет осуществить прогнозирование по результатам квалификационных испытаний, проводимых в заданных условиях. Возникает, однако, вопрос о выборе таких условий, которые обеспечивали бы гарантированный прогноз например, его верхнюю границу. Отсюда вытекает задача предварительного выбора экстремальных условий квалификационных испытаний, для решения которой предлагается использовать метод факторного планирования эксперимента. Статистическая обработка этих измерений, отображенная на рис. 4, включает:



Рис. 3. Частотные гистограммы погрешности измерений.







Рис. 5. Расширение факторной области.

• оценку воспроизводимости кратных измерений путем анализа их разброса;

• построение линейно-регрессионной модели и оценку значимости введенных факторов;

• анализа адекватности модели и оценку полноты системы введенных факторов.

Для оценки воспроизводимости измерений используется критерий Кохрейна. Он предусматривает расчет дисперсий кратных измерений, формирование по ним статистики Кохрейна и расчет вероятности ее реализации. Эта вероятность сравнивается с доверительной вероятностью невоспроизводимости измерений. Если рассчитанная вероятность оказывается ниже доверительной, принимается гипотеза о воспроизводимости измерений. Их дисперсии при этом усредняются, образуя дисперсию воспроизводимости. В противном случае серия измерений считается аномальной и должна быть повторена.

Расчет коэффициентов регрессии осуществляется из следующих соображений. Матрица плана для нефиктивных факторов является невырожденной матрицей системы линейных уравнений, правой частью которой является вектор усредненных измерений. Вектор коэффициентов, интерпретируемых как нагрузки факторов, представляет собой решение указанной системы.

Для оценки значимости факторов используются стьюдентовы отношения, решение по которым принимается по критерию Стьюдента. С этой целью рассчитываются статистики Стьюдента для коэффициентов регрессии и вероятности их реализации. Значимыми считаются коэффициенты, вероятности реализации статистики Стьюдента для которых превышают доверительную. Прочие коэффициенты регрессии считаются незначимыми и в модели должны быть обнулены.

Контроль адекватности линейно-регрессионной модели (полноты системы введенных факторов) осуществляется по критерию Фишера с использованием отношения дисперсии адекватности к дисперсии воспроизводимости. Для этого рассчитывается средний квадрат отклонения усредненных измерений от регрессионной модели, в которой сохраняются только значимые коэффициенты регрессии. Эта величина интерпретируется как дисперсия адекватности. По ней и дисперсии воспроизводимости строится статистика Фишера и рассчитывается вероятность ее реализации. Решение об адекватности принимается, если указанная вероятность ниже доверительной. В противном случае модель считается неадекватной, что, как правило, означает потерю существенных факторов при ее построении.

Двухуровневое факторное планирование может быть использовано для последовательной оптимизации параметров исследуемого объекта или квалификационного эксперимента. Поскольку локальные оптимумы при этом достигаются в вершинах многомерных симплексов, соответствующих строкам двухуровневого плана, поиск глобального экстремума предлагается осуществлять методом последовательных приближений. Последовательная оптимизация предусматривает использование точек достигнутых локальных экстремумов в качестве центров новых областей в параметрическом пространстве.

При использовании линейно-регрессионной модели поиск экстремума представляет собой задачу линейного программирования для замкнутой области факторных значений в виде многомерного симплекса. Локальный экстремум линейной регрессии достигается при этом в одной из вершин области и, следовательно, равен экстремальному усредненному измерению, соответствующему одной из строк плана эксперимента. Симплекс-планирование предусматривает включение в факторную область также симплекса, симметричного рассмотренному. Ему соответствует план эксперимента с инвертированной матрицей факторов, а общая область поиска экстремума согласно рис. 5 образуется исходным,


Рис. 6. Статистическая обработка измерений.

симметричным и дополнительными симплексами, примыкающими к началу координат.

При расширенном планировании, отображенном на рис. 6, для формирования таблиц параметров используются исходный и инвертированный планы. В соответствии с этими таблицами проводятся квалификационные испытания, в ходе которых осуществляются кратные измерения. Обработка этих измерений осуществляется в два этапа. В ходе первичной обработки осуществляется поиск экстремального усредненного измерения, параметры которого сопоставляются новому центру диапазонов. Этому центру соответствует скорректированный диапазон параметров, используемый для реализации следующего приближения процедуры поиска. Если достигнутый в следующем приближении экстремум "экстремальнее" предыдущего, процедура продолжается. В противном случае она останавливается и глобальному экстремуму сопоставляется значение предыдущего локального. Параметризация критериальной модели по результатам квалификационных испытаний в экстремальных условиях позволяет, например, провести прогнозирование фрикционного износа в этих условиях и сформировать на этой основе гарантированные нормы износа.

Интересным примером применения статистических методов в задачах виртуализации является факторное планирование в анализе критериев подобия [7]. Критериальные модели являются естественной базой для виртуализации квалификационных испытаний, поскольку последние базируются на физической модели исследуемого объекта или процесса в виде лабораторной установки. Эксперименты, проводимые на ней, позволяют осуществить параметризацию критериальной модели, чтобы затем использовать ее для пересчета лабораторных результатов в эксплуатационные характеристики, а также для обратного пересчета эксплуатационных условий в параметры квалификационных испытаний. Важной задачей при обосновании инвариантности используемых критериев подобия является их представление в виде функций от стандартных чисел подобия, поскольку их инвариантность обеспечивает инвариантность построенного критерия. Как правило, эта функция является мультипликативно-степенной, т.е. представляется в виде:

$$K = K_0 N_1^{\beta_1} \dots N_l^{\beta_l},$$
(4)

где $N_1, ..., N_l$ – используемые числа подобия, а $\beta_1, ..., \beta_l$ – их степени в составе критерия.

Логарифмирование критерия (3) трансформирует мультипликативно-степенную функцию в линейную комбинацию $\ln K_0 + \beta_1 \ln N_1 + ... + \beta_l \ln N_l = \ln K$. Логарифмы чисел подобия интерпретируются как натуральные параметры, стандартным образом преобразуемые в двухуровневые факторы, а построенная выше линейная комбинация для натуральных параметров с априорно неопределенными коэффициентами трансформируется в линейную регрессию для этих факторов. Ее коэффициенты подлежат определению по результатам калибровочных экспериментов. Для решения этой задачи традиционно используется двухуровневое факторное планирование. Факторы, определяемые на основе натуральных параметров, являются нефиктивными, но могут быть дополнены фиктивными факторами в составе линейно-регрессионной молели.

Матрица двухуровневого планирования является матрицей коэффициентов в линейной системе уравнений для коэффициентов регрессии, включая фиктивные. Правой частью этой системы являются "измерения" – значения логарифма критерия подобия, соответствующие границам натуральных параметров в составе линейной комбинации. Анализ значимости рассчитываемых коэффициентов регрессии и адекватности линейно-регрессионной модели в целом осуществляются стандартными статистическими методами.

В качестве примера предложенного подхода рассмотрим анализ критерия фрикционного износа в смазывающей жидкости. Данный критерий имеет вид [8]:

$$Vw = \frac{\rho v \Delta V}{\mu N t}.$$

Здесь р – плотность изнашивающегося материала, v – скорость скольжения, ΔV – величина объемного износа, µ – коэффициент трения, N – нормальная нагрузка на трущуюся поверхность, а t — длительность износа. Физический смысл этого критерия – отношение импульса износного материала к импульсу силы трения.

Представим данный критерий в виде линейной функции чисел подобия:

$$\ln(Vw) = \beta_0 + \beta_1(\ln St) + \beta_2(\ln So) + \beta_3(\ln Re) + \beta_{41}(\ln De),$$

где e^{β_0} — коэффициент пропорциональности; $St = \frac{vt}{D}$ – число Струхаля (гомохронности), D – максимальный диаметр полосы износа шара; $So = \frac{\eta v}{\mu \frac{N}{D^2} \Delta L}$ – число Зоммерфельда, η – динамическая вязкость жидкости, ΔL – глубина износа шара; Re = $\frac{\rho_f v \Delta L}{\eta}$ – число Рейнольдса, ρ_f – плотность жидкости; $De = \text{Re}\sqrt{\frac{d}{D}}$ – число Дина, d – минимальный диаметр полосы износа шара.

Для пересчета натуральных параметров в соответствующие факторы используем соотношения:

$$x_{1} = 2 \frac{\ln St - (\ln St)_{\min}}{(\ln St)_{\max} - (\ln St)_{\min}} - 1;$$

$$x_{2} = 2 \frac{\ln So - (\ln So)_{\min}}{(\ln So)_{\max} - (\ln So)_{\min}} - 1;$$

$$x_{3} = 2 \frac{\ln Re - (\ln Re)_{\min}}{(\ln Re)_{\max} - (\ln Re)_{\min}} - 1;$$

$$x_{4} = 2 \frac{\ln De - (\ln De)_{\min}}{(\ln De)_{\max} - (\ln De)_{\min}} - 1.$$
(5)

Границы натуральных параметров, рассчитанные по результатам упомянутых выше экспериментов, приведены в [7]. При этом граничным значениям натуральных параметров соответствуют значения факторов -1 и 1. Обратный пересчет факторов в натуральные параметры осуществляется в соответствии с соотношениями:

$$\ln St = (\ln St)_{\min} + ((\ln St)_{\max} - (\ln St)_{\min})\frac{x_1 + 1}{2};$$

$$\ln So = (\ln So)_{\min} + ((\ln So)_{\max} - (\ln So)_{\min})\frac{x_2 + 1}{2};$$

$$\ln Re = (\ln Re)_{\min} + ((\ln Re)_{\max} - (\ln Re)_{\min})\frac{x_3 + 1}{2};$$

$$\ln De = (\ln De)_{\min} + ((\ln De)_{\max} - (\ln De)_{\min})\frac{x_4 + 1}{2}.$$

Подставляя их в (4), получаем для регрессии критерия относительно нефиктивных факторов $\ln(Vw) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4$, где:

$$b_{0} = \beta_{0} + \frac{(\ln St)_{\max} + (\ln St)_{\min}}{2} + \frac{(\ln So)_{\max} + (\ln So)_{\min}}{2} + \frac{(\ln Re)_{\max} + (\ln Re)_{\min}}{2} + \frac{(\ln De)_{\max} + (\ln De)_{\min}}{2};$$

$$b_{1} = \beta_{1} \frac{(\ln St)_{\max} - (\ln St)_{\min}}{2};$$

$$b_{2} = \beta_{2} \frac{(\ln So)_{\max} - (\ln So)_{\min}}{2};$$

$$b_{3} = \beta_{3} \frac{(\ln Re)_{\max} - (\ln Re)_{\min}}{2};$$

$$b_{4} = \beta_{4} \frac{(\ln De)_{\max} - (\ln De)_{\min}}{2}.$$
(6)

Построение регулярного плана для анализа влияния введенных факторов осуществляется на основе дробной реплики полного факторного эксперимента. При этом число *т* факторов в составе этого эксперимента должно удовлетворять

условию $2^{m-1} < l + 1 \le N = 2^m$, где l – определенное выше число нефиктивных факторов, а N – общее число факторов, равное ближайшей мажорирующей степени двойки. Учитывая это обстоятельство, необходимо ввести в соотношение для регрессии дополнительные фиктивные факторы x_5, x_6, x_7 . В результате оно приобретает вид:

$$\ln(Vw) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + b_6x_6 + b_7x_7.$$

Матрица планирования при этом соответствует дробной реплике 27-4 полного факторного плана, которая приведена на рис. 7. Характерным свойством этой матрицы является центрированность ее столбцов, за исключением первого. Отсюда вытекает, что свободный член b₀ в выражении для регрессии равен среднему правых частей уравнений линейной системы. Исходя из этого, примем его в дальнейшем равным результату усреднения ln(Vw) по всем проведенным экспе-

риментам. Усеченная матрица плана относительно коэффициентов регрессии для оставшихся факторов выделена на рис. 7. При расчете правых частей усеченной линейной системы уравнений относительно этих коэффициентов будем исходить из следующих соображений. Значение $\ln(Vw)$ для данного эксперимента будем сопоставлять значению фактора $x_i = -1$, если в соответствии с (4) $x_i < 0$, и значению $x_i = 1$ в противном случае. Таким образом, каждому значению ln(*Vw*) сопоставляет определенный набор факторов x_1 , x_2, x_3, x_4 . Значения ln(*Vw*) с одним и тем же набором факторов интерпретируются как повторяющиеся "измерения" для соответствующей строки плана. Для каждой такой группы "измерений" рассчитываются среднее и дисперсия.

Таким образом, для расчета коэффициентов регрессии $b_1, ..., b_7$ используется усеченная матрица плана, а правая часть линейной системы представляет собой усредненные "измерения" за вычетом свободного члена. Вектор коэффициентов регрессии представляет собой решение этой линейной системы и рассчитывается путем умножения обрашенной матрицы плана на определенный выше вектор правых частей. При этом следует учитывать, что факторы x₅, x₆, x₇ являются фиктивными и сумма квадратов соответствуюших им коэффициентов суммируется с усредненной дисперсией, рассчитанной по повторяющимся "измерениям", давая дисперсию воспроизводимости σ^2 . Относя ее к количеству нефиктивных факторов l = 4, мы получаем дисперсию оценки соответствующих коэффициентов регрессии и ее среднеквадратичное отклоне-

ние
$$s_b = \frac{\sigma}{\sqrt{l}}$$
.

Для оценки значимости коэффициентов регрессии при нефиктивных факторах $b_1, ..., b_4$ используются статистики $\frac{|b_1|}{s_b}, ..., \frac{|b_4|}{s_b}$, распределенные по Стьюденту с числом степеней свободы *l*. Вероятности реализации этих статистик составляют $T_l\left(\frac{|b_1|}{s_b}\right), ..., T_l\left(\frac{|b_4|}{s_b}\right)$, где T_l – распределение Стьюдента с *l* степенями свободы. Решающее правило для подтверждения значимости *i*-го коэффициента имеет вид $T_l\left(\frac{|b_l|}{s_b}\right) > P = 0.9$, где P – доверительная вероятность принятия решения о значимости. Коэффициенты регрессии, для которых эти условия не выполняются, считаются незначимыми и приравниваются нулю. Результаты расчетов, отображенные на рис. 4, показывают, что значимыми, т.е. ненулевыми, являются только коэффициенты b_2 и b_4 , соответствующие числам

подобия Зоммерфельда и Дина. Прочие коэффи-

циенты являются незначимыми и поэтому зависимость от критериев Струхаля и Рейнольдса игнорируется.

Для контроля адекватности полученной регрессии рассчитывается рассогласование межлу усредненными "измерениями" и значениями регрессии в каждой строке плана. Для расчета этих значений строка плана умножается на вектор значимых коэффициентов регрессии, отображенный на рис. 7. Решение об адекватности линейнорегрессионной модели принимается по критерию Кохрейна. Решающей при этом является статистика Кохрейна С – отношение максимального квадрата отклонения к сумме квадратов отклонений. Вероятность реализации этой статистики составляет $F^{N}(C, 1, N)$, где F – распределение Фишера. Решающее правило при этом имеет следуюший вил: принимается решение об адекватности, если вероятность реализации ниже довери-

сти, если вероятность реализации ниже доверительного значения 0.9, и об отсутствии адекватности в противном случае. Результаты расчета статистики *C* и вероятности ее реализации также приведены на рис. 7. Поскольку полученная вероятность ниже доверительного значения, принимается гипотеза об адекватности построенной линейно-регрессионной модели.

Для формирования окончательного вида критерия подобия необходимо предварительно преобразовать значимые коэффициенты b_2 и b_4 в коэффициенты β_2 и β_4 , входящие в (3). Это осуществляется путем обращения соответствующих выражений в (5):

$$Vw \sim So^{p_2} De^{p_4}$$

$$\beta_2 = \frac{2b_2}{(\ln So)_{\max} - (\ln So)_{\min}} = 0.0498;$$

$$\beta_4 = \frac{2b_4}{(\ln De)_{\max} - (\ln De)_{\min}} = 0.1792.$$

Проведенное рассмотрение показывает, что факторное планирование может быть использовано для обоснования инвариантности широкого класса вводимых критериев подобия, а также для доказательства адекватности их представления в зависимости от стандартных чисел подобия. Преимуществом предложенного подхода является то, что он может быть использован практически без ограничений общности и базируется на хорошо развитых методах факторного и статистического анализа.

Обычная методика оценки прецизионности соответствует стандартному подходу к обработке комплексного эксперимента. Он отличается возможным различием величин, измеряемых в последовательных сериях. Основной в этих условиях является задача исследования влияния учитываемых факторов на измеряемую величину.

Martputa Intana Martputa Intana Operation Operation <th></th> <th></th> <th></th> <th></th> <th></th> <th>"Измерения"</th> <th>KOF</th> <th>НТРОЛЬ АДСКВАТ Квадраты</th> <th>Статистика</th> <th>Вероятность</th> <th>Алекватность</th>						"Измерения"	KOF	НТРОЛЬ АДСКВАТ Квадраты	Статистика	Вероятность	Алекватность
1 1	Матр	ица пла	ина	-		измерения	Гегрессия	отклонений	Кохрейна	реализации	Адекватность
1 1	-1 -1	1	1	1	-1	-25.575856	-25.57035835	3.02324E-05	0.417425683	0.411504204	Истина
1 -1 1 -1 -1 -23538655 -2353865	-1 -1	-1	-1	1	1	-25.638800	24 -25.6829458	0.00194883	*		
1 1 -1 -1 -1 -2535880	1 -1	-1	1	-1	1	-25.575856	-25.58135515	3.02324E-05			
1 1	1 -1	1	Τ	-1		-25.578549	82 -25.4687677	0.012052114	/		
-1 1 -1 -1 -1 -25330455 0.0004065 -	-1 1	1	-	-1	-1	-25.553863	-25.57035835	0.000272092	/		
I I	-1 1	-	-	-1	-	-25.738088	316 -25.6829458	0.00304068	/		
1 1 1 -23,578,607 0.011460164 8 0	1 1	-1	Τ	1	-1	-25.575856	-25.58135515	3.02324E-05	/		
Constrained	1 1	1	1	1	1	-25.575856	-25.4687677	0.011468064	/		
Maccinemental trenduct 001032114 1 contonal 0 -0.25 0.01302114 -1 contonal 0 -0.25 -0.25 -0.25 0.01302114 -1 contonal 0 -0.25 0 -2.5578567 -2.5578567 -2.5578567 -0.0399944 Hermin 0 -0.25 0 -0.059912 0.01099123 0.0399944 Hermin 0 -0.25 -0.25 -0.02 0.0399122 0.00999349 Hermin 0.25 -0.25 -0.25 -0.25 0.0259173 0.03999944 Hermin 0.25 -0.25 -0.25 -0.25 -0.25 0.0399916 0.00999949 Hermin 0.25 -0.25 -0.25 -0.25 0.0239710 0.03995955 Hermin 0.25 -0.25 -0.25 -0.25 0.0399161 0.03999494 Hermin 0.25 -0.25 -0.25 -0.25 0.0399161 0.009999499 Hermin 0.25 <							Сумма квадратов	0.028872478	<u>۲. 8</u>	степеней	
Antron. Antron. 0 0 318 unusue 318 unusue Cranterra Beportinoch 388 unusue 0 0 0.25 0.25 0.55555 -2.55758675 0.58659719 0.0001073 0.0001073 0.000509723 0.0001073 0.00000733 0.00000073 0.00000073 0.00000073 0.00000073 0.000000013 0.000000003 0.000000013 0.000000003 0.000000000 0.000000000 0.0000000000 0.0000000000 0.000000000 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000 0.00000000000 0.00000000000 <t< td=""><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Максимальный квадрат</td><td>0.012052114</td><td>, , 1</td><td>свободы</td><td></td></t<>							Максимальный квадрат	0.012052114	, , 1	свободы	
Allerity Mate Caratterina Caratterina Caratterina Coopdomunettria Beportinoti							Ko	нтроль значим	иости		
Oбрашиснная матрица чисная						За вычетом свободного	Коэффициенты регрессии	Значимые коэффициенты	Статистика Стьюдента	Вероятность реализации	Значимость
0 Осраниститал магрида Осранистиам магрида Осранистиам магрида Освенные -223/3380/3 Сложноло Понима 0.25 -0.16 <	06n	бинешь	T M9T	61110		yucha ,		регрессии			
0 -0.22 -0.23 -0.23 -0.02 -0.00593404 0 0.18417249 0 0.18417249 0 0.368504315 1.48850141 0 0.368504315 1.48850141 0 0.368504315 1.48850141 0 0.36850315 1.48850141 0 0.36850315 1.48450141 0 0.36850315 1.48850141 0 0.36850315 1.48850141 0 0.36850315 1.48850141 0 0.36850315 1.48850141 0 0.3737317 0 0.36546376 0.36546376 0.36563530 1.48850141 1.48105 1.48850141 </td <td>, Ser</td> <td></td> <td>N Mal</td> <td>рица</td> <td></td> <td>своюодный чл</td> <td>С/9С8С/С.С2- На</td> <td>c/9c8c/c.c2-</td> <td></td> <td></td> <td>истина</td>	, Ser		N Mal	рица		своюодный чл	С/9С8С/С.С2- На	c/9c8c/c.c2-			истина
$ \begin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $	c7:0- 0	0	-0.25	0	c7:0-		0 -0.005498404	0	0.1841/3249	612186896.0	Ложь
$ \begin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $	0 67.0-	0	CZ.0-	C2.0-	0	-0.0629434	16:00:00 16:00:00	0.000/92522	1./014281/	0.91/99944	Истина
0.25 -0.005693726 1.885601419 0.93373271 0.03573271 0.03573271 0.035732717 0.035374403 0.033364403 0.033354403 0.033354403 0.033354403 0.033354403 0.033354403 0.033354403 0.033354403 0.033354403 0.033354403 0.033354403 0.0333573271 0.01301024 0.01301024 0.01301024 0.01301024 0.01321121 0.01231121 0.0123121 0.013018181 0.03335577 0.0355577 0.0123121 0.0123181 0.0123181 0.0123181 0.0123181 0.0123181 0.0123181 0.0123181 0.01231821 0.0123181 0.0123181 0.0123181 0.0123181 0.0123181 0.0123181 0.0123181 0.0123181 0.0123181 0.0123181 0.0123181 0.0123181 0.0123181 0.0123181 0.0123181 0.01231821 0.01231821 0.0123	-0.25 -0.25	-0.25	0	0	0		0 0.016409141	0	0.549636725	0.694093165	Ложь
0.25 0 -0.25 -0.2	-0.25 -0.25	0	0	-0.25	-0.25	-0.0026930	0.056293726	0.056293726	1.885601419	0.933789265	Истина
0 -0.25 -0.	-0.25 0	-0.25	-0.25	0	-0.25	-0.0219936	0.010910737	0	0.365463476	0.633364403	Ложь
0 0 0.25 0 -0.25 -0.25 0.028 1.381067942 0.88030618 Ложь 6388 -25.5759 -25.5789 -25.578616 -25.578567 0 0.013214 0 1.381067942 0.88030618 Ложь 6388 -25.5759 -25.5789 -25.578666 -25.578567 0 0 0.013214 0 1.0085 638 -25.5759 -25.5786 -25.578567 0 0 0.001324 0 0 0.003058 1.0085 638 -25.5789 -25.57866 -25.578567 0 0 0.001324 0 0.00011924 0 0 0.0001924 0.0001924 0.0001924 0.0001924 0.0001924 0.0001924 0.0001924 0.000018 0.0001924 0.0001924 0.0001924 0.0001924 0.0001924 0.0001924 0.0001924 0.0001924 0.0001924 0.0001924 0.0001924 0.0001924 0.0001924 0.0001924 0.0001924 0.0001924 0.0001924 0.0001924 0.00	0 -0.25	-0.25	-0.25	-0.25	0	-0.1622314	0.035732717	0	1.196894693	0.851283509	Ложь
638 -25.579 -25.578 -25.578 -25.5785 -25.5785 -25.578567 факторовь 6-05 0 0.00308 -25.578567 -25.578567 факторовь 800 1n(Re) 1n(De) 0.00308216 -25.578567 факторовь 801 1n(Re) 1n(De) 0.00308217 0.00356517 0.00356517 4819 1.63492 0.83988 0.00336517 0.00356517 0.00356517 2303 0.602111 0.021155 0.002385452 0.00356517 0.00356517 2303 0.60211 0.021155 0.002985452 0.002985452 0.002985452	0 0	0.25	0	-0.25	-0.25		0 0.041231121	0	1.381067942	0.880300618	Ложь
6388 -25.5739 -25.5739 -25.7380816 -25.738367 E-05 0 0.00308 0.00011924 0 So) In(Re) In(De) 0.00036517 0.00356517 So) In(Re) In(De) 0.00356517 0.00356517 A819 . L63492 0.83988 . CKO нефликтивных коэффициентов 0.002985452 2303 0.602111 0.21155 . Диверительная 0.02						5	/ Для фиктивных факторов	-			K
E-05 0 0.00308 0.00011924 0 So) In(Re) In(De) Дисперсия 0.00356517 So) In(Re) In(De) CKO нефликтивных 0.00356517 4810 1.163492 0.833988 CKO нефликтивных 0.00356517 2303 0.692111 0.0.21155 Mw ~ So ^{0.0498} De ^{0.1792}	6388 -25.5759	-25.5785 -2	25.5539	-25.73808816 -2	25.5758567						
So) Іп(Re) Іп(De) Дисперсия О.00356517 Алисперсия 4810 1.63492 0.83988 0.00356517 0.00356517 0.00356517 4810 1.63492 0.83988 0.02985452 0.00356517 0.00356517 2303 0.02211 0.02115 0.02115 0.02985452 0.0498 De0.1792	(E-05 0	0 0	0.00308	0.00011924	0			7			
So) In(Re) In(De) востроизволимости 0.00356517 Астроизволимости 0.00356517 Астроизволимости 0.00356517 Астроизволимости 0.00356517 Астроизволимости 0.00356517 Астроизволимости О.00356517 Астроизволимости О.00356517 Астроизволимости О.00356517 Астроизволимости О.00356517 Астроизволимости О.00356517 Астроизволимости Астрои				Дисперсия	¥						
4810 1.63492 0.83988 СКО нефиктивных коэффициентов 0.02983452 4310 1.63492 0.83988 1.6498 0.02983452 4310 1.63492 0.03988 1.6498 0.02983452 4310 1.63492 0.03988 1.6498 0.0498 0.0498 2303 0.0211 0.02115 0.0398 0.0498 0.0498 0.0498	So) In(Re)	In(De)		воспроизводимости 0	0.00356517			ł			
$\frac{1}{2203} \left[\begin{array}{c} 0.0201 \\ 0.06201 \\ 0.02115 \\ 0.02115 \\ 0.02115 \\ 0.02115 \\ 0.000498 \\ De0.1792 \\ De0.1792 \\ 0.098 \\ De0.1792 \\ De0.$	4819 1.63492	0.83988		СКО нефиктивных коэффициентов 0.	.02985452			× -			Г
	5203 0.69211	0.21155		Доверительная вероятность	0.9			1	$Vw \sim So$	$0.0498 De^{0.1792}$	

Рис. 7. Статистический анализ критерия подобия.

МОИСЕЕВ

Исследование воспроизводимости является в этих условиях вспомогательным и предназначено для отделения влияния погрешности измерений от влияния учитываемых факторов. Иная ситуация возникает при анализе прецизионности межлабораторных испытаний. Исследование влияния факторов при этом становится вторичным, а главным становится исследование межлабораторной воспроизводимости [9]. Задачей межлабораторных сравнительных испытаний является анализ компетентности лабораторий, а также их выбраковка по признаку некомпетентности. Ниже разрабатывается статистический алгоритм анализа компетентности лабораторий, участвующих в указанных испытаниях. Алгоритм базируется на предварительной стандартизации проводимых измерений путем преобразования их в соответствующие отношения Стьюдента. Сформулированы условия некомпетентности лаборатории в случае аномально большой ошибки измерений и в случае нескольких умеренных ошибок.

В основе данного анализа лежит подход, предусматривающий сравнительные измерения разнотипных стандартных образцов веществ и материалов, а также их рациональную обработку с использованием методов дисперсионного анализа. Целью последнего является разложение суммарной дисперсии на две величины: дисперсию, обусловленную техникой эксперимента, и дисперсию, вызванную действием исследуемого фактора. В случае многофакторного эксперимента определяются дисперсии, соответствующие различным факторам и их взаимодействиям, а также оценивается статистическая значимость этих величин с учетом ошибки воспроизводимости.

Компетентность лаборатории определяется воспроизводимостью результатов сравнительных испытаний, которая обеспечивается в свою очередь статистической однородностью выборки проведенных измерений. Традиционными методами анализа этой однородности являются сравнительный анализ сериальных дисперсий исследуемой выборки или сериальных стьюдентовых отношений. Довольно часто для решения этой залачи применяются следующие параметрические критерии: Кохрейна, базирующийся на сравнении максимума сериальных дисперсий с их суммой, и Граббса (или Хокинса), базирующийся на анализе аномальности экстремальных значений в сериальных выборках стьюдентовых отношений для измерений.

Предварительным этапом обработки является стандартизация производимых измерений. Для данного стандартного образца она осуществляется путем перехода от измерений характеристики этого образца к дробям Стьюдента, построенным в соответствии с этими измерениями. Последние формируются в соответствии с соотношениями:



где x_i — межлабораторные измерения стандартного образца; m, s — величины среднего и СКО измерений; L — количество лабораторий-участниц.

В этих условиях для решения задачи обработки стандартизированных измерений естественно использовать критерий Хокинса с выборочными средними и СКО, рассчитываемыми по сериальным выборкам. Решающими статистиками в этом случае являются $Y = \max_{i=1...n} \xi_i$ и $y = \min_{i=1...n} \xi_i$, а условия аномальности крайних измерений в серии принимают вид:

$$(2T_{L-1}(H) - 1)^{L} > P, H = \max(|Y|, |y|).$$
(7)

Это условие можно интерпретировать как первое условие некомпетентности: лаборатория, в которой проведено соответствующее ξ измерение, считается некомпетентной.

Еще одно условие некомпетентности связано с подсчетом неудовлетворительных измерений из всех проведенных в данной лаборатории. Удовлетворительными считаются измерения, близкие к среднему *m*, а неудовлетворительными — сильно отклоняющиеся от него. Поскольку эти измерения относятся к различным образцам, они также предварительно стандартизируются путем преобразования в отношения Стьюдента. При переходе к ним удовлетворительными считаются значения дробей, расположенные в окрестности 0, а неудовлетворительными — лежащие вне этой окрестности.

Зададимся вероятностью p неудовлетворительности измерения. Учитывая, что дроби Стьюдента имеют *T*-распределение с L - 1 степенью свободы, находим для порога *H* принятия решения об указанной неудовлетворительности:

$$2T_{L-1}(H) - 1 = 1 - p.$$
(8)

Удовлетворительным считается значение дроби Стьюдента меньшее H, а неудовлетворительным — большее H. Распределение вероятностей количества неудовлетворительных измерений nиз N проведенных в данной лаборатории является биномиальным с параметрами p и N. Задаваясь доверительной вероятностью $P_{\rm II}$ выбраковки по числу неудовлетворительных измерений, получаем решающее правило для указанной выбра-ковки:

$$\sum_{k=0}^{n} C_{N}^{k} p^{k} (1-p)^{N-k} > P_{\text{II}}.$$

Условие (4) интерпретируется как второе условие некомпетентности. Лаборатория, в которой из N проведенных измерений n являются неудовлетворительными, считается некомпетентной при выполнении этого условия и компетентной в противном случае.

Рассмотрим смысл выведенных условий некомпетентности. Для этого сравним условия (6) и (7) в предположении, что $P_{\rm I} = 1 - p$. Предполагая также, что в (6) имеет место равенство, находим из этого сравнения, что $\xi > H$. Таким образом, первое условие некомпетентности выполняется в случае аномальной ошибки хотя бы одного из проведенных измерений. Второе условие означает, что лаборатория считается некомпетентной в случае нескольких умеренных ошибок в проведенных измерениях.

Модифицированный алгоритм контроля межлабораторной воспроизводимости применяется в условиях возможного изменения измеряемых величин. Использование выравнивания измерений путем перехода к дробям Стьюдента позволяет применять его без всяких ограничений. Все это дает возможность упростить алгоритм контроля воспроизводимости и использовать его в качестве основы для коррекции стандартных методик указанного контроля.

Эффективность применения дробных реплик полного факторного плана возрастает с ростом числа нефиктивных факторов. Она также зависит от удачного выбора системы смешивания линейных эффектов с эффектами взаимодействия факторов, а также рациональности схемы факторных экспериментов в случае значимости отдельных взаимодействий. При этом априорные сведения об указанных взаимодействиях зачастую оказываются не только желательными, но и необходимыми. Ниже рассмотрен несколько иной, интуитивный метод ранжирования факторов в линейно-регрессионной модели с использованием насыщенных планов и последующем отсеивании наименее нагруженных факторов [10]. Его основным преимуществом, наряду с простотой реализации, является использование при анализе только нефиктивных факторов.

Предварительным этапом рассматриваемого подхода является ранжирование факторов по значимости с использованием насыщенных планов. Этим планам соответствует линейно-регрессионная модель вида $\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + + b_k x_k$, коэффициенты которой определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} b_0 + b_1 x_{11} + \dots + b_k x_{k1} = y_1; \\ \dots \\ b_0 + b_1 x_{1k} + \dots + b_k x_{kk} = y_N. \end{cases}$$
(9)

Матрица этой системы является невырожденной матрицей насыщенного плана и вследствие этого указанная система разрешается однозначно. Значимость факторов $x_1, ..., x_k$ в линейно-регрессионной модели будем определять относительными нагрузками $L_i = \frac{|b_i|}{\Delta}$, где $\Delta = y_{max} - y_{min}$ диапазон измерений в серии, i = 1, ..., k. Рассмотрим ситуацию, когда число k исследуемых факторов удовлетворяет условию $2^n - 1 = l < k < 2^{n+1} - 1$, где n - число факторов полного факторного эксперимента, соответствующего регулярному насыщенному плану. Этой ситуации соответствует набор регулярных насыщенных планов для l факторов, выбранных из общего числа факторов k. Число этих планов и, следовательно, необходи-

мое число серий экспериментов равно $P = C_k^l$.

Воспользуемся для построения указанных планов методом производящих функций. Последние представляют собой формальные степенные ряды. конечные или Тейлора для аналитической функции. В случае комбинаторного анализа сочетаний используется тот факт, что при образовании сочетания осуществляется независимый отбор элементов. Правило умножения вероятностей позволяет использовать представление производящей функции в виде произведения линейных двучленов от независимой переменной. Коэффициенты разложения этого произведения соответствуют коэффициентам при различных сочетаниях. Предположим в качестве примера, что исследуется влияние пяти факторов с помощью планов, охватывающих три фактора. Производящая функция в этом случае имеет вид $\Pi(t) = (1 + x_1 t) \cdot ... \cdot (1 + x_5 t)$. После проведения перемножения находим для коэффициентов при степенях *t*:

$$t^{0}: 1;$$

$$t^{1}: x_{1} + \dots + x_{5};$$

$$t^{2}: x_{1}x_{2} + x_{1}x_{3} + x_{2}x_{3} + x_{1}x_{4} + x_{2}x_{4} + x_{3}x_{4} + x_{1}x_{5} + x_{2}x_{5} + x_{3}x_{5} + x_{4}x_{5};$$

$$t^{3}: x_{1}x_{2}x_{3} + x_{1}x_{2}x_{4} + x_{1}x_{3}x_{4} + x_{2}x_{3}x_{4} + x_{1}x_{2}x_{5} + x_{1}x_{3}x_{5} + x_{1}x_{4}x_{5} + x_{2}x_{3}x_{5} + x_{2}x_{4}x_{5} + x_{3}x_{4}x_{5};$$

$$t^{4}: x_{1}x_{2}x_{3}x_{4} + x_{1}x_{2}x_{3}x_{5} + x_{1}x_{2}x_{4}x_{5} + x_{1}x_{3}x_{4}x_{5} + x_{2}x_{3}x_{4}x_{5};$$

$$t^{5}: x_{1}x_{2}x_{3}x_{4}x_{5}.$$

Эти коэффициенты интерпретируются как наборы насыщенных планов, соответствующих выборкам определенного числа факторов из пяти.

Выборкам, включающим три фактора из пяти, соответствует коэффициент при t^3 , т.е. набор планов вида $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4$ $+ x_1x_2x_5 + x_1x_3x_5 + x_1x_4x_5 + x_2x_3x_5 + x_2x_4x_5$, соответствующих репликам 2⁵⁻³. Для каждого из выбранных по такому принципу планов проводится серия троекратно повторяющихся экспериментов. Коэффициенты регрессии для каждого из этих планов рассчитываются однозначно в соответствии с (8), где $y_1, ..., y_N$ интерпретируются как медианы повторяющихся измерений. В свою очередь, по найденным коэффициентам рассчитываются нагрузки для факторов, охватываемых данной серией. Поскольку каждый фактор охватывается *P* – 1 серией экспериментов, для него получается то же число относительных нагрузок $L_{i1}, ..., L_{iP-1}$, рассчитываемых с учетом изменения диапазона измерений от серии к серии. Характеристиками значимости факторов считаются максимальные нагрузки из полученных L_{imax} = $= \max(L_{i1}, ..., L_{iP}), i = 1, ..., k$, по которым и осушествляется ранжирование.

Относительные максимальные нагрузки $L_{1 \max}, ..., L_{k \max}$ можно также использовать для рационального отсеивания незначимых факторов. Предположим без ограничения общности, что ряд L_{1max}, ..., L_{kmax} представляет собой результат ранжирования нагрузок по убыванию, и образуем эквивалентный ряд $\frac{L_{1 \max}}{L}, \dots, \frac{L_{k \max}}{L}$, где $L = L_{1 \max}$. Выставим порог по значимости, например, h == 0.05, и все факторы, удовлетворяющие условию $\frac{L_{i \max}}{h} < h$, будем считать незначимыми. Этот интуитивный метод отсеивания более прост в сравнении с традиционным статистическим отсеиванием. Его основным преимуществом, наряду с простотой реализации, является использование при анализе только нефиктивных факторов. Основным же недостатком, наряду с интуитивностью, является отсутствие регулярной методики выбора порога значимости, который приходится выбирать интуитивно.

Проведенное рассмотрение показывает, что статистическая составляющая виртуального инструментария охватывает широкий круг задач обработки результатов квалификации. Используемые при этом процедуры приведены к аналитическому виду и обеспечивают достаточную строгость анализа. Вместе с тем, они базируются на стандартных подходах и сравнительно просты в обращении.

выводы

1. Важной составляющей виртуализационного инструментария является статистическая составляющая для решения следующих задач: идентификации статистических моделей по результатам квалификационных испытаний, параметризации критериальных моделей для проведения прогнозирования в рамках виртуальной квалификации, синтеза регрессионных моделей, статистического анализа их адекватности и последовательной оптимизации в ходе факторного планирования. При этом линейность регрессионной модели позволяет осуществить контроль значимости факторов и полноты их системы с использованием традиционных статистических методов, а также оптимизацию параметров с помощью методов линейного программирования.

2. Идентификация распределений измерений различных параметров нефтепродуктов указывает на их ненормальность. В качестве альтернативной аппроксимации бимодального распределения плотности было предложено использовать многопараметрическое распределение, представляющее собой сумму различающихся нормальных. Одномодальные распределения прочих характеристик аппроксимируются по Вейбуллу. Параметризация построенных распределений осуществлялась методом моментов, что обеспечивает удовлетворительность используемых аппроксимаций.

3. Для оценки воспроизводимости результатов квалификационных экспериментов были построены аналитические распределения статистики Кохрейна на базе *F* -распределения Фишера и статистики Граббса на базе *T*-распределения Стьюдента. Показано, что предварительная нормализация позволяет избежать необоснованного заключения о неоднородности исследуемых выборок. Тем самым снижается вероятность ошибки первого рода при принятии решения о воспроизводимости результатов квалификационного эксперимента.

4. Параметризацию критериальной модели по результатам квалификационных испытаний предложено проводить по результатам прогнозирования эффекта в экстремальных условиях, что позволяет сформировать гарантированные квалификационные нормативы. Предварительный выбор экстремальных условий испытаний при квалификационном нормировании предложено осуществлять методом последовательных приближений с использованием факторного планирования.

5. Предложен подход для обоснования инвариантности широкого класса критериев подобия. Подход базируется на интерпретации логарифма критерия как линейной формы от логарифмов чисел подобия, трактуемых как независимые факторы. Оценка коэффициентов указанной формы нагрузок факторов — осуществляется с использованием факторного анализа и включает также доказательство адекватности указанного представления. Преимуществом предложенного подхода является возможность его применения без ограничений общности.

6. Разработан интуитивный метод ранжирования факторов в линейно-регрессионной модели с использованием насыщенных планов и последующем отсеивании наименее нагруженных факторов. Его основным преимуществом, наряду с простотой реализации, является использование при анализе только нефиктивных факторов, а основным недостатком — отсутствие регулярной методики установления порогов значимости, который приходится выбирать интуитивно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Моисеев А.А.* Виртуализационный инструментарий и его применение // Промышленные АСУ и контроллеры. 2016. № 11. С. 15.
- Моисеев А.А. Модифицированные критерии статистической однородности // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 11. С. 20.
- Шаталов К.В., Моисеев А.А. Проверка нормальности распределения погрешностей измерения при оценке качества нефтепродуктов / Труды 25 ГОСНИИ МО РФ, Вып. 57. М., "Перо", 2016. С. 360.

- 4. *Моисеев А.А.* Аппроксимация распределения погрешности измерений характеристик нефтепродуктов // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 9. С. 30.
- Моисеев А.А. Модифицированный алгоритм контроля воспроизводимости межлабораторных испытаний. 2016. № 9. С. 16.
- 6. *Моисеев А.А.* Критериальное моделирование в формировании квалификационных нормативов / Труды XI международной научно-технической конференции "Трибология машиностроению", М., 2016. С. 161.
- 7. *Моисеев А.А.* Факторное планирование в анализе критериев подобия // Вестник НИЯУ МИФИ. 2016. Т. 5. № 4. С. 303.
- 8. *Моисеев А.А.* Критериальная модель квалификационных испытаний на износ // Инженерная физика. 2015. № 12. С. 30.
- 9. *Моисеев А.А.* Статистический анализ компетентности при межлабораторных испытаниях // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2017. № 1 (16), (http://moit.vivt.ru/).
- Моисеев А.А. Интуитивный метод ранжирования факторов по значимости // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2017. № 1 (16). (http://moit.vivt.ru/).

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 1, pp. 66-81

Statistical Methods in Virtualization

A. A. Moiseev[#]

NPP Technos-RM (Technos-RM Research and Production Enterprise), Mytischi, 141002, Russia

[#]e-mail: slow.coach@yandex.ru

Received April 23, 2019; revised August 31, 2019; accepted September 17, 2019

Abstract-Essential component of virtual tool is statistical one used for statistical models identification on qualification tests results, criteria models parameterization for forecasting at qualification tests, regression models synthesis, their optimization and adequateness analysis at factor planning. Regression model linearity allows controlling factors significance using standard statistical methods and performing model optimization using linear programming. At oils characteristics identification their non-normality was shown. To form rational processing algorithms some alternative approximations were formed. Bimodal density distribution was approximated with sum of different normal ones. One – modal distributions of other characteristics were approximated with Weibull distributions. Parameterization of these distributions was performed using moment's method. For reproducibility estimation analytical Cochran distribution on the base of Fisher distribution and analytical Grabbs distribution on the base of Student distribution were developed. It was shown that preliminary normalization allows avoiding error decision about result reproducibility. Criteria model parameterization was proposed to perform on effect forecast at extremal conditions that allows to guaranty qualification normative. Preliminary choice of these conditions is realized by using step-by-step approach in the course of factor analysis. Developed method for similarity criteria synthesis is based on criterion logarithm presentation as linear form of some similarity numbers interpreted as independent factors. Coefficients of this form were estimated using factor analysis. Also the intuitive method of factors ranking in linear form using saturated plans and least significant factors rejection was developed. Its base advantage is fictive factors exclusion and base disadvantage - regular method absence for significance thresholds set.

Keywords: tool, identification, parameterization, criteria model, forecasting, regression model, factor planning, linear programming, bimodal distribution, approximation, Cochran statistics, Grabbs statistics, qualification normative, similarity criterion, similarity number, fictive factor, significance, ranking

DOI: 10.1134/S2304487X19060063

REFERENCES

- 1. *Moiseev A*. Virtualizasionnyj instrumentarij i ego primenenie [Virtualization's tool and its application] // Industrial Automatic Control Systems and Controllers, № 11, 2016, p. 16.
- 2. *Moiseev A*. Modifitsirovannye kriterii statisticheskoy neodnorodnosti [Modified criteria of statistical inhomogeneity] // Industrial Automatic Control Systems and Controllers, № 11, 2015, p. 20.
- 3. Shatalov K., Moiseev A. Proverka normalnosti raspredeleniya pogreshnostej izmereniya pri otsenke katshestva nefteproduktov [Normality control of measurements distribution at oils quality estimation] / Proceedings of State himmotology institute, issue 57, M., "Pero", 2016, p. 360.
- 4. *Moiseev A*. Approksimatsia raspredeleniya pogreshnosti izmerenij kharakteristik nefteproduktov [Error distributions approximations for measurements of oils characteristics] // Industrial Automatic Control Systems and Controllers, № 9, 2015, p. 30.
- Moiseev A. Modifitsirovannyj algoritm kontrolya vosproizvodimosti mezhlaboratornykh ispytanij [Modified control algorithm of inter – laboratory tests repro-

ducibility] // Industrial Automatic Control Systems and Controllers, № 9, 2016, p. 16.

- Moiseev A. Kriterianoe modelirovaiie v formirovanii kvalifikatsionnykh normativov [Criteria modeling at qualification normative forming] / Proceedings of XI international scientific conference "Tribology to machine-building", M., 2016, p. 161.
- Moiseev A. Faktornoe planirovanie v analize kriteriev podobiya [Factor's planning at similarity criteria analysis] // Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2016, vol. 5, no. 4, pp. 303.
- Moiseev A. Kritrialnaya model kvalifikatsionnykh ispytanij na iznos [Criteria model of wear qualification tests] // Engineering physics, 2015, no. 12, p. 30.
- 9. *Moiseev A.* Statistitsheskij analiz kopetentnosti pri mezhlaboratornykh ispytanoyakh [Statistical competence analysis at inter – laboratoty tests] // Modeling, optimization and information technologies, 2017, № 1(16), (http://moit.vivt.ru/).
- 10. *Moiseev A*. Intuitivnyj metod ranzhirovaniya faktorov po znatshimosti [Intuitive method of factors ranking on significance] // Modeling, optimization and information technologies, 2017, № 1(16), (http://moit.vivt.ru/).

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 1, с. 82–90

> _ ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА _____ И ИНФОРМАТИКА

УДК 004.85

ВЛИЯНИЕ КОРРЕЛЯЦИИ СПАЙКОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НА ОБУЧЕНИЕ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ SPIKE-TIMING-DEPENDENT PLASTICITY

© 2020 г. А. Г. Сбоев^{1,2,*}, Р. Б. Рыбка^{2,**}, А. В. Серенко^{2,***}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия ² Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", Москва, 123182, Россия

*e-mail: sag111@mail.ru **e-mail: rybkarb@gmail.com ***e-mail: serenko@phystech.edu Поступила в редакцию 19.12.2019 г. После доработки 19.12.2019 г. Принята к публикации 21.01.2020 г.

Рассматривается возможность обучения двуслойной спайковой нейронной сети на основе STDP с использованием эффекта стабилизации выходной частоты. Численными симуляциями показано, что при достаточно большой корреляции между входными спайковыми последовательностями нейрона стабилизация его средней выходной частоты под действием STDP не происходит из-за недостаточной конкуренции входных синапсов. Для двуслойной сети показано, что спайки, поступающие на вход нейронов второго слоя, могут коррелировать из-за частичного совпадения установившихся под действием STDP весов первого слоя. Чтобы добиться стабилизации выходной частоты второго слоя, предложен способ уменьшить корреляцию выходных спайков нейронов первого слоя путем увеличения количества их входов, что уменьшит близость весов, установившихся под действием STDP у различных нейронов первого слоя. Возможность применения двуслойной сети с размножением входов к решению задачи классификации продемонстрирована на тестовой задаче ирисов Фишера, и точность классификации составила 93% по метрике F1, что находится на одном уровне с существующими в литературе подходами к обучению спайковых сетей при кодировании входных данных средними частотами входящих спайковых последовательностей.

Ключевые слова: спайковые нейронные сети, синаптическая пластичность, машинное обучение **DOI:** 10.1134/S2304487X20010083

1. ВВЕДЕНИЕ

Модели биологических (спайковых) нейронных сетей приобретают в последнее время все большую актуальность для применения в задачах машинного обучения благодаря прогрессу в возможности их аппаратной реализации на нейроморфных вычислительных устройствах с чрезвычайно низким энергопотреблением [1–4]. Применение спайковых сетей к решению задачи классификации включает в себя три компонента: способ кодирования входных данных во входящие спайковые последовательности, механизм обучения сети, и способ декодирования выходной активности нейронов в результат классификации.

Один из общепринятых [5] способов кодирования данных — частотный, в котором компоненты входного вектора отображаются в частоты пуассоновских спайковых последовательностей, подаваемых на входящие синапсы сети. Одним из возможных подходов к созданию и обучению спайковой сети, решающей задачу классификации с частотным кодированием данных, является перенос синаптических весов с предварительно обученной формальной нейронной сети той же топологии. Однако более актуальны алгоритмы обучения спайковой сети на основе локальных правил синаптической пластичности, таких, как Spike-Timing-Dependent Plasticity (STDP) [6], ввиду возможности реализации последней на мемристорных устройствах. Существует несколько работ, посвященных решению задачи классификации спайковой сетью на основе STDP с частотным кодированием входных данных. Сеть [7] из одного слоя возбуждающих нейронов с STDP-пластичностью входных синапсов, в которой каждый возбуждающий нейрон тормозил своей активностью все остальные (посредством слоя тормозящих нейронов с фиксированными связями), обучалась распознаванию рукописных цифр MNIST.

В другой работе [8] набор из трех не связанных между собой нейронов обучался классифицировать ирисы Фишера, при этом обучение было основано на эффекте стабилизации под действием STDP средней выходной частоты нейрона [9–11].

Но обе приведенные выше сети с частотным кодированием данных были однослойными. В многослойной же сети прямого распространения при частотном кодировании существует принципиальное различие между первым слоем и последующими: на вход первого слоя поступают сгенерированные независимые пуассоновские последовательности спайков, а последующие слои получают спайки, испущенные нейронами предыдущих слоев, и эти спайки могут коррелировать между собой в зависимости от степени совпадения синаптических весов нейронов, их испускающих. Такая корреляция может существенно влиять [12] на веса, устанавливающиеся под действием STDP. В частности, может не выполняться эффект стабилизации выходной частоты. Поэтому цель данной статьи — изучить влияние взаимной корреляции последовательностей спайков на обучение двуслойной нейронной сети под действием STDP.

В разделе 3 численными экспериментами на примере одного нейрона Integrate-and-Fire с искусственно сгенерированными входными спайковыми последовательностями показано, что при наличии корреляции между входными последовательностями не выполняется эффект стабилизации под действием STDP выходной частоты нейрона. В разделе 4 представлено, что когда нейрон находится во втором слое двуслойной нейронной сети, входы этого нейрона коррелируют между собой достаточно сильно, чтобы стабилизация выходной частоты не происходила. Предложен способ подавления корреляции выходов нейронов первого слоя путем увеличения количества входящих синапсов этих нейронов. В разделе 5 с применением данного способа продемонстрирована возможность обучения двуслойной нейронной сети решению задачи классификации ирисов Фишера.

2. МЕТОДЫ

2.1. Модель синаптической пластичности

Рассматривается разновидность Spike-Timing-Dependent-Plasticity, для которой был ранее показан [11] эффект стабилизации выходной частоты, аддитивная STDP с ограниченной симметричной схемой учета пар спайков.

В этой модели изменение синаптического веса *w* зависит только от разности момента пресинаптического спайка t_{npe} и момента постсинаптического спайка t_{nocr} :

$$\Delta w = \begin{cases} -\alpha \lambda \exp\left(-\frac{t_{\text{пре}} - t_{\text{пост}}}{\tau^{-}}\right) & \text{при} \quad t_{\text{пре}} - t_{\text{пост}} > 0; \\ \lambda \exp\left(-\frac{t_{\text{пост}} - t_{\text{пре}}}{\tau^{+}}\right) & \text{при} \quad t_{\text{пре}} - t_{\text{пост}} < 0. \end{cases}$$

Здесь константа λ определяет максимальную величину отдельного изменения веса; ее целесообразно брать настолько малой, насколько позволяют вычислительные ресурсы; у синапсов нейрона в разделе 3, а также в первом слое двуслойной сети в разделах 4 и 5 она была взята равной 0.01. Остальные константы были взяты как в литературе [13]: $\alpha = 1.035$, $\tau^+ = \tau^- = 20$ мс. Для второго слоя сети константы подбирались отдельно.

В ограниченной симметричной схеме учета пар спайков произошедший постсинаптический спайк приводит к увеличению веса по правилу 1, при этом в качестве *t*_{пре} учитывается ближайший предшествовавший пресинаптический спайк, но только в том случае, если между ним и текущим пост-спайком не было других пост-спайков. Аналогично, приход на синапс пресинаптического спайка приводит к уменьшению веса, при этом в качестве t_{пост} учитывается ближайший предшествовавший постсинаптический спайк, но только в том случае, если между ним и текущим преспайком не было других пре-спайков. Таким образом, каждый постсинаптический и пресинаптический спайк может не учитываться не более чем в одном акте увеличения веса и одном акте **уменьшения** веса.

Чтобы не позволить весу превысить 1 или упасть ниже 0, при каждом изменении веса после вычисления Δw применяется дополнительное условие: если $w + \Delta w > w_{max}$, то $\Delta w = w_{max} - w$; если $w + \Delta w < 0$, то $\Delta w = -w$.

2.2. Модель нейрона — пороговый сумматор без утечки

В разделе 3 в качестве модели нейрона использовался пороговый интегратор без утечки (Integrate-and-Fire), в котором при приходе входного спайка на *i*-й синапс с весом w_i мембранный потенциал (безразмерный) скачком повышается на w:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i} \sum_{t_{\rm sp}^{i}} w_{i}(t) \delta(t - t_{\rm sp}^{i})$$

где t_{sp}^{i} — моменты прихода входных спайков на *i*-й синапс. При превышении потенциалом порога $V_{th} = 100$ нейрон испускает спайк, и потенциал скачком сбрасывается до 0. Рефрактерность отсутствует.

Данная модель нейрона была выбрана за свою простоту, при этом эффект стабилизации выходной частоты, как было показано ранее [14], вы-

полняется для нее так же, как и для интегратора с утечкой (Leaky Integrate-and-Fire).

Нейрон имел 40 входящих синапсов (количество синапсов не влияет на качественный результат экспериментов и ограничено лишь вычислительными ресурсами), на 20 поступали независимые пуассоновские последовательности спайков, а на другие 20 – набор последовательностей, все из которых попарно коррелировали между собой с заданным коэффициентом корреляции Пирсона с. Средние частоты всех входных последовательностей, и коррелирующих, и некоррелирующих, были одинаковы в ходе симуляции, но различались в различных экспериментах. В начале симуляции все веса устанавливались равными 0.1: это значение было выбрано, поскольку его достаточно для того, чтобы нейрон был способен испускать спайки при всех используемых входных частотах; при этом начальное значение веса, как было показано ранее, не оказывает существенного влияния на распределение весов, устанавливающееся под действием STDP.

2.3. Модель нейрона – сумматор с утечкой

В разделах 4 и 5 используется модель нейрона, часто применяемая в экспериментах по обучению, — Leaky Integrate-and-Fire. В ней мембранный потенциал подчиняется уравнению

$$\frac{dV}{dt} = \frac{-(V(t) - V_{\text{rest}})}{\tau_{\text{m}}} + \frac{I_{\text{syn}}(t)}{C_{\text{m}}},$$

где потенциал покоя нейрона V_{rest} взят равным — 70 мВ, константа времени утечки $\tau_{\text{m}} = 10$ мс, емкость мембраны C_{m} выбиралась различной в разных экспериментах в зависимости от количества входящих синапсов. При превышении потенциалом порога $V_{\text{th}} = -54$ мВ нейрон испускает спайк, и потенциал скачком сбрасывается до V_{rest} .

Входящий постсинаптический ток имел экспоненциальную форму

$$I_{\rm syn} = \sum_{i} \sum_{t_{\rm sp}^{i}} w_{i}(t_{\rm sp}^{i}) \frac{q_{\rm syn}}{\tau_{\rm syn}} e^{\frac{-t-t_{\rm sp}^{i}}{\tau_{\rm syn}}} \Theta(t-t_{\rm sp}^{i}),$$

где $\tau_{\rm syn} = 5$ мс, $q_{\rm syn} = 5$ фКл, Θ — функция Хевисайда.

2.4. Метод генерации коррелирующих последовательностей спайков

В разделе 3 для генерации последовательностей спайков, коррелирующих между собой с заданным коэффициентом *с* и при этом имеющих одинаковую среднюю частоту *r*, использовался алгоритм, предложенный в литературе [12]. Моменты спайков измеряются с точностью до временного шага симуляции $\delta t = 0.1$ мс. Вначале генерируется эталонная пуассоновская последовательность S_0 средней частоты r путем прохода по дискретным временным шагам и генерации спайка с вероятностью $P(S_0 = 1) = r\delta t$ на каждом временном шаге (1 обозначает наличие спайка, 0 – отсутствие спайка). Затем каждая из 20 коррелирующих последовательностей S_i создается из эталонной последовательности по следующему правилу: временной шаг, содержащий спайк в эталонной последовательности, с вероятностью $P(S_i = 1 | S_0 = 0) = \Theta$ будет содержать спайк и в производной последовательности; с вероятностью $P(S_i = 0 | S_0 = 0) = 1 - \Theta$ данный временной шаг в производной последовательности будет пустым. Если же на данном временном шаге эталонная последовательность не содержит спайка, то в производной последовательности на этом шаге спайк может возникнуть с вероятностью $P(S_i = 1 | S_0 = 0) = \phi.$

ф выбирается так, чтобы частота производных последовательностей равнялась частоте эталонной последовательности *r*:

$$\varphi = r \delta t (1 - \sqrt{c}).$$

Действительно, тогда $M[S_i] = P(S_i = 1|S_0 = 1) + P(S_i = 1|S_0 = 0) = r\delta t$.

О выбирается так, чтобы коэффициент корреляции Пирсона между двумя производными последовательностями равнялся *c*:

$$\Theta = r\delta t + (1 - r\delta t)\sqrt{c}.$$

Действительно, тогда частота совместной встречаемости спайков в любых двух производных последовательностях $M[S_iS_j] = P(S_i = 1, S_j =$ $= 1) = P(S_0 = 1)P(S_i = 1|S_0 = 1)P(S_j = 1|S_0 = 1) +$ $+ P(S_0 = 0)P(S_i = 1|S_0 = 0)P(S_j = 1|S_0 = 0) =$ $= r\delta t\Theta^2 + (1 - r\delta t)\varphi^2$. Учитывая, что дисперсия $D[S_i] = r\delta t(1 - r\delta t)$, коэффициент корреляции между S_i и S_j

$$\frac{M[S_iS_j] - M[S_i]M[S_j]}{\sqrt{D[S_i]D[S_j]}} = c.$$

3. ВЛИЯНИЕ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ВХОДНЫХ СПАЙКОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НА УСТАНОВИВШЕЕСЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕСОВ НЕЙРОНА

3.1. Методика эксперимента

Чтобы изучить, как корреляция входных спайковых последовательностей влияет на конкуренцию входов между собой за вклад в выходную спайковую активность нейрона, моделировался нейрон Integrate-and-Fire (описанный в разделе 2.2), на половину входов которого поступали незави-



Рис. 1. Количество весов, установившихся вблизи 1, в группе коррелирующих входов и в группе независимых входов, в зависимости от коэффициента корреляции с группы коррелирующих входов. Средняя частота всех входных последовательностей спайков составляла 20 Гц. Погрешность приведена по 5 запускам с различными сгенерированными входными спайковыми последовательностями.

симые последовательности спайков, а на другую – коррелирующие. При этом исследовалось влияние величины корреляции входных последовательностей на распределения установившихся под действием STDP синаптических весов в обеих половинах входов – коррелирующей и независимой. Далее проверялось, выполняется ли эффект стабилизации выходной частоты нейрона при наличии корреляции во входах. Для этого при различных входных частотах выходная частота нейрона при установившихся под действием STDP весах, сравнивалась с установившейся выходной частотой, полученной при отсутствии корреляции во входах.

3.2. Результаты

Под действием рассматриваемой аддитивной разновидности STDP устанавливается бимодальное распределение синаптических весов: после длительной симуляции каждый вес устанавливается либо вблизи своего максимального значения. 1. либо вблизи минимального значения. 0. Дальнейшие флуктуации весов, вызванные случайным характером отдельных актов изменения, происходят в пределах [0;0.2] и [0.9;1]. При этом при уменьшении константы λ, управляющей максимальной величиной отдельного изменения веса, эти интервалы уменьшаются, поэтому ими можно пренебречь и описывать стационарное распределение весов количеством весов, установившихся вблизи 1 и вблизи 0 (далее для краткости – выживших и отмерших весов).

На рис. 1 приведена зависимость количества выживших весов в группах коррелирующих и независимых входов от корреляции c входов в коррелирующей группе. При c < 0.01 в коррелирующей и независимой группах выживает одинако-



Рис. 2. Вверху: количество весов, установившихся вблизи 1, в группе коррелирующих входов и в группе независимых входов, в зависимости от входной частоты, при корреляции c = 0.01 между входными последовательностями коррелирующей группы входов; а также, для сравнения, количество выживших весов при c = 0. Внизу: выходная частота при весах, установившихся под действием STDP; в том числе, для сравнения, при c = 0, то есть в случае, когда на все входы нейрона поступали независимые последовательности.

вое количесво весов. В диапазоне от 0.01 до 0.05 с ростом c количество выживших весов в коррелирующей группе увеличивается, а в независимой группе — уменьшается, что указывает на то,что под действием STDP происходит конкурентная борьба входов между собой, в которой коррелирующие входы получают преимущество. c > 0.05 оказывается достаточно большой для того, чтобы при выбранных параметрах нейрона и STDP все веса в коррелирующей группе входов выживали.

На рис. 2 при c = 0.01 (что, согласно приведенным выше результатам, соответствует относительно небольшой корреляции) менялась входная частота. В коррелирующей группе выживает немного больше входов, чем в независимой, но с ростом входной частоты количество выживших входов уменьшается в обеих группах. Рис. 2 (внизу) показывает, что выходная частота при установившихся таким образом весах одинакова при любой входной частоте от 20 Гц до 100 Гц, демонстрируя таким образом эффект стабилизации вы-



Рис. 3. Зависимость выживших весов (вверху) и установившейся выходной частоты (внизу) от входной частоты при корреляции c = 0.5 между входными последовательностями коррелирующей группы входов и, для сравнения, при c = 0. Погрешности показывают разброс по 5 запускам.

ходной частоты. Для сравнения на том же графике зависимости числа выживших весов (из всех 40) и установившейся выходной частоты от входной приведена для c = 0, и видно, что при c = 0.01стабилизация выходной частоты происходит в том же диапазоне входных частот, что и при c = 0.

На рис. 3 та же зависимость, что на рис. 2, приведена для c = 0.5 — значения, которое, согласно результатам рис. 1, соответствует достаточно большой корреляции. Теперь при входной частоте до 500 Гц в коррелирующей группе входов выживают все веса. В независимой же группе входов, как и на рис. 2, с ростом входной частоты уменьшается количество выживших входов, до тех пор, пока не отмирают все из них. Что касается установившейся выходной частоты, то в диапазоне от 50 Гц до 500 Гц, поскольку распределение установившихся весов неизменно, выходная частота линейно растет с ростом входной.

Таким образом, при достаточно большой корреляции входных спайковых последовательностей стабилизации выходной частоты не происходит. В следующем разделе изучается возможность стабилизации выходной частоты нейрона второго слоя двуслойной сети.



Рис. 4. Выходная частота нейрона второго (вверху) и первого (внизу) слоя сети при случайных начальных весах и при весах, установившихся под действием STDP. Погрешность показывает разброс между нейронами слоя.

4. ВЛИЯНИЕ КОРРЕЛЯЦИИ АКТИВНОСТИ НЕЙРОНОВ ПЕРВОГО СЛОЯ СЕТИ НА УСТАНОВИВШУЮСЯ ЧАСТОТУ ВТОРОГО СЛОЯ

4.1. Методика эксперимента

Чтобы выяснить возможность стабилизации выходной частоты нейрона, на вход которого поступают выходные спайки нейронов предыдущего слоя сети, моделируется двуслойная сеть со 100 нейронами в первом слое и 10 во втором. На вход сети поступают 100 пуассоновских последовательностей одинаковой средней частоты, которые подаются на 100 входящих синапсов каждого из нейронов первого слоя. Начальные веса всех синапсов выбираются из равномерного распределения от 0 до 1.

Константа STDP λ для второго слоя выбиралась достаточно малой, чтобы в процессе эволюции весов второй слой не перестал спайковать в случае спонтанного одновременного уменьшения весов первого и второго слоев.

4.2. Результаты

На рис. 4 (вверху) приведена выходная частота нейрона второго слоя при случайных начальных весах и при весах, установившихся под действием STDP. При начальных весах выходная частота растет с ростом входной, пока не достигает максимально возможной для нейрона с рефрактерностью τ_{ref} частоты $\frac{1}{\tau_{ref}} \approx 300$ Гц. Однако частота при весах, установившихся под действием STDP, тем меньше, чем больше входная частота. Для сравнения на рис. 4 (внизу) приведена также установившаяся выходная частота нейрона первого слоя: в первом слое, получающем некоррелирующие входные последовательности, происходит стабилизация выходной частоты.

Причина обратной зависимости установившейся выходной частоты второго слоя от входной частоты первого слоя состоит в том, что с ростом входной частоты частота выходных спайков первого слоя остается неизменной. но корреляния их уменьшается. Действительно, чем больше входная частота, тем меньше выживает входов первого слоя (обеспечивая постоянство выходной частоты). Следовательно, тем меньше входов первого слоя случайно окажутся выжившими одновременно у нескольких нейронов, и тем меньше вероятность. что один и тот же входной спайк приведет к выходному спайку одновременно нескольких нейронов. Но чем меньше корреляция выходных спайков первого слоя, тем меньше весов выживут во втором слое, и, соответственно, тем меньше его установившаяся выходная частота.

Из данного результата следует, что стабилизация выходной частоты второго слоя возможна при низкой корреляции выходных спайков первого слоя. Уменьшения корреляции выходов первого слоя можно добиться следующими способами.

1. Высокая входная частота первого слоя (на рис. 4 – больше 50 Гц).

2. Большое число входов нейронов первого слоя. Это должно понизить в первом слое количество совпадающих выживших входов, поскольку вследствие эффекта стабилизации выходной частоты количество выживших входов зависит только от входной частоты и констант STDP и нейрона, но не зависит от общего числа входов.

 Тормозящие связи между нейронами первого слоя.

В следующем разделе на примере задачи классификации ирисов Фишера применяются способы 1 и 2, но для сравнения также реализуется сеть из литературы с тормозящими входами.

5. ВОЗМОЖНОСТЬ ОБУЧЕНИЯ ДВУСЛОЙНОЙ СЕТИ ПРИ ПОДАВЛЕНИИ КОРРЕЛЯЦИИ В ПЕРВОМ СЛОЕ ПУТЕМ РАЗМНОЖЕНИЯ ВХОДОВ

5.1. Тестовый набор данных

В качестве тестовой задачи классификации используется задача ирисов Фишера. Этот набор данных состоит из 150 цветков, принадлежащих к трем классам, которые соответствуют трем видам — Iris Setosa Canadenisis, Iris Virginica и Iris Versicolor, по 50 цветков в каждом. Цветок описывается вектором из 4 компонентов: длина и ширина лепестка и чашелистика (в сантиметрах). При этом первые два класса можно отличить друг от друга линейным разделением в пространстве векторов, а третий класс не отделим линейно от первых двух.

Перед кодированием входных векторов в частоты входных спайковых последовательностей вектора нормировались так, чтобы их евклидова норма равнялась 1.

5.2. Методика эксперимента

Для демонстрации возможности обучения двуслойной сети используется задача классификации ирисов Фишера. При обучении и тестировании моделируются три сети, по одной на каждый класс. Сеть состоит из 60 нейронов Leaky Integrate-and-Fire (описанных в разделе 2.3) в первом слое и одного нейрона во втором слое. Каждый нейрон первого слоя получает на вход комбинацию 2 компонентов входного вектора. Всего из 4 компонентов возможно 6 комбинаций по 2 компонента, и каждая комбинация подается на 10 нейронов. При этом каждому компоненту входного вектора ставится в соответствие 50 входящих синапсов нейрона, на которые поступают независимые пуассоновские последовательности спайков с частотой, пропорциональной значению х нормированного компонента входного вектора: $xv_h + v_1$, где $v_h = 300$ Гц и $v_1 = 3$ Гц. Один входной пример подается в течение 2 с.

STDP-пластичностью обладают входящие синапсы обоих слоев; в первом слое параметры STDP такие же, как в разделах 3 и 4: $\lambda = 0.01$, $\alpha = 1.035$, $\tau^+ = \tau^- = 20$ мс, а во втором слое подбирались отдельно: $\lambda = 7 \times 10^{-3}$ (взята меньше, чем в первом слое, согласно соображениям, приведенным в разделе 4.1), $\alpha = 1.18$, $\tau^+ = 90$ мс, $\tau^- = 8$ мс. Емкость мембраны нейрона C_m в первом слое была выбрана равной 0.55 п Φ , во втором слое – 4.0 п Φ . На этапе обучения каждая сеть получает входные векторы, кодирующие примеры обучающей выборки своего класса. На этапе тестирования STDP выключается (путем выставления $\lambda = 0$ в обоих слоях), на каждую сеть подаются примеры обучающей и тестировочной выборок всех классов, и записываются выходные частоты нейронов второго слоя всех сетей в ответ на входные примеры.

Декодирование выходных частот сетей в результирующие метки классов осуществляется путем обучения традиционного классификатора Decision Tree или Gradient Boosting из библиотеки sklearn на выходных частотах обученной спайковой сети. При этом классификатор обучается на выходных частотах спайковой сети, полученных в ответ на примеры тренировочной выборки, а затем по выходным частотам сети в ответ на примеры тестовой выборки предсказывает их классы. Поскольку для обучения спайковой сети на основе эффекта стабилизации выходной частоты пока не существует устоявшегося способа декодирования, применение для декодирования традиционного классификатора призвано продемонстрировать, что выходные частоты обученной спайковой сети содержат в себе информацию, достаточную для распознавания классов.

Точность классификации оценивается по метрике F1 с применением кросс-валидации: перемешанный случайным образом набор данных делился на 5 частей по 50%, и обучение с тестированием проводились 5 раз, с обучением каждый раз на новой комбинации 4 частей из 5 (то есть на 80% данных, что составляет по 40 примеров из класса) и тестированием на оставшейся 20%-ной части.

Для сравнения эффективности предложенного алгоритма была также адаптирована для задачи классификации ирисов Фишера другая сеть, предложенная в литературе [7] для решения задачи распознавания рукописных цифр MNIST. Эта сеть состояла из олного слоя возбужлающих нейронов и одного слоя тормозящих нейронов. Каждый возбуждающий нейрон связан непластичным синапсом с одним тормозящим нейроном, который, в свою очередь, своей активностью тормозит все остальные нейроны, кроме своего возбуждающего собрата. STDP-пластичностью обладают входящие синапсы возбуждающих нейронов. В каждом слое было по 100 нейронов. Каждый компонент входного вектора подавался на 25 из 100 входных синапсов нейрона; константы отображения компонента входного вектора в частоту входных спайковых последовательностей были так, чтобы получившиеся входные частоты были близкими к исходной работе [7]: $\nu_h = 8 \Gamma \mu, \nu_l = 0 \Gamma \mu.$

5.3. Результаты

При декодировании классов по выходным частотам обученной спайковой сети с помощью классификатора Decision Tree мера точности F1 составила 91% (в среднем по разбиениям кроссвалидации; стандартное отклонение между разбиениями – 5%, минимальное значениесреди разбиений – 83%, максимальное – 97%).

При декодировании с помощью Gradient Boosting средняя F1 составила 93% (стандартное отклонение 5%, минимальная 87%, максимальная 100%).

Сеть с тормозящими связями из литературы показала F1 в 93% (стандартное отклонение меж-

ду разбиениями кросс-валидации – 3%, минимальная 90%, максимальная 97%).

Таким образом, предложенная сеть показывает точность, равную существующим в литературе результатам, используя при этом в два раза меньшее количество нейронов.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Входные синапсы, на которые поступают коррелирующие последовательности спайков, за счет меньшей конкуренции между собой под действием STDP получают преимущество перед входами, на которые поступают независимые пуассоновские последовательности. В результате при достаточно большой корреляции конкуренция между входами оказывается недостаточной для стабилизации выходной частоты.

В двуслойной сети стабилизации выходной частоты нейронов второго слоя можно добиться, уменьшив корреляцию выходных спайков нейронов первого слоя путем увеличения количества их входов.

Обучение на основе STDP двуслойной спайковой сети с использованием предложенного способа размножения входов показывает точность 93%, сравнимую с точностью других подходов к обучению спайковых сетей с частотным кодированием входных данных.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны Р.Б. Кошкину и О.А. Щегорцовой за помощь в проведении вычислительных экспериментов.

Численные симуляции проводились с использованием пакета Neural Simulation Tool (NEST) [15].

Работа выполнена с использованием оборудования центра коллективного пользования "Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса" НИЦ "Курчатовский институт", http://ckp.nrcki.ru/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Srinjoy Mitra, Stefano Fusi, and Giacomo Indiveri. Realtime classification of complex patterns using spikebased learning in neuromorphic VLSI. Biomedical Circuits and Systems, IEEE Transactions on. 2009. V. 3 (1). P. 32–42.
- Paul A. Merolla, John V. Arthur, Rodrigo Alvarez-Icaza, Andrew S. Cassidy, Jun Sawada, Filipp Akopyan, Bryan L. Jackson, Nabil Imam, Chen Guo, Yutaka Nakamura, et al. A million spiking-neuron integrated circuit with a scalable communication network and interface. Science. 2014. V. 345 (6197). P. 668–673.
- 3. *Thomas Pfeil, Tobias C* Potjans, Sven Schrader, Wiebke Potjans, Johannes Schemmel, Markus Diesmann, and Karlheinz Meier. Is a 4-bit synaptic weight resolution

enough? – constraints on enabling spike-timing dependent plasticity in neuromorphic hardware. Frontiers in neuroscience. 2012. V. 6. P. 90.

- Steven K. Esser, Paul A. Merolla, John V. Arthur, Andrew S. Cassidy, Rathinakumar Appuswamy, Alexander Andreopoulos, David J. Berg, Jeffrey L. McKinstry, Timothy Melano, Davis R. Barch, et al. Convolutional networks for fast, energy-efficient neuromorphic computing. Proceedings of the National Academy of Sciences. 2016. P. 201604850.
- 5. *Adrian E.D.* The basis of sensation. W. W. Norton & Co, 1928.
- Morrison A., Diesmann M., and Gerstner W. Phenomenological models of synaptic plasticity based on spike timing. Biological Cybernetics. 2008. V. 98. P. 459– 478.
- 7. *Peter U. Diehl and Matthew Cook*. Unsupervised learning of digit recognition using Spike-Timing-Dependent Plasticity. Frontiers in Computational Neuroscience, 2015.
- Сбоев А.Г., Серенко А.В., Рыбка Р.Б., Власов Д.С. Сравнение частотного и временного кодирования данных при решении спайковой сетью со Spike-Timing-Dependent Plasticity задачи классификации. Вестник национального исследовательского ядерного университета МИФИ. 2018. Т. 7 (6). С. 563–568.
- 9. Richard Kempter, Wulfram Gerstner, and J. Leo van Hemmen. Intrinsic stabilization of output rates by spike-based hebbian learning. Neural computation. 2001. V. 13 (12). P. 2709–2741.
- Eugene M. Izhikevich and Niraj S. Desai. Relating STDP to BCM. Neural computation. 2003. V. 15 (7). P. 1511– 1523.

- Sboev A., Rybka R., and Serenko A. On the effect of stabilizing mean firing rate of a neuron due to STDP. In J. Kortelainen, A. Bilyatdinova, A. Klimova, and A. Boukhanovsky, editors, 6th International Young Scientist Conference on Computational Science. Elsevier BV, 2017. V. 119. P. 166–173.
- Mark C.W. van Rossum, Guo Qiang Bi, and Gina G. Turrigiano. Stable Hebbian learning from Spike Timing-Dependent Plasticity. Journal of neuroscience. 2000. V. 20 (23). P. 8812–8821.
- 13. *Sen Song, Kenneth D.* Miller, and Larry F. Abbott. Competitive Hebbian learning through spike-timingdependent synaptic plasticity. Nature Neuroscience. 2000. V. 3 (9). P. 919–926.
- Sboev A., Rybka R., Serenko A., Vlasov D., Kudryashov N., and Demin V. To the role of the choice of the neuron model in spiking network learning on base of Spike-Timing-Dependent Plasticity. In V. V. Klimov and A. V. Samsonovich, editors, 8th Annual International Conference on Biologically Inspired Cognitive Architectures. Elsevier BV, 2018. V. 123. P. 432–439.
- 15. Susanne Kunkel, Abigail Morrison, Philipp Weidel, Jochen Martin Eppler, Ankur Sinha, Wolfram Schenck, Maximilian Schmidt, Stine Brekke Vennemo, Jakob Jordan, Alexander Peyser, Dimitri Plotnikov, Steffen Graber, Tanguy Fardet, Dennis Terhorst, Håkon Mørk, Guido Trensch, Alex Seeholzer, Rajalekshmi Deepu, Jan Hahne, Inga Blundell, Tammo Ippen, Jannis Schuecker, Hannah Bos, Sandra Diaz, Espen Hagen, Sepehr Mahmoudian, Claudia Bachmann, Mikkel Elle Lepperød, Oliver Breitwieser, Bruno Golosio, Hendrik Rothe, Hesam Setareh, Mikael Djurfeldt, Till Schumann, Alexey Shusharin, Jes'us Garrido, Eilif Benjamin Muller, Arjun Rao, Juan Hernando Vieites, and Hans Ekkehard Plesser. NEST 2.12.0, March 2017.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 1, pp. 82-90

Effect of Spike Train Correlation on Spiking Neural Network Learning by Spike-Timing-Dependent Plasticity

A. G. Sboev^{*a*,*b*,*#*}, R. B. Rybka^{*b*,*##*}, and A. V. Serenko^{*b*,*###*}

^a National Research Centre Kurchatov Institute, Moscow, 123182 Russia

^b National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: sag111@mail.ru,

^{##}e-mail: rybkarb@gmail.com,

###e-mail: serenko@phystech.edu

Received December 19, 2019; revised December 19, 2019; accepted January 21, 2020

Abstract—The possibility for a two-layer spiking neural network with spike-timing-dependent plasticity to be trained using the output rate stabilization effect is studied. Numerical simulations show that high correlation of input spike sequences disrupts the stabilization of the neuron spiking rate because of insufficient competition between input synapses. For a two-layer network, shown spikes coming at the input of the second layer can be correlated because the first-layer weights established by STDP partially coincide. In order to stabilize the output rate of the second layer, a method is proposed to reduce the spike correlation of the first layer of the network by increasing the number of input synapses to decrease the similarity of weights established by spike-timing-dependent plasticity in different first-layer neurons. Then, a two-layer network with the multi-

plication of input synapses is shown to be applicable to a toy classification task of Fisher's Iris. The accuracy of classification is obtained to be 93% by F1-score, which is at the level of the existing approaches for training spiking neural networks with rate encoding of the input.

Keywords: spiking neural networks, spike-timing-dependent plasticity, machine learning

DOI: 10.1134/S2304487X20010083

REFERENCES

- 1. Srinjoy Mitra, Stefano Fusi, and Giacomo Indiveri. Real-time classification of complex patterns using spikebased learning in neuromorphic VLSI. Biomedical Circuits and Systems, IEEE Transactions on, 3 (1): 32–42, 2009.
- Paul A. Merolla, John V. Arthur, Rodrigo Alvarez-Icaza, Andrew S. Cassidy, Jun Sawada, Filipp Akopyan, Bryan L. Jackson, Nabil Imam, Chen Guo, Yutaka Nakamura, et al. A million spiking-neuron integrated circuit with a scalable communication network and interface. Science, 345 (6197): 668–673, 2014.
- 3. Thomas Pfeil, Tobias C Potjans, Sven Schrader, Wiebke Potjans, Johannes Schemmel, Markus Diesmann, and Karlheinz Meier. Is a 4-bit synaptic weight resolution enough? – constraints on enabling spike-timing dependent plasticity in neuromorphic hardware. Frontiers in neuroscience, 6: 90, 2012.
- Steven K. Esser, Paul A. Merolla, John V. Arthur, Andrew S. Cassidy, Rathinakumar Appuswamy, Alexander Andreopoulos, David J. Berg, Jeffrey L. McKinstry, Timothy Melano, Davis R. Barch, et al. Convolutional networks for fast, energy-efficient neuromorphic computing. Proceedings of the National Academy of Sciences, page 201604850, 2016.
- 5. Adrian E.D.The basis of sensation. W. W. Norton & Co, 1928.
- MorrisonA., Diesmann M., and Gerstner W. Phenomenological models of synaptic plasticity based on spike timing. Biological Cybernetics, 98: 459–478, 2008.
- 7. Peter U. Diehl and Matthew Cook. Unsupervised learning of digit recognition using SpikeTiming-Dependent Plasticity. Frontiers in Computational Neuroscience, 2015.
- Sboev A.G., Serenko A.V., Rybka R.B., and Vlasov D.S., Sravnenie chastotnogo i vremennogo kodirovaniya dannykh pri reshenii spaykovoy set'yu so Spike-Timing-Dependent Plasticity zadachi klassifikacii. Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta MIFI, 7 (6): 563–568, 2018.
- 9. Kempter Richard, Gerstner Wulfram, and J. Leo van Hemmen. Intrinsic stabilization of output rates by

spikebased hebbian learning. Neural computation, 13 (12): 2709–2741, 2001.

- Eugene M. Izhikevich and Niraj S. Desai. Relating STDP to BCM. Neural computation, 15 (7): 1511– 1523, 2003.
- Sboev A., Rybka R., and Serenko A. On the effect of stabilizing mean firing rate of a neuron due to STDP. In J. Kortelainen, A. Bilyatdinova, A. Klimova, and A. Boukhanovsky, editors, 6th International Young Scientist Conference on Computational Science, volume 119, pages 166–173. Elsevier BV, 2017.
- Mark C.W. van Rossum, Guo Qiang Bi, and Gina G. Turrigiano. Stable Hebbian learning from Spike Timing-Dependent Plasticity. Journal of neuroscience, 20 (23): 8812–8821, 2000.
- Sen Song, Kenneth D. Miller, and Larry F. Abbott. Competitive Hebbian learning through spike-timingdependent synaptic plasticity. Nature Neuroscience, 3 (9): 919–926, 2000.
- 14. Sboev A., Rybka R., Serenko A., Vlasov D., Kudryashov N., and Demin V. To the role of the choice of the neuron model in spiking network learning on base of Spike-Timing-Dependent Plasticity. In V. V. Klimov and A. V. Samsonovich, editors, 8th Annual International Conference on Biologically Inspired Cognitive Architectures, volume 123, pages 432–439. Elsevier BV, 2018.
- 15. Susanne Kunkel, Abigail Morrison, Philipp Weidel, Jochen Martin Eppler, Ankur Sinha, Wolfram Schenck, Maximilian Schmidt, Stine Brekke Vennemo, Jakob Jordan, Alexander Peyser, Dimitri Plotnikov, Steffen Graber, Tanguy Fardet, Dennis Terhorst, Håkon Mørk, Guido Trensch, Alex Seeholzer, Rajalekshmi Deepu, Jan Hahne, Inga Blundell, Tammo Ippen, Jannis Schuecker, Hannah Bos, Sandra Diaz, Espen Hagen, Sepehr Mahmoudian, Claudia Bachmann, Mikkel Elle Lepperød, Oliver Breitwieser, Bruno Golosio, Hendrik Rothe, Hesam Setareh, Mikael Djurfeldt, Till Schumann, Alexey Shusharin, Jesu's Garrido, Eilif Benjamin Muller, Arjun Rao, Juan Hernando Vieites, and Hans Ekkehard Plesser. NEST 2.12.0, March 2017.