СОДЕРЖАНИЕ

Том 9, номер 2, 2020

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

АВТОМАТИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Contents

Volume 9, Number 2, 2020

Applied Mathematics and Informatics

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 2, с. 95–99

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

УДК 531.133.1

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОБИТИЯ ЛЕДОВОЙ ПРЕГРАДЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ УДАРНИКОМ

© 2020 г. С. И. Герасимов[1,2,3,*], А. В. Зубанков[1,2], О. В. Кривошеев[1], А. П. Калмыков[1], С. А. Капинос[1], А. А. Глухов[2], В. В. Писецкий[2], Р. В. Герасимова[2]

[1] Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, Саров, 607190, Россия

[2] Саровский физико-технический институт – филиал Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ", Саров, 607186, Россия

[3] Институт проблем машиностроения РАН – филиал Института прикладной физики РАН, Нижний Новгород, 603024, Россия

**e-mail: s.i.gerasimov@mail.ru*

Поступила в редакцию 26.10.2019 г.
После доработки 06.11.2019 г.
Принята к публикации 24.12.2019 г.

В работе приведены результаты исследования пробития ледовых преград цилиндрическими ударниками с плоским торцом, пробитие осуществлялось по нормали к лицевой поверхности преграды. Рассмотрена возможность использования индукционных сечений для фиксации по времени ударников при исследовании пробития пресной ледовой преграды в диапазоне начальных скоростей от 800 до 1500 м/с. Экспериментально получены диаграммы движения (зависимость глубины от времени) и размеры образующихся каверн методом импульсного рентгенографирования. По результатам проведенных испытаний и анализа результатов определены влияние температуры льда на его прочность, коэффициент сопротивления и размер каверны.

Ключевые слова: индукционное сечение, пресная ледовая преграда, метод импульсного рентгенографирования, каверна, динамическая твердость

DOI: 10.1134/S2304487X20020042

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы во всем мире расширяются исследования по физике, химии и механике льда с привлечением современных методов, заимствованных из физики твердого тела, квантовой химии, машинного моделирования и т.д. Знание физико-механических характеристик льда необходимо для решения целого ряда прикладных технических задач, связанных с эффективностью применения ракетно-артиллерийского оружия.

Многочисленные известные работы [1–4] посвящены, главным образом, исследованиям прочности и трещиностойкости пресноводного поликристаллического льда при динамических нагрузках.

Основными факторами, влияющими на прочность льда, являются температура, скорость нагружения, тип льда, структура кристаллов, размер образцов.

Лед обладает уникальными физическими свойствами – необычные пластические свойства, квазижидкий поверхностный слой, значительная протонная проводимость, полностью разупорядоченная водородная подрешетка и т.д.

В то же время поликристаллический лед является полезным модельным материалом в фундаментальных исследованиях в области механики твердого тела. Традиционным и, в конечном счете, определяющим с точки зрения последующих инженерно-технических приложений является изучение физико-механических свойств льда, в том числе при ударно-взрывном нагружении [5–12].

В работе приведены результаты исследования пробития ледовых преград цилиндрическими ударниками с плоским торцом, калибра 10 и 14.5 мм в диапазоне скоростей от 800 до 1500 м/с, пробитие осуществлялось по нормали к лицевой поверхности преграды. Преграда представляла собой пресный лед, изготовленный в климатической камере в течение ~72 часов с постепенным изменением температуры внутри камеры, в среднем на минус 5°C – минус 10°C в сутки. Данный образец льда моделировал пресный природный лед в диапазоне температур от минус 3°C до минус 32°C.

Плотность льда принималась равной табличному значению – 900 кг/м^3 [13]. Задачами экспе-

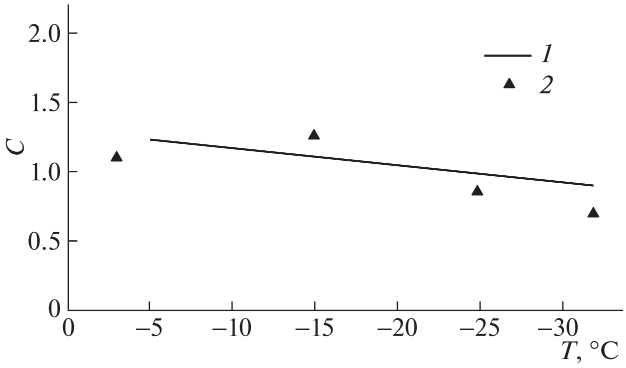

Рис. 1. Зависимость $C(T)$ для пресного льда. 1 – линия аппроксимация; *2* – экспериментальные данные.

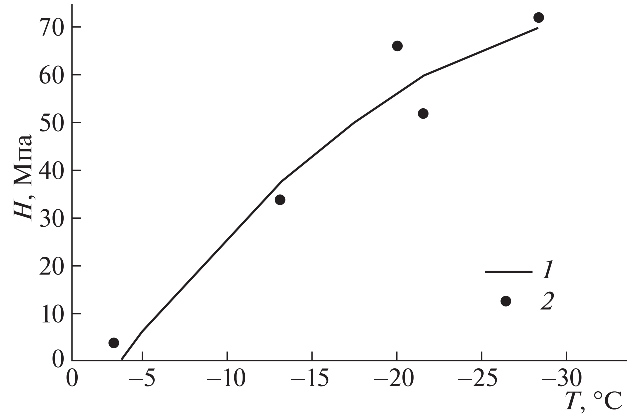

Рис. 2. Зависимость $H(T)$ для пресного льда. *1* – линия аппроксимация; *2* – экспериментальные данные.

риментов являлись: определение динамической твердости льда H [МПа], гидродинамического коэффициента сопротивления C, полного коэффициента сопротивления C_x и размеров каверн в зависимости от температуры T [°C]. Задачи решались следующими экспериментальными способами: получение диаграмм движения $h(t)$ (зависимость глубины h от времени t) с помощью бесконтактных индукционных датчиков, срабатывающих при прохождении ударником измерительных сечений “датчик-магнит” (мимо центров датчиков) и получение размеров образующихся каверн методом импульсного рентгенографирования.

По полученным экспериментальным зависимостям $h(t)$ определяли динамическую твердость H и гидродинамический коэффициент сопротивления C методом наименьших квадратов применительно к схеме движения в графической форме построения Понселе [14, 15]. В этой схеме уравнение движения выражено в следующем виде:

$$m\frac{dV}{dt} = -C\frac{\rho V^2}{2}S - HS, \qquad (1)$$

где C и H – постоянные; m – масса ударника; S – площадь кавитатора ударника; ρ – плотность среды; V – текущая скорость ударника.

Проинтегрировав дважды уравнение (1), получим:

$$h(t)_{апр} = \frac{2m}{SC\rho}\ln\left|\cos\psi t + \frac{1}{\sqrt{\varphi}}\sin\psi t\right|, \qquad (2)$$

где $\psi = \frac{S}{m}\sqrt{\frac{C\rho H}{2}}$, $\varphi = \frac{2H}{C\rho V_0^2}$.

Коэффициент полного сопротивления C_x в схеме Понселе выражен следующим образом:

$$C_X(V) = C + \frac{2H}{\rho V^2}. \qquad (3)$$

В результате обработки экспериментальных данных и определения коэффициентов C, H, C_x для опыта установлено влияние температуры на эти коэффициенты.

На рис. 1 представлена зависимость $C(T)$ для пресного льда. Линия-аппроксимация экспериментальных точек методом наименьших квадратов, описывалась соотношением $C(T) = \lambda T + \mu$. Значение коэффициентов λ и μ приведены в табл. 1. Коэффициент C слабо зависит от температуры, отмечается его незначительное понижение с понижением температуры в пресном льду.

На рис. 2 приведена зависимость динамической твердости H [МПа] от температуры T [°C], функция аппроксимации (методом наименьших квадратов) экспериментальных $H(T)$ точек нанесена сплошной линией и выражена следующим образом:

$$H(T) = \frac{a}{T + b} + c. \qquad (4)$$

Значение коэффициентов a, b, c приведены в табл. 1.

Динамическая твердость H существенно зависит от температуры. В области экспериментальных температур (при минус 32°C ≤ T ≤ минус 3°C) максимальное значение H равно 71 МПа. Приве-

Таблица 1.

Коэффициент	Пресный лед
a, МПа °C	8000
b, °C	–41
c, МПа	181
λ	0.011
μ	1.2416
Диапазон применимости, °C	минус 32 < T < минус 3

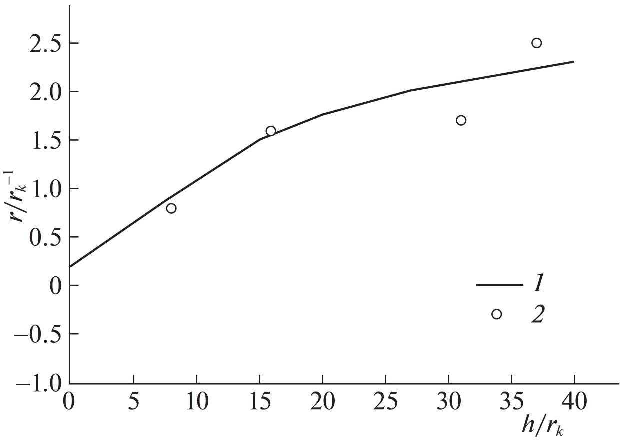

Рис. 3. Профили каверн. *1* – линия аппроксимация; *2* – экспериментальные данные.

денные в [6] значения H = 20–35 МПа лежат в диапазоне полученных значений.

Исходя из полученных зависимостей $C(T)$ и $H(T)$, можно построить функцию $C_x(V, T)$:

$$Cx(V,T) = \lambda T + \mu + \frac{2 \cdot 10^6[a + c(T + b)]}{\rho V^2(T + b)}, \qquad (5)$$

где λ, μ – коэффициенты линейной аппроксимации зависимости $C(T)$. Значения коэффициентов a, b, c, λ, μ для зависимости $H(T)$ и $C(T)$ указаны в табл. 1.

На рис. 3 показаны профили каверн в опытах с пресным льдом. Линией показана аппроксимация экспериментальных каверн по методу наименьших квадратов

$$\hat{r}(\hat{h}) = 3.6 - \frac{82.5}{\hat{h} + 24.3}, \qquad (6)$$

где $\hat{r} = \frac{r}{r_k} - 1$ – относительный радиус каверны; $\hat{h} = \frac{h}{r_k}$ – относительное расстояние от переднего торца ударника до точки входа в преграду; r – радиус каверны; r_k – радиус ударника.

Установлено, что размеры образующейся каверны в пресном льду при реализованных в опытах условиях внедрения практически, с учетом погрешности измерений, не зависят от температуры. Большой разброс размеров каверн в различных опытах, не связанный с температурой льда, говорит о возможном влиянии других факторов, не учтенных в данной работе.

Таким образом, по результатам проведенных испытаний и анализа результатов установлены количественное влияние температуры льда на его прочность, коэффициент сопротивления и размер каверны.

В дальнейшем предполагается продолжить экспериментальные исследования высокоскоростного проникания ударников в пресный лед и создания математических моделей поведения льда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shulson E.M.* The structure and Mechanical Behavior of Ice *Journal of The Minerals*, Metals & Materials Society (JOM). 1999. V. 51. P. 21–27.
2. *Erland M. Schulson, Paul Duval.* Ductile behavior of polycrystalline ice: experimental data and physical processes. *Cambridge University Press*. February, 2010. P. 101–152.
3. *Гольдштейн Р.В.* Механика разрушения льда и некоторые ее приложения. *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 1990. № 5. С. 81–88.
4. *Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М.* Вопросы механики разрушения льда и ледяного покрова при анализе ледовых нагрузок. *Вести газовой науки*. № 3(14). С. 104–113.
5. *Орлов М.Ю., Орлова Ю.Н.* Исследование процесса взрывного нагружения льда. *Вестник Томского государственного университета*. 2015. № 6 (38). С. 81–89.
6. *Bogomolov G.N., Glazyrin V.P., Orlov M.Y.* Research of ice destruction under dynamic loading. Part 1. Modeling explosive ice cover into account the temperature. Сборник: MATEC Web of Conferences Сер. "International Youth Scientific Conference "Heat and Mass Transfer in the Thermal Control System of Technical and Technological Energy Equipment", HMTTSC 2017" 2017. С. 01014.
7. *Орлов М.Ю., Богомолов Г.Н.* Изучение поведения льда при ударных и взрывных нагрузках. *Полярная механика*. 2016. № 3. С. 192–202.
8. *Орлов М.Ю.* Исследование поведения толстого льда при ударном нагружении. Моделирование взаимодействия крупногабаритного ударника со льдом на водной подложке. *Сборник: Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов 7-й всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского*. 2017. С. 318–320.
9. *Глазырин В.П., Орлов Ю.Н., Орлов М.Ю., Орлова Ю.Н., Богомолов Г.Н.* Экспериментально-теоретическое исследование ударно-взрывного нагружения льда. *Известия высших учебных заведений. Физика*. 2013. Т. 56. № 7–3. С. 38–40.
10. *Орлов М.Ю., Орлова Ю.Н., Богомолов Г.Н.* Экспериментальное исследование процессов взрывного нагружения пресноводного льда. *Сборник: Интеллектуальные энергосистемы труды IV Международного молодёжного форума: в 3 томах. Томский политехнический университет*. 2016. С. 102–105.
11. *Голубятников В.В., Орлов М.Ю.* Исследование поведения ледяного покрова при взрывном нагружении. Сборник: Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов 6-й Всероссийской научной

конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского: в 2-х томах. 2016. С. 218–227.

12. *Глазырин В.П., Орлов М.Ю., Орлов Ю.Н., Садохин А.Н., Богомолов Г.Н.* Комплексное теоретико-экспериментальное исследование поведения поликристаллического льда при динамических нагрузках. Часть 1. Эксперименты по ударно-взрывному нагружению пресноводного льда. Расчет процесса взрывного нагружения системы "лед-вв-вода". *Вестник Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема*. 2013. № 2 (13). С. 98–112.
13. *Бабкин А.В., Селиванов В.В.* Прикладная механика сплошных сред. Т. 1: Основы механики сплошных сред. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006, 376 с.
14. *Велданов В.А., Даурских А.Ю., Карнейчик А.С., Максимов М.А.* Возможности моделирования проникания тел в грунтовые среды. *Инженерный журнал: наука и инновации,* 2013. Вып. 9.
15. *Велданов В.А., Исаев А.Л., Ладов С.В., Федоров С.В., Проникание твердого цилиндрического тела в сплошной и ослабленный отверстием лед.* М., Оборонная техника. 2002. № 11.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 2, pp. 95–99

Study of the Penetration of a Cylindrical Striker through an Ice Barrier

S. I. Gerasimov[a,b,c,#], A. V. Zubankov[a,b], A. P. Kalmykov[a], S. A. Kapinos[a], E. G. Kosyak[b], P. G. Kuznetsov[b], and R. V. Gerasimova[b]

[a] *Russian Federal Nuclear Center All-Russian Scientific Research Institute of Experimental Physics, Sarov, 607190 Russia*

[b] *Sarov Physical Technical Institute, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Sarov, 607186 Russia*

[c] *Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, 603024 Russia*

[#] *e-mail: s.i.gerasimov@mail.ru*

Received October 26, 2019; revised November 6, 2019; accepted December 24, 2019

Abstract—The penetration of cylindrical strikers with a flat end through ice barriers on the normal to the front surface of the barriers. The possibility of using induction sections to fix the time strikers in the study of the penetration through a fresh ice barrier in the range of initial velocities from 800 to 1500 m/s. Diagrams of motion (depth versus time) and the size of the cavities have been experimentally obtained by pulsed radiography. According to the results of the tests and analysis of the results, the influence of the ice temperature on its strength, resistance coefficient, and the size of the cavity have been determined.

Keywords: induction section, fresh ice barrier, pulsed radiography method, cavity, dynamic hardness

DOI: 10.1134/S2304487X20020042

REFERENCES

1. Shulson, E.M. The structure and Mechanical Behavior of Ice Journal of The Minerals, Metals & Materials Society (JOM), 51, 1999, p. 21–27.
2. Erland M. Schulson, Paul Duval. Ductile behavior of polycrystalline ice: experimental data and physical processes. Cambridge University Press. February, 2010. P. 101–152.
3. Gol'dshteyn R.V. Mekhanika razrusheniya l'da i nekotoryye yeye prilozheniya. Problemy mashinostroyeniya i nadezhnosti mashin, 1990, № 5, pp. 81–88.
4. Gol'dshteyn R.V., Osipenko N.M. Voprosy mekhaniki razrusheniya l'da i ledyanogo pokrova pri analize ledovykh nagruzok. Vesti gazovoy nauki. № 3(14). P. 104–113.
5. Orlov M.Yu., Orlova Yu.N. Issledovaniye protsessa vzryvnogo nagruzheniya l'da. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. 2015. № 6(38). P. 81–89.
6. Bogomolov G.N., Glazyrin V.P., Orlov M.Y. Research of ice destruction under dynamic loading. Part 1. Modeling explosive ice cover into account the temperature. Сборник: MATEC Web of Conferences Сер. "International Youth Scientific Conference "Heat and Mass Transfer in the Thermal Control System of Technical and Technological Energy Equipment", HMTTSC 2017" 2017. P. 01014.
7. Orlov M.Yu., Bogomolov G.N. Studying the behavior of ice under shock and explosive loads. Polar mechanics. 2016. No. 3. P. 192–202.
8. Orlov M.Yu. Investigation of the behavior of thick ice under shock loading. simulation of the interaction of a

large projectile with ice on an aqueous substrate. Collection: Mechanics of composite materials and structures, complex and heterogeneous media. Proceedings of the 7th All-Russian Scientific Conference with international participation. I.F. Obraztsova and Yu.G. Yanovsky. 2017. P. 318–320.

9. Glazyrin V.P., Orlov Yu.N., Orlov M.Yu., Orlova Yu.N., Bogomolov G.N. Experimental and theoretical study of shock and explosive loading of ice. News of higher educational institutions. Physics. 2013. Vol. 56. No. 7–3. P. 38–40.

10. Orlov M.Yu., Orlova Yu.N., Bogomolov G.N. An experimental study of the processes of explosive loading of freshwater ice. Collection: Intelligent Energy Systems Proceedings of the IV International Youth Forum: in 3 volumes. Tomsk Polytechnic University. 2016. P. 102–105.

11. Golubyatnikov V.V., Orlov M.Yu. Exploring the behavior of ice cover during explosive loading. Collection: Mechanics of composite materials and structures, complex and heterogeneous media. Proceedings of the 6th All-Russian Scientific Conference with international participation. I.F. Obraztsova and Yu.G. Yanovsky: in 2 volumes. 2016. P. 218–227.

12. Glazyrin V.P., Orlov M.Yu., Orlov Yu.N., Sadokhin A.N., Bogomolov G.N. A comprehensive theoretical and experimental study of the behavior of polycrystalline ice under dynamic loads. Part 1. Experiments on shock-explosive loading of freshwater ice. Calculation of the process of explosive loading of the ice-vv-water system. Bulletin of the Amur State University named after Sholem Aleichem. 2013. No. 2 (13). P. 98–112.

13. Babkin A.V., Selivanov V.V. Applied mechanics of continuous media. T. 1: Fundamentals of continuum mechanics. Moscow, Publishing House of MSTU. N.E. Bauman, 2006, 376 pp.

14. Veldanov V.A., Daursky A.Yu., Karneychik A.S., Maximov M.A. Possibilities of modeling the penetration of bodies into soil environments. Engineering Journal: Science and Innovation, 2013, no. 9.

15. Veldanov V.A., Isaev A.L., Ladov S.V., Fedorov S.V. Penetration of a solid cylindrical body into a solid ice weakened by a hole. M., defense technology. No. 11. 2002.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 2, с. 100–109

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 621.039.55

ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ЗАГРУЗКИ АКТИВНОЙ ЗОНЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО РЕАКТОРА МИР.М1 ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ПРОВЕДЕНИЮ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ТИПА LOCA

© 2020 г. Д. В. Фомин[1,2,*], А. П. Малков[1,2], А. М. Шараев[1,2], П. А. Зайченко[1,2]

[1] *Димитровградский инженерно-технологический институт — филиал Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ", Димитровград, 433511, Россия*

[2] *Государственный научный центр — Научно-исследовательский институт атомных реакторов, Димитровград, 433510, Россия*

**e-mail: dvfomin@niiar.ru, fomindv85@gmail.com*

Поступила в редакцию 26.10.2019 г.
После доработки 05.03.2020 г.
Принята к публикации 10.03.2020 г.

В статье приводится информация об особенностях формирования загрузки активной зоны реактора МИР.М1 при подготовке к проведению экспериментов по исследованию поведения твэлов водоохлаждаемых реакторов в условиях аварий с потерей теплоносителя. Коротко представлена информация об основных конструктивных и физических особенностях реактора, основных направлениях его использования. Показано, что подготовка однотипных экспериментов с одинаковыми исходными требованиями к обеспечению условий испытаний в активной зоне реактора МИР.М1 представляет собой сложную задачу, зависящую от начальных условий по загрузке рабочих и петлевых каналов, отравлению бериллиевых блоков активной зоны. Для успешной реализации экспериментов необходим комплексный учет множества факторов, обусловленных как конструктивными, так и эксплуатационными особенностями реактора. При этом конечное состояние реактора на начало эксперимента и при достижении целевых параметров облучательного устройства в петлевом канале может быть совершенно различным. Приведены подходы к формированию загрузки активной зоны реактора, которые позволили обеспечить безопасное проведение сложных динамических экспериментов, моделирующих аварийные режимы работы испытуемых твэлов АЭС, а также некоторые результаты упомянутых экспериментов, важные с точки зрения изложения материала.

Ключевые слова: исследовательский реактор, эксперимент, формирование загрузки активной зоны

DOI: 10.1134/S2304487X20020030

ВВЕДЕНИЕ

Материаловедческий исследовательский реактор МИР.М1 является уникальной многоцелевой установкой, на которой проводятся испытания конструкционных, топливных и поглощающих материалов, используемых и предполагаемых к применению в атомной отрасли [1].

За последние два десятилетия тематика экспериментальных работ, выполняемых на реакторе МИР.М1, значительно расширилась. Кроме традиционных ресурсных испытаний твэлов и ТВС реакторов различного назначения большую долю в тематике проводимых исследований занимают динамические испытания по таким направлениям, как:

– эксперименты по моделированию для испытываемых твэлов условий, характерных для аварийных ситуаций с резким увеличением мощности и/или быстрым вводом положительной реактивности;

– эксперименты по моделированию условий, характерных для аварийных ситуаций с потерей теплоносителя;

– испытания твэлов в циклических режимах изменения мощности.

Ввиду конструктивных и эксплуатационных особенностей реактора МИР.М1, планирование загрузки активной зоны на очередную кампанию представляет собой нетривиальную задачу. С учетом меняющегося набора экспериментальных устройств и изменения физических характеристик активной зоны в процессе эксплуатации при одинаковых требованиях к условиям проведения экспериментов заданные параметры его проведения достигаются при разных режимах работы реактора.

На исследовательском реакторе МИР.М1 были спланированы и успешно проведены экспери-

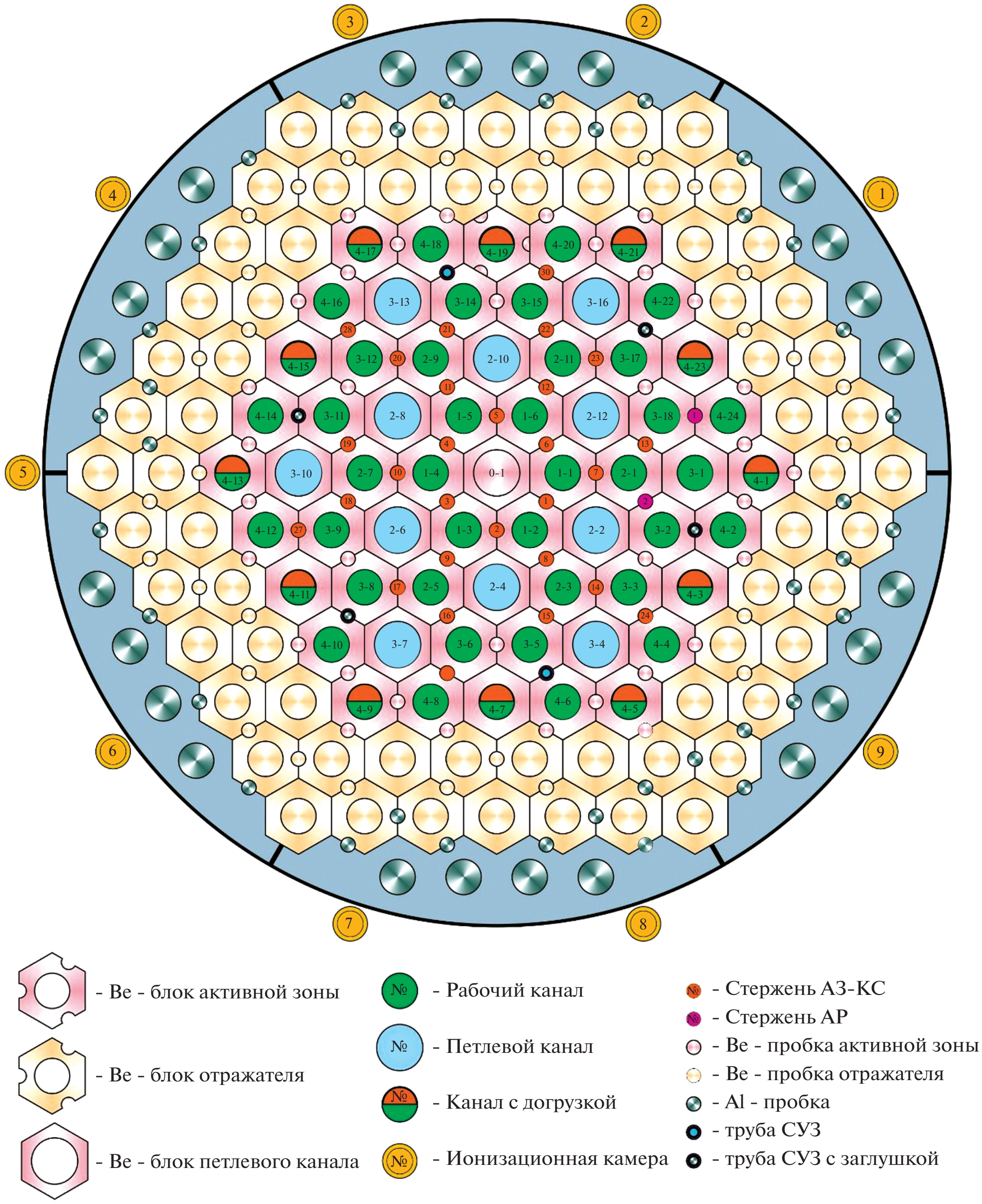

Рис. 1. Картограмма активной зоны реактора МИР.М1.

менты, целью которых было исследование поведения твэлов ВВЭР-1000 новой конструкции (с утоненной оболочкой без центрального отверстия в топливном сердечнике) с выгоранием более 50 МВт сут/кгU (эксперимент МИР-LOCA/50 [2–5]) и с выгоранием более 60 МВт сут/кгU (эксперимент МИР-LOCA/60 [2–5]) в условиях проектной аварии с потерей теплоносителя (LOCA). На примере двух однотипных экспериментов показаны основные подходы, используемые при формировании загрузки активной зоны реактора МИР.М1 для достижения требуемых условий испытаний.

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ АКТИВНОЙ ЗОНЫ РЕАКТОРА МИР.М1

Картограмма активной зоны реактора МИР.М1 представлена на рис. 1. Активная зона набирается в кладке из шестигранных бериллиевых блоков.

По оси первых четырех рядов кладки выполнены отверстия для установки каналов с рабочими и петлевыми ТВС. Два внешних ряда кладки выполняют функции отражателя. Расположение петлевых ячеек в активной зоне фиксировано и принято таким, чтобы каждая из них была окружена шестью каналами с рабочими ТВС для обеспечения возможности реализации различных условий испытания экспериментальных ТВС по мощности.

В активной зоне размещено 30 поглощающих рабочих органов (РО) СУЗ. Из них два используются для автоматического регулирования мощности реактора (РО АР), а 28 выполняют функции компенсирующих органов и аварийной защиты (РО АЗ-КС). Схема управления обеспечивает возможность выбора любых шести стержней из 28 в качестве рабочих органов аварийной защиты. Для компенсации реактивности используются также каналы с догрузкой (КД), которые расположены в центральных отверстиях бериллиевых блоков периферийного ряда кладки активной зоны. КД представляет собой штатную ТВС, соединенную с расположенным над ней поглотителем (кадмий, очехлованный нержавеющей сталью). В крайнем нижнем положении ТВС находится под активной зоной, а в зоне находится поглотитель. При извлечении КД в активную зону вводится топливная сборка, а поглотитель перемещается в пространство над зоной.

В активную зону устанавливается до пятидесяти двух штатных ТВС. Реактор эксплуатируется в режиме частичных перегрузок активной зоны. Среднее выгорание ^{235}U в штатных топливных сборках составляет на начало кампании 15–30%, а в выгружаемых ТВС ~ 40–50% (максимальное выгорание до 60%). Во время одной перегрузки в активную зону загружается до 15 “свежих” ТВС. При этом неравномерность распределения ^{235}U по сечению активной зоны может быть очень большой, поскольку размещение “свежих” ТВС определяется необходимостью формирования требуемых мощностных параметров в петлевых каналах.

Большое количество органов регулирования, применяемый режим частичных перегрузок топлива позволяют создать и поддерживать в каждом петлевом канале требуемые условия облучения по мощности и плотности потока нейтронов.

Петлевые ТВС охлаждает теплоноситель, циркулирующий по автономным контурам-петлям. Вид и параметры теплоносителя в каждой петле определяются задачами экспериментов. Канальная компоновка реактора обеспечивает возможность контроля температуры теплоносителя на входе и выходе каждого канала, а также регулирования его расхода.

Вода бассейна реактора выполняет функции верхнего и нижнего торцевых отражателей активной зоны, биологической защиты реактора и теплоносителя для охлаждения бериллиевой кладки.

Шаг решетки рабочих каналов 150 мм, выбранный из конструктивных соображений (необходимость размещения петлевых каналов в активной зоне, а также подводящих и отводящих теплоноситель трубопроводов над ней), превышает оптимальный для ячейки, замедлителем в которой выступают бериллий и вода. Формирование теплового спектра нейтронов происходит уже в объеме рабочей ячейки, а вода за ее границами, с точки зрения замедления, избыточна [6, 7]. Это приводит к тому, что изменение плотности воды в различных контурах охлаждения элементов активной зоны сложным образом влияет на реактивность. Удаление воды из рабочей ячейки дает отрицательный эффект реактивности, а из зазоров кладки – положительный. В силу тех же причин при уменьшении плотности теплоносителя в охлаждаемых водой петлевых каналах также наблюдается положительный эффект реактивности. Это утверждение справедливо для всех типов петлевых ТВС, испытываемых в настоящее время в реакторе.

Под воздействием нейтронного излучения в бериллиевой кладке активной зоны и отражателя реактора МИР.М1 происходят реакции, приводящие к накоплению в нем ядер ^{3}He, ^{4}He, ^{3}H, ^{6}Li [8–10]. Ядра ^{6}Li и ^{3}He обладают большим сечением захвата тепловых нейтронов – 940×10^{-28} м$^{-2}$ и 5327×10^{-28} м$^{-2}$, соответственно. Изменение в твердом замедлителе реактора концентраций поглотителя нейтронов влечет за собой изменение важнейших физических характеристик – запаса реактивности, эффективности органов СУЗ, эффектов реактивности и перераспределению энерговыделения в активной зоне. Эти изменения необходимо учитывать при длительной эксплуатации реактора, обеспечении его безопасности, планировании и реализации требуемых условий испытания в экспериментальных устройствах с учетом того, что накопление ядер поглотителей в бериллии неоднородно.

Еще одной особенностью проведения испытаний в реакторе МИР является то, что, как правило, единовременно проводятся облучения нескольких экспериментальных устройств, мощности которых могут существенно отличаться. Поэтому существует проблема согласования и поддержания в процессе кампании реактора режимов испытаний различных экспериментальных устройств.

Описанные конструктивные и эксплуатационные особенности реактора во многом определяют его физические характеристики.

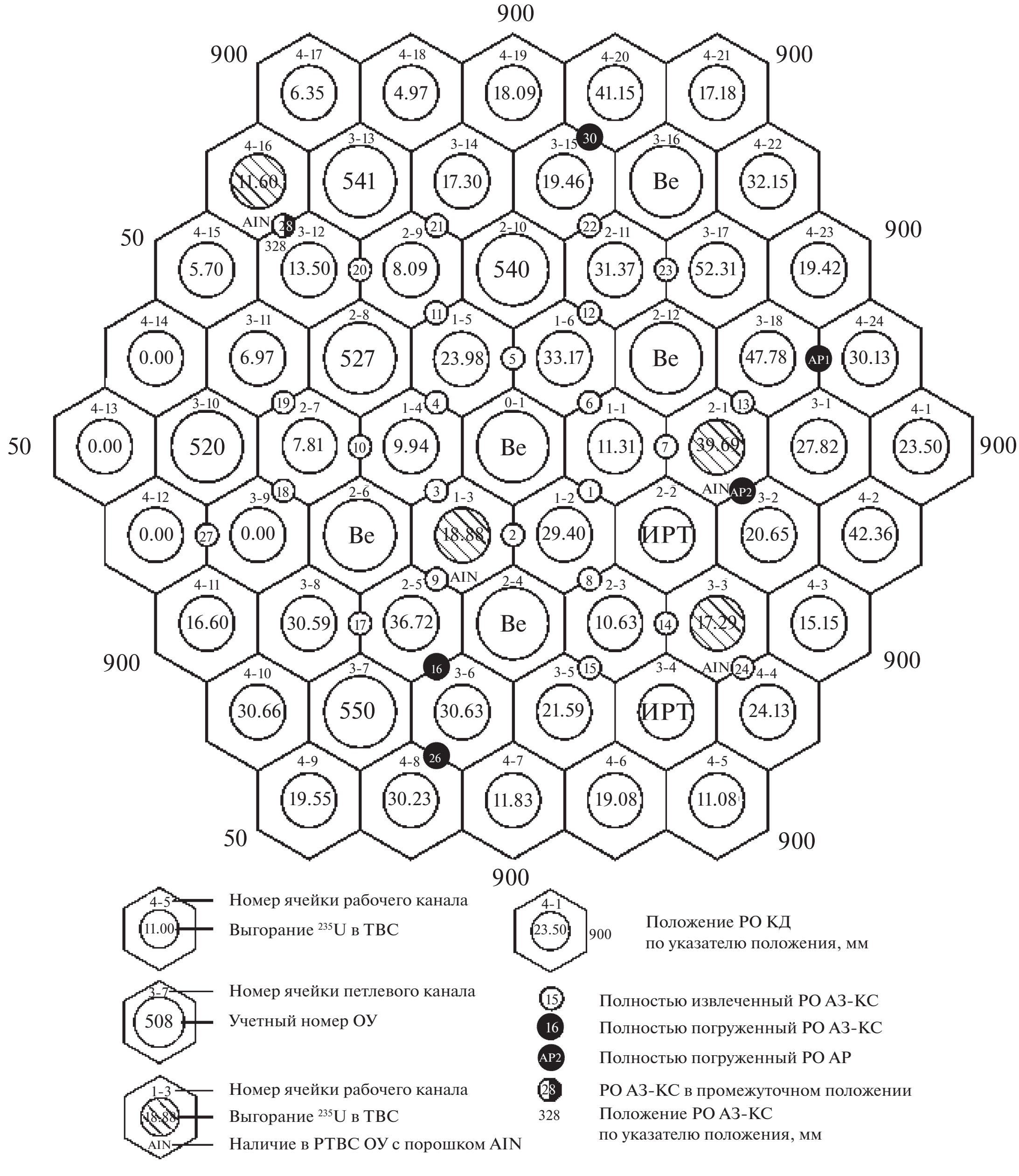

Рис. 2. Картограмма загрузки активной зоны реактора МИР.М1, сформированная для эксперимента МИР-LOCA/50, и положение РО СУЗ в критическом состоянии.

Наличие большого количества факторов, таких как:

– значительное превышение количества топлива в активной зоне по сравнению с минимальной критической загрузкой и, вследствие этого, возможность создания в активной зоне компактных областей, параметры которых близки к критическим;

– значительное влияние экспериментальных устройств, располагаемых непосредственно в активной зоне, и режимов их испытаний на физические характеристики реактора;

– значительную неравномерность распределения топлива в активной зоне, вследствие эксплуатации реактора в режиме частичных перегрузок топлива;

– избыточное количество замедлителя в активной зоне, вследствие чего изменение плотности воды сложным образом влияет на реактивность;

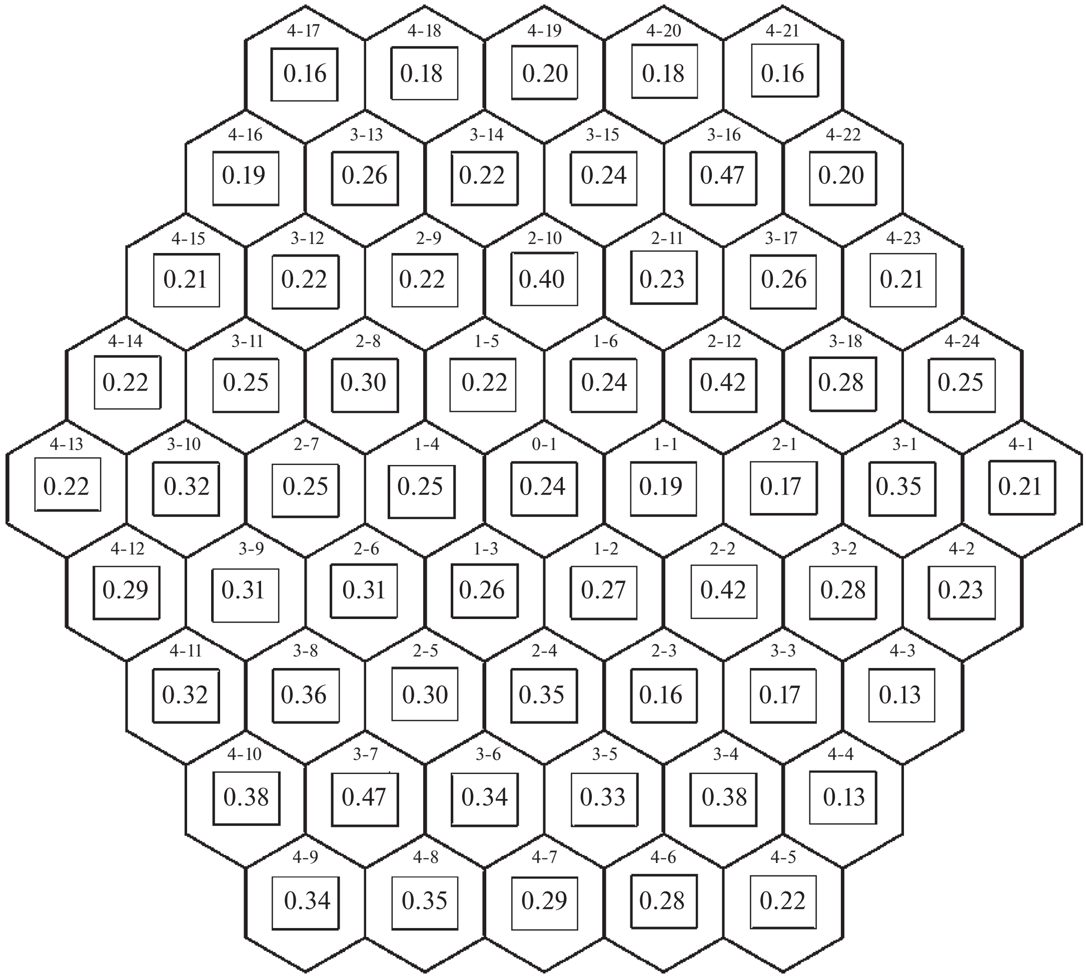

Рис. 3. Картограмма отравления бериллиевых блоков активной зоны реактора МИР.М1, рассчитанная на начало эксперимента МИР-LOCA/50.

– одновременное испытание в реакторе нескольких экспериментальных устройств, которые могут значительно отличаться друг от друга по конструкции, режимам облучения, среде заполнения петлевого канала;

– большое количество органов СУЗ различного назначения и конструкции;

– неравномерность энерговыделения в активной зоне, определяемая задачами экспериментальных исследований;

– ядерные реакции в бериллии, приводящие к накоплению нуклидов с большим сечением поглощения нейтронов (^{6}Li, ^{3}He), приводит к тому, что нейтронно-физические характеристики активной зоны изменяются в широких пределах в зависимости от ее компоновки и режимов работы реактора.

Перед каждым новым типом испытаний в реакторе проводят детальные исследования влияния экспериментальных устройств и режимов их испытания на нейтронно-физические характеристики реактора. Исследования проводят как расчетным путем, так и в экспериментах на критической сборке – физической модели реактора. По их результатам определяют компоновку активной зоны, положение органов регулирования и режимы регулирования мощности, обеспечивающие безопасное проведение испытаний. Рабочая программа любого эксперимента содержит раздел “Обеспечение безопасности”, который регламентирует технические и организационные меры, необходимые для безопасного проведения работ.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ЗАГРУЗКИ АКТИВНОЙ ЗОНЫ РЕАКТОРА МИР.М1 ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ МИР-LOCA/50 И МИР-LOCA/60

Планирование загрузки таких сложных размножающих систем, как активная зона реактора МИР.М1, предполагает учет характера зависимо-

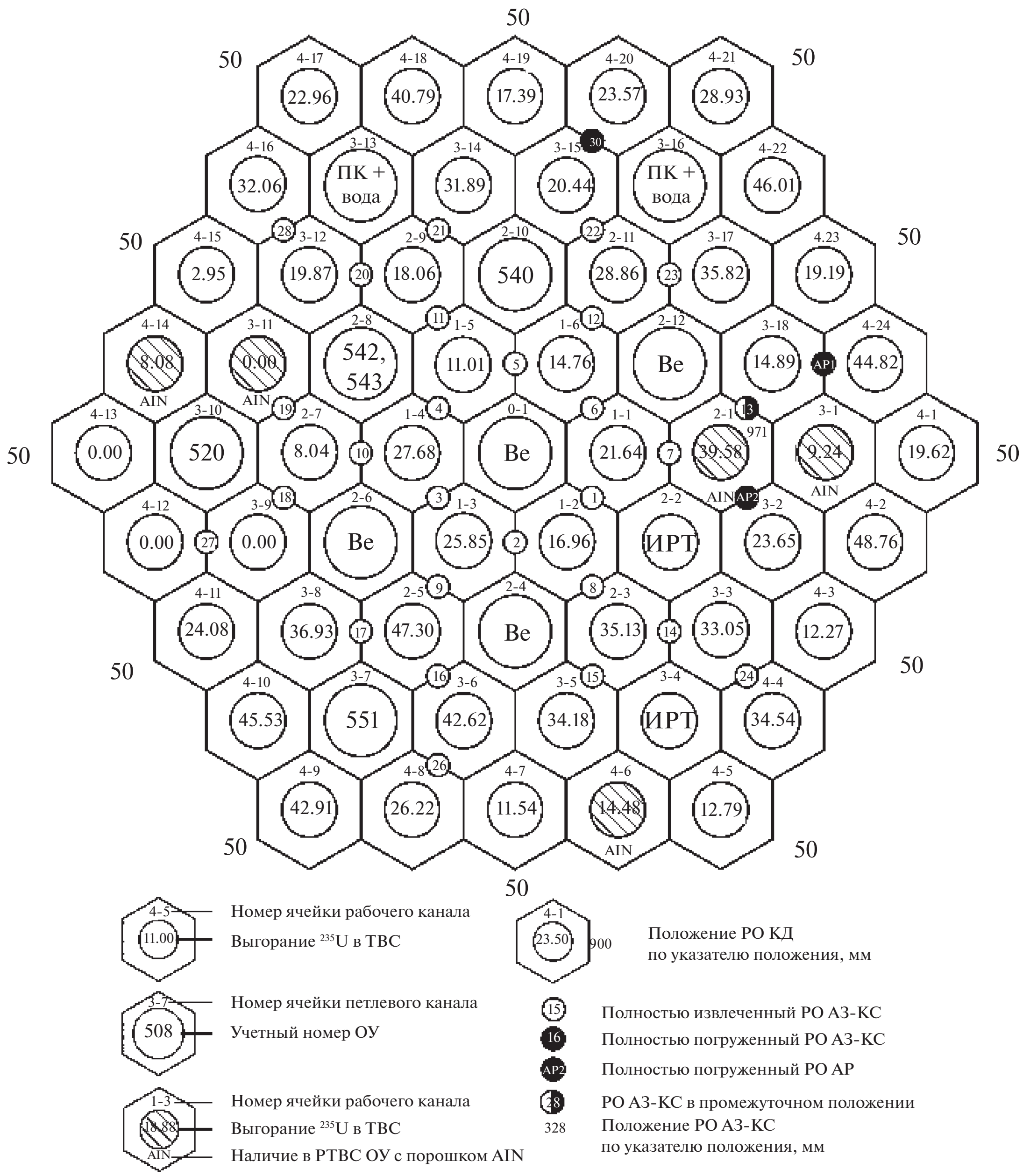

Рис. 4. Картограмма загрузки активной зоны реактора МИР.М1, сформированная для эксперимента МИР-LOCA/60, и положение РО СУЗ в критическом состоянии.

стей нейтронно-физических характеристик, эксплуатационных и технологических особенностей реактора, экономических аспектов, связанных с топливной составляющей затрат на эксплуатацию, опыт проведения экспериментальных исследований, аналогичных запланированным, особенностей сценарного плана проведения эксперимента.

Таким образом, с учетом вышесказанного основные задачи при формировании загрузки активной зоны реактора для успешного проведения рассматриваемых LOCA-экспериментов были сформулированы следующим образом:

– обеспечение минимальной неравномерности аксиального распределения энерговыделения (ближайшие РО АЗ-КС должны находиться в крайних положениях – либо верхнем, либо нижнем);

– обеспечение необходимой скорости разогрева испытуемого твэла;

– создание условий для включения в работу системы автоматического регулирования мощно-

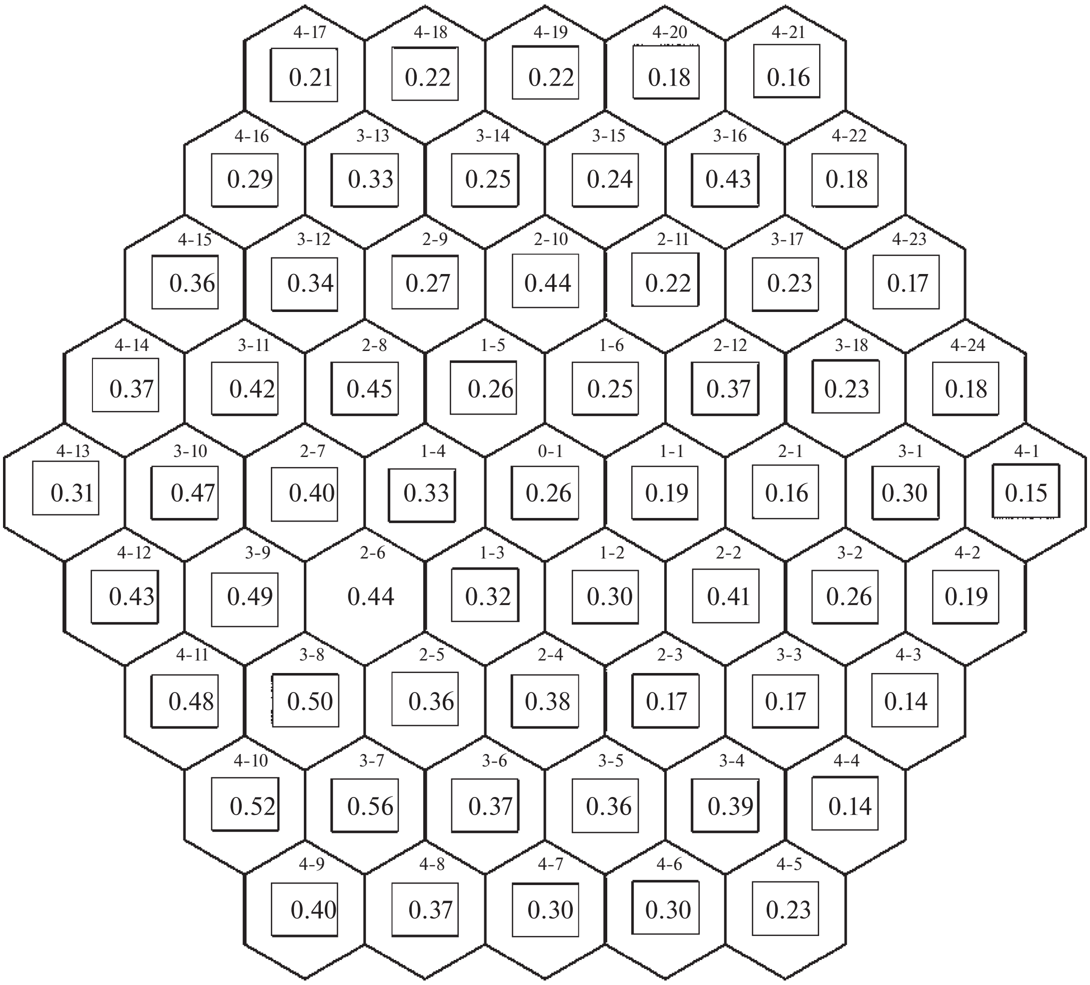

Рис. 5. Картограмма отравления бериллиевых блоков активной зоны реактора МИР.М1, рассчитанная на начало эксперимента МИР-LOCA/60.

сти на минимально возможном уровне мощности реактора;

– обеспечение непревышения предельных характеристик по мощности и температуре теплоносителя в других петлевых каналах во время выполнения эксперимента;

– обеспечение запаса реактивности, достаточного для выполнения эксперимента;

– минимизация временных и трудовых затрат при перегрузке активной зоны;

– использование минимального количества "свежих" ТВС.

ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

На основании опыта проведения предыдущих экспериментов, результатов исследований на критической сборке – физической модели реактора – и с учетом вышеназванных условий для эксперимента МИР-LOCA/50 была сформирована компоновка активной зоны, представленная на рис. 2, сведения о накоплении ядер-поглотителей в бериллиевых блоках активной зоны представлены на рис. 3. Для эксперимента МИР-LOCA/60 аналогичная информация представлена на рис. 4 и 5.

Как видно из представленных рисунков, при подготовке проведения рассматриваемых экспериментов ответственный за формирование загрузки активной зоны персонал имел дело фактически с двумя различными компоновками, имеющими одинаковые геометрические параметры, но отличающимися материальным составом активной зоны и загрузкой петлевых ячеек реактора. При этом общим для обоих экспериментов было условие проведения испытаний в петлевом канале яч. 3–7 активной зоны.

Необходимую скорость равномерного разогрева твэла предполагалось обеспечить в режиме автоматического регулирования на минимальном уровне мощности реактора. Для этого в районе яч. 3–10 была сформирована локальная область, в

Таблица 1. Эффективность органов СУЗ в заданной компоновке активной зоны реактора

Рабочий орган	Номер	Эффективность, $\beta_{эфф}$ МИР-LOCA/50	Эффективность, $\beta_{эфф}$ МИР-LOCA/60
КС	1	0.49 ± 0.03	0.56 ± 0.04
	2	0.66 ± 0.05	0.50 ± 0.04
	3	0.94 ± 0.07	0.50 ± 0.04
	4	0.94 ± 0.07	0.58 ± 0.04
	5	0.62 ± 0.04	0.66 ± 0.05
	6	0.45 ± 0.03	0.60 ± 0.04
АЗ	7	0.37 ± 0.03	0.50 ± 0.04
	8	0.41 ± 0.03	0.35 ± 0.02
	9	0.54 ± 0.04	0.32 ± 0.02
	10	0.97 ± 0.07	0.74 ± 0.05
	11	0.72 ± 0.05	0.89 ± 0.06
	12	0.36 ± 0.03	0.98 ± 0.07
КС	13	0.29 ± 0.02	1.01 ± 0.07
	14	0.10 ± 0.01	0.27 ± 0.02
	15	0.18 ± 0.01	0.26 ± 0.02
	16	0.58 ± 0.04	0.24 ± 0.02
	17	0.61 ± 0.04	0.30 ± 0.02
	18	0.99 ± 0.07	0.79 ± 0.06
	19	1.25 ± 0.09	0.71 ± 0.05
	20	0.83 ± 0.06	0.68 ± 0.05
	21	0.18 ± 0.01	0.72 ± 0.05
	22	0.17 ± 0.01	0.78 ± 0.05
	23	0.15 ± 0.01	0.83 ± 0.06
	24	0.08 ± 0.01	0.24 ± 0.02
	26	0.33 ± 0.02	0.11 ± 0.01
	27	0.68 ± 0.05	0.54 ± 0.04
	28	0.80 ± 0.06	0.57 ± 0.04
	30	0.09 ± 0.01	0.65 ± 0.05
КД	1	0.45 ± 0.05	1.45 ± 0.16
	2	1.12 ± 0.12	1.65 ± 0.18
	3	0.72 ± 0.08	0.34 ± 0.04
	4	1.02 ± 0.11	0.33 ± 0.04
	5	1.43 ± 0.16	0.16 ± 0.02
	6	2.29 ± 0.25	0.76 ± 0.08
	7	3.30 ± 0.36	0.96 ± 0.11
	8	3.41 ± 0.38	1.46 ± 0.16
	9	2.40 ± 0.26	0.81 ± 0.09
	10	0.99 ± 0.11	1.49 ± 0.16
	11	0.61 ± 0.07	0.88 ± 0.10
	12	0.67 ± 0.07	1.80 ± 0.20
АР	1	0.15 ± 0.01	0.61 ± 0.04
	2	0.28 ± 0.02	0.60 ± 0.04
Запас реактивности, $\beta_{эфф}$ (%)		11.6 (7.5)	2.5 (1.6)
Достигнутая мощность реактора, МВт		~1.9	~9.8

рабочие каналы которой были загружены ТВС с минимальным выгоранием ^{235}U. Такой подход позволяет включить автоматический регулятор мощности на пониженном уровне мощности при использовании в качестве источника сигнала в аппаратуре автоматического регулирования мощности СУЗ реактора МИР.М1 близлежащей ионизационной камеры (ИК), уровень сигнала которой будет максимален и на порядки превышать уровни сигнала от других ИК. При этом наличие пустого петлевого канала в яч. 3–10 в исходной компоновке активной зоны значительно осложняло бы приведение в жизнь предыдущего утверждения, поскольку наличие большого объема излишней воды в петлевом канале привело бы к значительному поглощению нейтронов в указанном секторе активной зоны и, как следствие, снизило бы уровень сигнала от целевой ИК, а значит поставило бы под вопрос включение в работу авторегулятора при необходимых параметрах экспериментального твэла. Таким образом, было принято решение о загрузке в ПК 3-10 ОУ, содержащее твэлы типа ВВЭР-1000 со "свежим" топливом, для компенсации отрицательной реактивности вносимой избыточной водой.

Поскольку в реакторе МИР.М1 возможно создание локальных критических областей [11], которые фактически ведут себя как реактор в реакторе, решающий вклад в создание необходимых условий для проведения рассматриваемых экспериментов вносит загрузка рабочих каналов вокруг именно ПК 3–7 и 3–10. Кроме того, предполагаемый уровень максимально достигаемой мощности порядка 10 МВт и величина вносимых возмущений в активной зоне посредством органов регулирования не приводят к значительному росту параметров, контролируемых при облучении изделий в остальных петлевых ячейках. Таким образом, ячейки, окружающие ПК 3–7, было решено загрузить ТВС со средним выгоранием топлива ≈30% для эксперимента МИР-LOCA/50 и ≈40% для эксперимента МИР-LOCA/60 для обеспечения отличия в средней мощности ТВС окружения яч. 3–10 и 3–7 в 4–6 раз, что по оценкам позволило бы создать условия, соответствующие вышеуказанным утверждениям. При этом загрузку остальных рабочих каналов оставили неизменной, что в том числе способствовало снижению временных и трудовых затрат при перегрузке.

Достигнутые положения органов СУЗ на минимально контролируемом уровне мощности представлены на рис. 2 и 4, а результаты градуировок приведены в табл. 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подготовка и проведение экспериментов, имитирующих аварийные режимы эксплуатации топлива, в таком уникальном реакторе, как

МИР.М1, требует учета значительного количества факторов: эксплуатационных, экономических и нейтронно-физических, — при безусловном обеспечении ядерной безопасности при принятии решений на всех этапах. Показано, что подготовка казалось бы однотипных экспериментов с одинаковыми исходными требованиями к обеспечению условий испытаний в активной зоне реактора МИР.М1 представляет собой сложную задачу с многими переменными, зависящую от начальных условий по загрузке рабочих и петлевых каналов, отравлению бериллиевой кладки активной зоны. При этом конечное состояние реактора на начало эксперимента и при достижении целевых параметров ОУ в ПК может быть совершенно различным. Так, запас реактивности по результатам градуировок и достигнутые значения мощности реактора в конце рассматриваемых экспериментов отличаются в разы. Приведенные подходы к формированию загрузки активной зоны реактора позволили обеспечить безопасное проведение сложных динамических экспериментов, моделирующих аварийные режимы работы испытуемых твэлов АЭС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исследовательские ядерные установки России / Под ред. Н.В. Архангельского, И.Т. Третьякова, В.Н. Федулина. М.: ОАО "НИКИЭТ", 2012. 330 с.
2. *Алексеев А.В., Дреганов О.И., Шулимов В.Н. и др.* Изучение поведения твэлов ВВЭР-1000 в условиях аварии с потерей теплоносителя (LOCA) / Сборник трудов АО "ГНЦ НИИАР". Димитровград: АО "ГНЦ НИИАР", 2017. Вып. 1. С. 12–20. ISBN 978-5-94831-154-8.
3. *Алексеев А.В., Горячев А.В., Дреганов О.И. и др.* Результаты испытания в реакторе МИР твэлов ВВЭР-1000 с высоким выгоранием топлива в условиях аварии с потерей теплоносителя / Атомная энергия. 2017. Т. 123. Вып. 3. С. 133–137.
4. *Алексеев А.В., Дреганов О.И., Шулимов В.Н. и др.* Изучение поведения твэлов ВВЭР-1000 в условиях аварии с потерей теплоносителя (LOCA). Реакторные эксперименты МИР-LOCA/45 и МИР-LOCA/69 / Программа конференции и тезисы докладов научно-технической конференции АО "ТВЭЛ" "Ядерное топливо нового поколения для АЭС. Результаты разработки, опыт эксплуатации и направления развития (НТК-2016)", Москва, 16–17 ноября 2016 г. М.: АО "ВНИИНМ имени ак. А.А. Бочвара", 2016. С. 38.
5. *Дреганов О.И.* Изучение поведения твэлов ВВЭР-1000 с повышенной ураноемкостью в аварии с потерей теплоносителя при моделировании условий в реакторе МИР. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. [Текст] / О.И. Дреганов. Димитровград, 2017. 105 с.
6. *Калыгин В.В., Малков А.П.* Особенности обеспечения ядерной безопасности реактора МИР при эксплуатации. Сборник трудов АО "ГНЦ НИИАР". 2017. № 2. С. 69–78.
7. *Калыгин В.В., Малков А.П.* Влияние методов формирования режимов облучения на значение эффекта реактивности при обезвоживании петлевых каналов реактора МИР. Сборник трудов НИИАР, 1996. Вып. 4.
8. *Анисимков О.В., Калыгин В.В., Малков А.П., Пименов В.В.* Влияние отравления бериллия на нейтронно-физические характеристики реактора МИР. Вопросы атомной науки и техники. Сер. Ядерная техника и технология. 1993. Вып. 1. С. 49–52.
9. *Малков А.П., Пименов В.В., Калыгин В.В., Козырьков А.В.* Ядерно-физические процессы в бериллии под облучением и их влияние на физические и технологические характеристики исследовательских реакторов. Сборник трудов АО "ГНЦ НИИАР". 2016. № 1. С. 13–25.
10. *Калыгин В.В., Малков А.П., Пименов В.В.* Влияние накопления ^{3}He и ^{6}Li в бериллиевых блоках на нейтронно-физические характеристики реактора МИР. Атомная энергия. 2008. Т. 104. Вып. 2. С. 84–88.
11. *Ижутов А.Л., Калыгин В.В., Малков А.П.* Особенности формирования загрузки активной зоны реактора МИР. Известия высших учебных заведений. Ядерная энергетика. 2010. № 4. С. 23–28.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 2, pp. 100–109

Some Features of the Core Loading Formation for the MIR.M1 Research Reactor to Prepare LOCA Experiments

D. V. Fomin[a,b,#], A. P. Malkov[a,b], A. M. Sharaev[a,b], and P. A. Zaichenko[a,b]

[a] *Dimitrovgrad Engineering and Technological Institute, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Dimitrovgrad, 433511 Russia*

[b] *State Scientific Center "Research Institute of Atomic Reactors", Dimitrovgrad, 433510 Russia*

[#]*e-mail: dvfomin@niiar.ru, fomindv85@gmail.com*

Received October 26, 2019; revised March 5, 2020; accepted March 10, 2020

Abstract—Some features of the core loading formation for the MIR.M1 research reactor during preparation of experiments to study the behavior of fuel rods for water-cooled reactors in accidents with loss of a coolant are discussed. The main structural and physical features of the reactor, as well as main directions of its use, are briefly presented. It has been shown that the preparation of the same type of experiments with the same initial requirements to ensure the test conditions in the MIR.M1 reactor core is a difficult task, depending on the initial conditions for loading the working and loop channels, poisoning of beryllium blocks of the core. For successful implementation of experiments, it is necessary to take into account numerous factors associated with both structural and operational features of the reactor. In this case, the final state of the reactor at the beginning of the experiment and upon reaching the target parameters of the test rig in a loop channel can be completely different. It has been shown that described approaches to the reactor core loading formation make it possible to safely conduct complex dynamic experiments simulating the emergency operation of the tested nuclear fuel rods. Some results of these experiments important for the discussed problem have been presented.

Keywords: research reactor, experiment, core loading formation

DOI: 10.1134/S2304487X20020030

REFERENCES

1. Issledovatelskie iadernye ustanovki Rossii [Russian nuclear research facilities] / Pod red. N.V. Arhangelskogo, I.T. Tretiakova, V.N. Fedulina. M.: OAO “NIKIET”, 2012. 330 p.
2. Alekseev A.V., Dreganov O.I., Shulimov V.N. [i dr.]. Izuchenie povedeniia tvelov VVER-1000 v usloviiakh avarii s poterei teplonositelia (LOCA) [Study of the behavior of VVER-1000 fuel rods in a loss of coolant accident (LOCA)] / Sbornik trudov AO “GNTC NIIAR”. Dimitrovgrad : AO “GNTC NIIAR”, 2017, vol. 1. – 12–20. p. ISBN 978-5-94831-154-8.
3. Alekseev A.V., Goriachev A.V., Dreganov O.I. [i dr.]. Rezultaty ispytaniia v reaktore MIR tvelov VVER-1000 s vysokim vygoraniem topliva v usloviiakh avarii s poterei teplonositelia [Results of VVER-1000 fuel rods with high fuel burnout testing in the reactor MIR in a loss of coolant accident] / Atomnaia energiia, T. 123, vol. 3. 2017. 133–137 p.
4. Alekseev A.V., Dreganov O.I., Shulimov V.N. [i dr.]. Izuchenie povedeniia tvelov VVER-1000 v usloviiakh avarii s poterei teplonositelia (LOCA). Reaktornye eksperimenty MIR-LOCA/45 i MIR-LOCA/69 [Study of the behavior of VVER-1000 fuel rods in a loss of coolant accident (LOCA). MIR-LOCA/45 and MIR-LOCA/69 reactor experiments] / Programma konferentcii i tezisy docladov nauchno-tekhnicheskoi konferentcii AO “TVEL” “Iadernoe toplivo novogo pokoleniia dlia AES. Rezultaty razrabotki, opyt ekspluatatcii i napravleniia razvitiia (NTK-2016)”, Moskva, 16–17 noiabria 2016 — M.: AO “VNIINM imeni ak. A.A. Bochvara”, 2016. 38 p.
5. Dreganov O.I. Izuchenie povedeniia tvelov VVER-1000 s povyshennoi uranoemkostiu v avarii s poterei teplonositelia pri modelirovanii uslovii v reaktore MIR [Study of the behavior of VVER-1000 fuel rods with increased uranium capacity in a loss of coolant accident in the simulation of conditions in the MIR reactor]. Dissertatciia na soiskanie uchenoi stepeni kandidata tekhnicheskikh nauk. [Tekst] / O.I. Dreganov. Dimitrovgrad, 2017. 105 p.
6. Kalygin V.V., Malkov A.P. Osobennosti obespecheniia iadernoi bezopasnosti reaktora MIR pri ekspluatatcii [Specificity of the MIR reactor nuclear safety during operation.]. Sbornik trudov AO “GNTC NIIAR”. 2017. № 2. 69–78 p.
7. Kalygin V.V., Malkov A.P. Vliianie metodov formirovaniia rezhimov oblucheniia na znachenie effekta reaktivnosti pri obezvozhivanii petlevykh kanalov reaktora MIR [Influence of irradiation regimes formation methods on the value of the reactivity effect during dehydration of the reactor loop channels]. Sbornik trudov NIIAR, 1996, vol. 4.
8. Anisimkov O.V., Kalygin V.V., Malkov A.P., Pimenov V.V. Vliianie otravleniia berilliia na neitronno-fizicheskie harakteristiki reaktora MIR [Effect of beryllium poisoning on the MIR reactor neutronic parameters]. Voprosy atomnoi nauki i tekhniki. Ser. Iadernaia tekhnika i tekhnologiia, 1993, vol. 1, 49–52 p.
9. Malkov A.P., Pimenov V.V., Kalygin V.V., Kozylkov A.V. Iaderno-fizicheskie protcessy v berillii pod oblucheniem i ikh vliianie na fizicheskie i tekhnologicheskie harakteristiki issledovatelskikh reaktorov [Nuclear processes in beryllium under irradiation and their effect on physical and technological characteristics of research reactors]. Sbornik trudov AO “GNTC NIIAR”. 2016. № 1. 13–25 p.
10. Kalygin V.V., Malkov A.P., Pimenov V.V. Vliianie nakopleniia ^{3}He i ^{6}Li v berillievykh blokakh na neitronno-fizicheskie harakteristiki reaktora MIR [Effect of ^{3}He and ^{6}Li accumulation in beryllium blocks on the MIR reactor neutronic parameters]. Atomnaia energiia, T. 104, vol. 2. 2008. 84–88 p.
11. Izhutov A.L., Kalygin V.V., Malkov A.P. Osobennosti formirovaniia zagruzki aktivnoi zony reaktora MIR [Srecifities of the MIR reactor core loading formation]. Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Iadernaia energetika. 2010. № 4. 23–28 p.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 2, с. 110–114

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ ОБОБЩЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ 3-Й, 5-Й И 7-Й СТЕПЕНИ

© 2020 г. К. В. Кан[1,*], Н. А. Кудряшов[1,]**

[1] *Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия*

**e-mail: kan_13@mail.ru*

***e-mail: nakudr@gmail.com*

Поступила в редакцию 21.02.2020 г.
После доработки 21.02.2020 г.
Принята к публикации 10.03.2020 г.

Семейство нелинейных уравнений Шредингера описывает ряд процессов, возникающих в физике. В настоящее время большой интерес уделяется моделированию и анализу распространения высокодисперсных оптических импульсов с учетом различных типов нелинейности. Влияние дисперсии обусловлено порядком рассматриваемого уравнения. В данной работе изучается уравнение 6-го порядка, учитывающее нелинейность 3-й, 5-й и 7-й степени. Поиск уединенных волн, распространяющихся в нелинейной среде, играет важную роль в исследовании распространения оптических импульсов. Для решения данной задачи используется метод, основанный на поиске решений в виде уединенных волн. На первом этапе метода осуществляется переход к уравнению, записанному с помощью переменных бегущей волны. В результате подстановки исходное уравнение сводится к переопределенной системе, состоящей из двух уравнений, соответствующих действительной и мнимой частям уравнения. Из уравнения, соответствующего мнимой части, получены ограничения на параметры. Определен порядок полюса уравнения, соответствующего действительной части. Ненулевой порядок полюса позволил перейти к следующему этапу метода и найти решение в виде уединенных волн. В работе построены решения и проанализированы графики решений при различных значениях параметров.

Ключевые слова: уединенные волны, уравнение Шредингера, нелинейные дифференциальные уравнения, распространение импульсов, оптоволокно

DOI: 10.1134/S2304487X20020054

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время большое внимание уделяется изучению высокодисперсных оптических солитонов в нелинейной среде, используемых при описании распространения импульсов в оптическом волокне [1–5]. Оптоволокно – это простая тонкая стеклянная нить, действующая как светопроводящий канал [6]

В данной работе рассматривается уравнение Шредингера, имеющее вид [7]:

$$\begin{aligned} &iq_t + ia_1q_x + a_2q_{xx} + ia_3q_{xxx} + a_4q_{xxxx} + ia_5q_{xxxxx} + \\ &+ a_6q_{xxxxxx} + (b_1|q|^2 + b_2|q|^4 + b_3|q|^6)q = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $q(x,t)$ – это профиль пульса, $a_j(j = 1,\ldots,6)$ и $b_k(k = 1,2,3)$ – параметры математических моделей, в основе которых лежит уравнение (1). Для того, чтобы найти уединенные волны, описываемые уравнением (1), используется метод, представленный в работах [9–13].

Уравнение (1) содержит в себе некоторое число эволюционных уравнений, которые используются для описания распространения импульсов в оптическом волокне. При $a_2 \neq 0$, $a_j = 0$ $(j \neq 2)$ и $b_2 = b_3 = 0$ уравнение (1) – это хорошо известное нелинейное уравнение Шредингера

$$iq_t + a_2q_{xx} + b_1|q|^2q = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) описывает огибающую волнового пакета в среде с дисперсией и кубической нелинейностью. Задача Коши для (2) решается методом обратной задачи рассеяния [14]. Для уравнения (2) найден ряд точных решений, которые описывают стационарные нелинейные волны. В частности, решения имеют вид:

$$q(x,t) = y(z)e^{i\varphi(x,t)}, \tag{3}$$

где $z = x - vt$, $\varphi(x,t) = -kx + \omega t + \theta_0$.

Подстановка (3) позволяет перейти к уравнению, описывающему уединенную волну (групповой солитон) $y(z)$. Групповые солитоны, которые описываются нелинейным уравнением Шредингера, находят разнообразное применение в нелинейной оптике, поскольку они могут использоваться при передаче информации в волоконно-оптических линиях связи. Это одно из перспективных направлений возможного применения солитонов [8].

2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА

Будем искать высокодисперсные оптические солитоны уравнения (1) в форме (3).

Подставляя (3) в уравнение (1), получаем переопределенную систему из двух уравнений для функции $y(z)$. Используя ограничения для параметров уравнения (1), решаем одно из уравнений для функции $y(z)$. Для того, чтобы решить другое уравнение, применяем метод, который состоит в том, чтобы искать решение в виде

$$y(z)=\sum_{i=0}^{p}c_iR(z)^i, \tag{4}$$

где c_i — это коэффициенты разложения (4), p — порядок полюса для общего решения уравнения (1). Порядок полюса решения уравнения (1) $p=1$ при $b_3\neq 0$. Функция $R(z)$ имеет форму

$$R(z)=\frac{4ae^{-\alpha z}}{4a^2e^{2\alpha z}+\chi}, \tag{5}$$

которая удовлетворяет следующему уравнению

$$R_z^2=R^2(1-\chi R^2). \tag{6}$$

В данной работе описанный метод применяется для поиска высокодисперсных оптических солитонов уравнения (1).

3. ВЫСОКОДИСПЕРСНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ УРАВНЕНИЯ (1)

В первую очередь рассмотрим уравнение (1) при $b_3\neq 0$. Подставляя решение $q(x,t)$ из (3) в (1) получаем переопределенную систему из двух уравнений по отношению к неизвестной функции $y(z)$

$$\begin{aligned}&a_6y_{zzzzzz}+(a_4+5a_5k-15a_6k^2)y_{zzzz}+\\&+(15a_6k^4-10a_5k^3-6a_4k^2+3a_3k+a_2)y_{zz}-\\&-b_3y^7-b_2y^5-b_1y^3+(a_6k^6-a_5k^5-\\&-a_4k^4+a_3k^3+a_2k^2-a_1k+\omega)y=0.\end{aligned} \tag{7}$$

и

$$\begin{aligned}&(a_5-6a_6k)y_{zzzz}+(20a_6k^3-10a_5k^2-\\&-4a_4k+a_3)y_{zz}+(-6a_6k^5+5a_5k^4+4a_4k^3-\\&-3a_3k^2-2a_2k-v+a_1)y=0.\end{aligned} \tag{8}$$

Функция $y(z)$ должна быть решением этих двух уравнений. Отметим, что система уравнений (7) и (8) имеет особую форму. Мы можем видеть, что уравнение (8) линейное, тогда как уравнение (7) — нелинейное. Также можно отметить, что в (7) присутствуют производные $y(z)$ и высокие степени функции $y(z)$. Однако, если мы используем условия

$$\begin{aligned}a_5&=6aj_6k,\\a_3&=40a_6k^3+4a_4k,\\a_1&=v-96a_6k^5-8a_4k^3-2a_2k,\end{aligned} \tag{9}$$

то с учетом условий (9) любая функция $y(z)$ удовлетворяет уравнению (8), и теперь необходимо найти зависимую $y(z)$, которая будет удовлетворять уравнению (7).

Уравнение (7) с учетом (9) записывается в виде:

$$\begin{aligned}&a_6y_{zzzzzz}+(15a_6k^2+a_4)y_{zzzz}+(75a_6k^4+\\&+6a_4k^2+a_2)y_{zz}-b_3y^7-b_2y^5-b_1y^3-\\&-(35a_6k^6+3a_4k^4+a_2k^2-a_1k+\omega)y=0.\end{aligned} \tag{10}$$

Нелинейное уравнение 6-го порядка (7) не имеет общего решения с 6 произвольными постоянными. Поэтому мы ищем точное решение этого уравнение с количеством произвольных констант, меньшим 6.

Подставляя $y(z)$ из (4) при $p=1$ и в уравнение (10), мы имеем алгебраическое уравнение относительно функции $R(z)$ в форме

$$\begin{aligned}&c_1(b_3c_1^6-720\chi^3a_6)R(z)^7+7R(z)^6b_3c_0c_1^6+\\&+(21c_1^4b_3c_0^2+360\chi^2k^2a_6+c_1^4b_2+24\chi^2a_4+\\&+840\chi^2a_6)c_1R(z)^5+5c_1^4c_0(7b_3c_0^2+b_2)R(z)^4-\\&-c_1(-35c_1^2b_3c_0^4+150k^4a_6-10c_1^2b_2c_0^2+12\chi k^2a_4+\\&+300\chi k^2a_6-c_1^2b_1+2\chi a_2+20\chi a_4+\\&+182\chi a_6)R(z)^3+c_1^2c_0(21b_3c_0^4+10b_2c_0^2+3b_1)R(z)^2-\\&+c_1(61k^6a_6+7b_3c_0^6+5k^4a_4+75k^4a_6+5b_2c_0^4+\\&+k^2a_2+6k^2a_4+15k^2a_6+3b_1c_0^2+vk-\omega+\\&+a_2+a_4+a_6)R(z)+(61k^6a_6+b_3c_0^6+5a_4k^4+\\&+b_2c_0^4+a_2k^2+b_1c_0^2+vk-\omega)c_0=0.\end{aligned} \tag{11}$$

Из (11) мы можем найти условия для параметров уравнения (1) вследствие того, что функция $R(z)$ удовлетворяет уравнению (11). В результате вычислений мы получаем следующие условия для параметров уравнения (1):

$$a_6=\frac{b_3c_1^6}{720\chi^3}, \tag{12}$$

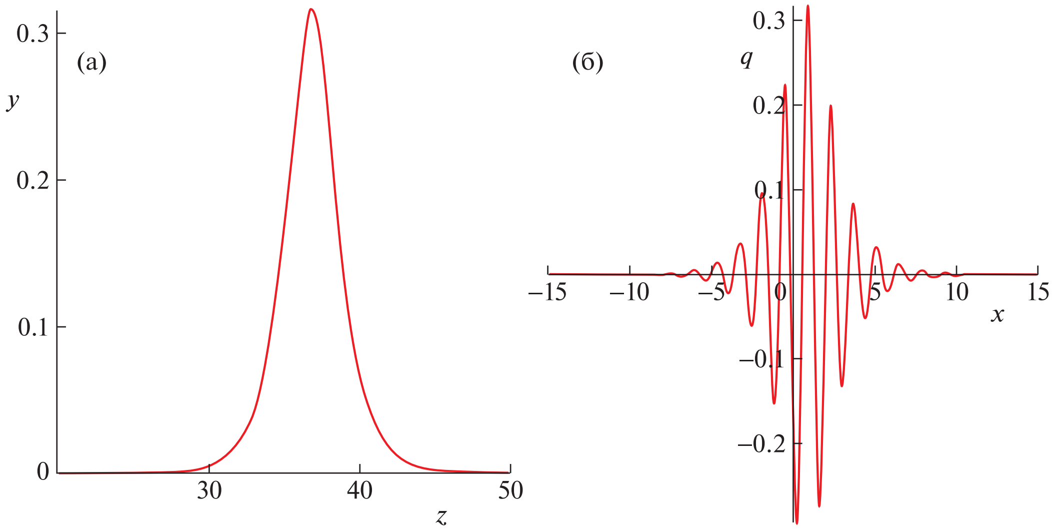

Рис. 1. Графики уединенной волны (19) и вещественной части решения (20) при $t = 10$, $a = 1.5$, $\alpha = 0.7$, $\chi = 0.1$, $k = 4.5$, $b_1 = 1.0$, $b_2 = 1.0$, $b_3 = 1.0$, $\theta_0 = 1.0$, $z_0 = 40.0$, $c_1 = 0.1$.

$$a_4 = -\frac{c_1^4}{144\chi^3}(3k^2b_3c_1^2 + 7b_3c_1^2 + 6\chi b_2), \tag{13}$$

$$a_2 = \frac{c_1^4}{720\chi^3}(15k^4b_3c_1^4 + 210k^2b_3c_1^4 + 180\chi k^2b_2c_1^2 + 259b_3c_1^4 + 300\chi b_2c_1^2 + 360\chi^2 b_1), \tag{14}$$

$$\omega = \frac{c_1^2}{720\chi^3}(k^6b_2c_1^6 + 35k^4b_3c_1^6 + 30\chi k^4b_2c_1^4 + 259k^2b_3c_1^6 + 300\chi k^2b_2c_1^4 + 360\chi^2k^2b_1c_1^2 + 225b_3c_1^6 + 270\chi b_2c_1^4 + 720kv\chi^3 + 360\chi^2b_1c_1^2), \tag{15}$$

$$c_0 = 0.$$

При этом $c_0 = 0$. Используя формулы для a_6, a_4, a_2 и ω, мы можем получить условия для параметров a_5, a_3 и a_1, учитывая формулу (9). Условия следующие:

$$a_5 = \frac{kb_3c_1^6}{120\chi^3}, \tag{16}$$

$$a_3 = \frac{kc_1^4}{36\chi^3}(2k^2b_3c_1^2 - 3k^2b_3c_1^2 - 7b_3c_1^2 - 6\chi b_2), \tag{17}$$

$$a_1 = \frac{1}{360\chi^3}((3k^4 + 70k^2 + 259)kb_3c_1^6 + 60k\chi b_2(k^2 + 5)c_1^4 + 360\chi^2kb_1c_1^2 + 360v\chi^3). \tag{18}$$

Решение (10) в форме уединенной волны

$$y(z) = \frac{4ac_1}{4a^2e^{\alpha z} + \chi e^{-\alpha z}}. \tag{19}$$

Тогда решение (1) записывается в форме

$$q(x,t) = \frac{4ac_1e^{i(-kx+\omega t+\theta_0)}}{4a^2e^{\alpha(x-vt-z_0)} + \chi e^{-\alpha(x-vt-z_0))}}, \tag{20}$$

где a, χ, v, k и z_0 являются произвольными постоянными.

На рис. 1 представлен аналог группового солитона. Подробнее о развитии теории солитонов можно посмотреть в [15].

Из результатов можно заметить, что при увеличении параметра k амплитуда полученной уединенной волны уменьшается. Также, при увеличении значения α уменьшается длина волны. Таким образом, показано, что амплитуда и скорость волны в групповом солитоне определяются произвольными постоянными и не связаны друг с другом [15].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрено обобщенное нелинейное уравнение Шредингера 6-го порядка с третьей, пятой и седьмой степенями нелинейности. Найдены высокодисперсные солитоны, которые являются решениями этого уравнения. Показано, что существуют высокодисперсные оптические солитоны, которые являются решением уравнения (1). Однако отметим, что высокодисперсные оптические солитоны могут существовать только для некоторых форм нелинейности. Мы получили, что существует точное решение (1) для различных значений параметров b_1, b_2 и b_3.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 18-11-00209.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kudryashov N.A.* First integrals and general solution of the traveling wave reduction for Schrödinger equation with anti-cubic nonlinearity // Optic. 2019. V. 185. P. 665–671.
2. *Kudryashov N.A.* Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with cubic-quintic nonlinearity // Optic. 2019. V. 188. P. 27–35.
3. *Kudryashov N.A.* A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber // Optic. 2019. V. 189. P. 42–52.
4. *Kudryashov N.A.* Construction of nonlinear differential equations for description of propagation pulses in optical fiber // 2019. [Online] Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030402619308411.
5. *Kudryashov N.A.* Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber // 2019. [Online] Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030402619309374.
6. *Бейтли Д., Райт Э.* Волоконная оптика: теория и практика / Пер. с англ. М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2006. 320 с.
7. *Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., and Belic M.R.* Highly dispersive optical solitons with cubic-quintic-septic law by F-expansion // Optik. V. 182. P. 897–906.
8. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики: Учебное пособие. М.: МИФИ, 2008. 352 с.
9. *Kudryashov N.A.* One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2012. V. 17. № 6. P. 2248–2253.
10. *Kudryashov N.A.* Polynomials in logistic function and solitary waves of nonlinear differential equations // Applied Mathematics and Computation. 2013. V. 219. № 17. P. 9245–9253.
11. *Kudryashov N.A.* Logistic function as solution of many nonlinear differential equations // Applied Mathematical Modelling. 2015. V. 39. № 18. P. 5733–5742.
12. *Kudryashov N.A.* Solitary wave solutions of hierarchy with non-local nonlinearity // 2019. V. 103. [Online] Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893965919304811.
13. *Kudryashov N.A.* Highly dispersive solitary wave solutions of perturbed nonlinear Schrödinger equations // Optic. 2020. V. 371. [Online] Available: https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85076831328&origin=resultslist&sort=plf-f&src=s&sidkbe774af7c2c3ee36f5262b2 c13392b&sot=autdocs&sdt=autdocs&sl=17&s=AU-ID7007152165&relpos 1&citeCnt=0&searchTerm
14. *Абловиц М.Д., Бао-Фэн Фэн, Сюй-Дань Ло, Муссли-мани З.* “Метод обратной задачи рассеяния для нелокального нелинейного уравнения Шредингера с обращением пространства-времени”, ТМФ. 2018. Т. 196. № 3. С. 343–372; Theoret. and Math. Phys. 2018. V. 196. № 3. P. 1241–1267.
15. *Кудряшов Н.А.* Солитоны в природе и физике // Вестник национального исследовательского ядерного университета “МИФИ”. 2018. Т. 7. № 2. С. 113–124.

Vestnik Natsional’nogo issledovatel’skogo yadernogo universiteta “MIFI”, 2020, vol. 9, no. 2, pp. 110–114

Soltary Wave Solutions of the Generalized Nonlinear Schrödinger Equation with Cubic, Quintic, and Septic Nonlinearities

K. V. Kan[a,#] and N. A. Kudryashov[a,##]

[a] National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: kan_13@mail.ru

[##]e-mail: nakudr@gmail.com

Received February 21, 2020; revised February 21, 2020; accepted March 10, 2020

Abstract—The family of nonlinear Schrödinger equations describes a number of physical phenomena. The simulation and analysis of the propagation of highly dispersive optical pulses with allowance for several nonlinearity types are currently of great interest. The dispersion is determined by the order of the governing equation. In this work, we consider the sixth order equation with cubic, quintic, and septic nonlinearities is analyzed. The search for solitary waves propagating in a nonlinear medium plays an important role in the study of the propagation of optical pulses. To solve this problem, the method based on the search for solitary wave solutions is used. At the first step, the substitution of travelling wave variables reduces the initial equation to the system of two differential equations corresponding to the real and imaginary parts of the initial equation. Restrictions on the parameters have been obtained from the equation corresponding to the imaginary part.

The pole order of the equation corresponding to the real part has been determined. A nonzero pole order makes it possible to find solitary wave solutions at the next step. These solutions have been constructed and plots of solutions at different parameters have been analyzed.

Keywords: solitary waves, Schrödinger equation, nonlinear differential equations, pulse propagation, optical fiber

DOI: 10.1134/S2304487X20020054

REFERENCES

1. *Kudryashov N.A.* First integrals and general solution of the traveling wave reduction for Schrödinger equation with anti-cubic nonlinearity // Optic. 2019. Vol. 185. P. 665–671.
2. *Kudryashov N.A.* Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with cubic-quintic nonlinearity // Optic. 2019. Vol. 188. P. 27–35.
3. *Kudryashov N.A.* A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber // Optic. 2019. Vol. 189. P. 42–52.
4. *Kudryashov N.A.* Construction of nonlinear differential equations for description of propagation pulses in optical fiber // 2019. [Online] Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030402619308411.
5. *Kudryashov N.A.* Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber // 2019. [Online] Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030402619309374.
6. *Bejtli D., Rajt E.* Volokonnaya optika: teoriya i praktika/Per. s angl. – M.: KUDIC-OBRAZ, 2006. – 320 s.
7. *Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., and Belic M.R.* Highly dispersive optical solitons with cubic-quintic-septic law by F-expansion // Optik. Vol. 182. P. 897–906.
8. *Kudryashov N.A.* Metody nelinejnoj matematicheskoj fiziki: Uchebnoe posobie. – M.: MIFI, 2008. 352 s.
9. *Kudryashov N.A.* One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2012. Vol. 17. no. 6. P. 2248–53.
10. *Kudryashov N.A.* Polynomials in logistic function and solitary waves of nonlinear differential equations // Applied Mathematics and Computation. 2013. Vol. 219. no. 17. P. 9245–9253.
11. *Kudryashov N.A.* Logistic function as solution of many nonlinear differential equations // Applied Mathematical Modelling. 2015. Vol. 39. no. 18. P. 5733–5742.
12. *Kudryashov N.A.* Solitary wave solutions of hierarchy with non-local nonlinearity // 2019. Vol. 103. [Online] Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893965919304811.
13. *Kudryashov N.A.* Highly dispersive solitary wave solutions of perturbed nonlinear Schrödinger equations // Optic. 2020. Vol. 371. [Online] Available: https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85076831328&origin=resultslist&sort=plf-f&src=s&sidkbe774af7c2c3ee36f5262b2 c13392b&sot=autdocs&sdt=autdocs&sl=17&s=AU-ID7007152165&relpos 1&citeCnt=0&searchTerm
14. M. D. Ablovic, Bao-Fen Fen, Syuj-Dan' Lo, Z. Musslimani, вЪњMetod obratnoj zadachi rasseyaniya dlya nelokal'nogo nelinejnogo uravneniya SHredingera s obrashcheniem prostranstva-vremeniвЪќ, TMF, 196:3 (2018), 343–372; Theoret. and Math. Phys., 196:3 (2018), 1241–1267.
15. *Kudryashov, N.A.* Solitony v prirode i fizike // Vestnik nacional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI". 2018. T. 7. No. 2. P. 113–124.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 2, с. 115–128

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ С ПОМОЩЬЮ РЕШЕНИЙ БОЛЕЕ ПРОСТЫХ УРАВНЕНИЙ БЕЗ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

© 2020 г. А. Д. Полянин[1,*], В. Г. Сорокин[1,]**

[1] Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

**e-mail: polyanin@ipmnet.ru*

***e-mail: vsesor@gmail.com*

Поступила в редакцию 17.02.2020 г.
После доработки 17.02.2020 г.
Принята к публикации 10.03.2020 г.

Описаны новые методы построения точных решений нелинейных уравнений математической физики с запаздыванием, основанные на использовании решений специального вида вспомогательных более простых уравнений математической физики без запаздывания. Возможности предложенных методов иллюстрируются на нелинейных реакционно-диффузионных и волновых уравнениях с запаздыванием и переменными коэффициентами, которые содержат от трех до семи произвольных функций, зависящих от пространственной переменной или искомой величины. Получены новые решения типа обобщенной бегущей волны и решения с функциональным разделением переменных, допускающие представление в неявной форме. Приведены также примеры точных решений более сложных нелинейных уравнений с переменным запаздыванием, которое произвольным образом зависит от времени. Рассмотренные уравнения и их точные решения могут быть использованы для формулировки тестовых задач, предназначенных для проверки адекватности и оценки точности численных и приближенных аналитических методов решения соответствующих нелинейных начально-краевых задач для уравнений в частных производных с запаздыванием.

Ключевые слова: нелинейные уравнения в частных производных с запаздыванием, реакционно-диффузионные уравнения с переменными коэффициентами, волновые уравнения с переменными коэффициентами, точные решения в неявном виде, решения с функциональным разделением переменных

DOI: 10.1134/S2304487X20020108

1. ВВЕДЕНИЕ

Точные решения дифференциальных уравнений математической физики с частными производными всегда играли и продолжают играть огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Точные решения нелинейных уравнений наглядно демонстрируют и позволяют лучше понять механизмы таких сложных эффектов, как пространственная локализация процессов переноса, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях, существование режимов с обострением, возможная негладкость или разрывность искомых величин и др. Простые решения линейных и нелинейных уравнений широко используются для иллюстрации теоретического материала и некоторых приложений в учебных курсах университетов и технических вузов (по теории тепло- и массопереноса, гидродинамике, газовой динамике, теории волн, нелинейной оптике и др.). Даже те точные решения дифференциальных уравнений, которые не имеют ясного физического смысла, могут быть использованы в качестве тестовых задач, позволяя анализировать область применимости и точность различных численных и приближенных аналитических методов.

Методы поиска точных решений нелинейных уравнений с частными производными излагаются, например, в [1–9]. В [2–4, 6, 8–33] описаны точные решения нелинейных уравнений теплопроводности, диффузии, теории волн, гидродинамики и некоторых других уравнений.

Для математического моделирования сложных явлений и процессов, состояние которых зависит не только от данного момента времени, но и от одного или нескольких моментов времени в прошлом, используются дифференциальные уравнения с запаздыванием. К подобным уравнениям относятся, например, нелинейные уравнения реакционно-диффузионного типа с запаздыванием

$$u_t = [a(u)u_x]_x + f(u, w)$$

и нелинейные уравнения волнового типа с запаздыванием

$$u_{tt} = [a(u)u_x]_x + f(u, w),$$

где $u = u(x,t)$, $w = u(x, t-\tau)$, $\tau = \text{const} > 0$ – время запаздывания. Такие дифференциальные уравнения обладают рядом специфических качественных особенностей [34–38], которые не присущи уравнениям без запаздывания.

В данной статье термин “точное решение” для нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием будем применять в случаях, когда решение выражается:

(i) через элементарные функции и неопределенные или/и определенные интегралы;

(ii) через решения обыкновенных дифференциальных уравнений без запаздывания или систем таких уравнений;

(iii) через решения обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием или систем таких уравнений.

Допустимы комбинации решений из пп. (i)–(iii).

Замечание 1. Если уравнение зависит от специальных или произвольных функций, то в п. (i) к элементарным функциям надо добавить также функции, входящие в уравнение.

Устойчивость решений типа бегущей волны реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием исследовалась в работах [39–44]. Некоторые точные решения этого типа, допускающие представление в элементарных функциях, получены в [45].

Точным решениям нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием, отличным от решений типа бегущей волны, посвящено сравнительно немного публикаций. В [46–57] описаны точные решения широкого класса нелинейных уравнений и систем уравнений реакционно-диффузионного типа с запаздыванием. Точные решения нелинейных уравнений и систем уравнений гиперболического типа с запаздыванием получены в работах [37, 55, 58–61]. В [62] приведены некоторые точные решения уравнения гидродинамического типа с запаздыванием (релаксацией) типа Каттанео–Вернотте. О специфических методах построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием см. [48, 53, 54]. Важно отметить, что методы группового анализа, которые хорошо зарекомендовали себя для уравнений математической физики без запаздывания [1, 2], малоэффективны для уравнений с запаздыванием (сравните, например, результаты работ [58] и [59], где рассматривались нелинейные уравнения типа Клейна–Гордона с запаздыванием).

В данной статье описаны два новых метода построения точных решений нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием, которые основаны на использовании решений специального вида вспомогательных более простых уравнений в частных производных без запаздывания. Широкие возможности предложенных методов демонстрируются на нелинейных реакционно-диффузионных и волновых уравнениях с запаздыванием и переменными коэффициентами, которые содержат от трех до семи произвольных функций. Впервые получены точные решения в неявной форме нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием.

2. ПЕРВЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

2.1. Общее описание метода

Рассмотрим нелинейные уравнения в частных производных с двумя независимыми переменными вида

$$\Phi(x, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \ldots; \alpha_1, \ldots, \alpha_m) = 0, \qquad (1)$$

где $u = u(x,t)$ – искомая функция, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ – свободные параметры.

Покажем, что в некоторых случаях точные решения уравнения (1) можно использовать для построения точных решений более сложных нелинейных уравнений с запаздыванием. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть уравнение (1) имеет решение типа обобщенной бегущей волны, которое можно представить в неявном виде

$$F(u) = kt + \theta(x), \qquad (2)$$

где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$P(k, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) = 0, \qquad (3)$$

а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$Q(x, \theta, \theta'_x, \theta''_{xx}, \ldots; \alpha_1, \ldots, \alpha_m) = 0. \qquad (4)$$

Тогда более сложное нелинейное уравнение с запаздыванием, которое получается из (1) формальной заменой свободных параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ на функции по правилу

$$\alpha_i \Rightarrow \varphi_i(F(u) - F(w)), \quad i = 1, \ldots, m, \qquad (5)$$

где $w = u(x, t-\tau)$, а $\varphi_i(z)$ – заданные (достаточно произвольно) функции, также допускает точное решение вида (2), причем константа k и функция

$\theta = \theta(x)$ определяются из уравнений (3) и (4), в которых следует положить

$$\alpha_i = \varphi_i(k\tau), \quad i = 1, \ldots, m. \tag{6}$$

Доказательство. На решениях вида (2) имеем $F(w) = k(t - \tau) + \theta(x) = F(u) - k\tau$, т. е.

$$F(u) - F(w) = k\tau = \text{const}. \tag{7}$$

Поэтому любое уравнение с запаздыванием, полученное из (1) заменой параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ на функции по правилу (5), на решениях вида (2) в силу (7) эквивалентно уравнению (1) при условии (6).

Утверждение 1 можно использовать для построения точных решений в явном и неявном виде некоторых уравнений в частных производных с запаздыванием.

Замечание 2. В вырожденных случаях уравнение (4) может быть алгебраическим или трансцендентным (т.е. не содержать производных функции θ) или даже задавать функцию θ в явной форме. В частности, любое решение типа бегущей волны можно представить в виде (2) при $\theta(x) = \beta x$, где β — произвольная постоянная.

2.2. Методические примеры практического применения метода

Пример 1. Для иллюстрации практического применения утверждения 1 возьмем линейное уравнение диффузионного типа без запаздывания

$$u_t = u_{xx} + a, \tag{8}$$

где a — свободный параметр.

Уравнение (8) допускает простое точное решение с разделяющимися переменными, которое записывается в явном виде

$$u = kt + \lambda x^2 + C_1 x + C_2, \tag{9}$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные, а параметр k следующим образом выражается через a и λ:

$$k = 2\lambda + a. \tag{10}$$

Решение (9) является частным случаем решения (2) при $F(u) = u$. Подставляя эту функцию в (7), имеем $F(u) - F(w) = u - w = k\tau$. Используя утверждение 1, заменим в уравнении (8) параметр a на $\varphi(u - w)$, где $\varphi(z)$ — произвольная функция. В результате приходим к нелинейному уравнению с запаздыванием

$$u_t = u_{xx} + \varphi(u - w),$$

которое допускает точное решение (9), где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$k = 2\lambda + \varphi(k\tau)$$

(получено из (10) при $a = \varphi(k\tau)$).

Пример 2. Рассмотрим нелинейное реакционно-диффузионное уравнение с запаздыванием

$$u_t = (u^n u_x)_x + au^{1-n}, \tag{11}$$

где a — свободный параметр.

Уравнение (11) допускает решение типа бегущей волны в явном виде

$$u = (kt + \lambda x + C_1)^{1/n}, \tag{12}$$

где C_1, λ — произвольные постоянные, а параметр k выражается через a, λ и n следующим образом:

$$k = an + \frac{\lambda^2}{n}. \tag{13}$$

Решение (12) является частным случаем решения (2) при $F(u) = u^n$. Подставляя эту функцию в (7), имеем $F(u) - F(w) = u^n - w^n = k\tau$. Используя утверждение 1, заменим в уравнении (11) параметр a на $\varphi(u^n - w^n)$, где $\varphi(z)$ — произвольная функция. В результате приходим к нелинейному уравнению с запаздыванием

$$u_t = (u^n u_x)_x + u^{1-n}\varphi(u^n - w^n),$$

которое допускает точное решение вида (12), где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$k = n\varphi(k\tau) + \frac{\lambda^2}{n}$$

(получено из (13) при $a = \varphi(k\tau)$).

2.3. Построение нелинейных уравнений с запаздыванием и их точных решений

Уравнение 1. Нелинейное уравнение реакционно-диффузионного типа без запаздывания

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \sigma + \frac{\beta}{f(u)}, \tag{14}$$

которое содержит две произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$ и два свободных параметра σ и β, допускает решение типа обобщенной бегущей волны в неявном виде [30]:

$$\int f(u)du = kt - \sigma\int\frac{xdx}{a(x)} + C_1\int\frac{dx}{a(x)} + C_2, \tag{15}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а константа k связана с параметром β линейным соотношением

$$k = \beta. \tag{16}$$

Решение (15) является решением вида (2) при $F(u) = \int f(u)du$.

Используя утверждение 1, заменим в уравнении (14) параметры σ и β соответственно на

$\varphi(F(u)-F(w))$ и $\psi(F(u)-F(w))$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – произвольные функции. В результате приходим к новому нелинейному уравнению реакционно-диффузионного типа с запаздыванием

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \varphi(F(u)-F(w)) + \frac{1}{f(u)}\psi(F(u)-F(w)), \quad (17)$$
$$F(u) = \int f(u)du,$$

которое зависит от четырех произвольных функций и имеет точное решение

$$\int f(u)du = kt - \varphi(k\tau)\int\frac{xdx}{a(x)} + C_1\int\frac{dx}{a(x)} + C_2, \quad (18)$$

где постоянная k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$k = \psi(k\tau) \quad (19)$$

(получено из (16) при $\beta = \psi(k\tau)$).

Пример 3. Полагая $F(u)=u^{n+1}$, $f(u)=(n+1)u^n$, $a(x)=a_0/(n+1)=\text{const}$, $\psi(z)=(n+1)\overline{\psi}(z)$ в (17)–(19), приходим к нелинейному уравнению с запаздыванием

$$u_t = a_0(u^n u_x)_x + \varphi(u^{n+1}-w^{n+1}) + u^{-n}\overline{\psi}(u^{n+1}-w^{n+1}),$$

зависящему от двух произвольных функций $\varphi(z)$ и $\overline{\psi}(z)$, точное решение которого допускает представление в явном виде

$$u = \left[kt - \frac{n+1}{2a_0}\varphi(k\tau)x^2 + C_1x + C_2\right]^{\frac{1}{n+1}}, \quad (20)$$

где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $k=(n+1)\overline{\psi}(k\tau)$.

Пример 4. Полагая $F(u)=e^{\lambda u}$, $f(u)=\lambda e^{\lambda u}$, $a(x)=a_0/\lambda=\text{const}$, $\psi(z)=\lambda\overline{\psi}(z)$ в (17)–(19), получим нелинейное уравнение с запаздыванием

$$u_t = a_0(e^{\lambda u}u_x)_x + \varphi(e^{\lambda u}-e^{\lambda w}) + e^{-\lambda u}\overline{\psi}(e^{\lambda u}-e^{\lambda w}),$$

которое имеет точное решение

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln\left[kt - \frac{\lambda}{2a_0}\varphi(k\tau)x^2 + C_1x + C_2\right], \quad (21)$$

где постоянная k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $k=\lambda\overline{\psi}(k\tau)$.

Уравнение 2. Более общее, чем (17), нелинейное уравнение с запаздыванием

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)\varphi(F(u)-F(w)) + \frac{1}{f(u)}\psi(F(u)-F(w)),$$

зависящее от пяти произвольных функций $a(x)$, $b(x)$, $f(u)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$, имеет точное решение

$$\int f(u)du = kt - \varphi(k\tau)\int\frac{1}{a(x)}\left(\int b(x)dx\right)dx + C_1\int\frac{dx}{a(x)} + C_2,$$

где константа k является корнем алгебраического (трансцендентного) уравнения (19).

Далее, опуская подробности, приведем еще несколько нелинейных уравнений в частных производных без запаздывания, допускающих точные решения вида (2), и порождаемые ими более сложные нелинейные уравнения с запаздыванием и их точные решения.

Уравнение 3. Рассмотрим другое нелинейное уравнение без запаздывания

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x - \mu a(x)f(u)u_x + \sigma + \frac{\beta}{f(u)},$$

которое допускает точное решение [9]:

$$\int f(u)du = kt + \frac{\sigma}{\mu}\int\frac{dx}{a(x)} + C_1\int\frac{e^{\mu x}}{a(x)}dx + C_2, \quad (22)$$

где константа k связана с параметром β линейным соотношением (16).

Рассуждая также, как и в примере 1, получим нелинейное уравнение с запаздыванием

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x - \mu a(x)f(u)u_x + \varphi(F(u)-F(w)) + \frac{1}{f(u)}\psi(F(u)-F(w)),$$

точное решение которого определяется формулой (22) при $\sigma=\varphi(k\tau)$, а постоянная k является корнем алгебраического (трансцендентного) уравнения (19).

Уравнение 4. Нелинейное волновое уравнение типа Клейна–Гордона без запаздывания

$$u_{tt} = [a(x)f(u)u_x]_x + \sigma - \beta\frac{f'_u(u)}{f^3(u)},$$

которое содержит две произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$ и два свободных параметра β и σ, допускает решение типа обобщенной бегущей волны [31]:

$$\int f(u)du = kt - \sigma\int\frac{xdx}{a(x)} + C_1\int\frac{dx}{a(x)} + C_2, \quad (23)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, а константа k связана с параметром β соотношением

$$k^2 = \beta.$$

При $\beta > 0$ имеем два действительных решения $k=\pm\sqrt{\beta}$.

Решение (23) является решением вида (2) при $F(u)=\int f(u)du$.

Рассуждая аналогично тому, как это делалось ранее в примере 1, приходим к нелинейному уравнению типа Клейна–Гордона с запаздыванием

$$u_{tt} = [a(x)f(u)u_x]_x + \varphi(F(u) - F(w)) - \\ - \frac{f'_u(u)}{f^3(u)}\psi(F(u) - F(w)), \tag{24}$$

точное решение которого можно представить в неявной форме (23) при $\sigma = \varphi(k\tau)$, а константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $k^2 = \psi(k\tau)$.

Пример 5. Полагая $F(u) = u^{n+1}$, $f(u) = (n+1)u^n$, $a(x) = a_0/(n+1) = \text{const}$, $\psi(z) = n^{-1}(n+1)^2\overline{\psi}(z)$ в (24), приходим к нелинейному уравнению с запаздыванием

$$u_{tt} = a_0(u^n u_x)_x + \varphi(u^{n+1} - w^{n+1}) - \\ - u^{-2n-1}\overline{\psi}(u^{n+1} - w^{n+1}),$$

точное решение которого описывается формулой (20), где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $nk^2 = (n+1)^2\overline{\psi}(k\tau)$.

Пример 6. Полагая $F(u) = e^{\lambda u}$, $f(u) = \lambda e^{\lambda u}$, $a(x) = a_0/\lambda = \text{const}$, $\psi(z) = \lambda\overline{\psi}(z)$ в (24), получим нелинейное уравнение с запаздыванием

$$u_{tt} = a_0(e^{\lambda u}u_x)_x + \varphi(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}) - e^{-2\lambda u}\overline{\psi}(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}),$$

которое имеет точное решение (21), где постоянная k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $k^2 = \lambda\overline{\psi}(k\tau)$.

Уравнение 5. Нелинейное волновое уравнение типа Клейна–Гордона без запаздывания

$$u_{tt} = [a(x)u_x]_x + \beta\frac{a'_x(x)}{\sqrt{a(x)}}f(u), \tag{25}$$

содержащее две произвольные функции $a(x)$ и $g(u)$, допускает два точных решения [31]:

$$\int\frac{du}{f(u)} = \pm 2kt - 2k\int\frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C, \tag{26}$$

где константа k связана с параметром β линейным соотношением (16). Решение (26) является решением вида (2) при $F(u) = \int[du/f(u)]$.

Уравнение (25) порождает более сложное уравнение с запаздыванием

$$u_{tt} = [a(x)u_x]_x + \frac{a'_x(x)}{\sqrt{a(x)}}f(u)\psi(F(u) - F(w)), \\ F(u) = \int\frac{du}{f(u)},$$

точные решения которого определяются формулой (26), где константа k находится из алгебраического (трансцендентного) уравнения $k = \psi(k\tau)$.

3. ВТОРОЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

3.1. Общее описание метода

Утверждение 2. Пусть уравнение (1) имеет решение с функциональным разделением переменных специального вида

$$F(u) = e^{kt}\theta(x), \tag{27}$$

где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения (3), а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (4). Тогда более сложное нелинейное уравнение с запаздыванием, которое получается из (1) формальной заменой свободных параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ на функции по правилу

$$\alpha_i \Rightarrow \varphi_i(F(w)/F(u)), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{28}$$

где $w = u(x, t-\tau)$, а $\varphi_i(z)$ – заданные (достаточно произвольно) функции, также допускает точное решение вида (27), причем константа k и функция $\theta = \theta(x)$ определяются из уравнений (3) и (4), в которых следует положить

$$\alpha_i = \varphi_i(e^{-k\tau}), \quad i = 1, \ldots, m. \tag{29}$$

Доказательство. На решениях вида (27) имеем $F(w) = e^{k(t-\tau)}\theta(x) = e^{-k\tau}F(u)$, т. е.

$$F(w)/F(u) = e^{-k\tau} = \text{const}. \tag{30}$$

Поэтому любое уравнение с запаздыванием, полученное из (1) заменой параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ на функции по правилу (28), на решениях вида (27) в силу (30) эквивалентно уравнению (1) при условии (29).

Утверждение 2 можно использовать для построения точных решений в явном и неявном виде некоторых уравнений в частных производных с запаздыванием.

Замечание 3. Утверждение 2 можно свести к утверждению 1. Для этого надо, считая $F(u) > 0$, прологарифмировать решение (27), а затем сделать переобозначения $\ln F(u) \Rightarrow F(u)$ и $\ln\theta \Rightarrow \theta$ (аналогичным образом рассматривается и случай $F(u) < 0$). Однако на практике часто встречается представление решения непосредственно в виде (27), поэтому проще и удобнее его и использовать.

3.2. Методические примеры практического применения метода

Пример 7. Рассмотрим линейное уравнение диффузионного типа

$$u_t = u_{xx} + au, \tag{31}$$

где a — свободный параметр.

Уравнение (31) допускает точное решение с разделяющимися переменными

$$u = e^{kt}\theta(x), \tag{32}$$

где k — произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет линейному ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\theta''_{xx} + (a-k)\theta = 0. \tag{33}$$

Решение (32) является частным случаем решения (27) при $F(u) = u$. Подставляя эту функцию в (30), имеем $F(w)/F(u) = w/u = e^{-k\tau}$. Используя утверждение 2, заменим в уравнении (31) параметр a на $\varphi(w/u)$, где $\varphi(z)$ — произвольная функция. В результате приходим к нелинейному уравнению с запаздыванием

$$u_t = u_{xx} + u\varphi(w/u),$$

которое допускает точное решение (32), где k — произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет линейному ОДУ

$$\theta''_{xx} + [\varphi(e^{-k\tau}) - k]\theta = 0.$$

Это уравнение получено подстановкой константы $a = \varphi(e^{-k\tau})$ в (33) и легко интегрируется.

Пример 8. Рассмотрим реакционно-диффузионное уравнение с квадратичной нелинейностью

$$u_t = (uu_x)_x + au + bu^2, \tag{34}$$

где a, b — свободные параметры.

При $b > 0$ уравнение (34) допускает точное решение с разделяющимися переменными в явном виде

$$u = e^{kt}\sqrt{|C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)|}, \quad \beta = \sqrt{2b}, \tag{35}$$

которое является частным случаем решения (32), где параметр k удовлетворяет линейному соотношению

$$k = a. \tag{36}$$

Как и в примере 7, имеем $F(u) = u$ и, следовательно, $F(w)/F(u) = w/u = e^{-k\tau}$. Используя утверждение 2, заменим в уравнении (34) параметры a и b соответственно на $\varphi(w/u)$ и $\psi(w/u)$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — произвольные функции. В результате приходим к нелинейному уравнению с запаздыванием

$$u_t = (uu_x)_x + u\varphi(w/u) + u^2\psi(w/u),$$

которое допускает точное решение вида (35), где k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$k = \varphi(e^{-k\tau})$$

(получено из (36) при $a = \varphi(e^{-k\tau})$).

3.3. Построение нелинейных уравнений с запаздыванием и их точных решений

Уравнение 6. Рассмотрим нелинейное уравнение реакционно-диффузионного типа без запаздывания

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \left[b + \frac{c}{f(u)}\right]F(u), \quad F(u) = \int f(u)\,du, \tag{37}$$

зависящее от произвольной функции $f(u)$ и двух свободных параметров b и c. Это уравнение допускает точное решение, которое можно представить в неявном виде [6]:

$$\int f(u)\,du = e^{kt}\theta(x), \tag{38}$$

где

$$k = c, \tag{39}$$

а функция $\theta = \theta(x)$ определяется из линейного ОДУ второго порядка

$$\theta''_{xx} + b\theta = 0. \tag{40}$$

Решение (38) является решением вида (27) при $F(u) = \int f(u)\,du$.

Используя утверждение 2, заменим в уравнении (37) параметры b и c соответственно на $\varphi(F(w)/F(u))$ и $\psi(F(w)/F(u))$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — произвольные функции. В результате приходим к более сложному нелинейному уравнению реакционно-диффузионного типа с запаздыванием

$$u_t = [f(u)u_x]_x + F(u)\left[\varphi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right) + \frac{1}{f(u)}\psi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right)\right], \quad F(u) = \int f(u)\,du, \tag{41}$$

которое зависит от трех произвольных функций и имеет точное решение вида (38), где константа k является корнем алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$k = \psi(e^{-k\tau}) \tag{42}$$

(получено из (39) при $c = \psi(e^{-k\tau})$), а функция $\theta = \theta(x)$ определяется из линейного ОДУ второго порядка (40) при $b = \varphi(e^{-k\tau})$.

Пример 9. Полагая $\varphi(z) = bz$ и $\psi(z) = cz$ в (41), приходим к уравнению

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \left[b + \frac{c}{f(u)}\right]F(w),$$

которое получается из (37) формальным переобозначением $F(u) \Rightarrow F(w)$.

Уравнение 7. Более общее, чем (41), нелинейное уравнение с запаздыванием

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \\ + b(x)F(u)\varphi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right) + \frac{F(u)}{f(u)}\psi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right),$$

зависящее от пяти произвольных функций $a(x)$, $b(x)$, $f(u)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$, допускает точное решение вида (38), где константа k является корнем алгебраического (трансцендентного) уравнения (42), а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет линейному ОДУ второго порядка

$$[a(x)\theta'_x]'_x + \varphi(e^{-k\tau})b(x)\theta = 0.$$

Уравнение 8. Нелинейное уравнение

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \mu f(u)u_x + \frac{\lambda}{f(u)}F(u), \qquad F(u) = \int f(u)du, \tag{43}$$

зависящее от произвольной функции $f(u)$ и двух свободных параметров μ и λ, допускает решение точное решение

$$\int f(u)du = e^{kt}(C_1 + C_2e^{-\mu x}), \tag{44}$$

где $k = \lambda$ [9].

Используя утверждение 2, можно, например, показать, что нелинейное уравнение с запаздыванием

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \mu f(u)u_x + \frac{F(u)}{f(u)}\varphi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right), \qquad F(u) = \int f(u)du, \tag{45}$$

допускает точное решение вида (44), где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $k = \varphi(e^{-k\tau})$.

Пример 10. Полагая $\varphi(z) = \lambda z$ в (45), приходим к уравнению

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \mu f(u)u_x + \frac{\lambda}{f(u)}F(w),$$

которое получается из (43) формальным переобозначением $F(u) \Rightarrow F(w)$.

Уравнение 9. Нелинейное уравнение

$$u_t = [f(u)u_x]_x - 2\alpha f(u)u_x + \left[\alpha^2 + \frac{\beta}{f(u)}\right]F(u), \qquad F(u) = \int f(u)du, \tag{46}$$

зависящее от произвольной функции $f(u)$ и двух свободных параметров α и β, допускает точное решение в неявном виде [9]:

$$\int f(u)du = e^{kt+\alpha x}(C_1x + C_2), \tag{47}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные и $k = \beta$.

Более сложное, чем (46), нелинейное уравнение с запаздыванием

$$u_t = [f(u)u_x]_x - 2\alpha f(u)u_x + \\ + \alpha^2F(u) + \frac{F(u)}{f(u)}\varphi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right)$$

также имеет точное решение (47), где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $k = \varphi(e^{-k\tau})$.

Уравнение 10. Рассмотрим нелинейное уравнение волнового типа с переменными коэффициентами

$$u_{tt} = [f(x,a)u^nu_x]_x + g(x,b)u^{n+1} + cu, \tag{48}$$

где $f(x,a)$, $g(x,b)$ – произвольные функции, a, b, c – свободные параметры.

Уравнение (48) допускает точное решение с разделяющимися переменными вида (32), где параметр k удовлетворяет квадратичному соотношению

$$k^2 = c, \tag{49}$$

а функция $\theta = \theta(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка

$$[f(x,a)\theta^n\theta'_x]'_x + g(x,b)\theta^{n+1} = 0. \tag{50}$$

В данном случае имеем $F(u) = u$ и $F(w)/F(u) = w/u = e^{-k\tau}$. Используя утверждение 2, заменим в уравнении (48) параметры a, b, c соответственно на $\varphi(w/u)$, $\psi(w/u)$, $\omega(w/u)$, где $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\omega(z)$ – произвольные функции. В результате приходим к нелинейному уравнению с запаздыванием

$$u_{tt} = [f(x,\varphi(w/u))u^nu_x]_x + \\ + u^{n+1}g(x,\psi(w/u)) + u\omega(w/u),$$

которое допускает точное решение вида (32), где k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$k^2 = \omega(e^{-k\tau})$$

(получено из (49) при $c = \omega(e^{-k\tau})$), а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ

$$[f(x,a)\theta^n\theta'_x]'_x + g(x,b)\theta^{n+1} = 0,$$
$$a = \varphi(e^{-k\tau}), \quad b = \psi(e^{-k\tau}).$$

Это уравнение с помощью замены $\xi(x) = \theta^{n+1}(x)$ сводится к линейному ОДУ второго порядка.

Уравнение 11. Нелинейное уравнение волнового типа (нелинейное уравнение Клейна–Гордона при $a(x) = \mathrm{const}$, $b(x) = 0$)

$$u_{tt} = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)F(u) + \lambda\left[\frac{F(u)}{f(u)} - \frac{f'_u(u)}{f^3(u)}F^2(u)\right], \quad F = \int f(u)du, \tag{51}$$

зависящее от трех произвольных функций $a(x)$, $b(x)$, $f(u)$ и свободного параметра λ, допускает точное решение в неявном виде (38), где константа k связана с λ соотношением $k^2 = \lambda$, а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет линейному ОДУ второго порядка [31]:

$$[a(x)\theta'_x]'_x + b(x)\theta = 0. \tag{52}$$

Более сложное, чем (51), нелинейное уравнение с запаздыванием

$$u_{tt} = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)F(u) + \left[\frac{F(u)}{f(u)} - \frac{f'_u(u)}{f^3(u)}F^2(u)\right]\varphi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right)$$

также имеет решение вида (38), где константа k определяется из алгебраического уравнения $k^2 = \varphi(e^{-k\tau})$, а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет линейному ОДУ второго порядка (52).

В качестве дальнейшего обобщения приведем уравнение

$$u_{tt} = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)F(u)\varphi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right) + c(x)F(w)\psi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right) + \left[\frac{F(u)}{f(u)} - \frac{f'_u(u)}{f^3(u)}F^2(u)\right]\times \chi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right), \quad F = \int f(u)du,$$

зависящее от произвольных функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $f(u)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\chi(z)$, которое допускает решение вида (38), где константа k является корнем алгебраического (трансцендентного) уравнения $k^2 = \chi(e^{-k\tau})$, а функция $\theta = \theta(x)$ описывается линейным ОДУ второго порядка

$$[a(x)\theta'_x]'_x + [\varphi(e^{-k\tau})b(x) + e^{-k\tau}\psi(e^{-k\tau})c(x)]\theta = 0.$$

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Приведем несколько нелинейных уравнений в частных производных с переменным запаздыванием, допускающих точные решения в неявной форме.

Уравнение 12. Рассмотрим нелинейное уравнение с переменным запаздыванием

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x) + \frac{1}{f(u)}\varphi(F(u) - F(w)),$$
$$F(u) = \int f(u)du, \quad w = u(x, t - \tau(t)),$$

которое содержит пять произвольных функций $a(x)$, $b(x)$, $f(u)$, $\varphi(z)$ и $\tau(t)$. Это уравнение допускает точные решения с функциональным разделением переменных в неявном виде

$$\int f(u)du = \xi(t) + \theta(x),$$

где функции $\theta = \theta(x)$ и $\xi = \xi(t)$ описываются соответственно линейным ОДУ второго порядка и нелинейным ОДУ первого порядка с запаздыванием:

$$[a(x)\theta'_x]'_x + b(x) = 0; \tag{53}$$

$$\xi'_t(t) = \varphi(\xi(t) - \xi(t-\tau)), \quad \tau = \tau(t). \tag{54}$$

Общее решение уравнения (53) определяется формулой

$$\theta = -\int \frac{1}{a(x)}\left(\int b(x)dx\right)dx + C_1\int \frac{dx}{a(x)} + C_2,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Если $\tau = \mathrm{const}$, то уравнение (54) имеет частные решения вида $\xi(t) = kt + C$, где C – произвольная постоянная, а k – корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $k = \varphi(k\tau)$.

Уравнение 13. Рассмотрим другое нелинейное уравнение с переменным запаздыванием

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)F(u) + \frac{F(u)}{f(u)}\varphi\left(\frac{F(w)}{F(u)}\right),$$
$$F(u) = \int f(u)du, \quad w = u(x, t - \tau(t)),$$

где $a(x)$, $b(x)$, $f(u)$, $\varphi(z)$, $\tau(t)$ – произвольные функции. Это уравнение также допускает точные решения с функциональным разделением переменных в неявной форме

$$\int f(u)du = \xi(t)\theta(x),$$

где функции $\theta = \theta(x)$ и $\xi = \xi(t)$ описываются соответственно линейным ОДУ второго порядка и нелинейным ОДУ первого порядка с запаздыванием:

$$[a(x)\theta'_x]'_x + b(x)\theta = 0;$$
$$\xi'_t(t) = \xi(t)\varphi(\xi(t-\tau)/\xi(t)), \quad \tau = \tau(t). \tag{55}$$

Если $\tau = \text{const}$, то уравнение (55) имеет частные решения экспоненциального вида $\xi(t) = \text{C}e^{kt}$, где C — произвольная постоянная, а k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $k = \varphi(e^{-k\tau})$.

Уравнение 14. Нелинейное волновое уравнение с переменным запаздыванием

$$u_{tt} = [a(x)u^n u_x]_x + b(x)u^{n+1} + u\varphi(w/u) + w\psi(w/u),$$
$$w = u(x, t-\tau(t)),$$

где $a(x)$, $b(x)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\tau(t)$ — произвольные функции, допускает точное решение в виде произведения функций разных аргументов

$$u = \xi(t)\theta(x),$$

где функции $\theta = \theta(x)$ и $\xi = \xi(t)$ описываются соответственно линейным ОДУ второго порядка и нелинейным ОДУ с запаздыванием второго порядка:

$$[a(x)\eta'_x]'_x + (n+1)b(x)\eta = 0, \quad \eta = \theta^{n+1};$$
$$\xi''_{tt}(t) = \xi(t)\varphi(\xi(t-\tau)/\xi(t)) +$$
$$+ \xi(t-\tau)\psi(\xi(t-\tau)/\xi(t)), \quad \tau = \tau(t).$$

Уравнение 15. Нелинейное волновое уравнение с переменным запаздыванием

$$u_{tt} = [a(x)e^{\beta u}u_x]_x + b(x)e^{\beta u} + \varphi(w-u),$$
$$w = u(x, t-\tau(t)),$$

где $a(x)$, $b(x)$, $\varphi(z)$, $\tau(t)$ — произвольные функции, допускает точное решение в виде суммы функций разных аргументов

$$u = \xi(t) + \theta(x),$$

где функции $\theta = \theta(x)$ и $\xi = \xi(t)$ описываются соответственно линейным ОДУ второго порядка и нелинейным ОДУ с запаздыванием второго порядка:

$$[a(x)\eta'_x]'_x + \beta b(x)\eta = 0, \quad \eta = e^{\beta\theta(x)};$$
$$\xi''_{tt}(t) = \varphi(\xi(t-\tau)/\xi(t)), \quad \tau = \tau(t).$$

5. КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Предложено два новых метода построения точных решений нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием. Методы основаны на использовании решений специального вида вспомогательных более простых уравнений в частных производных без запаздывания. Описан ряд нелинейных уравнений реакционно-диффузионного и волнового типов с переменными коэффициентами, которые содержат от трех до семи произвольных функций и допускают применение этих методов. Построены новые решения с функциональным разделением переменных в неявной форме, которые содержат свободные параметры. Рассмотрены также некоторые уравнения с переменным по времени запаздыванием и построены их точные решения. Полученные решения могут быть использованы для формулировки тестовых задач, предназначенных для оценки точности численных и приближенных аналитических методов решения нелинейных начально-краевых задач с запаздыванием.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690135-5) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10025).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Ibragimov N.H. (Ed.).* CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 1. Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. Boca Raton: CRC Press, 1994.
3. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
4. *Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.
5. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Изд. Дом Интеллект, 2010.
6. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition. Boca Raton: CRC Press, 2012.
7. *Polyanin A.D.* Comparison of the effectiveness of different methods for constructing exact solutions to nonlinear PDEs. Generalizations and new solutions // Mathematics. 2019. V. 7. № 5. P. 386.
8. *Полянин А.Д.* Методы функционального разделения переменных и их применение в математической физике // Мат. модел. числ. методы. 2019. № 1. С. 65–97.
9. *Polyanin A.D.* Functional separation of variables in nonlinear PDEs: General approach, new solutions of diffusion-type equations // Mathematics. 2020. V. 8. № 1. 90.
10. *Kudryashov N.A.* On exact solutions of families of Fisher equations // Theor. Math. Phys. 1993. V. 94. № 2. P. 211–218.
11. *Galaktionov V.A.* Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions // Nonlinear Anal. Theor. Meth. Appl. 1994. V. 23. P. 1595–1621.

12. *Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov A.A.* Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics. Kluwer: Dordrecht, 1998.
13. *Ludlow D.K., Clarkson P.A., Bassom A.P.* Similarity reductions and exact solutions for the two-dimensional incompressible Navier – Stokes equations // Studies Appl. Math. 1999. V. 103. P. 183–240.
14. *Ludlow D.K., Clarkson P.A., Bassom A.P.* New similarity solutions of the unsteady incompressible boundary-layer equations // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 2000. V. 53. P. 175–206.
15. *Qu C.Z., Zhang S.L., Liu R.C.* Separation of variables and exact solutions to quasilinear diffusion equations with the nonlinear source // Physica D. 2000. V. 144. № 1–2. P. 97–123.
16. *Polyanin A.D.* Exact solutions to the Navier – Stokes equations with generalized separation of variables // Doklady Physics. 2001. V. 46. № 10. P. 726–731.
17. *Estevez P.G., Qu C., Zhang S.* Separation of variables of a generalized porous medium equation with nonlinear source // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 275. P. 44–59.
18. *Kaptsov O.V., Verevkin I.V.* Differential constraints and exact solutions of nonlinear diffusion equations // J. Phys. A: Math. Gen. 2003. V. 36. P. 1401–1414.
19. *Zhang S.L., Lou S.Y., Qu C.Z.* New variable separation approach: Application to nonlinear diffusion equations // J. Physics A: Math. Gen. 2003. V. 36(49). P. 12223–12242.
20. *Vaneeva O.O., Johnpillai A.G., Popovych R.O., Sophocleous C.* Extended group analysis of variable coefficient reaction-diffusion equations with power nonlinearities // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 330. № 2. P. 1363–1386.
21. *Ivanova N.M.* Exact solutions of diffusion-convection equations // Dynamics of PDE. 2008. V. 5. № 2. P. 139–171.
22. *Jia H., Xu W., Zhao X., Li Z.* Separation of variables and exact solutions to nonlinear diffusion equations with x-dependent convection and absorption // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 339. P. 982–995.
23. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Unsteady axisymmetric boundary-layer equations: Transformations, properties, exact solutions, order reduction and solution method // Int. J. Non-Linear Mech. 2015. V. 74. P. 40–50.
24. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Functional and generalized separable solutions to unsteady Navier – Stokes equations // Int. J. Non-Linear Mech. 2016. V. 79. P. 88–98.
25. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Direct functional separation of variables and new exact solutions to axisymmetric unsteady boundary-layer equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2016. V. 31. № 1–3. P. 11–20.
26. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* One-dimensional reductions and functional separable solutions to unsteady plane and axisymmetric boundary-layer equations for non-Newtonian fluids // Int. J. Non-Linear Mech. 2016. V. 85. P. 70–80.
27. *Cherniha R., Serov M., Pliukhin O.* Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2018.
28. *Polyanin A.D.* Functional separable solutions of nonlinear convection–diffusion equations with variable coefficients // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2019. V. 73. P. 379–390.
29. *Polyanin A.D.* Functional separable solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with variable coefficients // Appl. Math. Comput. 2019. V. 347. P. 282–292.
30. *Polyanin A.D.* Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients // Int. J. Non-Linear Mech. 2019. V. 111. P. 95–105.
31. *Polyanin A.D.* Construction of functional separable solutions in implicit form for non-linear Klein – Gordon type equations with variable coefficients // Int. J. Non-Linear Mech. 2019. V. 114. P. 29–40.
32. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Separation of variables in PDEs using nonlinear transformations: Applications to reaction–diffusion type equations. // Appl. Math. Lett. 2020. V. 1000. 106055.
33. *Zhurov A.I., Polyanin A.D.* Symmetry reductions and new functional separable solutions of nonlinear Klein – Gordon and telegraph type equations. // J. Nonlinear Math. Phys. 2020. V. 27. № 2. P. 227–242.
34. *Wu J.* Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer, 1996.
35. *Jordan P.M., Dai W., Mickens R.E.* A note on the delayed heat equation: instability with respect to initial data // Mech. Res. Commun. 2008. V. 35. P. 414–420.
36. *Racke R.* Instability of coupled systems with delay // Commun. Pur. Appl. Anal. 2012. V. 11. № 5. P. 1753–1773.
37. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Вязьмин А.В.* Точные решения и качественные особенности гиперболических реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием // Теор. основы хим. технологии. 2015. Т. 49. № 5. С. 527–541.
38. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г.* Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: Математические модели и качественные особенности // Вестник НИЯУ МИФИ. 2017. Т. 6. № 1. С. 41–55.
39. *Smith H.L., Zhao X.-Q.* Global asymptotic stability of traveling waves in delayed reaction-Ddiffusion equations // SIAM J. Math. Anal. 2000. V. 31. № 3. P. 514–534.
40. *Lv G., Wang M.* Nonlinear stability of travelling wave fronts for delayed reaction diffusion equations // Nonlinearity. 2010. V. 23. 845.
41. *Chern I.-L., Mei M., Yang X., Zhang Q.* Stability of non-monotone critical traveling waves for reaction–diffusion equations with time-delay // J. Differ. Equations. 2015. V. 259. № 4. P. 1503–1541.
42. *Lv G., Wang Z.* Stability of traveling wave solutions to delayed evolution equation // J. Dyn. Control Syst. 2015. V. 21. № 2. P. 173–187.
43. *Mei M., So J.W.-H., Li M.Y., Shen S.S.P.* Asymptotic stability of travelling waves for Nicholson's blowflies equation with diffusion // P. Roy. Soc. Edinb. A. 2004. V. 134. № 3. P. 579–594.

44. *Mei M., Lin C.-K., Lin C.-T., So J.W.-H.* Traveling wavefronts for time-delayed reaction–diffusion equation: (I) Local nonlinearity // J. Differ. Equations. 2009. V. 247. № 2. P. 495–510.
45. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Nonlinear delay reaction–diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions // Appl. Math. Lett. 2015. V. 46. P. 38–43.
46. *Meleshko S.V., Moyo S.* On the complete group classification of the reaction-diffusion equation with a delay // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 338. P. 448–466.
47. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time // Int. J. Non-Linear Mech. 2013. V. 54. P. 115–126.
48. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2014. V. 19. № 3. P. 417–430.
49. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction-diffusion equations // Int. J. Non-Linear Mech. 2014. V. 59. P. 16–22.
50. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2014. V. 19. P. 409–416.
51. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions // Appl. Math. Lett. 2014. V. 37. P. 43–48.
52. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Non-linear instability and exact solutions to some delay reaction-diffusion systems // Int. J. Non-Linear Mech. 2014. V. 62. P. 33–40.
53. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients // Int. J. Non-Linear Mech. 2014. V. 67. P. 267–277.
54. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* The generating equations method: Constructing exact solutions to delay reaction–diffusion systems and other non-linear coupled delay PDEs //Int. J. Non-Linear Mech. 2015. V. 71. P. 104–115.
55. *Сорокин В.Г.* Точные решения некоторых нелинейных уравнений и систем уравнений в частных производных с запаздыванием // Вестник НИЯУ "МИФИ". 2016. Т. 5. № 3. С. 199–219.
56. *Polyanin A.D.* Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay and variable coefficients // Appl. Math. Lett. 2019. V. 90. P. 49–53.
57. *Sorokin V.G., Polyanin A.D.* Nonlinear partial differential equations with delay: Linear stability/instability of solutions, numerical integration // J. Physics: Conf. Series. 2019. V. 1205. 012053.
58. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Generalized and functional separable solutions to non-linear delay Klein – Gordon equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2014. V. 19. № 8. P. 2676–2689.
59. *Long F.-S., Meleshko S.V.* On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein – Gordon equation with a delay // Math. Methods Appl. Sci. 2016. V. 39. № 12. P. 3255–3270.
60. *Long F.-S., Meleshko S.V.* Symmetry analysis of the nonlinear two-dimensional Klein – Gordon equation with a time-varying delay // Math. Methods Appl. Sci. 2017. V. 40. № 13. P. 4658–4673.
61. *Сорокин В.Г.* Точные решения нелинейных телеграфных уравнений с запаздыванием // Вестник НИЯУ МИФИ. 2019. Т. 8. № 5. С. 453–464.
62. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact solutions of non-linear differential-difference equations of a viscous fluid with finite relaxation time // Int. J. Non-Linear Mech. 2013. V. 57. P. 116–122.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 2, pp. 115–128

Construction of Exact Solutions for Nonlinear Equations of Mathematical Physics with Delay Using Solutions of Simpler Equations without Delay

A. D. Polyanin[a,#] and V. G. Sorokin[a,##]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia*

[#]*e-mail: polyanin@ipmnet.ru*

[##]*e-mail: vsesor@gmail.com*

Received February 17, 2020; revised February 17, 2020; accepted March 10, 2020

Abstract—New methods for constructing exact solutions of nonlinear mathematical physics equations with delay have been proposed with the use of special solutions of simpler auxiliary equations of mathematical physics without delay. The capabilities of the proposed methods are illustrated on nonlinear reaction–diffusion and wave equations with delay and variable coefficients, which contain three-to-seven arbitrary functions depending on the spatial variable or the unknown. New generalized traveling wave solutions and functional separable solutions are obtained in the implicit form. Examples of exact solutions of more complex nonlinear equations with variable delay, which arbitrarily depends on time, are also given. The considered equations and their exact solutions can be used to formulate test problems intended to verify the adequacy and evaluate the accuracy of numerical and approximate analytical methods for solving the corresponding nonlinear initial-boundary value problems with delay.

Keywords: nonlinear delay partial differential equations, reaction–diffusion equations with variable coefficients, wave equations with variable coefficients, exact solutions in the implicit form, functional separable solutions

DOI: 10.1134/S2304487X20020108

REFERENCES

1. Ovsiannikov L.V. *Group Analysis of Differential Equations*. New York, Academic Press, 1982.
2. Ibragimov N.H. (Ed). *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 1. Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws*. Boca Raton, CRC Press, 1994.
3. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I. *Metody reshenija nelinejnyh uravnenij matematicheskoj fiziki i mehaniki* [Solution methods for nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2005.
4. Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. *Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2007.
5. Kudrjashov N.A. *Metody nelinejnoj matematicheskoj fiziki* [Methods of nonlinear mathematical physics]. Dolgoprudnyj, Izd. Dom Intellekt, 2010.
6. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition*. CRC Press, Boca Raton, 2012.
7. Polyanin A.D. Comparison of the effectiveness of different methods for constructing exact solutions to nonlinear PDEs. Generalizations and new solutions. *Mathematics*, 2019, vol. 7, no. 5, 386.
8. Polyanin A.D. Methods of functional separation of variables and their application in mathematical physics. *Mat. modelir. chisl. metody,* 2019, no. 1, pp. 65–97 (in Russian).
9. Polyanin A.D. Functional separation of variables in nonlinear PDEs: General approach, new solutions of diffusion-type equations. *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 1. 90.
10. Kudryashov N.A. On exact solutions of families of Fisher equations. *Theor. Math. Phys.*, 1993, vol. 94, no. 2, pp. 211–218.
11. Galaktionov V.A. Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions. *Nonlinear Anal. Theor. Meth. Appl.*, 1994, vol. 23, pp. 1595–1621.
12. Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov, A.A. *Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics*. Dordrecht, Kluwer, 1998.
13. Ludlow D.K., Clarkson P.A., Bassom A.P. Similarity reductions and exact solutions for the two-dimensional incompressible Navier – Stokes equations. *Studies Appl. Math.*, 1999, vol. 103, pp. 183–240.
14. Ludlow D.K., Clarkson P.A., Bassom A.P. New similarity solutions of the unsteady incompressible boundary-layer equations. *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 2000, vol. 53, pp. 175–206.
15. Qu C.Z., Zhang S.L., Liu R.C. Separation of variables and exact solutions to quasilinear diffusion equations with the nonlinear source. *Physica D*, 2000, vol. 144, no. 1–2, pp. 97–123.
16. Polyanin A.D. Exact solutions to the Navier – Stokes equations with generalized separation of variables. *Doklady Physics*, 2001, vol. 46, no. 10, pp. 726–731.
17. Estevez P.G., Qu C., Zhang S. Separation of variables of a generalized porous medium equation with nonlinear source *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, vol. 275, pp. 44–59.
18. Kaptsov O.V., Verevkin I.V. Differential constraints and exact solutions of nonlinear diffusion equations. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2003, vol. 36, pp. 1401–1414.
19. Zhang S.L., Lou S.Y., Qu C.Z. New variable separation approach: Application to nonlinear diffusion equations. *J. Physics A: Math. Gen.*, 2003, vol. 36, no. 49, pp. 12223–12242.
20. Vaneeva O.O., Johnpillai A.G., Popovych R.O., Sophocleous C. Extended group analysis of variable coefficient reaction-diffusion equations with power nonlinearities *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, vol. 330, no. 2, pp. 1363–1386.
21. Ivanova N.M. Exact solutions of diffusion-convection equations. *Dynamics of PDE*, 2008, vol. 5, no. 2, pp. 139–171.
22. Jia H., Xu W., Zhao X., Li Z. Separation of variables and exact solutions to nonlinear diffusion equations with x-dependent convection and absorption. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 339, pp. 982–995.
23. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Unsteady axisymmetric boundary-layer equations: Transformations, properties, exact solutions, order reduction and solution method. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2015, vol. 74, pp. 40–50.
24. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional and generalized separable solutions to unsteady Navier – Stokes equations. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2016, vol. 79, pp. 88–98.
25. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Direct functional separation of variables and new exact solutions to axisymmetric unsteady boundary-layer equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2016, vol. 31, no. 1–3, pp. 11–20.
26. Polyanin A.D., Zhurov A.I. One-dimensional reductions and functional separable solutions to unsteady

plane and axisymmetric boundary-layer equations for non-Newtonian fluids. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2016, vol. 85, pp. 70–80.

27. Cherniha R., Serov M., Pliukhin O. *Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2018.
28. Polyanin A.D. Functional separable solutions of nonlinear convection–diffusion equations with variable coefficients. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.,* 2019, vol. 73, pp. 379–390.
29. Polyanin A.D. Functional separable solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with variable coefficients *Appl. Math. Comput.*, 2019, vol. 347, pp. 282–292.
30. Polyanin A.D. Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2019, vol. 111, pp. 95–105.
31. Polyanin A.D. Construction of functional separable solutions in implicit form for non-linear Klein – Gordon type equations with variable coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2019, vol. 114, pp. 29–40.
32. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Separation of variables in PDEs using nonlinear transformations: Applications to reaction–diffusion type equations. *Appl. Math. Lett.*, 2020, vol. 1000, 106055.
33. Zhurov A.I., Polyanin A.D. Symmetry reductions and new functional separable solutions of nonlinear Klein – Gordon and telegraph type equations. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 2020, vol. 27, no. 2, pp. 227–242.
34. Wu J. *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*. New York, Springer, 1996.
35. Jordan P.M., Dai W., Mickens R.E. A note on the delayed heat equation: instability with respect to initial data. *Mech. Res. Commun.*, 2008, vol. 35, pp. 414–420.
36. Racke R. Instability of coupled systems with delay. *Commun. Pur. Appl. Anal.*, 2012, vol. 11, no. 5, pp. 1753–1773.
37. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Vyazmin A.V. Exact solutions and qualitative features of nonlinear hyperbolic reaction-diffusion equations with delay. *Theor. Found. Chem. En+*, 2015, vol. 49, no. 5, pp. 622–635.
38. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Reaction–diffusion equations with delay: Mathematical models and qualitative features. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2017, vol. 6, no. 1, pp. 41–55.
39. Smith H.L., Zhao X.-Q. Global asymptotic stability of traveling waves in delayed reaction-Ddiffusion equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 2000, vol. 31, no. 3, pp. 514–534.
40. Lv G., Wang M. Nonlinear stability of travelling wave fronts for delayed reaction diffusion equations. *Nonlinearity*, 2010, vol. 23, no. 4, 845.
41. Chern I.-L. et al. Stability of non-monotone critical traveling waves for reaction–diffusion equations with time-delay. *J. Differ. Equations*, 2015, vol. 259, no. 4, pp. 1503–1541.
42. Lv G., Wang Z. Stability of traveling wave solutions to delayed evolution equation. *J. Dyn. Control Syst.*, 2015, vol. 21, no. 2, pp. 173–187.
43. Mei M. et al. Asymptotic stability of travelling waves for Nicholson's blowflies equation with diffusion. *P. Roy. Soc. Edinb. A.*, 2004, vol. 134, pp. 579–594.
44. M. Mei et al. Traveling wavefronts for time-delayed reaction–diffusion equation: (I) Local nonlinearity. *J. Differ. Equations*, 2009, vol. 247, no. 2, pp. 495–510.
45. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nonlinear delay reaction–diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions. *Appl. Math. Lett.*, 2015, vol. 46, pp. 38–43.
46. S.V. Meleshko, S. Moyo. On the complete group classification of the reaction-diffusion equation with a delay. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 338, pp. 448–466.
47. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2013, vol. 54, pp. 115–126.
48. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 417–430.
49. Polyanin A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction-diffusion equations. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 59, pp. 16–22.
50. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, pp. 409–416.
51. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions. *Appl. Math. Lett.*, 2014, vol. 37, pp. 43–48.
52. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Non-linear instability and exact solutions to some delay reaction-diffusion systems. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 62, pp. 33–40.
53. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 67, pp. 267–277.
54. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The generating equations method: Constructing exact solutions to delay reaction–diffusion systems and other non-linear coupled delay PDEs. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2015, vol. 71, pp. 104–115.
55. Sorokin V.G. Tochnye resheniya nekotoryh nelinejnyh uravnenij i sistem uravnenij v chastnyh proizvodnyh s zapazdyvaniem [Exact solutions of some nonlinear partial differential equations with delay and systems of such equations]. *Vestnik NIYaU MIFI,* 2016, vol. 5, no. 3, pp. 199–219 (in Russian).
56. Polyanin A.D. Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay and variable coefficients. *Appl. Math. Lett.*, 2019, vol. 90, pp. 49–53.
57. Sorokin V.G., Polyanin A.D. Nonlinear partial differential equations with delay: Linear stability/instability of solutions, numerical integration. *J. Physics: Conf. Series*, 2019, vol. 1205, 012053.

58. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Generalized and functional separable solutions to non-linear delay Klein – Gordon equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 8, pp. 2676–2689.
59. Long F.-S., Meleshko S.V. On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein – Gordon equation with a delay. *Math. Methods Appl. Sciences.*, 2016, vol. 39, no. 12, pp. 3255–3270.
60. Long F.-S., Meleshko S.V. Symmetry analysis of the nonlinear two-dimensional Klein – Gordon equation with a time-varying delay. *Math. Methods Appl. Sciences.*, 2017, vol. 40, no. 13, pp. 4658–4673.
61. Sorokin V.G. Tochnye resheniya nelinejnyh telegrafnyh uravnenij s zapazdyvaniem [Exact solutions of nonlinear telegraph equations with delay]. *Vestnik NIYaU MIFI,* 2019, vol. 8, no. 5, pp. 453–464 (in Russian).
62. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of non-linear differential-difference equations of a viscous fluid with finite relaxation time. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2013, vol. 57, pp. 116–122.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 2, с. 129–138

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ ОБОБЩЕННЫМ УРАВНЕНИЕМ КУРАМОТО–СИВАШИНСКОГО В ПЕРЕМЕННЫХ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

© 2020 г. С. Ф. Лаврова[1,*], Н. А. Кудряшов[1,]**

[1] *Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия*

**e-mail: infuriatedot@gmail.com*

***e-mail: nakudr@gmail.com,*

Поступила в редакцию 18.05.2020 г.
После доработки 18.05.2020 г.
Принята к публикации 09.06.2020 г.

Обобщенное уравнение Курамото–Сивашинского используется для описания большого количества нелинейных физических процессов. В данной работе проведено изучение нелинейных динамических режимов, описываемых обобщенным уравнением Курамото–Сивашинского в переменных бегущей волны. Основной задачей работы является изучение влияния дисперсионного члена на подавление хаотических режимов. Уравнение Курамото–Сивашинского в переменных бегущей волны сведено к нормальной системе уравнений и для векторного поля этой системы в трехмерном фазовом пространстве рассчитана дивергенция. Найдены значения параметра при которых изучаемая система является диссипативной. Для трех различных степеней нелинейности уравнения построена бифуркационная диаграмма, показывающая изменение динамических режимов системы при варьировании параметра перед дисперсионным членом. Помимо этого для трех рассматриваемых моделей построен график старшего ляпуновского показателя как функции бифуркационного параметра. Вычисление ляпуновских экспонент было проведено по алгоритму Беннетина. Установлено, что при некоторых значениях дисперсионного параметра в системах наблюдается хаотический режим. Анализ динамических режимов по графикам ляпуновских показателей идет в согласии с построенными бифуркационными диаграммами. Описаны сценарии перехода к хаосу. Приведены фазовые портреты для некоторых динамических режимов трех изучаемых систем.

Ключевые слова: бифуркационная диаграмма, уравнения в частных производных, ляпуновские показатели, хаос

DOI: 10.1134/S2304487X20020091

1. ВВЕДЕНИЕ

Обобщенное уравнение Курамото–Сивашинского имеет вид

$$u_t + u^m u_x + u_{xx} + \beta u_{xxx} + u_{xxxx} = 0. \qquad (1.1)$$

Уравнение (1.1) при $m = 1$ и $\beta = 0$ было независимо выведено Курамото [1] для угловой фазовой турбулентности системы трех реакционно-диффузионных уравнений, моделирующих реакцию Белоусова–Жаботинского и Сивашинским [2–4] для моделирования мелких термальных диффузионных нестабильностей ламинарного волнового фронта.

Также это уравнение возникает при описании множества нелинейных физических процессов, таких как, например, стекание жидкости с наклонных поверхностей [5] и вертикальных колонн [6] и т.д.

При $m = 1$ уравнение (1.1) изучалось многими авторами с использованием как аналитических, так и численных подходов. В работах [9–11] приведены некоторые аналитические решения (1.1). Пенлеве анализ исследуемого уравнения проведен в [12]. В работе [13] численно изучается сценарий перехода к хаосу в (1.1) при $\beta = 0$. В [14] динамические режимы уравнения (1.1) описаны аналитически. Ляпуновские показатели изучаемой динамической системы при $\beta = 0$ приведены в [15].

При $m \neq 1$ уравнение (1.1) также применяется для описания физических процессов. В [17] оно было выведено для описания нелинейных длинных волн в вязко-эластичной трубе.

В данной работе исследуется влияние дисперсионного члена βu_{xxx} на динамические режимы уравнения (1.1) в переменных бегущей волны при различных степенях нелинейности $m = 1, 2, 3$. Во втором разделе уравнение (1.1) сведено к нормальной системе обыкновенных дифференциальных уравнений в переменных бегущей волны. В третьем разделе для полученной системы строятся бифуркационные диаграммы. Четвертая секция посвящена вычислению старших ляпуновских показателей как функции бифуркационного параметра β.

2. ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ КУРАМОТО–СИВАШИНСКОГО В ПЕРЕМЕННЫХ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Уравнение (1.1) можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению используя переменные бегущей волны

$$u(z) = y(z), \quad z = x - Vt,$$

получим уравнение

$$y_{zzz} + \beta y_{zz} + y_z + \frac{1}{m+1} y^{m+1} - Vy = 0. \tag{2.1}$$

Тогда нормальная система уравнений, соответствующая (2.1), выглядит следующим образом

$$y_z = u, \quad u_z = r, \quad r_z = Vy - \frac{1}{m+1} y^{m+1} - u - \beta r. \tag{2.2}$$

Векторное поле системы уравнений (2.2) в трехмерном фазовом пространстве имеет следующий вид

$$\mathbf{L}(y,u,r) = \left\{u, r, Vy - \frac{1}{m+1} y^{m+1} - u - \beta r\right\}. \tag{2.3}$$

Дивергенция этого векторного поля:

$$\operatorname{div}(\mathbf{L}) = \frac{\partial L_y}{\partial y} + \frac{\partial L_u}{\partial u} + \frac{\partial L_r}{\partial r} = -\beta, \tag{2.4}$$

что говорит о том, что система консервативная, если $\beta = 0$ и диссипативная, если $\beta > 0$.

Согласно теореме Пуанкаре–Бендиксона, в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с размерностью фазового пространства, большей или равной трем, осуществляется хаотический режим динамики. Классическими инструментами изучения нелинейных динамических режимов системы (2.2) являются построение ее бифуркационной диаграммы и рассчета зависимости старшего ляпуновского показателя от параметра.

3. БИФУРКАЦИОННЫЕ ДИАГРАММЫ УРАВНЕНИЯ КУРАМОТО–СИВАШИНСКОГО В ПЕРЕМЕННЫХ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Построение бифуркационной диаграммы позволяет качественно определить характер нелинейной динамики системы [16, 20].

В данной работе бифуркационная диаграмма строилась следующим образом. Значения y из сечения Пуанкаре откладывались по оси ординат, а величины варьируемого параметра β – по оси абсцисс. Сечение решения было проведено плоскостью $u = 0$ в положительном направлении изменения переменной y.

Для $m = 1$ при скорости бегущей волны $V = 0.8$ бифуркационная диаграмма представлена на рис. 1. Такое значение скорости бегущей волны выбрано, потому в этом случае при трех степенях нелинейности в системах есть хаотические режимы. При $\beta \gtrapprox 0.8$ решение является стационарной точкой (рис. 1a). При уменьшении бифуркационного параметра режим динамики несет сначала однопериодический характер, затем двупериодический, затем имеет период четыре. После в системе возникает хаос с промежутками квазипериодического поведения (рис. 1b–c). Некоторые фазовые портреты описанных динамических режимов представлены на рис. 2–7.

Для $m = 2$ при скорости бегущей волны $V = 0.8$ бифуркационная диаграмма представлена на рис. 8. При значениях $\beta \gtrapprox 1.6$ решение выходит на стационарную точку. Затем однопериодический режим сменяется двупериодическим с кратким окном режима периода четыре, который с уменьшением снова переходит в режим с периодом два, а затем с периодом 5. При $\beta \lessapprox 0.7$ в системе начинается хаотический режим с краткими вставками периодических режимов. Примеры фазовых портретов для этого случая представлены на рис. 9–14.

Для $m = 3$ при скорости бегущей волны $V = 0.8$ бифуркационная диаграмма представлена на рис. 15. При значениях $\beta \gtrapprox 2.4$ решение является стационарной точкой. Уменьшение бифуркационного параметра ведет к бифуркациям удвоения периода и последующему промежутку хаотических режимов с квазипериодическими окнами. Примеры фазовых портретов для этого случая представлены на рис. 16–21.

Таким образом, в рассмотренных ситуациях при одинаковой скорости бегущей волны уменьшение параметра β ведет к появлению хаотического поведения в системе через бифуркации удвоения периода при $m = 1$ и $m = 3$. При $m = 2$ переход к хаосу осуществляется также через ква-

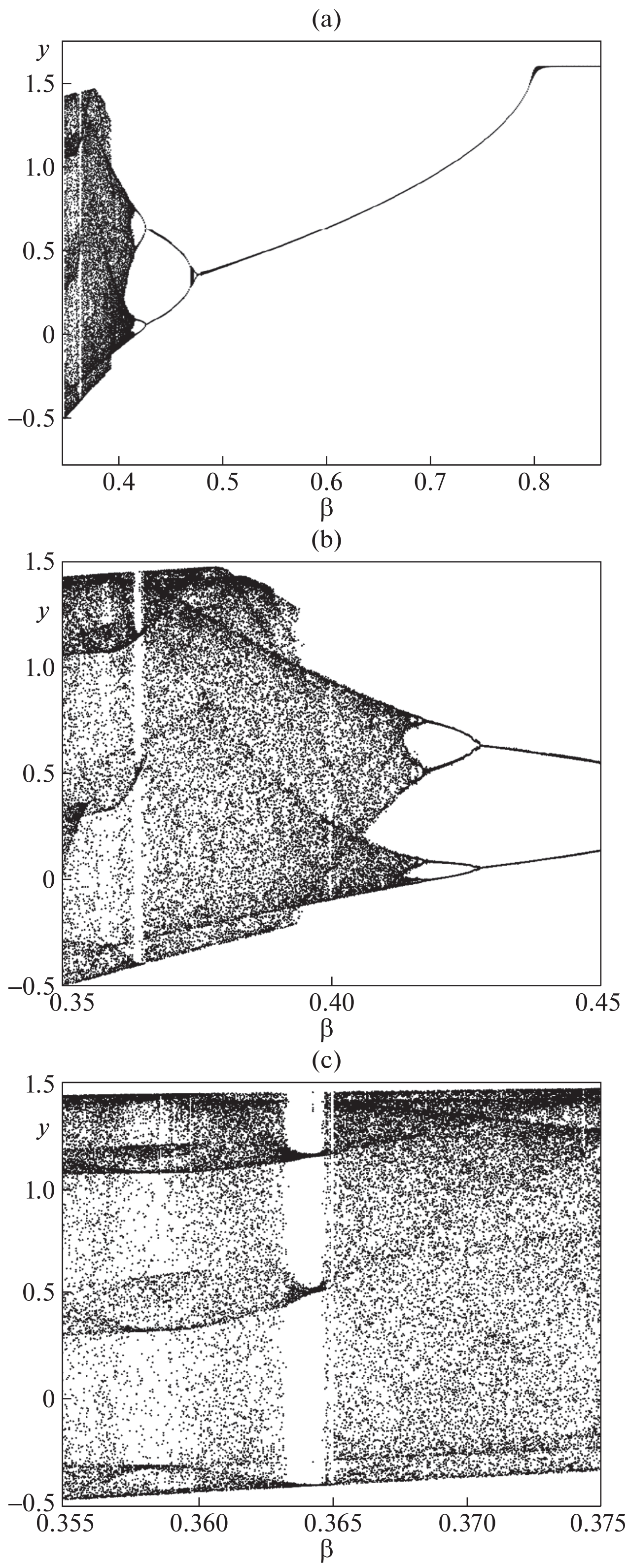

Рис. 1. Бифуркационная диаграмма системы уравнений (2.2) при $V = 0.5$, $m = 1$ в плоскости $\beta - y$.

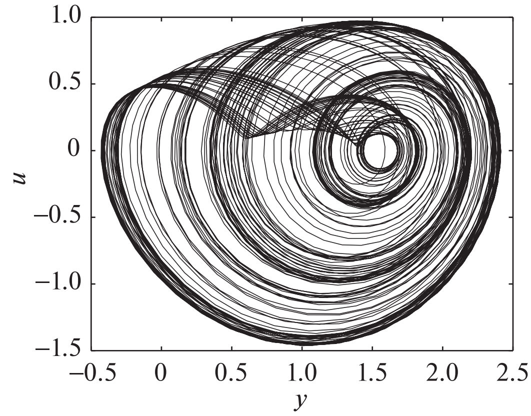

Рис. 2. Хаотический однополосный аттрактор $\beta = 0.36$, $m = 1$.

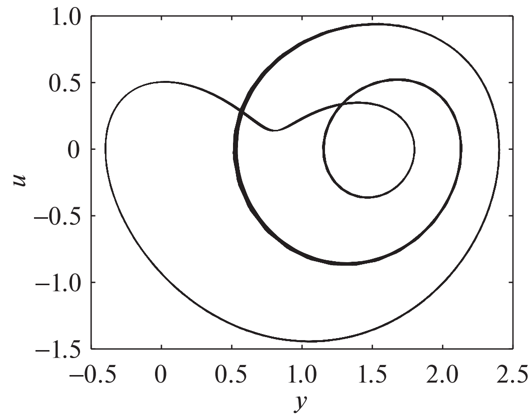

Рис. 3. Аттрактор периода 3 $\beta = 0.3645$, $m = 1$.

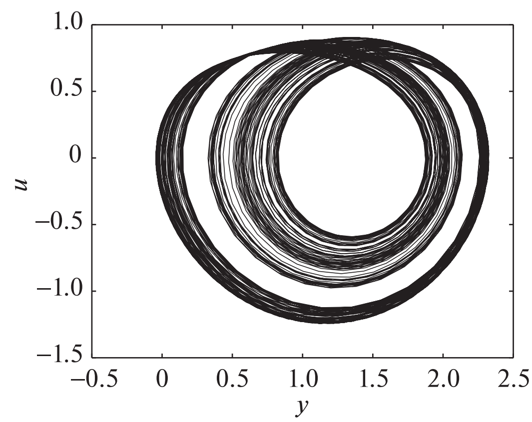

Рис. 4. Хаотический двуполосный аттрактор $\beta = 0.41$, $m = 1$.

зипериодические режимы, но с более сложным образом изменяющимся периодом. Также при $m = 2$ хаотическое окно имеет большую ширину, в то время как при $m = 1$ и $m = 3$ их ширина примерно одинакова, однако квазипериодические вставки при $m = 3$ шире, чем при $m = 1$.

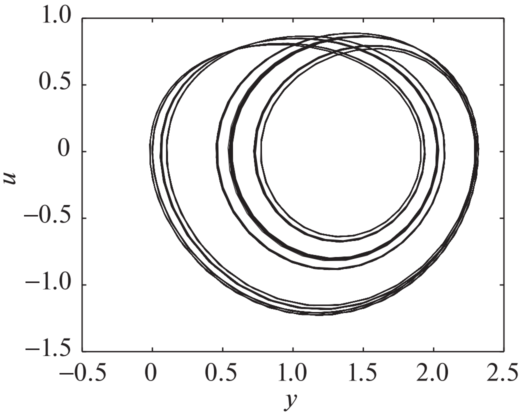

Рис. 5. Аттрактор периода 8 $\beta = 0.415$, $m = 1$.

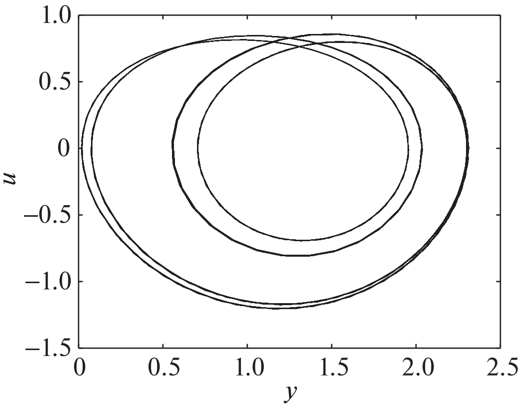

Рис. 6. Аттрактор периода 4 $\beta = 0.423$, $m = 1$.

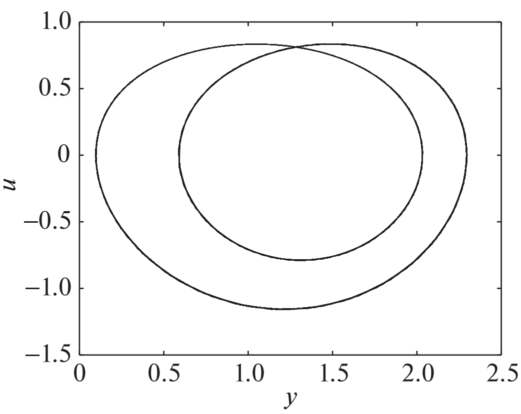

Рис. 7. Аттрактор периода 2 $\beta = 0.44$, $m = 1$.

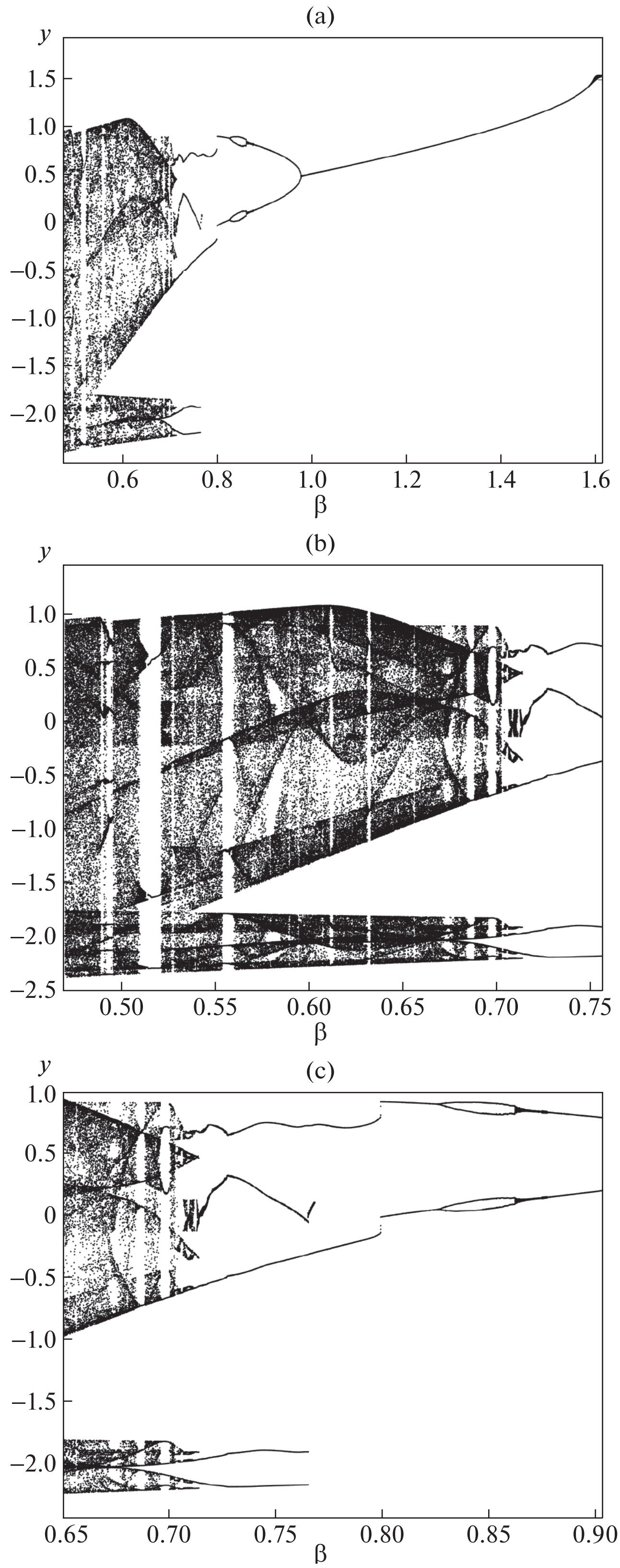

Рис. 8. Бифуркационная диаграмма системы уравнений (2.2) при $V = 0.8$, $m = 2$ в плоскости $\beta - y$.

4. СТАРШИЕ ЛЯПУНОВСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ УРАВНЕНИЯ КУРАМОТО–СИВАШИНСКОГО В ПЕРЕМЕННЫХ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Старший ляпуновский показатель является количественным критерием наличия хаотического динамического режима поведения в динамической системе. Если старший ляпуновский пока-

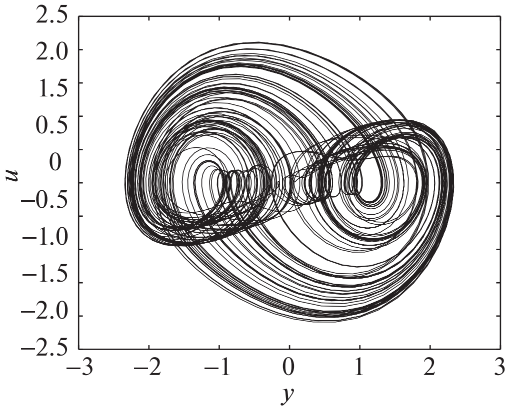

Рис. 9. Хаотический аттрактор $\beta = 0.5$, $m = 2$.

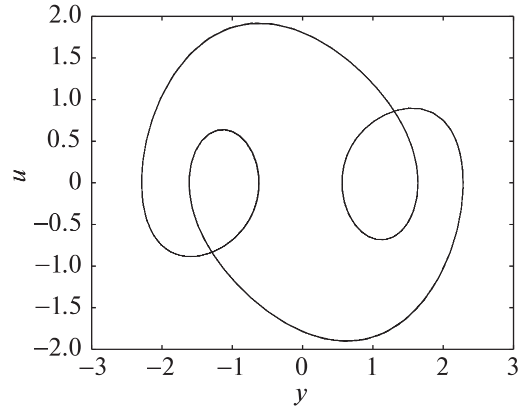

Рис. 10. Аттрактор периода 3 $\beta = 0.515$, $m = 2$.

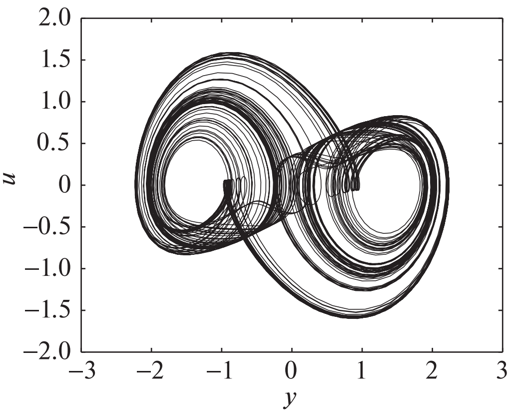

Рис. 11. Хаотический аттрактор $\beta = 0.6$, $m = 2$.

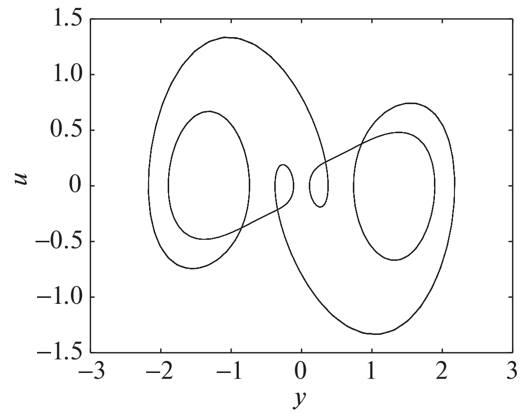

Рис. 12. Аттрактор периода 5 $\beta = 0.725$, $m = 2$.

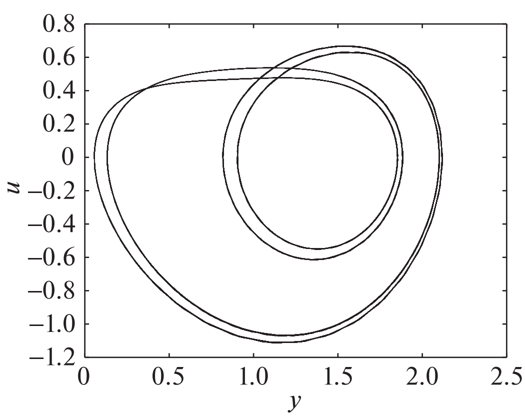

Рис. 13. Аттрактор периода 4 $\beta = 0.85$, $m = 2$.

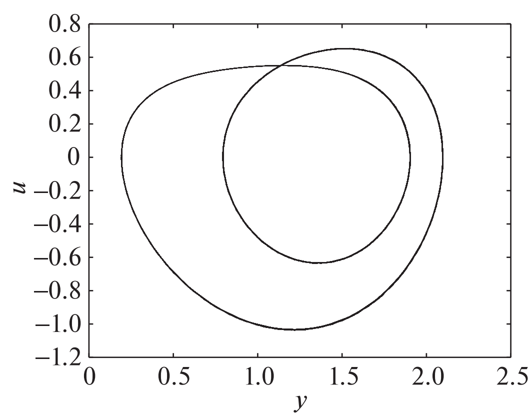

Рис. 14. Аттрактор периода 2 $\beta = 0.9$, $m = 2$.

затель λ аттрактора положительный, то аттрактор является хаотическим, если $\lambda = 0$, то квазипериодическим или периодическим, если $\lambda < 0$, то притягивающее множество – стационарная точка.

Ляпуновские показатели качественно описывают степень расхождения близких траекторий системы. Для обнаружения хаотического поведения достаточно рассчитать старший ляпуновский показатель. Алгоритм его вычисления следующий. После достаточного для выхождения системы на аттрактор времени выбирается начальная точка фазового пространства $\mathbf{y}_0$. Затем рассмат-

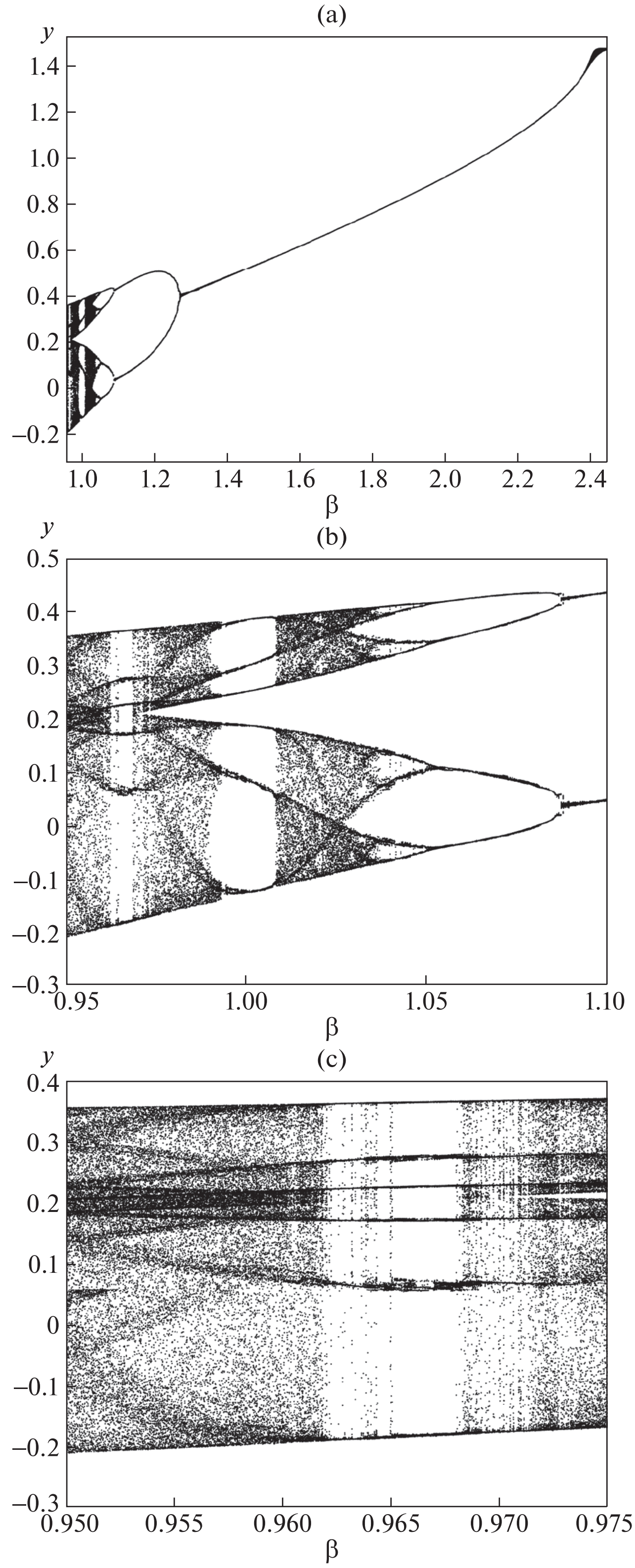

Рис. 15. Бифуркационная диаграмма системы уравнений (2.2) при $V = 0.8, m = 3$ в плоскости $\beta - y$.

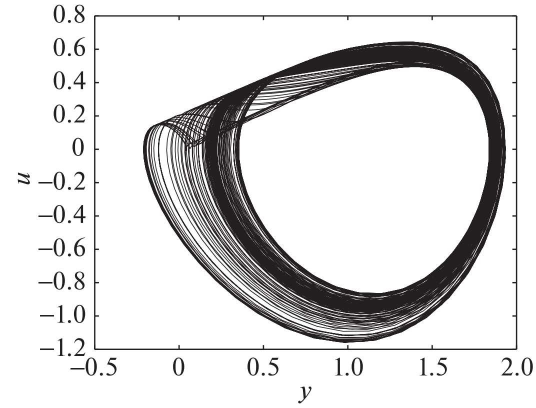

Рис. 16. Хаотический однополосный аттрактор $\beta = 0.95$, $m = 3$.

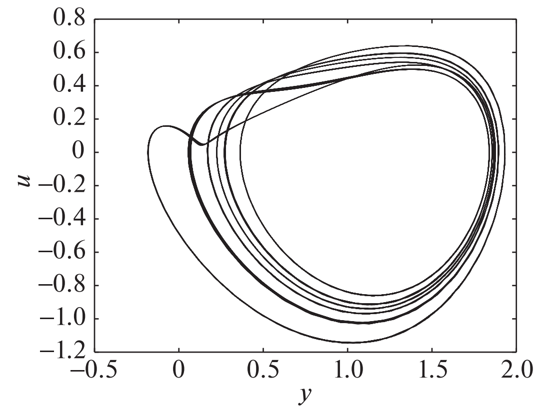

Рис. 17. Аттрактор периода 6 $\beta = 0.966$, $m = 3$.

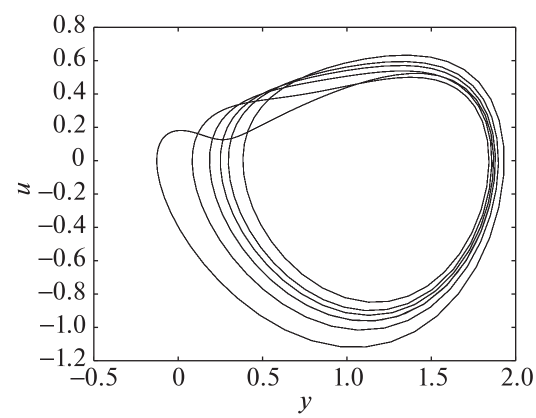

Рис. 18. Аттрактор периода 5 $\beta = 0.1$, $m = 3$.

риваются выходящая из точки $\mathbf{y}_0$ невозмущенная траектория и выходящая из точки $\mathbf{y}_0 + \delta\mathbf{v}_0$ возмущенная траектория. В данной работе выбран вектор начального возмущения с единичной нормой $\delta\mathbf{y}_0 = (1,0,0)$. Выбрав интервал времени $T = 1$ и одновременно решая численно систему уравнений (2.2) и систему уравнений, описывающую эволюцию малого возмущения $\delta\mathbf{v} = (\delta y, \delta u, \delta r)$

$$\begin{pmatrix} \delta y_z \\ \delta u_z \\ \delta r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ V - y^m & -1 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta y \\ \delta u \\ \delta r \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

получаем вектор состояния и его возмущение в момент T: $\mathbf{v}(T) = \mathbf{v}_1$, $\delta\mathbf{v}(T) = \delta\tilde{\mathbf{v}}_1$. $\|\delta\tilde{\mathbf{v}}_1\|$ описывает изменение нормы вектора возмущения за время T. Переопределив вектор возмущения так, чтобы у него была единичная норма: $\delta\mathbf{v}_1 = \delta\tilde{\mathbf{v}}_1/\|\delta\tilde{\mathbf{v}}_1\|$, продолжим численно решать системы уравнений (2.2) и (4.1) с начальными условиями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_1 + \delta\mathbf{v}_1$. Затем снова переопределим вектор возмущения в момент времени $2T$ и продолжим решать рассматриваемые системы уравнений с меняющимися на каждом шаге начальными условиями в течение M шагов. Эволюция амплитуды возмущения системы характеризуется старшим ляпуновским показателем, так как начальное условие $\mathbf{v}_0$ взято на аттракторе, а начальное возмущение траектории выбрано наугад. Фактор изменения амплитуды за M шагов определяется как

$$P = \frac{1}{M}\prod_{n=1}^{M}\|\delta\tilde{\mathbf{v}}_n\|, \quad (4.2)$$

а старший ляпуновский показатель оценивается как

$$\Lambda = \frac{1}{M}\ln(P) = \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{M}\ln(\|\delta\tilde{\mathbf{v}}_n\|). \quad (4.3)$$

При проведении рассчетов взято количество шагов $M = 15000$.

Старший ляпуновский показатель как функция бифуркационного параметра β для трех изображен на рис. 22–24. Из них отчетливо видно как при уменьшении параметра β происходит переход к хаотическу динамическому режиму. Полученный результат идет в согласии с бифуркационными диаграммами, обсуждаемыми в предыдущем разделе.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ нелинейных динамических режимов обобщенного уравнения Курамото–Сивашинского в переменных бегущей волны. Для трех различных степеней нелинейности уравнения построены бифуркационные диаграммы и графики зависимости старшего ляпуновского показателя от дисперсионного параметра. Обнаружено, что увеличение бифуркационного параметра ведет к подавлению хаотического поведения в системе. Описаны сценарии перехода к хаосу при уменьшении параметра β.

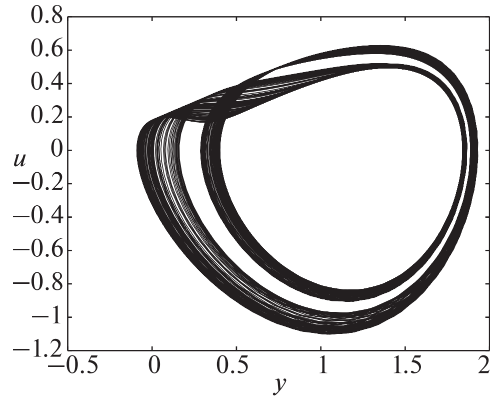

Рис. 19. Хаотический двуполосный аттрактор $\beta = 1.025$, $m = 3$.

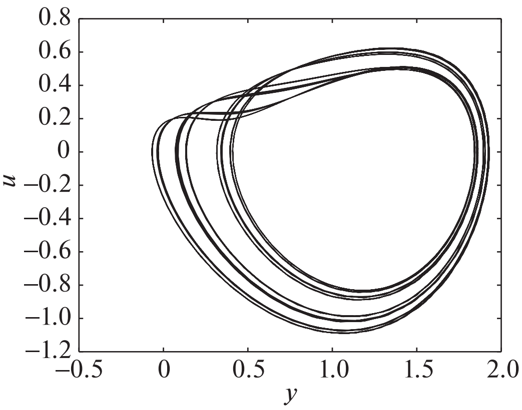

Рис. 20. Аттрактор периода 8 $\beta = 1.04$, $m = 3$.

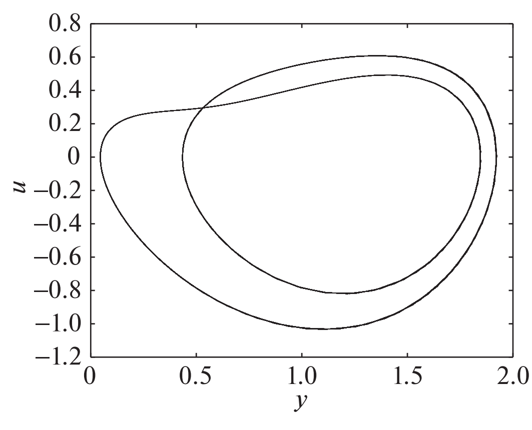

Рис. 21. Аттрактор периода 2 $\beta = 1.1$, $m = 3$.

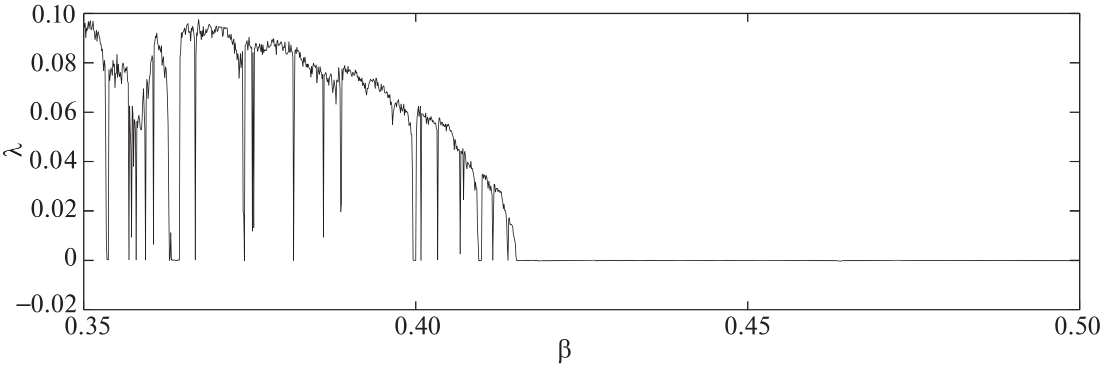

Рис. 22. Зависимость старшего ляпуновского показателя от параметра β, $V = 0.8$, $m = 1$.

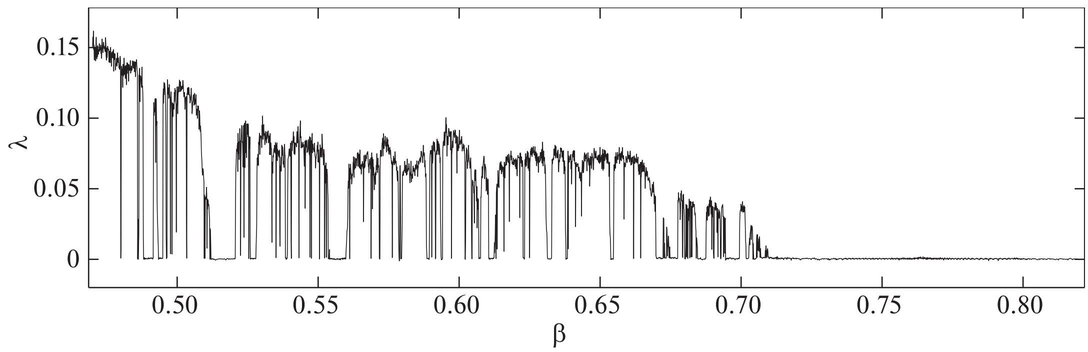

Рис. 23. Зависимость старшего ляпуновского показателя от параметра β, $V = 0.8$, $m = 2$.

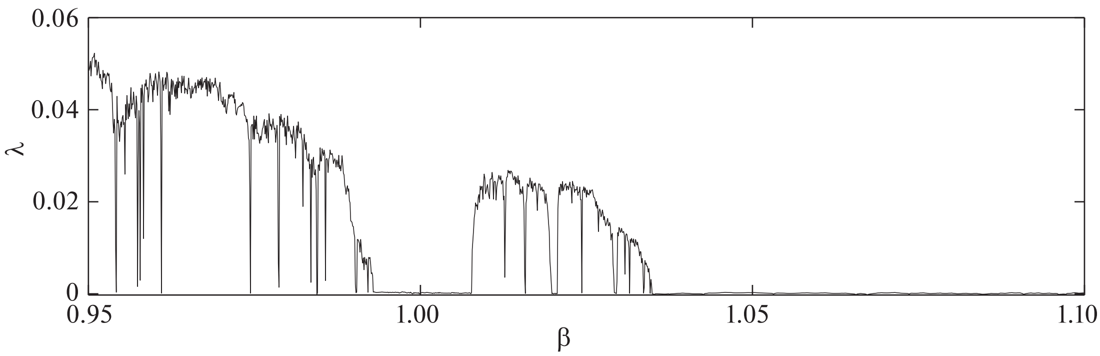

Рис. 24. Зависимость старшего ляпуновского показателя от параметра β, $V = 0.8$, $m = 3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kuramoto Yoshiki, Toshio Tsuzuki*. Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium // Progress of theoretical physics. 1976. V. 55. № 2. P. 356–369.

2. *Sivashinsky G.I.* Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames – I. Derivation of basic equations // Acta astronautica. 1977. V. 4. P. 1177–1206.

3. *Michelson D.M., Sivashinsky G.I.* Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames – II. Numerical experiments // Acta astronautica. 1977. V. 4. № 11–12. P. 1207–1221.

4. *Sivashinsky G.I.* On flame propagation under conditions of stoichiometry // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1980. V. 39. № 1. P. 67–82.

5. *Tsvelodub O.Yu.* Stationary travelling waves on a film flowing down an inclined plane // Fluid Dynamics. 1980. V. 15. № 4. P. 591–594.

6. *Shlang T., Sivashinsky G.I.* Irregular flow of a liquid film down a vertical column // Journal de Physique. 1982. V. 43. № 3. P. 459–466.

7. *Kuramoto Yoshiki*. Diffusion-induced chaos in reaction systems // Progress of Theoretical Physics Supplement. 1978. V. 64. P. 346–367.
8. *Sivashinsky G.I.* Large cells in nonlinear Marangoni convection // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1982. V. 4. №. 2. P. 227–235.
9. *Kudryashov N.A.* Exact solutions of the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation // Physics Letters A. 1990. V. 147. № 5–6. P. 287–291.
10. *Michelson D.* Steady solutions of the Kuramoto-Sivashinsky equation // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1986. V. 19. № 1. P. 89–111.
11. *Kudryashov N.A.* Solitary and periodic solutions of the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation. 2011. arXiv preprint arXiv:1112.5707.
12. *Conte R., Micheline M.* Painleve analysis and Backlund transformation in the Kuramoto-Sivashinsky equation // Journal of Physics A: Mathematical and General. 1989. V. 22. № 2. P. 169.
13. *Hyman J.M., Nicolaenko B.* The Kuramoto-Sivashinsky equation: a bridge between PDE's and dynamical systems // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1986. V. 18. № 1–3. P. 113–126.
14. *Nicolaenko B., Scheurer B., Temam R.* Some global dynamical properties of the Kuramoto-Sivashinsky equations: nonlinear stability and attractors // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1985. V. 16. № 2. P. 155–183.
15. *Manneville P.* Liapounov exponents for the Kuramoto-Sivashinsky model. Macroscopic Modelling of Turbulent Flows. Springer, Berlin, Heidelberg, 1985. P. 319–326.
16. *Brummitt Ch.D., Sprott J.C.* A search for the simplest chaotic partial differential equation // Physics Letters A. 2009. V. 373. № 31. P. 2717–2721.
17. *Kudryashov N.A., Sinel'shchikov D.I., Chernyavsky I.L.* Nonlinear evolution equations for description of perturbations in a viscoelastic tube // Nelineinaya Dinamika [Russian Journal of Nonlinear Dynamics]. 2008. V. 4. № 1. P. 69–86.
18. *Benettin G. et al.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory // Meccanica. 1980. V. 15. № 1. P. 9–20.
19. *Sprott J.C.* Elegant chaos: algebraically simple chaotic flows. World Scientific, 2010.
20. *Lakshmanan Muthusamy*, Shanmuganathan Rajaseekar. Nonlinear dynamics: integrability, chaos and patterns. Springer Science & Business Media, 2012.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 2, pp. 129–138

Nonlinear Dynamical Processes Described by the Traveling Wave Reduction of the Generalized Kuramoto–Sivashinsky Equation

S. F. Lavrova[a,#] and N. A. Kudryashov[a,##]

[a] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

[#]*e-mail: infuriatedot@gmail.com*

[##]*e-mail: nakudr@gmail.com*

Received May 18, 2020; revised May 18, 2020; accepted June 9, 2020

Abstract—The generalized Kuramoto–Sivashinsky equation is used to describe a lot of nonlinear physical processes. In this work, dynamical regimes described by the traveling wave reduction of the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation are examined. The main goal of this work is to study how the dispersive term suppresses chaotic regimes in the system. The traveling wave reduction of the Kuramoto–Sivashinsky equation is written in the normal form. The divergence of the vector field this system has been calculated. The parameters for which the studied system is dissipative have been determined. The bifurcation diagram is plotted for three different nonlinearity degrees of the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation. The dispersion term coefficient is chosen as the bifurcation parameter. The largest Lyapunov exponent is plotted as a function of the dispersion parameter for the three studied cases. The Benettin algorithm is employed to compute largest Lyapunov exponents. It has been found that a chaotic regime is observed in the system at some values of the dispersion parameter. Routes to chaos are described. Phase portraits for some of the dynamical regimes are presented.

Keywords: bifurcation diagram, partial differential equations, Lyapunov exponents, chaos

DOI: 10.1134/S2304487X20020091

REFERENCES

1. Kuramoto, Yoshiki, and Toshio Tsuzuki. "Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium." Progress of theoretical physics 55.2 (1976): 356–369.
2. Sivashinsky G.I. "Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames—I. Derivation of basic equations." Acta astronautica 4 (1977): 1177–1206.
3. Michelson Daniel M., and Gregory I. Sivashinsky. "Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames—II. Numerical experiments." Acta astronautica 4.11-12 (1977): 1207–1221.
4. Sivashinsky G.I. "On flame propagation under conditions of stoichiometry." SIAM Journal on Applied Mathematics 39.1 (1980): 67–82.
5. Tsvelodub O.Yu. "Stationary travelling waves on a film flowing down an inclined plane." Fluid Dynamics 15.4 (1980): 591–594.
6. Shlang T., and Sivashinsky G.I. "Irregular flow of a liquid film down a vertical column." Journal de Physique 43.3 (1982): 459–466.
7. Kuramoto Yoshiki. "Diffusion-induced chaos in reaction systems." Progress of Theoretical Physics Supplement 64 (1978): 346–367.
8. Sivashinsky G.I. Large cells in nonlinear Marangoni convection //Physica D: Nonlinear Phenomena. 1982. V. 4. № 2. С. 227–235.
9. Kudryashov Nikolai A. "Exact solutions of the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation." Physics Letters A 147.5-6 (1990): 287–291.
10. Michelson Daniel. "Steady solutions of the Kuramoto-Sivashinsky equation." Physica D: Nonlinear Phenomena 19.1 (1986): 89–111.
11. Kudryashov Nikolai A. "Solitary and periodic solutions of the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation." arXiv preprint arXiv:1112.5707 (2011).
12. Conte Robert, and Micheline Musette. "Painleve analysis and Backlund transformation in the Kuramoto-Sivashinsky equation." Journal of Physics A: Mathematical and General 22.2 (1989): 169.
13. Hyman James M., and Basil Nicolaenko. "The Kuramoto-Sivashinsky equation: a bridge between PDE's and dynamical systems." Physica D: Nonlinear Phenomena 18.1-3 (1986): 113–126.
14. Nicolaenko Basil, Bruno Scheurer, and Roger Temam. "Some global dynamical properties of the Kuramoto-Sivashinsky equations: nonlinear stability and attractors." Physica D: Nonlinear Phenomena 16.2 (1985): 155–183.
15. Manneville Paul. "Liapounov exponents for the Kuramoto-Sivashinsky model." Macroscopic Modelling of Turbulent Flows. Springer, Berlin, Heidelberg, 1985. 319–326.
16. Brummitt Charles D., and Sprott J.C. "A search for the simplest chaotic partial differential equation." Physics Letters A 373.31 (2009): 2717–2721.
17. Kudryashov Nikolai Alekseevich, Dmitrii Igorevich Sinel'shchikov, and I. L. Chernyavsky. "Nonlinear evolution equations for description of perturbations in a viscoelastic tube." Nelineinaya Dinamika [Russian Journal of Nonlinear Dynamics] 4.1 (2008): 69–86.
18. Benettin Giancarlo, et al. "Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory." Meccanica 15.1 (1980): 9–20.
19. Sprott Julien C. Elegant chaos: algebraically simple chaotic flows. World Scientific, 2010.
20. Lakshmanan Muthusamy, and Shanmuganathan Rajaseekar. Nonlinear dynamics: integrability, chaos and patterns. Springer Science & Business Media, 2012.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 2, с. 139–146

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.9

ЦИКЛИЧЕСКИЕ И НЕЦИКЛИЧЕСКИЕ ИТЕРАЦИИ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

© 2020 г. В. П. Чернявский

*Саровский физико-технический институт –
филиал Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ",
Саров, 607190, Россия*

Поступила в редакцию 24.02.2020 г.
После доработки 24.02.2020 г.
Принята к публикации 28.04.2020 г.

Рассматриваются функциональные итерационные процессы $f_k(x) = f(f_{k-1}(x))$, $k = 2,3,\ldots$, где начальная функция $f_1(x) = f(x)$ относится к классу невырожденных дробно-линейных функций. Целью работы является изучение всевозможных типов итерационных процессов, которые возникают при варьировании параметров $f(x)$. Для решения возникших рекуррентных соотношений используются матричные методы и комплексные числа. В работе в общем виде получены формулы для коэффициентов k-й итерации при любом k в зависимости от коэффициентов начальной функции. Определены два инварианта итерационных процессов. Показано, что циклы длины $n > 2$ могут существовать только для комплексно-сопряженных собственных значений матрицы коэффициентов дробно-линейной функции. Найдены все начальные функции, порождающие циклы произвольной заданной длины $n \geq 2$, и получены явные выражения, определяющие коэффициенты любого элемента цикла через коэффициенты начальной функции. Приведен пример цикла максимальной длины $n = 6$, у которого все коэффициенты каждой итерации являются целыми числами.
Для нециклических процессов исследовано поведение k-й итерации при $k \to \infty$ и в случаях сходимости определены предельные функции. Нециклические итерационные процессы подразделяются на сходящиеся (действительные собственные значения) и расходящиеся (комплексно-сопряженные значения, не удовлетворяющие условиям цикличности). Сходящиеся итерации имеют своей предельной функцией константу.

Ключевые слова: дробно-линейные функции, итерации, итерационные процессы, циклы, собственные значения

DOI: 10.1134/S2304487X20020029

ВВЕДЕНИЕ

Дробно-линейная функция

$$f(x) = \frac{Ax + B}{Cx + D}, \tag{1}$$

где A, B, C, $D \in R$ и $AD - BC \neq 0$, имеет широкое распространение в математике. Если вычислить суперпозицию $f(f(x))$,то получится также дробно-линейная функция с другими коэффициентами. Возникает вопрос, можно ли, последовательно вычисляя итерации $f(f(x)), f(f(f(f(x)))),\ldots$, на заданном шаге получить исходную функцию $f(x)$. Введем обозначения: $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(f(x))$, $f_k(x) = \underbrace{f(f(\ldots f(}_{k}x)\ldots))$. Назовем циклом длины n последовательность функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ такую, что $f_k(x) \neq x$ при $k < n$ и

$$f_n(x) = x. \tag{2}$$

При этом функцию $f_1(x) = f(x)$ будем называть начальной функцией, порождающей цикл, а $f_k(x)$ – элементом цикла или k-й итерацией, $k = 1, 2, \ldots, n$.

На первом этапе решается следующая задача: *для произвольного заданного натурального n найти все начальные функции вида* (1), *порождающие цикл длины n*.[1]

В заключительной части работы рассматриваются нециклические итерационные процессы $f_{k+1}(x) = f(f_k(x))$, $k = 1,2,\ldots$, такие, что $f_k(x) \neq x$ при любом k.

Функция (1) вырождается в константу, если $AD = BC$, или в линейную функцию ($C = 0$, $D \neq 0$, $A \neq 0$). Обе эти возможности объединяются формулой: $f(x) = kx + b$. Для этого тривиального слу-

[1] Существование циклов произвольной длины n показано в [1], где также приведены формулы для циклов с $n \leq 4$ и $n = 6$.

чая легко находятся все возможные начальные функции, порождающие циклы: $f(x) = x$, $f(x) = b$, $n = 1$; $f(x) = -x + b$, $n = 2$. В дальнейшем будут рассматриваться только *невырожденные начальные функции*.

1. ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ k-й ИТЕРАЦИИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Обозначим

$$f_k(x) = \frac{A_k x + B_k}{C_k x + D_k}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Для коэффициентов начального элемента $f_1(x)$ имеем: $A_1 = A, \ldots, D_1 = D$. Вычисляя суперпозицию $f(f_k(x))$, находим $(k+1)$-й элемент

$$f_{k+1}(x) = f(f_k(x)) = \frac{(AA_k + BC_k)x + AB_k + BD_k}{(CA_k + DC_k)x + CB_k + DD_k},$$

что позволяет получить соотношения, связывающие коэффициенты последовательных итераций

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= AA_k + BC_k, \quad B_{k+1} = AB_k + BD_k, \\ C_{k+1} &= CA_k + DC_k, \quad D_{k+1} = CB_k + DD_k. \end{aligned} \tag{4}$$

Систему рекуррентных соотношений (4) можно решить в матричном виде. Каждой итерации (3) поставим в соответствие матрицу коэффициентов

$$F_k = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $F_1 = F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Сравнение результата умножения матриц

$$FF_k = \begin{pmatrix} AA_k + BC_k & AB_k + BD_k \\ CA_k + DC_k & CB_k + DD_k \end{pmatrix}$$

с формулами (4) показывает, что преобразование коэффициентов k-й итерации в точности соответствует правилу перемножения матриц. Следовательно, $F_{k+1} = FF_k = F^{k+1}$, и тогда условие (2) в матричной форме принимает вид

$$F^n = G, \tag{6}$$

где $G = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} = gE$, $g \neq 0$, и $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица.

Поскольку дробно-линейную функцию (1) берем невырожденной, то $C \neq 0$, и тогда можно уменьшить число начальных параметров функции, поделив в (1) числитель и знаменатель на C. В результате имеем начальную функцию

$$f(x) = \frac{ax + b}{x + c} \tag{7}$$

и соответствующую ей начальную матрицу

$$F_1 = F = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $a, b, c \in \mathrm{R}$ и $b \neq ac$.

Условие (6), при котором n-я итерация превращается в тождественное преобразование $id(x) = x$, определяет возможность существования цикла и его длину n. Для упрощения процедуры возведения в степень диагонализируем матрицу F в тех случаях, когда это возможно. Пусть $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ – соответствующая матрице F диагональная матрица из собственных значений. Характеристическое уравнение $\det(F - \lambda E) = 0$ имеет вид

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b = 0. \tag{9}$$

Его корни

$$\lambda_1 = \frac{a + c + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a + c - \sqrt{\Delta}}{2}, \tag{10}$$

где $\Delta = (a + c)^2 - 4(ac - b)$ – дискриминант уравнения.

Отметим, что корнем уравнения (9) не может быть $\lambda = 0$, так как это противоречило бы условию невырожденности $b - ac \neq 0$ функции (7). Координаты собственного вектора $X_\lambda = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, соответствующего собственному значению λ, определяются из системы

$$\begin{cases} (a - \lambda)x_1 + bx_2 = 0, \\ x_1 + (c - \lambda)x_2 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Рассмотрим решения в зависимости от корней характеристического уравнения.

1.1. Различные собственные значения $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Решая систему (11) последовательно для λ_1 и λ_2, находим базис из собственных векторов $E_1^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 - c \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2^* = \begin{pmatrix} \lambda_2 - c \\ 1 \end{pmatrix}$ и матрицу перехода $T = = \begin{pmatrix} \lambda_1 - c & \lambda_2 - c \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ от базиса $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ к базису E_1^*, E_2^*. Вычисляя обратную матрицу $T^{-1} = = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix} 1 & c - \lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 - c \end{pmatrix}$ и используя формулу $F = = T\Lambda T^{-1}$ [2], имеем

$$F_k = F^k = T\Lambda^k T^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} \lambda_1^k(\lambda_1 - c) - \lambda_2^k(\lambda_2 - c) & (\lambda_1^k - \lambda_2^k)(\lambda_1 - c)(c - \lambda_2) \\ \lambda_1^k - \lambda_2^k & \lambda_1^k(c - \lambda_2) + \lambda_2^k(\lambda_1 - c) \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что для корней λ_1 и λ_2 уравнения (9) выполняются соотношения: $\lambda_1 + \lambda_2 = a + c$, $\lambda_1\lambda_2 = ac - b$ и $(\lambda_1 - c)(c - \lambda_2) = b$, в результате преобразований находим матрицу коэффициентов k-й итерации

$$F_k = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \dfrac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}c & \dfrac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}b \\ \dfrac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2} & \dfrac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \dfrac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}a \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

В итоге получаем явное выражение для итерации $f_k(x)$ в зависимости от λ_1 и λ_2, определяемых в (10) коэффициентами a, b, c начальной функции (7):

$$f_k(x) = \frac{(\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} - c(\lambda_1^k - \lambda_2^k))x + b(\lambda_1^k - \lambda_2^k)}{(\lambda_1^k - \lambda_2^k)x + \lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} - a(\lambda_1^k - \lambda_2^k)}, \quad k = 1, 2, \ldots. \qquad (13)$$

1.2. $\Delta = 0$, действительные кратные корни $\lambda_1 = \lambda_2$

Базис из собственных векторов в этом случае состоит из одного вектора. Матрица F недиагонализируема, т.к. геометрическая кратность корня не совпадает с алгебраической [3]. Выражение для F_k вначале формально находим предельным переходом из (12) при $\lambda_1 \to \lambda_2 = \lambda$:

$$F_k = \begin{pmatrix} (k+1)\lambda^k - kc\lambda^{k-1} & kb\lambda^{k-1} \\ k\lambda^{k-1} & (k+1)\lambda^k - ka\lambda^{k-1} \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Докажем справедливость полученной формулы методом математической индукции.

База индукции. При $k = 1$ матрица (14) равна

$$\begin{pmatrix} 2\lambda - c & b \\ 1 & 2\lambda - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}$$

и совпадает с начальной матрицей (8).

Далее, предположив, что равенство (14) верно при каком-нибудь натуральном k, вычисляем произведение матриц

$$F_{k+1} = FF_k =$$
$$= \begin{pmatrix} (k+2)\lambda^{k+1} - (k+1)c\lambda^k & (k+1)b\lambda^k \\ (k+1)\lambda^k & (k+2)\lambda^{k+1} - (k+1)a\lambda^k \end{pmatrix}.$$

Сравнение полученного результата с матрицей (14), показывает, что индуктивный переход $k \to k + 1$ завершен. Формула доказана.

Элементы матрицы (14) позволяют найти

$$f_k(x) = \frac{((k+1)\lambda - kc)x + kb}{kx + (k+1)\lambda - ka}.$$

Учитывая, что $\Delta = 0$ и, соответственно, $b = -\dfrac{(a-c)^2}{4}$ и $\lambda = \dfrac{a+c}{2}$, получаем формулу для k-й итерации в случае кратных корней:

$$f_k(x) = \frac{\left(\dfrac{(a+c)(k+1)}{2} - kc\right)x - k\dfrac{(a-c)^2}{4}}{kx + \dfrac{(a+c)(k+1)}{2} - ka}, \quad k = 1, 2, \ldots. \qquad (15)$$

1.3. $\Delta < 0$, комплексно-сопряженные корни
$$\lambda_{1,2} = \frac{a + c \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

Так как $\Delta < 0$, то $ac - b > 0$. Представим комплексные величины λ_1 и λ_2 в показательной форме: $\lambda_1 = re^{i\alpha}$, $\lambda_2 = re^{-i\alpha}$, где $r = \sqrt{ac - b} = |\lambda_1| = |\lambda_2|$, а величина α определяется системой

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a+c}{2\sqrt{ac-b}}, \\ \sin\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{(a+c)^2}{4(ac-b)}}. \end{cases} \qquad (16)$$

Поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то для вычислений можно применить формулу (13). Используя равенство

$$\lambda_1^k - \lambda_2^k = r^k(e^{ik\alpha} - e^{-ik\alpha}) = 2i(\sqrt{ac-b})^k \sin k\alpha,$$

получаем формулу для $f_k(x)$ в случае комплексно-сопряженных корней

$$f_k(x) = \frac{(\sqrt{ac-b}\sin(k+1)\alpha - c\sin k\alpha)x + b\sin k\alpha}{x\sin k\alpha + \sqrt{ac-b}\sin(k+1)\alpha - a\sin k\alpha}, \quad k = 1, 2, \ldots. \qquad (17)$$

Стоящий в знаменателе дроби многочлен относительно x имеет степень, не выше первой, и не может тождественно равняться 0. Действительно, если предположить противное, тогда $\sin k\alpha = 0$ и $\sin(k + 1)\alpha = 0$, отсюда следует, что $\sin\alpha = 0$. Последнее означает, что $\operatorname{Im}\lambda_{1,2} = 0$ – противоречие.

Каждую невырожденную итерацию (3) произвольного итерационного процесса можно представить в аналогичном (7) виде

$$f_k(x) = \frac{a_k x + b_k}{x + c_k}, \tag{18}$$

где $a_k c_k - b_k \neq 0$ — условие того, что $f_k(x)$ не вырождается в константу. Областью определения X итерационного процесса назовем пересечение областей определения всех функций $f_k(x)$:

$$X = R \backslash \bigcup_{k=1}^{M} \{-c_k\},$$

где множество точек разрыва $\bigcup_{k=1}^{M} \{-c_k\}$ является не более, чем счетным ($M = n - 1$ для цикла длины n и $M = +\infty$ для нецикличного процесса). Преобразуем (18), выделив целую часть дроби

$$f_k(x) = a_k + \frac{b_k - a_k c_k}{x + c_k}.$$

На плоскости Oxy графиком функции является гипербола с асимптотами $x = -c_k$ и $y = a_k$ и с центром в точке $(-c_k, a_k)$.

Лемма.

1. *Если начальная функция не вырождена, то любая последующая итерация не вырождается в константу.*

2. *Любой итерационный процесс с невырожденными итерациями* (18) *имеет инварианты:*

$$\begin{aligned} b_k &= b, \\ c_k - a_k &= c - a, \end{aligned} \tag{19}$$

где a, b, c — коэффициенты начальной функции (7).

Для доказательства первого утверждения леммы заметим, что $ac - b \neq 0$ в силу невырожденности функции (7). Тогда при любом k определитель матрицы (5) отличен от нуля:

$$\det F_k = \det(F^k) = (\det F)^k = (ac - b)^k \neq 0,$$

а это означает, что $f_k(x)$ не вырождается в константу.

Справедливость второго утверждения легко проверяется с помощью формул (13), (15) и (17), преобразованных вначале к виду (18).

В дополнение к п. 1 леммы заметим, что условие невырожденности $f(x)$ не запрещает, тем не менее, некоторой итерации превращаться в тождественное преобразование $id_X(x) = x$.

Инвариант (19) на плоскости Oxy имеет наглядный геометрический смысл: центры $(-c_k, a_k)$ гипербол (18) при изменении k двигаются по прямой $x + y = a - c$.

2. ЦИКЛЫ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ДЛИНЫ

Циклы длины $n = 1$ для невырожденных функций невозможны. Действительно, предположив, что $f(f(x)) = f(x)$, получим $f(x) = x$ или $f(x) = b$ — вырожденные функции. Рассмотрим возможность выполнения равенств (2), (6), определяющих завершение цикла на n-м шаге, в зависимости от корней характеристического уравнения (9).

2.1. Действительные различные корни $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Для выполнения условия (2) потребуем, чтобы в знаменателе дроби (13) коэффициент при x равнялся 0: $\lambda_1^n - \lambda_2^n = 0$. Так как корни действительны и различны, то последнее равенство может выполняться, только если $\lambda_1 = -\lambda_2$ при четном n. Но тогда по теореме Виета для уравнения (9) имеем: $a + c = 0$. Использование равенства $c = -a$ уже для второй итерации дает $f_2(x) = \frac{(a^2 + b)x}{a^2 + b} = x$ при $b \neq -a^2$. Это означает, что *в случае действительных различных корней*:

а) все циклы длины $n = 2$ имеют вид

$$\begin{gathered} f_1(x) = f(x) = \frac{ax + b}{x - a}, \\ f_2(x) = x, \quad (a, b \in R;\ b \neq -a^2); \end{gathered} \tag{20}$$

б) циклы длины $n > 2$ невозможны.

2.2. Кратные корни $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Условие (6) не может быть выполнено, т.к. из формулы (14) следует, что коэффициент $C_n = n\lambda^{n-1}$ матрицы F_n не обращается в 0 ($\lambda = 0$ не является корнем уравнения (9)). Циклы не существуют.

2.3. Комплексно-сопряженные корни

Для выполнения условия (2) необходимо, чтобы коэффициент при x в знаменателе дроби (17) равнялся 0: $\sin n\alpha = 0$ тогда $n\alpha = \pi m$ и, значит, величина α зависит от m и n:

$$\alpha_{mn} = \frac{\pi m}{n} \quad (m \in Z, n \in N). \tag{21}$$

Поскольку условие $a + c = 0$ приводит к циклу длины $n = 2$ и этот случай разобран в п. 2.1, то теперь $a + c \neq 0$. Поделим второе уравнение (16) на первое:

$$\tan \frac{\pi m}{n} = \frac{\sqrt{4(ac - b) - (a + c)^2}}{a + c} \tag{22}$$

и выразим отсюда b:

$$b = -\frac{(a - c)^2 + (a + c)^2 \tan^2 \alpha_{mn}}{4}, \tag{23}$$

где α_{mn} определена в (21). Подставляя в (17) $\sqrt{ac-b} = \dfrac{a+c}{2\cos\alpha_{mn}}$ из (16) и b, в итоге получаем формулы для элементов $f_k(x)$ всех циклов длины $n > 2$:

$$f_1(x) = f(x) = \frac{ax - \dfrac{(a-c)^2 + (a+c)^2\tan^2\alpha_{mn}}{4}}{x+c},$$

$$f_k(x) = \frac{\left(\dfrac{(a+c)\sin(k+1)\alpha_{mn}}{2\cos\alpha_{mn}\sin k\alpha_{mn}} - c\right)x - \dfrac{(a-c)^2 + (a+c)^2\tan^2\alpha_{mn}}{4}}{x + \dfrac{(a+c)\sin(k+1)\alpha_{mn}}{2\cos\alpha_{mn}\sin k\alpha_{mn}} - a}, \quad k = 2,\ldots,n-1, \quad f_n(x) = x, \tag{24}$$

где $a, c \in R$, $a + c \neq 0$, $\alpha_{mn} = \pi m/n$, $m = 1,2,\ldots,[n/2]$ и НОД$(m, n) = 1$.

Ограничения на индекс m обусловлены требованием избежать повторений полученных результатов. В силу периодичности функции тангенс, входящей в (23), из множества целых значений для m достаточно брать лишь $m = 1, 2, \ldots, n-1$. Далее, используя тригонометрические формулы приведения, нетрудно проверить, что при замене m на $n - m$ величины b и $f_k(x)$ не изменятся, поэтому достаточно оставить $m = 1, 2, \ldots, [n/2]$, где $[n/2]$ – целая часть числа $n/2$. Наконец, если m и n имеют общий делитель, то после сокращения на него формулы (24) определят элементы $f_k(x)$ цикла, имеющего длину, меньшую чем n. Значит, m и n взаимно просты. Для циклов длины n число различных значений m, удовлетворяющих перечисленным условиям, равно $\varphi(n)/2$, где $\varphi(n)$ – функция Эйлера (определяется как количество чисел от 1 до n, взаимно простых с n).

Формулы (24) совместно с (20) дают полное решение задачи нахождения всех циклов длины $n \geq 2$. Полученные результаты показывают, что все возможные циклы произвольной фиксированной длины образуют двухпараметрические семейства трехпараметрического множества невырожденных функций (7).

Поставим задачу несколько иначе. Пусть задана функция $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$ и требуется определить, зная коэффициенты a, b, c, является ли $f(x)$ начальной функцией какого-либо цикла и чему равна его длина.

Если $a + c = 0$, то имеем цикл (21) с $n = 2$, где условие $b \neq -a^2$ обеспечивает невырожденность $f(x)$. Других циклов при $n = 2$ нет.

Пусть $a + c \neq 0$.

Поскольку циклы с $n > 2$ для действительных корней характеристического уравнения (9) отсутствуют, остается случай комплексно-сопряженных корней, а тогда итерации $f_k(x)$ в общем виде определены формулами (17).

Обозначим $\alpha = \pi\beta$ и, учитывая из (16), что угол $\pi\beta$ может принадлежать только первой или второй четверти, найдем β, опуская слагаемые, кратные 2π:

$$\beta = \frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}\frac{a+c}{\sqrt{4(ac-b)-(a+c)^2}}. \tag{25}$$

Здесь $\beta \in (0;1)\backslash\{1/2\}$, т.к. $a + c \neq 0$. Отметим, что формула (25) справедлива как для циклических, так и нециклических процессов.

Если процесс цикличен и $n > 2$, тогда из (23) имеем

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}\frac{a+c}{\sqrt{4(ac-b)-(a+c)^2}},$$

причем $\dfrac{m}{n} \in (0;1)\backslash\{1/2\}$. Правая часть равенства является рациональным числом, поэтому для циклических процессов величина β принимает только рациональные значения. Обратно, если коэффициенты функции $f(x)$ таковы, что величина β существует и рациональна, то ее можно записать в виде несократимой дроби m/n. При $\beta = 1/2$ имеем цикл длины 2. Если $\beta \neq 1/2$, тогда цикл с $n > 2$ существует и описывается формулами (24), причем знаменатель несократимой дроби m/n однозначно определяет длину цикла. Следовательно, для нециклических процессов величина β может принимать только иррациональные значения, $\beta \in (0;\ 1)\backslash Q$. Таким образом, справедливо утверждение:

Теорема 1. *Функция* $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$ *является начальной функцией цикла длины* $n > 2$ *только при выполнении условий:*

1. $a + c \neq 0$;
2. $\Delta < 0$;
3. $\beta \in (0;1) \cap Q$.

При этом длина цикла определяется однозначно.

Заметим, что выполнение второго условия обеспечивает также невырожденность начальной функции $f(x)$, т.к. из $\Delta < 0$ следует $ac - b > 0$.

Следует отметить, что множество элементов цикла длины n образует циклическую группу порядка n относительно операции суперпозиции функций, где в качестве единичного элемента берется функция $id_X(x) = x$, а образующим группу элементом является начальная функция $f(x)$. Поэтому на основании свойств циклических групп [4, 5] можно сразу привести некоторые свойства итерационных циклов длины n:

– в качестве начальной функции можно брать любой элемент $f_k(x)$, если только k и n взаимно просты. В частности, т.к. НОД$(n - 1, n) = 1$, то, взяв начальную функцию $f_{n-1}(x) = f^{-1}(x)$, имеем цикл $f_{n-1}(x), f_{n-2}(x), \dots, f_1(x)$, x – исходный цикл, проходимый в обратном порядке.

– Если n – простое число, то начальным элементом, порождающим цикл, кроме $f_1(x)$ может быть любой элемент $f_k(x)$, $k = 2, \dots, n-1$.

– Если k является делителем n и $n/k = h$, то $f_k(x)$ является начальной функцией подцикла длины h: $f_k(x), f_{2k}(x), \dots, f_{(h-1)k}(x)$, x и т.п.

Назовем целочисленным цикл, у которого все коэффициенты каждой итерации являются рациональными (целыми) числами, или становятся такими после умножения числителя и знаменателя итерации на некоторое ненулевое число (условие рациональности коэффициентов функции (3) равносильно условию целочисленности). Очевидно, что необходимым и достаточным условием целочисленности цикла является рациональность всех коэффициентов начальной невырожденной функции (7) (достаточность следует из формул (4)). Случай циклов с $n = 2$ тривиален, для циклов с $n > 2$ $(a + c \neq 0)$ из (23) следует, что $a, b, c \in Q \Leftrightarrow \tan^2(\pi m/n) \in Q$. Последнее условие в силу формулы $\cos 2\theta = (1 - \tan^2\theta)/(1 + \tan^2\theta)$ равносильно тому, что $\cos(2\pi m/n) \in Q$.

Теорема 2 [6, с. 168]. *Пусть* $0 < \alpha < 90°$. *Тогда, если угол* α *содержит рациональное число градусов* и $\alpha \neq 60°$, *то число* $\cos\alpha$ *иррационально*.

Применяя теорему и учитывая, что m и n взаимно просты, устанавливаем, что $n = 6$ – максимальное значение, при котором $\cos(2\pi m/n) \in Q$. Возьмем в (24) $a = 1$, $c = 2$, $n = 6$, $m = 1$. В результате получим цикл, у которого все коэффициенты каждой итерации являются целыми числами:

$$f_1(x) = \frac{x-1}{x+2}, \quad f_2(x) = -\frac{1}{x+1},$$
$$f_3(x) = -\frac{x+2}{2x+1}, \quad f_4(x) = -\frac{x+1}{x},$$
$$f_5(x) = -\frac{2x+1}{x-1}, \quad f_6(x) = x.$$

Это пример (не единственный) целочисленного цикла максимальной длины $n = 6$.

3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ НЕЦИКЛИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Выясним вопрос, что происходит с итерациями (18), если k неограниченно возрастает и при этом $f_k(x) \neq x$ при всех k. Введем обозначения

$$a_\infty = \lim_{k\to\infty} a_k, \quad c_\infty = \lim_{k\to\infty} c_k \tag{26}$$

(в силу леммы $b_k = b$). Предел функциональной последовательности $\{f_k(x)\}$

$$f_\infty(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \frac{a_\infty x + b}{x + c_\infty},$$

вычисляемый при любом фиксированном значении $x \in X \backslash \{-c_\infty\}$, назовем предельной функцией нециклического итерационного процесса.

3.1. Комплексно-сопряженные корни

Преобразовав (17) к виду

$$f_k(x) = \frac{(\sqrt{ac-b}(\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \mathrm{ctg}k\alpha) - c)x + b}{x + \sqrt{ac-b}(\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \mathrm{ctg}k\alpha) - a},$$

заключаем, что существование предельной функции $f_\infty(x)$ равносильно существованию конечного или бесконечного предела

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{ctg}k\alpha = \lim_{k\to\infty} \mathrm{ctg}(k\pi\beta).$$

В силу иррациональности β последовательность $\{\mathrm{ctg}(k\pi\beta)\}$ определена при всех $k \in N$.

Теорема 3 [7, с. 121]. *Если* ξ *– любое иррациональное число, то бесконечная последовательность* $x_n = n\xi$, $n = 1, 2, \dots$, *равномерно распределена по модулю* 1.

Следствие [7, с. 122]. *Если* ξ *– любое иррациональное число, то последовательность дробных частей* $\alpha_n = n\xi - [n\xi]$, $n = 1, 2, \dots$ *всюду плотна в единичном интервале*.

Отсюда следует, что если взять произвольные $\xi', \xi'' \in (0; 1))\backslash Q$, $\xi' \neq \xi''$, то найдутся последовательности натуральных чисел $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$, такие что $n_k\beta = [n_k\beta] + \xi' + \delta_k$ и $m_k\beta = [m_k\beta] + \xi'' + \gamma_k$, где δ_k и γ_k – бесконечно малые при $k \to \infty$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{ctg}(n_k\pi\beta) = \mathrm{ctg}\pi\xi'$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{ctg}(m_k\pi\beta) = \mathrm{ctg}\pi\xi'' \neq \mathrm{ctg}\pi\xi'$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{ctg}(k\pi\beta)$

не существует (ни число, ни бесконечность). Итерационный процесс расходится.

3.2. Действительные кратные корни

При вычислении пределов (26) берем коэффициенты a_k и c_k из (15).

Предельные значения коэффициентов: $a_\infty = \dfrac{a-c}{2}$, $c_\infty = \dfrac{c-a}{2}$; предельная функция: $f_\infty(x) = \dfrac{a-c}{2} = a_\infty$, $x \in X\backslash\{-c_\infty\}$.

При $k \to \infty$ центры $(-c_k, a_k)$ гипербол $f_k(x)$, двигаясь по прямой $x + y = a - c$, сходятся к точке $(-c_\infty, a_\infty)$, сама же функция $f_k(x)$ в пределе вырождается в константу (сходимость $f_k(x) \to f_\infty(x) = a_\infty$ на $X\backslash\{-c_\infty\}$ является неравномерной из-за точек бесконечного разрыва $x = -c_k$).

3.3. Действительные различные корни

Коэффициенты k-й итерации (18) находим из формулы (13)

$$a_k = \frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1^k - \lambda_2^k} - c, \quad c_k = \frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1^k - \lambda_2^k} - a,$$
$$b_k = b.$$

Для вычисления предела дроби $\dfrac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1^k - \lambda_2^k}$ поделим ее числитель и знаменатель на λ_2^k при $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ и, соответственно, на λ_1^k при $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ и воспользуемся пределом $\lim\limits_{k\to\infty} q^k = 0$, $|q| < 1$ (случаи $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ рассмотрены в пп. 3.1–2). Так как $|\lambda_1| > |\lambda_2| \Leftrightarrow a + c > 0$, то в зависимости от знака выражения $a + c$ получаются следующие результаты.

3.3.1. $a + c > 0$.

Предельные значения коэффициентов: $a_\infty = \dfrac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2}$, $c_\infty = \dfrac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2}$; предельная функция: $f_\infty(x) = \dfrac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2} = a_\infty$, $x \in X\backslash\{-c_\infty\}$.

3.3.2. $a + c < 0$.

Предельные значения коэффициентов: $a_\infty = \dfrac{a-c-\sqrt{\Delta}}{2}$, $c_\infty = \dfrac{c-a-\sqrt{\Delta}}{2}$; предельная функция: $f_\infty(x) = \dfrac{a-c-\sqrt{\Delta}}{2} = a_\infty$, $x \in X\backslash\{-c_\infty\}$.

В каждом из случаев 3.3.1–2 при $k \to \infty$ центры $(-c_k, a_k)$ гипербол $f_k(x)$, двигаясь по прямой $x + y = a - c$, сходятся к точке $(-c_\infty, a_\infty)$, сама же последовательность $\{f_k(x)\}$ сходится неравномерно на $X\backslash\{-c_\infty\}$ к константе a_∞.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бродский Я.С., Слипенко А.К.* Функциональные уравнения. Киев.: Вища школа, 1983. 96 с.
2. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1999. 296 с.
3. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. М.: Наука, 1986. 400 с.
4. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968. 432 с.
5. *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре . М.: Наука, 1984. 416 с.
6. *Нивен А.* Числа рациональные и иррациональные. М.: Мир, 1966. 199 с.
7. *Чандрасекхаран К.* Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Мир, 1974. 188 с.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 2, pp. 139–146

Cyclic and Non-Cyclic Iterations of Linear-Fractional Functions

V. P. Cherniavsky

Sarov Physical Technical Institute, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Sarov, 607190, Russia

Received February 24, 2020; revised February 24, 2020; accepted April 28, 2020

Abstract—Functional iterative processes $f_k(x) = f(f_{k-1}(x))$, $k = 2,3,\ldots$, where the initial function $f_1(x) = f(x)$ belongs to the class of non-degenerate linear fractional functions are considered. The aim of this work is to study all types of iterative processes that arise when the parameters are varied. To solve the appearing recurrence relations, matrix methods and complex numbers are used. Formulas for the coefficients of the k_{th} iteration for any k depending on the coefficients of the initial function are obtained in the general form. Two invariants of iterative processes are defined. It is shown that cycles of the length $n > 2$ can exist only for complex conjugate eigenvalues of the coefficient matrix of a linear-fractional function. All initial functions that generate cycles of an arbitrary given length are found and explicit expressions are obtained for the coefficients of any element of the cycle in terms of the coefficients of the initial function. An example of a cycle of the maximum length $n = 6$, where all the coefficients of each iteration are integers, is given. For non-cyclic processes, the behavior of the k_{th} iteration is studied for $k \to \infty$ and limit functions are determined in the cases of convergence. Non-cyclic iterative processes are divided into converging (real eigenvalues) and diverging (complex conjugate values that do not satisfy cyclic conditions). Converging iterations have a constant function as their limit function.

Keywords: linear-fractional functions, iterations, iterative processes, cycles, eigenvalues

DOI: 10.1134/S2304487X20020029

REFERENCES

1. Brodsky J.S., Slipenko A.K. *Funktsional'nie uravnenia* [Functional equations]. Kiev, Visha Shkola Publ., 1983. 96 p. (in Russian).
2. Ilyin V.A., Poznyak E.G. *Lineinaya algebra* [Linear algebra]. Moscow, Nauka, 1999. 296 p. (in Russian).
3. Postnikov M.M. *Lektsii po geometrii* [Lectures on geometry]. Moscow, Nauka, 1986. 400 p. (in Russian).
4. Kurosh A.G. *Kurs vishei algebri* [Course in higher algebra]. Moscow, Nauka, 1968. 432p. (in Russian).
5. Faddeev D.K. *Lektsii po algebre* [Lectures on algebra]. Moscow, Nauka, 1984. 416 p. (in Russian).
6. Niven I. *Chisla ratsional'nie i irratsional'nie* [Numbers: rational and irrational]. Moscow, Mir, 1966. 199 p. (in Russian).
7. Chandrasekharan K. *Vvedenie v analiticheskuyu teoriyu chisel* [Introduction to analytic number theory]. Moscow, Mir, 1974. 188 p. (in Russian).

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 2, с. 147–154

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 51-7

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ КАТАРАКТЫ И РЕШЕНИЕ В КВАДРАТУРАХ

© 2020 г. М. В. Вигдорович[1],*, Е. В. Евдокимова[2]

[1] Angara GmbH, Дюссельдорф, 40599, Германия

[2] Территориальный орган Росздравнадзора по Тамбовской области, Тамбов, 392030, Россия

**e-mail: dr.vigdorowitsch@angara-gmbh.de*

Поступила в редакцию 27.04.2020 г.
После доработки 27.04.2020 г.
Принята к публикации 09.06.2020 г.

На основе упрощенной физиологической модели предложена эвристическая математическая модель эволюции катаракты. Процесс описан в виде нестационарной задачи Неймана для уравнения Пуассона. Начальные условия суть решение стационарной задачи, описывающей функционирование здорового глаза. Согласно концепции деградации хрусталика при возникновении катаракты, питающий агент доставляется в область хрусталика через границу и естественным образом вырабатывается (расходуется). Недостаток питающего агента приводит к помутнению тканей хрусталика. Область хрусталика представлена двояковыпуклым линзоподобным телом, ограниченным двумя пересекающимися сферами разных радиусов. Функция Грина для области соответствующей геометрии построена методом отражений. Конечное число отражений реализуется при ортогональности пересекающихся сфер, что вкупе с базовыми характеристиками хрусталика (толщина, высота) однозначно описывает геометрию задачи. Модель описывает ядерную, субкапсулярную и кортикальную катаракты. Обсуждено поведение решений математической модели в каждом из этих случаев. Определен физиологический смысл константы, с точностью до которой решается задача Неймана. Указана необходимость достижения соглашения в отношении порогового значения концентрации питающего агента, разделяющего здоровый и нездоровый режимы функционирования глаза. Предложены наименования видов катаракты с добавлением этимологического признака, наряду с морфологическим: "диффузионно-ядерная", "склерозно-субкапсулярная" и "склерозно-кортикальная" соответственно.

Ключевые слова: катаракта, задача Неймана, квадратуры, уравнение Пуассона, функция Грина

DOI: 10.1134/S2304487X20020157

ВВЕДЕНИЕ

Суть развития катаракты человеческого глаза состоит в помутнении хрусталика, начиная преимущественно, хотя и не всегда, с его периферических областей [1]. Несмотря на то, что в отечественной и зарубежной медицинской литературе вопросы, включающие рассмотрение катаракты, поднимаются регулярно, они связаны не столько с математическим моделированием процесса развития, сколько с лечением [2, 3], изучением релевантности представителям профессиональных групп риска – в первую очередь, в связи с радиационной опасностью [4, 5], технологиями применения операционной техники [6, 7], и т.д.

Хрусталик представляет собой прозрачное упругое двояковыпуклое линзоподобное тело, типично имеющее асимметричную эллипсообразную форму. При том, что форма может изменяться в силу разных причин, задняя часть хрусталика остается, как правило, более вытянутой по сравнению с передней. Характерная высота хрусталика составляет 9–11 мм, ширина – около 3.5–5.0 мм (рис. 1).

Помутнение хрусталика связывается, как правило, с нарушением обмена веществ внутри хрусталика и/или режима питания, к чему приводят возрастные или неорганические (недопустимый температурный режим, радиационное облучение) причины. В силу индивидуальных особенностей, развитие катаракты может происходить как очень медленно (например, 10 лет в начальной стадии), так и весьма динамично (несколько месяцев). По степени развития выделяют начальную, незрелую, зрелую и перезрелую катаракты, характеризующиеся различной интенсивностью помутнения вещества хрусталика. По локализации помутнения различают, как правило, субкапсулярную (переднюю и заднюю), кортикальную (простирающуюся преимущественно в прилегающей к эк-

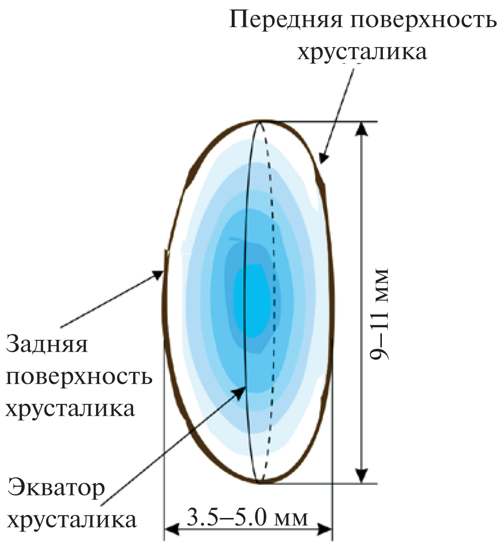

Рис. 1. Схематическое изображение хрусталика.

ватору узкой области), ядерную (возникающую в центре вещества хрусталика) катаракты.

С учетом вышесказанного, математическая модель, потенциально способная учитывать данные органические, временны́е и геометрические особенности возникновения и развития катаракты, была бы востребована в целях прогнозирования развития заболевания и категоризации пациентов по режимам их наблюдения и тактике ведения. Разработка и решение такой модели являются целью настоящей работы.

ФИЗИОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОЗНИКНОВЕНИЯ И РАЗВИТИЯ КАТАРАКТЫ

Поскольку любая математическая модель представляет собой результат описания совокупности основных факторов, в настоящей работе будем с известной степенью упрощения и условности исходить из следующего.

Физиологически возникновение и рост катаракты обусловлены изменением режима питания органических тканей. Распространение потемнения происходит за счет снижения содержания питающего агента в объеме однородного хрусталика без рассмотрения количественного и качественного состава первого. В пределах хрусталика имеет место его квази-диффузия, выработка материалом хрусталика (ликвидация) и подпитка через границы хрусталика для поддержания жизнедеятельности. При дегенеративных изменениях происходит снижение эффективности подпитки, расходование же агента на поддержание жизнедеятельности продолжается. Поэтому квазиравновесное количество агента в хрусталике начинает уменьшаться. В такой модели следует ожидать, что оно, прежде всего, действительно начнет уменьшаться на периферии, если непосредственная подпитка через границы снизилась, удельный объем прилегающих к границе областей меньше в силу геометрии хрусталика, нежели удельный объем в его внутренних областях, а квазидиффузионная поддержка агентом периферических областей из объема хрусталика требует времени, расходование же агента происходит уже сейчас. Возможность возникновения катаракты во внутренних областях хрусталика может объясняться изменением коэффициента диффузии с течением времени при удовлетворительной доставке питательных веществ через границы хрусталика, из-за чего питание внутренних областей хрусталика оказывается недостаточным, и в них агент быстрее вырабатывается, нежели к ним осуществляется его транспорт. Таким образом, физиологически ухудшение питания происходит, в первую очередь, из-за того, что ткань перестает пропускать агент из окружающих хрусталик камер через его границу, а во вторую – по причине нарушения транспорта в объеме хрусталика.

Помимо этого, происходит удаление продуктов жизнедеятельности обратно в окружающие хрусталик камеры, но данный процесс рассматривается нами как нерелевантный задаче и поэтому игнорируется. По той же причине игнорируется и процесс генерирования клеток хрусталика эпителием на его границе, а также их смещение по мере старения к центру хрусталика и уплотнение там в составе ядра.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Соответственно вышеописанному подходу, естественно сформулировать математическую задачу параболического типа с уравнением диффузии и граничным условием 2-го рода. Действительно, на границе хрусталика происходит проникновение питающего агента со скоростью p, зависящей от участка границы хрусталика и от времени. Возникший агент диффундирует в объем хрусталика, где характеризуется концентрацией $u(\boldsymbol{r}, t)$. Вплоть до момента времени $t = 0$ зависимость p от времени отсутствует (стационарная задача), а при $t > 0$ поток агента через границу снижается вследствие возникновения проблем на границе хрусталика (возникновение катаракты в периферийных областях) либо уменьшается коэффициент диффузии в объеме хрусталика, нарушая тем самым транспорт, что соответствует возникновению ядерной катаракты. И то, и другое означает возникновение заболевания. В объеме хрусталика происходит распределенная и непрерывная выработка агента со скоростью q. Транс-

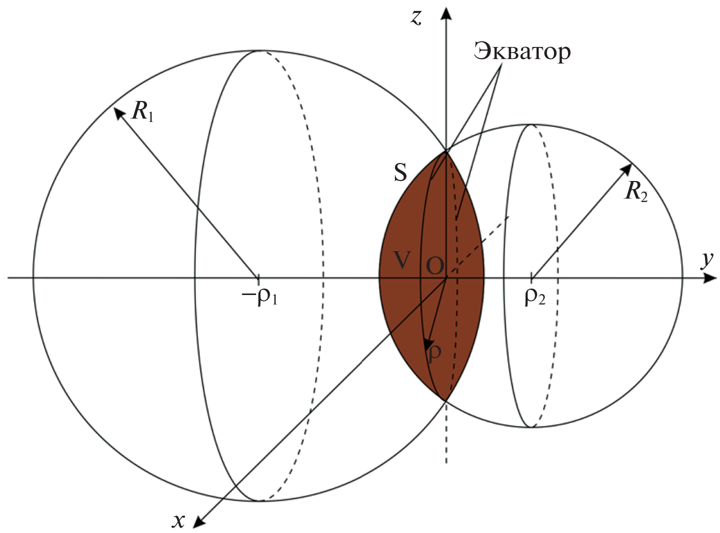

Рис. 2. Область решения задачи. Область V с заливкой – внутренняя область хрусталика, S – ее граница, O – начало координат, лежащее в плоскости сечения сфер.

порт агента от границы в объем хрусталика осуществляется по диффузионному закону.

Математическая постановка задачи в такой формулировке имеет вид

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = a^2(t)\Delta u(\boldsymbol{r},t) - q, \qquad (1a)$$

где $q = \text{const}$ – равномерно распределенные внутри объема "стоки" питающего агента, моделирующие его выработку (расходование) на поддержание жизнедеятельности хрусталика, $a^2(t)$ – коэффициент диффузии, возможное снижение которого во времени вызывает катаракту ядерного типа. Условие на границе S формулируется в виде (нормаль внешняя)

$$\left.\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_S = -p(\boldsymbol{r},t), \qquad (1b)$$

где функция $p(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{r} \in S$, является убывающей во времени (возможно, кусочно или даже ступенчато) на передней или задней поверхности хрусталика (соответствует передней или задней субкапсулярной катаракте) или в прилегающей к экватору хрусталика области (кортикальная катаракта). Принятие функцией $p(\mathbf{r}, t)$ локально или всюду нулевых значений выходит за пределы рассматриваемой задачи, т.к. означало бы полный отказ доставки агента, что не представляется реалистичным в отсутствие механических повреждений глаза. Начальное условие сформулируем в виде

$$u(\boldsymbol{r},t=0) = u_0(\boldsymbol{r}), \qquad (1c)$$

где функция $u_0(r)$ представляет собой решение стационарной задачи, которую рассмотрим ниже.

Решение $u(\mathbf{r}, t)$ ищем на классе ограниченных в $r = 0$ функций:

$$|u(r=0,t)| < +\infty. \qquad (1d)$$

В качестве области решения задачи рассмотрим пересечение внутренностей двух сфер радиусов R_1 (моделируют заднюю поверхность хрусталика) и R_2 (переднюю), $R_1 > R_2$, с центрами, расположенными непосредственно на оси ординат в точках $y = -\rho_1$ и $y = \rho_2$ соответственно (рис. 2). Используем сферические координаты. Уравнения сфер имеют вид $r^2 + 2r\rho_1\sin\theta\sin\varphi = R_1^2 - \rho_1^2$ при $\pi \le \varphi < 2\pi$ и $r^2 - 2r\rho_2\sin\theta\sin\varphi = R_2^2 - \rho_2^2$ при $0 \le \varphi < \pi$. Экватор хрусталика – граница сечения сфер в плоскости $x0z$, представляющая собой окружность с уравнением $\rho^2 = R_1^2 - \rho_1^2 = R_2^2 - \rho_2^2$, где ρ – радиус-вектор в полярных координатах в плоскости $x0z$. Задаваемые ширина w и высота h хрусталика (рис. 1) не определяют однозначно набор параметров задачи R_1, R_2, ρ_1 и ρ_2, т.к. для 4 параметров имеем лишь 3 уравнения связи:

$$\frac{h}{2} = R_1^2 - \rho_1^2 = R_2^2 - \rho_2^2 \qquad (2a)$$

и

$$w = R_1 - \rho_1 + R_2 - \rho_2. \qquad (2b)$$

К недостающему уравнению связи мы вернемся позже.

Сформулируем стационарную задачу, соответствующую периоду времени $t \le 0$: распределение $u_0(\boldsymbol{r})$ является решением уравнения Пуассона

$$\Delta u_0(\boldsymbol{r},t) = q/a_0^2, \qquad (3a)$$

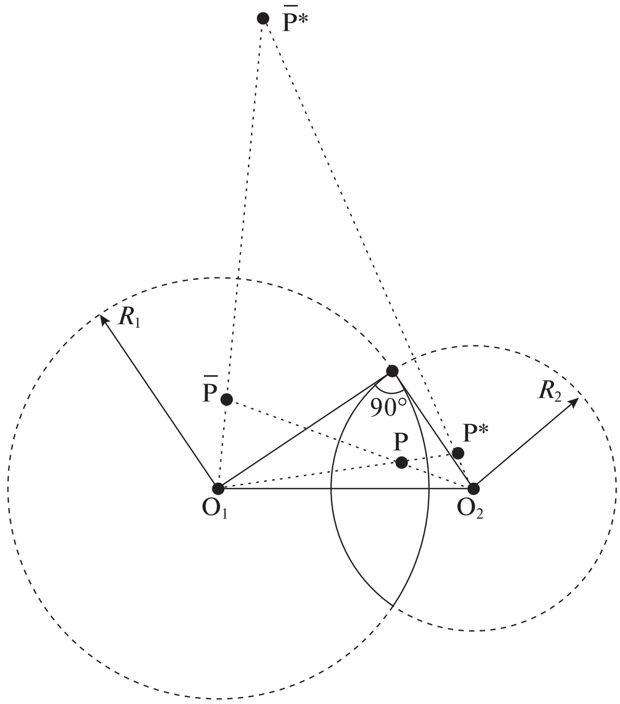

Рис. 3. Отыскание симметричных точек для построения функции Грина (проекция на плоскость *yz*).

где $a_0 = a(t = 0)$, с граничным условием

$$\left.\frac{\partial u_0(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_S = -p_0(\boldsymbol{r}) \tag{3b}$$

и условием ограниченности решения при $r = 0$:

$$|u_0(r = 0)| < +\infty. \tag{3c}$$

Для задачи Неймана для уравнения Пуассона является стандартным требование закона сохранения

$$\int_S p_0(\boldsymbol{r})ds = \int_V \frac{q}{a_0^2}d\boldsymbol{r} = V\cdot\frac{q}{a_0^2}. \tag{3d}$$

Какие-либо иные ограничения на вид функции $p_0(\boldsymbol{r})$ накладывать не станем, за исключением того, что она должна быть ограниченной.

Другой особенностью решения задачи Неймана для уравнения Пуассона является определенность решения с точностью до постоянной. В разделе "Обсуждение" будет показано, что это обстоятельство имеет применительно к задаче роста катаракты соответствующий физиологический смысл.

Таким образом, уравнения (1) и (3) исчерпывают математическую постановку задачи роста катаракты.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

В задачах (1), (3) совершим переход от классических функций u, u_0 к обобщенным $\tilde{u}, \tilde{u}_0$ [8]. По определению, имеем

$$\begin{aligned}\nabla\tilde{u}_0 &= \nabla u_0 + [u_0]_S\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_S),\\ \Delta\tilde{u}_0 &= \Delta u_0 + [\nabla u_0]_S\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_S) + [u_0]_S\delta'(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_S),\end{aligned} \tag{4}$$

где $[\ ]_S$ – скачок классической функции на S. Подставляя уравнения (4) в задачу (1) и используя те обстоятельства, что у классической функции нет скачка на границе ($[u_0]_S = 0$ и $|\nabla u_0|_S = \left.\frac{\partial u_0}{d\boldsymbol{n}}\right|_S$), получаем следующую однородную по граничному условию математическую постановку задачи для $\tilde{u}_0(\boldsymbol{r})$:

$$\Delta\tilde{u}_0 = q/a^2(t) - p_0(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_S), \tag{5a}$$

$$\left.\frac{\partial\tilde{u}_0}{d\boldsymbol{n}}\right|_S = 0, \tag{5b}$$

$$|\tilde{u}_0(r = 0)| < +\infty. \tag{5c}$$

Воспользуемся методом функции Грина. Построим функцию Грина $G_0(\xi, \boldsymbol{r})$ соответствующей задачи методом отражений (рис. 3). Поскольку на каждой из границ областей для симметричных относительно соответствующих окружностей пар точек P и $\bar{\mathrm{P}}$, P и P*, $\bar{\mathrm{P}}$ и $\bar{\mathrm{P}}$*, P* и $\bar{\mathrm{P}}$* с радиус-вектором $\boldsymbol{r}$ функция Грина должна удовлетворять граничному условию (5b), получим, например, для пары точек P и P* уравнение

$$\left.\frac{\partial}{d\boldsymbol{n}}\left[\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\xi - \boldsymbol{r}|} - \frac{1}{4\pi}\frac{\alpha}{|\xi - \boldsymbol{r}^*|}\right]\right|_S = 0, \tag{6}$$

откуда следует $\alpha = R_1^2/r^2$ с учетом условия симметрии $rr^* = R_1^2$ по определению. Действуя аналогично для остальных симметричных точек, получим функцию Грина для решения задачи (5) в виде:

$$\begin{aligned} G_0(\xi, \boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\xi - \boldsymbol{r}|} - \\ &- \frac{R_1^2}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{O1}|^2}\frac{1}{|\xi - \boldsymbol{r}^*|} - \frac{R_2^2}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{O2}|^2}\frac{1}{|\xi - \bar{\boldsymbol{r}}|} + \\ &+ \frac{R_1^2R_2^2}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{O2}|^4}\frac{1}{|\xi - \bar{\boldsymbol{r}}^*|} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\xi - \boldsymbol{r}|} - \\ &- \frac{R_1^2}{4\pi}\frac{1}{|(\xi - \boldsymbol{r}_{O1})|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{O1}|^2 - (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{O1})R_1^2|} \\ &- \frac{R_2^2}{4\pi}\frac{1}{|(\xi - \boldsymbol{r}_{O2})|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{O2}|^2 - (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{O2})R_1^2|} + \\ &+ \frac{R_1^2R_2^2}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{O2}|^2}\frac{1}{|(\xi - \boldsymbol{r}_{O2})|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{O2}|^2 - (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{O2})R_1^2|}. \end{aligned} \tag{7}$$

Ключевым здесь является следующее. Точки, симметричные точкам P* и $\overline{\text{P}}$, совпадают в т. $\overline{\text{P}}$* лишь в том случае, если сферы являются ортогональными, чему на рис. 3 соответствует угол 90° соответствующего треугольника в проекции. Это является следствием свойств инверсии и может быть сформулировано в виде содержательного утверждения.

Лемма. Последовательные преобразования типа инверсии точки относительно двух ортогональных сфер коммутативны.

Доказательство. Пусть $o1$ и $o2$ – преобразования типа инверсии для сфер инверсии 1 и 2 соответственно. Пусть некоторая точка A – неподвижная точка преобразования $o2$. Тогда $o2(\text{A}) = \text{A}$, и $o1 \times o2(\text{A}) = o1(o2(\text{A})) = o1(\text{A})$. Из теории инверсии известно, что множество неподвижных точек инверсии – сфера инверсии, и что другая сфера отображается на себя тогда и только тогда, когда она ортогональна сфере инверсии. Таким образом, получаем $o2 \times o1(\text{A}) = o2(o1(\text{A})) = o1(\text{A})$. С другой стороны, выше получен тот же результат для последовательности преобразований $o1 \times o2(\text{A})$. Следовательно, последовательные преобразования инверсии для двух ортогональных сфер инверсии коммутативны. Лемма доказана.

Таким образом, возникает требование ортогональности сфер, которое должно быть учтено в соответствующем уравнении связи, наряду с уравнениями (2):

$$(\rho_1 + \rho_2)^2 = R_1^2 + R_2^2. \tag{8}$$

Совокупность уравнений (2) и (8) однозначно определяет геометрию задачи. Данный метод не работает в симметричном случае одинаковых сфер $R_1 = R_2 \equiv R_0$, т.к. остается 2 независимых параметра R_0 и $\rho_0 \equiv \rho_1 = \rho_2$. Из-за этого три уравнения связи вырождаются в два, в результате чего геометрия задачи оказывается однозначно определенной: $R_0 = \dfrac{h^2}{w} + \dfrac{3}{4}w$ и $\rho_0 = \dfrac{h^2}{w} - \dfrac{w}{4}$, невзирая на то обстоятельство, что центр каждой сферы при этом, вообще говоря, не лежит в касательной плоскости к другой сфере в точках пересечения.

Итоговое решение стационарной задачи (5) имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{u}_0(\boldsymbol{r}) &= -\int\limits_{\text{V}}\left[\frac{q}{a^2} - p_0(\boldsymbol{r})\delta(\xi - \boldsymbol{r}_S)\right]G_0(\xi, \boldsymbol{r})d\xi = \\ &= -\frac{q}{a^2}\int\limits_{\text{V}} G_0(\xi, \boldsymbol{r})d\xi + \int\limits_{\text{S}} p_0(\boldsymbol{r})G_0(\xi, \boldsymbol{r})ds_\xi\end{aligned} \tag{9}$$

В нестационарной задаче (1) также перейдем к обобщенным функциям. Поскольку разрывы по времени следует исключить, приходим к следующей постановке аналогично стационарной задаче:

$$\tilde{u}_t(\boldsymbol{r}, \text{t}) = a^2(t)\Delta c(\boldsymbol{r}, \text{t}) - q + p(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_S), \tag{10a}$$

$$\tilde{u}(\boldsymbol{r}, t = 0) = \tilde{u}_0(\boldsymbol{r}), \tag{10b}$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{u}}{d\boldsymbol{n}}\right|_S = 0. \tag{10c}$$

Функция Грина этой задачи строится методом отражений на основе фундаментального решения экспоненциального вида аналогично предыдущему:

$$\begin{aligned}G(\xi, \boldsymbol{r}, t) &= \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{3/2}} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{|\xi - \boldsymbol{r}|^2}{4a^2 t}\right)\left[1 - \frac{r}{R_1} - \frac{r}{R_2} + \frac{r^2}{R_1 R_2}\right].\end{aligned} \tag{11}$$

Итоговое решение нестационарной задачи (10) с функцией Грина (11) получаем в виде

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\boldsymbol{r}, t) &= \int\limits_{\text{V}} G(\xi, \boldsymbol{r}, t)\tilde{u}_0(\xi)d\xi - q\int\limits_0^t\int\limits_{\text{V}} G(\xi, \boldsymbol{r}, t - \tau)d\xi d\tau + \\ &+ \int\limits_0^t\int\limits_{\text{S}} G(\xi, \boldsymbol{r}, t - \tau)p(\xi, t)ds_\xi.\end{aligned} \tag{12}$$

В завершение отметим, что в [9] была построена функция Грина для стационарной задачи в аналогичной области в тороидальных координатах. Мы рассмотрели настоящую задачу в сферических координатах по следующим соображениям: 1) итоговое решение оставляем в квадратурах, поскольку ряд физиологических параметров остается на данный момент неопределенным, а один из них требует достижения экспертного соглашения (см. раздел "Обсуждение"). Применение тороидальной системы координат не даст на данном этапе значимого преимущества, но уступит в наглядности; 2) демонстрируются особенности метода отражений при построении функции Грина для соответствующей области; 3) настоящий хрусталик имеет форму, безусловно, отличную от рассматриваемой нами "линзы", и строгое моделирование его истинной формы как в сферических, как и в тороидальных координатах с очевидностью не будет отражаться уравнениями простого вида. Более того, форма хрусталика претерпевает изменения в процессе аккомодации интерактивно.

Отметим также, что малоприятной особенностью численного решения задачи явится, по всей видимости, серьезное различие временны́х масштабов возникновения и эволюции катаракты, поскольку ее зарождение может протекать на протяжении недель или месяцев, тогда пребывание в начальной фазе и тем более развитие во многих случаях длятся годы.

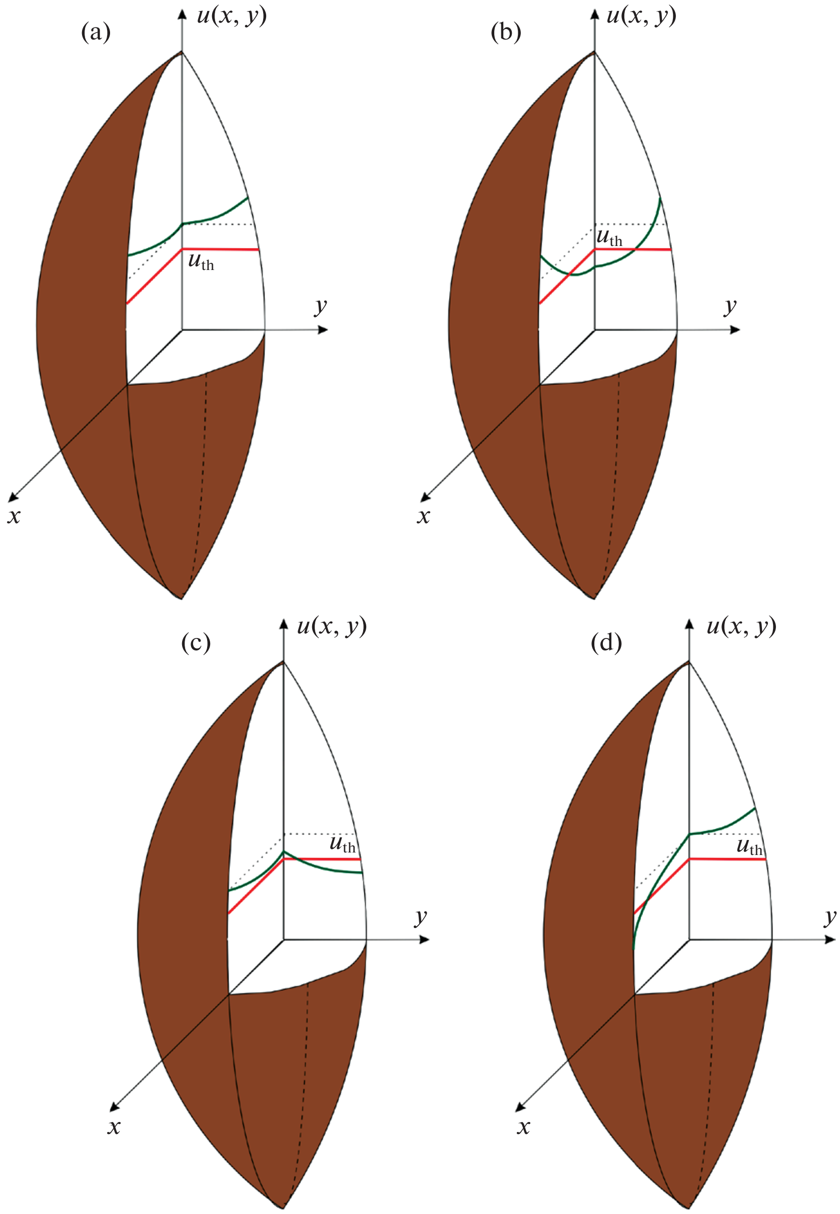

Рис. 4. Профиль функции $u(x, y)$, описывающей распределение концентрации питающего агента. Зеленая кривая: $u(x, y)$; красная линия – пороговое значение. a) здоровый хрусталик; b) ядерная катаракта; c) субкапсулярная (передняя) катаракта; d) кортикальная катаракта.

ОБСУЖДЕНИЕ

Обратимся сперва к решению (9) стационарной задачи, отражающей режим функционирования здорового хрусталика. Поведение гармонической функции легко отобразить качественно (рис. 4а). Концентрация питающего агента (зеленая кривая) принимает наибольшие значения на границе хрусталика, получая подпитку через границу, и снижается в направлении внутренних областей, поскольку в них происходит исключительно его выработка. Здоровое функционирование хрусталика без возникновения катаракты продолжается столь долго, сколь концентрация питающего агента не уменьшается ниже некоторого порогового уровня u_{th}. Авторы не располагают ни собственными, ни литературными (если таковые существуют) данными, сколь велик этот уровень, и предполагают, что относительно него должно быть высказано некоторое экспертное суждение и достигнуто согласие. Следует лишь ожидать, что $u_{th}=const$ или, хотя бы, слабо изменяющаяся в области хрусталика величина.

По мере зарождения катаракты представленная на рис. 4а картина начинает претерпевать изменения, следующие из решения (12) и зависящие от поведения функции $p(\boldsymbol{r},t)$ на границе хрусталика и коэффициента диффузии $a^2(t)$. В случае, когда вследствие органических причин уменьшается коэффициент диффузии, питающий агент не успевает в удовлетворительном количестве диффундировать от границы хрусталика во внутренние области, где продолжается его выработка. Это приводит к ситуации рис. 4b. Во внутренних областях хрусталика формируется ядерная катаракта. В приграничных же областях концентрация питающего агента остается на том же уровне, что и в случае здорового хрусталика (рис. 4a).

Именование такой катаракты как *диффузионно-ядерной* указывало бы не только на ее морфологию, но и на этимологию. Случаю, когда коэффициент диффузии остается неизменным, но ухудшается режим подпитки через границы хрусталика, соответствует качественное поведение концентрации питающего агента на рис. 4c. Это — передняя субкапсулярная катаракта, более полное именование которой с учетом добавления этимологического признака было бы “склерозно-субкапсулярная”. При нарушении питания через переднюю поверхность хрусталика концентрация питающего агента вблизи нее падает, и подпитка внутренних областей осуществляется через заднюю поверхность и экваториальные области хрусталика. При известном стечении обстоятельств это типично приводит к тому, что внутренние области хрусталика еще сохраняют удовлетворительное питание, при котором концентрация питающего агента не снижается ниже порогового значения. Рис. 4d отвечает случаю кортикальной катаракты. Питание через границу в экваториальной области ухудшается, и подпитка осуществляется опосредованно через прилегающие внутренние области хрусталика и в итоге оказывается недостаточной для поддержания уровня, требуемого для здорового функционирования хрусталика в области экватора. С добавлением этимологического признака катаракта могла бы именоваться как “склерозно-кортикальная”.

Таким образом, возникновению и развитию катаракты в терминах концентрации питающего агента соответствует условие

$$u(\boldsymbol{r},t) < u_{tr}[< u_0(\boldsymbol{r})]. \tag{13}$$

Воздержание от оперативного вмешательства приводит к распространению недостатка питающего агента в те области хрусталика, которые до тех пор были не затронуты. Происходит разрастание катаракты.

Ранее упоминалось, что решение задачи Неймана возможно лишь с точностью до некоторой постоянной. В ее качестве разумно принять референсное значение u_{tr}, относительно которого будут определяться дефицит или благоприятный режим питания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложена эвристическая математическая модель эволюции катаракты. Сформулирована и решена в квадратурах нестационарная задача Неймана для уравнения Пуассона с начальными условиями, следующими из решения стационарной задачи, соответствующей режиму здорового функционирования глаза. Хрусталик представлен в виде двояковыпуклого линзоподобного тела, ограниченного двумя пересекающимися сферами разных радиусов. Использована концепция питающего агента, который доставляется в область хрусталика через границу последнего и вырабатывается в процессе жизнедеятельности. Недостаток питающего агента, т.е. падение его концентрации ниже порогового уровня, приводит к помутнению соответствующих областей хрусталика (зарождается и далее развивается катаракта). В зависимости от граничных условий и эволюции вещества хрусталика, модель описывает различные виды катаракты, а именно — ядерную, субкапсулярную и кортикальную, именование которых с учетом этимологического признака выглядит более полным с добавлением соответствующей характеристики, а именно — “диффузионно-ядерная”, “склерозно-субкапсулярная” и “склерозно-кортикальная”. Для эффективного использования этой или более совершенных моделей требуется определение и достижение экспертного соглашения относительно фактической пороговой концентрации агента, ниже которой катаракта типично зарождается и развивается. Это позволит проводить категоризацию пациентов с прогнозированием периодов развития заболевания на основе математических расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кански Д.* Клиническая офтальмология: систематизированный подход. М.: Логосфера, 2009. С. 337–342.
2. *Королева И.А., Егоров Е.А.* Возрастная катаракта: профилактика и лечение. Клиническая офтальмология”. 2018. № 4. С. 194–198. https://doi.org/10.21689/2311-7729-2018-18-4-194-198
3. *Kletke S.N., Mireskandari K., Ali A.* Update on Pediatric Cataract Surgery and the Delphi Panel Paper. Current Ophthalmology Reports. 2018. V. 6. P. 207–216. https://doi.org/10.1007/s40135-018-0183-2
4. *Туков А.Р., Шафранский И.Л., Прохорова О.Н., Зиятдинов М.Н.* Риск развития радиационной катаракты у работников атомной промышленности участников ликвидации последствий аварии на ЧАЭС. Радиация и риск. 2019. Т. 28. № 1. С. 37–46.

5. *Sakashita T., Sato T., Hamada N.* A biologically based mathematical model for spontaneous and ionizing radiation cataractogenesis. PLoS One. 2019. V. 14. № 8. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0221579
6. *Немсицверидзе М.Н., Загорулько А.М.* Опыт лазерной экстракции катаракты с фемтолазерным сопровождением. Практическая медицина. 2016. Т. 98. № 6. С. 115–118.
7. *Pandolfi A.* Mathematical Modeling in Eye Surgery. In Integrated multidisciplinary approaches in the study and care of the human eye, eds. *P. Causin, G. Guidoboni, R. Sacco, A. Harris*. Amsterdam, Kugler Publications. 2014. P. 5–16.
8. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. С. 84–127.
9. *Lin W., Jin H.* Green's function for the Poisson equation in the domains bounded by two intersecting spheres. Microwave and optical technology letters. 1990. V. 3. №. 4. P. 130–132.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 2, pp. 147–154

Mathematical Model of Cataract Evolution and Its Solution in Quadratures

M. V. Vigdorowitsch[a,#] and E. V. Evdokimova[b]

[a] *Angara GmbH, 40599 Düsseldorf, Germany*

[b] *Local Health Supervisory Body for Tambov region, Tambov, 392030 Russia*

[#]*e-mail: dr.vigdorowitsch@angara-gmbh.de*

Received April 27, 2020; revised April 27, 2020; accepted June 9, 2020

Abstract—A heuristic mathematical model of cataract evolution has been proposed on the basis of a simplified physiological model. The process is presented as a non-stationary Neumann problem for the Poisson equation. Its initial conditions are the solution of the stationary problem corresponding to a healthy eye. According to the crystalline lens degradation concept, the feeding agent is being transported inside the boundary and naturally consumed. Its lack results in opacification of the crystalline lens tissue. The crystalline lens is considered as a biconvex lens-like body constrained within intersecting spheres of different radii. The Green's function for the area has been built by the reflection method. A finite number of reflections occur if the spheres are orthogonal; this circumstance, together with the height and thickness of the crystalline lens, uniquely determines the geometry of the problem. The model describes the nuclear, subcapsular, and cortical cataract. The behavior of solutions in each case is discussed. The physiological meaning of an arbitrary constant in the Neumann problem solution is interpreted. A necessity to reach some agreement with respect to the threshold value of the feeding agent concentration that enables one to distinguish between healthy and unhealthy regimes of the eye functioning is emphasized. Extended names of cataract types are offered with adding the etymological feature to the morphological one: diffuse–nuclear, sclerotic–subcapsular, and sclerotic–cortical, respectively.

Keywords: cataract, Neumann problem, quadratures, Poisson equation, Green's function

DOI: 10.1134/S2304487X20020157

REFERENCES

1. Kanski J.J. Clinical Ophthalmology. Wrocław: Elsevier Urban & Partner, 2009.
2. Koroleva I.A., Egorov E.A., Age-related cataract: prevention and treatment. Russian J. Clinical Ophthalmology. 2018. № 4. Pp. 194–198. https://doi.org/10.21689/2311-7729-2018-18-4-194-198
3. Kletke S.N., Mireskandari K., Ali A., Update on Pediatric Cataract Surgery and the Delphi Panel Paper. Current Ophthalmology Reports. 2018. V. 6. Pp. 207–216. https://doi.org/10.1007/s40135-018-0183-2
4. Tukov A.R., Shafranskij I.L., Prokhorova O.N., Ziyatdinov M.N., The incidence of cataracts and the radiation risk of their occurrence in liquidators of the Chernobyl accident, workers in the nuclear industry. Radiation & Risk. 2019. V. 28. № 1. Pp. 37–46.
5. Sakashita T., Sato T., Hamada N., A biologically based mathematical model for spontaneous and ionizing radiation cataractogenesis. PLoS One. 2019. V. 14. № 8. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0221579
6. Nemsitsveridze M.N., Zagorul'ko A.M., Experience of femtosecond-laser assisted Nd:YAG laser cataract extraction. Practical medicine. 2016. V. 98. № 6. Pp. 115–118.
7. Pandolfi A., Mathematical Modeling in Eye Surgery. In Integrated multidisciplinary approaches in the study and care of the human eye, eds. P. Causin, G. Guidoboni, R. Sacco, A. Harris. Amsterdam, Kugler Publications. 2014. P. 5–16.
8. Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics. Moscow: Mir, 1984.
9. Lin W., Jin H., Green's function for the Poisson equation in the domains bounded by two intersecting spheres. Microwave and optical technology letters. 1990. V. 3. № 4. Pp. 130–132.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2020, том 9, № 2, с. 155–165

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 51-74

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И КОНЦЕНТРАЦИИ РАДИОНУКЛИДОВ В ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕМ ЭЛЕМЕНТЕ ЯДЕРНОГО РЕАКТОРА

© 2020 г. А. С. Салин[1,*], Н. А. Кудряшов[1,]**

[1] *Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия*

**e-mail: salin.alex01@gmail.com*

***e-mail: nakudr@gmail.com*

Поступила в редакцию 05.05.2020 г.
После доработки 05.05.2020 г.
Принята к публикации 09.06.2020 г.

В данной работе изучается распределение температуры в тепловыделяющем элементе ядерного реактора в радиальном направлении с учетом граничных условий третьего рода в пяти областях с разными характеристиками. Отдельно рассматривается задача с равенством нулю производной температуры на левой границе области решения как частный случай граничного условия третьего рода. В результате численного моделирования получено, что достаточно быстро вдоль радиального направления ТВЭЛа устанавливается постоянное распределение температуры. Поэтому рассматриваются стационарные уравнения теплопроводности в каждой из пяти областей, получено общее решение для каждой области. Для случая равенства нулю производной температуры на левой границе получен аналитический вид стационарного распределения температуры во всех областях. По результатам численного моделирования установлено, что достаточно быстро решение сходится к полученному в аналитическом виде. Кроме того, изучается распределение концентрации радионуклидов с учетом радиоактивных превращений. В качестве примера выбрана цепочка радиоактивного распада ^{131}Sn. Результаты численного моделирования представлены в виде графиков распределения концентрации вдоль радиуса ТВЭЛа. Основным результатом является программа, позволяющая проводить численное моделирование распределения температуры и концентрации радионуклидов при различных граничных условиях и для различных значений параметров тепловыделяющего элемента, которые может задавать пользователь программы.

Ключевые слова: температура, концентрация, распределение, ядерный реактор, тепловыделяющий элемент, численное моделирование

DOI: 10.1134/S2304487X2002011X

ВВЕДЕНИЕ

Результатом работы ядерного реактора является получение тепловой энергии от тепловыделяющего элемента, передача ее теплоносителю для последующего преобразования в электрическую. Поэтому важно контролировать и прогнозировать температурные поля внутри ТВЭЛа. Более того, распределение температуры в ТВЭЛе влияет на поведение продуктов деления диоксида урана в топливных таблетках, процессы диффузии и парообразования. Данная проблема широко изучалась на протяжении всего времени эксплуатации ядерных реакторов. В процессе работы реактора может меняться микроструктура топливной таблетки под действием протекающих в ней процессов. Одно из значительных изменений – формирование пористого рим-слоя по краю топливной таблетки. В [1, 2] приведены результаты численного моделирования распределения температуры в ТВЭЛе с учетом образования пористого рим-слоя и аналитическое решение стационарного уравнения теплопроводности. Также в процессе работы реактора топливный элемент может плавиться, если температура топливной таблетки превосходит по величине температуру плавления диоксида урана, что в свою очередь может привести к катастрофическим последствиям. В [3] рассматривается процесс плавления в топливном элементе ядерного реактора, приведены результаты численного моделирования. Также в [4] представлены результаты численного моделирования процесса плавления топливного элемента в критических состояниях реактора и представлена зависимость характеристик материала от температуры. В [5] изучается распределение температуры в топливном элементе ядерного реактора с

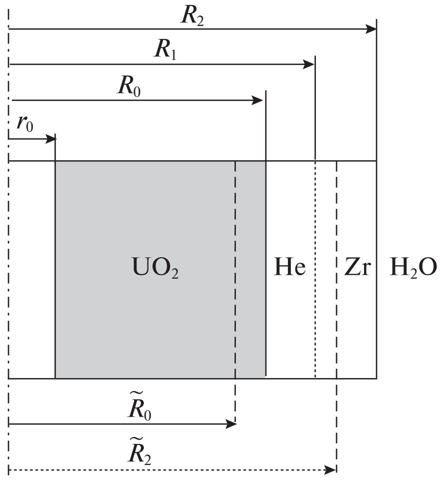

Рис. 1. Устройство тепловыделяющего элемента: r_0 – центральное отверстие, R_0 – радиус топливной таблетки, $\tilde{R}_0$ – радиус рим-слоя, R_1 – внешний радиус зазора между таблеткой и оболочкой ТВЭЛ, $\tilde{R}_2$ – радиус ZrO_2, R_2 – внешний радиус циркониевой оболочки.

оболочкой и без нее при непостоянном количестве выделяемого тепла. Также применялись и аналитические методы для моделирования поведения ядерного реактора [6]. Проблеме распространения, сорбции и диффузии радионуклидов в среде посвящены работы [7–12].

Так как проникновение радионуклидов в теплоноситель ядерного реактора является нежелательным эффектом, важно спрогнозировать их концентрацию и распределение внутри тепловыделяющего элемента в процессе работы. Процесс диффузии радионуклидов зависит от температурного поля внутри ТВЭЛа, поэтому в данной работе рассматривается распределение температуры и концентрации радионуклидов вдоль радиального направления тепловыделяющего элемента в процессе его работы. В разделе 1 приводится постановка задачи распределения температуры в ТВЭЛе с теплообменом на границах по закону Ньютона. Затем, в разделе 2 проводится обезразмеривание уравнения для удобства его исследования. В разделе 3 приведена разностная схема для численного моделирования процесса теплопроводности. Полученные результаты указывают на быстрое установление стационарного состояния в тепловыделяющем элементе. В разделе 4 получены общие решения для стационарного уравнения теплопроводности. Получена система из десяти алгебраических уравнений относительно произвольных коэффициентов, полученных при решении дифференциальных уравнений. В силу того, что оба граничных условия третьего рода, построить решения в аналитическом виде затруднительно. Так как практический интерес представляет случай равенства нулю производной температуры на левой границе, для этого случая были установлены произвольные постоянные и найден аналитический вид для решений стационарного уравнения теплопроводности в каждой области. В разделе 5 приводится постановка задачи распределения концентрации радионуклидов в ТВЭЛе с учетом радиоактивного распада. В разделе 6 приведена разностная схема для численного моделирования распределения концентрации радионуклидов и представлены результаты.

Таблица 1. Размеры тепловыделяющего элемента

r_0 (мм)	$\tilde{R}_0$ (мм)	R_0 (мм)	R_1 (мм)	$\tilde{R}_2$ (мм)	R_2 (мм)
0.75	3.770	3.775	3.865	4.150	4.550

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕМ ЭЛЕМЕНТЕ

Так как ТВЭЛ представляет собой длинный цилиндрический стержень, длина которого намного больше его толщины, задача рассматривается в цилиндрической системе координат с учетом симметрии вдоль оси стержня и по всем углам в плоскости, перпендикулярной ей. Элемент ТВЭЛа представлен на рис. 1.

Уравнение, описывающее процесс теплопереноса, запишется в виде

$$C(r,T)\rho(r,T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\chi(r,T)r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + q(r), \quad r_0 \le r \le R_2, \tag{1}$$

где $C(r,T)$ и $\rho(r,T)$ – удельная теплоемкость и плотность материала соответственно, $q(r)$ – мощность теплового источника, $\chi(r,T)$ – коэффициент теплопроводности.

Начальная температура считается постоянной и одинаковой во всех областях

$$T(r,t=0) = \psi_0. \tag{2}$$

Для рассмотрения более общего случая, полагается, что на границах происходит теплообмен по закону Ньютона

$$\chi(r=r_0,T)\frac{\partial T}{\partial r}(r=r_0,t) = \alpha_1(T(r_0,t)-\varphi_1), \tag{3}$$

$$\chi(r=R_2,T)\frac{\partial T}{\partial r}(r=R_2,t) = \alpha_2((\varphi_2 - T(R_2,t)). \tag{4}$$

Практический интерес представляет случай, когда на левой границе производная температуры равна нулю, то есть $\alpha_1 = 0$ в уравнении (3).

Задача решается в пяти областях:

1. Топливная таблетка ($r_0 \le r \le \tilde{R}_0$);
2. Рим-слой топливной таблетки ($\tilde{R}_0 \le r \le R_0$);

3. Зазор между таблеткой и оболочкой, заполненный гелием ($R_0 \le r \le R_1$);

4. Слой диоксида циркония в оболочке ($R_1 \le r \le \tilde{R}_2$);

5. Циркониевая оболочка ($\tilde{R}_2 \le r \le R_2$).

Так как в каждой области параметры материалов отличаются друг от друга, они задаются кусочно-непрерывными функциями.

Плотности и теплоемкости материалов полагаются постоянными для каждой области тепловыделяющего элемента

$$\rho(r,T)C(r,T) = \begin{cases} \rho_1 C_1, r_0 \le r < \tilde{R}_0, \\ \rho_2 C_2, \tilde{R}_0 \le r < R_0, \\ \rho_3 C_3, R_0 \le r < R_1, \\ \rho_4 C_4, R_1 \le r < \tilde{R}_2, \\ \rho_5 C_5, \tilde{R}_2 \le r \le R_2. \end{cases}$$

Коэффициент теплопроводности имеет вид [1, 2]

$$\chi(r,T) = \begin{cases} \frac{1}{A+BT}, & r_0 \le r < \tilde{R}_0, \\ \frac{1}{A_1+B_1T}, & \tilde{R}_0 \le r < R_0, \\ \chi_3, & R_0 \le r < R_1, \\ \chi_4, & R_1 \le r < \tilde{R}_2, \\ \chi_5, & \tilde{R}_2 \le r \le R_2, \end{cases}$$

где A, B, A_1, B_1, χ_3, χ_4, χ_5 – постоянные величины.

Так как тепло выделяется только в области топливной таблетки, $q(r)$ примет вид

$$q(r) = \begin{cases} q_0, & r_0 \le r < \tilde{R}_0, \\ q_1, & \tilde{R}_0 \le r < R_0, \\ 0, & R_0 \le r \le R_2, \end{cases}$$

где q_0, q_1 полагаются константами.

Численное решение задачи (1)–(4) приведено в разделе 3.

2. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕМ ЭЛЕМЕНТЕ С УЧЕТОМ БЕЗРАЗМЕРНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И ПАРАМЕТРОВ

Введем безразмерные параметры

$$T = T_0\tilde{T}, \quad t = t_0\tilde{t}, \quad r = R_2\tilde{r}. \tag{5}$$

Учитывая, что плотности и теплоемкости материалов постоянны, и переходя обратно к обозначениям, получим безразмерное уравнение, граничные и начальные условия в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\chi(r,T) r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + q(r), \quad \frac{r_0}{R_2} \le r \le 1,$$

Таблица 2. Параметры теплопроводности для тепловыделяющего элемента

A (мм K/B)	B (мм/B)	χ_3 (B/мм K)	χ_4 (B/мм K)	χ_5 (B/мм K)
43.8	0.2294	0.3×10^{-3}	1.8×10^{-3}	22.0×10^{-3}

Таблица 3. Постоянные распада радионуклидов

λ_1 (1/мин)	λ_2 (1/мин)	λ_3 (1/мин)	λ_4 (1/мин)	λ_5 (1/мин)
0.7427	0.0301	0.0277	6×10^{-5}	0

$$t \ge 0, \quad T(r, t=0) = \frac{\Psi}{T_0},$$

$$\chi\left(\frac{r_0}{R_2}, T\right)\frac{\partial T}{\partial r}\left(\frac{r_0}{R_2}, t\right) = \alpha_1 T_0 R_2\left(T\left(\frac{r_0}{R_2}, t\right) - \frac{\varphi_1}{T_0}\right),$$

$$\chi(1,T)\frac{\partial T}{\partial r}(1,t) = \alpha_2 T_0 R_2\left(\frac{\varphi_2}{T_0} - T(1,t)\right),$$

где

$$\chi(r,T) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+BT}, & \dfrac{r_0}{R_2} \le r < \dfrac{\tilde{R}_0}{R_2}, \\ \dfrac{1}{1+B_1T}, & \dfrac{\tilde{R}_0}{R_2} \le r < \dfrac{R_0}{R_2}, \\ 1, & \dfrac{R_0}{R_2} \le r < 1, \end{cases}$$

$$q(r) = \begin{cases} q_0 R_2^2, & \dfrac{r_0}{R_2} \le r < \dfrac{\tilde{R}_0}{R_2}, \\ q_1 R_2^2, & \dfrac{\tilde{R}_0}{R_2} \le r < \dfrac{R_0}{R_2}, \\ 0, & \dfrac{R_0}{R_2} \le r \le 1, \end{cases}$$

Размерная характеристика температуры

$$T_0(r) = \begin{cases} A, & \dfrac{r_0}{R_2} \le r < \dfrac{\tilde{R}_0}{R_2}, \\ A_1, & \dfrac{\tilde{R}_0}{R_2} \le r < \dfrac{R_0}{R_2}, \\ \frac{1}{\chi_3}, & \dfrac{R_0}{R_2} \le r < \dfrac{R_1}{R_2}, \\ \frac{1}{\chi_4}, & \dfrac{R_1}{R_2} \le r < \dfrac{\tilde{R}_2}{R_2}, \\ \frac{1}{\chi_5}, & \dfrac{\tilde{R}_2}{R_2} \le r \le 1. \end{cases}$$

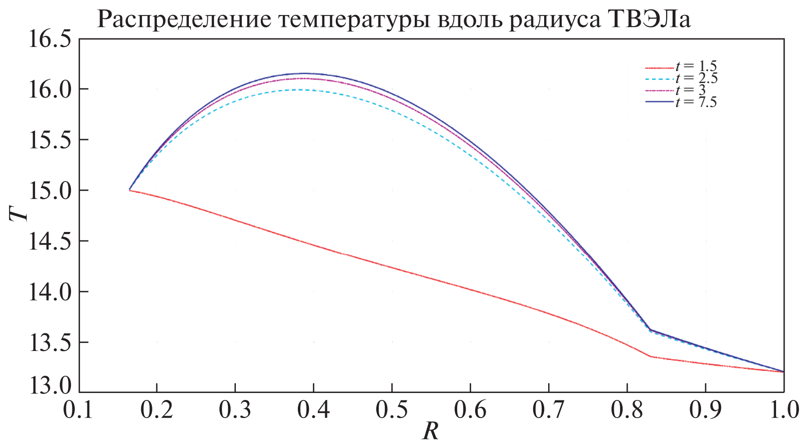

Рис. 2. Распределение температуры в ТВЭЛе с граничными условиями третьего рода.

Характерное время процесса

$$t_0 = R_2^2 T_0(r)\rho(r,T)C(r,T). \tag{6}$$

Далее рассмотрим разностную схему для моделирования процесса теплопроводности.

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕМ ЭЛЕМЕНТЕ

Следуя [1, 2], введем равномерную прямоугольную сетку, зададим на ней сеточные функции и заменим дифференциальные операторы на разностные.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} = K_{i+\frac12}^{j+1}\sqrt{\frac{r_{i+1}}{r_i}}\left(\frac{T_{i+1}^{j+1} - T_i^{j+1}}{h^2}\right) - K_{i-\frac12}^{j+1}\sqrt{\frac{r_{i-1}}{r_i}}\left(\frac{T_i^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right) + f_i^{j+1}, \tag{7}$$

где приняты обозначения

$$f_i^{j+1} = \frac{q_i^{j+1}}{C_i^{j+1}\rho_i^{j+1}},$$

$$K_{i+\frac12}^{j+1} = \frac{\chi_i^{j+1} + \chi_{i+1}^{j+1}}{2C_i^{j+1}\rho_i^{j+1}}.$$

Разностное уравнение (7) можно записать в виде

$$A_i^{j+1}T_{i-1}^{j+1} + B_i^{j+1}T_i^{j+1} + D_i^{j+1}T_{i+1}^{j+1} = F_i^{j+1}. \tag{8}$$

Граничные условия представимы формулами

$$\chi_1^{j+1}\frac{T_2^{j+1} - T_1^{j+1}}{h} = \alpha_1(T_1^{j+1} - \varphi_1^{j+1}),$$
$$\chi_N^{j+1}\frac{T_N^{j+1} - T_{N-1}^{j+1}}{h} = \alpha_2(\varphi_2^{j+1} - T_N^{j+1}). \tag{9}$$

Система алгебраических уравнений (8), (9) с учетом начальных условий (2) решается методом прогонки с использованием метода простых итераций на каждом временном слое для корректного определения коэффициентов, зависящих от температуры [13, 14]. За нулевое приближение берется значение температуры с предыдущего временного слоя. Результаты численного моделирования задачи для безразмерного уравнения теплопроводности представлены на рис. 2.

Из результатов численного моделирования видно, что в тепловыделяющем элементе устанавливается стационарное распределение температуры за достаточно малый промежуток времени.

4. ПОСТАНОВКА И АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ТОПЛИВНОМ ЭЛЕМЕНТЕ

В [1] рассмотрено аналитическое решение стационарных уравнений теплопроводности в каждой из пяти областей для случая теплоизоляции левой границы и поддержания постоянной температуры на правой. Здесь мы рассматриваем случай теплоизоляции левой границы и теплообмена по закону Ньютона на правой.

Запишем стационарное уравнение теплопроводности для каждой области

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{A + BT_1}\frac{dT_1}{dr}\right) + q = 0, \quad r_0 \le r \le \tilde{R}_0, \tag{10}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{A_1 + B_1T_2}\frac{dT_2}{dr}\right) + q_1 = 0, \quad \tilde{R}_0 \le r \le R_0, \tag{11}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\chi_3\frac{dT_3}{dr}\right) = 0, \quad R_0 \le r \le R_1, \tag{12}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\chi_4\frac{dT_4}{dr}\right) = 0, \quad R_1 \le r \le \tilde{R}_2, \tag{13}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\chi_5\frac{dT_5}{dr}\right) = 0, \quad \tilde{R}_2 \le r \le R_2. \tag{14}$$

Граничные условия

$$\frac{1}{A + BT_1}\frac{dT_1}{dr}(r_0) = \alpha_1(T_1(r_0) - \varphi_1), \tag{15}$$

$$\chi_5\frac{dT_5}{dr}(R_2) = \alpha_2(\varphi_2 - T_5(R_2)). \tag{16}$$

Исходя из физических соображений, температуры и тепловые потоки на границах между областями должны быть равны

$$\begin{gathered}\frac{1}{A + BT_1}\frac{dT_1}{dr}(\tilde{R}_0) = \frac{1}{A_1 + B_1T_2}\frac{dT_2}{dr}(\tilde{R}_0),\\ T_1(\tilde{R}_0) = T_2(\tilde{R}_0),\end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{A_1 + B_1T_2}\frac{dT_2}{dr}(R_0) = \chi_3\frac{dT_3}{dr}(R_0),\\ T_2(R_0) = T_3(R_0),\end{gathered} \tag{18}$$

$$\chi_3\frac{dT_3}{dr}(R_1) = \chi_4\frac{dT_4}{dr}(R_1), \quad T_3(R_1) = T_4(R_1), \tag{19}$$

$$\chi_4\frac{dT_4}{dr}(\tilde{R}_2) = \chi_5\frac{dT_5}{dr}(\tilde{R}_2), \quad T_4(\tilde{R}_2) = T_5(\tilde{R}_2). \tag{20}$$

Решая уравнения (10)–(14), получим

$$T_1(r) = \frac{C_2}{B}r^{BC_1}e^{-\frac{Bqr^2}{4}} - \frac{A}{B}, \tag{21}$$

$$T_2(r) = \frac{\tilde{C}_2}{B_1}r^{B_1\tilde{C}_1}e^{-\frac{B_1q_1r^2}{4}} - \frac{A_1}{B_1}, \tag{22}$$

$$T_3(r) = \frac{C_3}{\chi_3}\ln(r) + C_4, \tag{23}$$

$$T_4(r) = \frac{\tilde{C}_5}{\chi_4}\ln(r) + \tilde{C}_6, \tag{24}$$

$$T_5(r) = \frac{C_5}{\chi_5}\ln(r) + C_6, \tag{25}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, $\tilde{C}_5$, $\tilde{C}_6$ – произвольные постоянные, которые находятся из граничных условий и условий сшивания функций на границах областей (15)–(20).

Для случая с граничными условиями третьего рода на обеих границах построить решение системы из десяти алгебраических уравнений относительно постояннных в аналитическом виде затруднительно, так как при решении возникают трансцендентные уравнения.

Поскольку практический интерес представляет случай равенства нулю производной температуры на левой границе и теплообмена по закону Ньютона на правой, для него было найдено аналитическое решение. Для этого в уравнении (15) было положено $\alpha_1 = 0$. Решая систему алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных, получено

$$C_1 = \frac{qr_0^2}{2}, \tag{26}$$

$$\tilde{C}_1 = \frac{q(r_0^2 - \tilde{R}_0^2)}{2} + \frac{q_1\tilde{R}_0^2}{2}, \tag{27}$$

$$C_3 = \frac{q(r_0^2 - \tilde{R}_0^2)}{2} + \frac{q_1(\tilde{R}_0^2 - R_0^2)}{2}, \tag{28}$$

$$\tilde{C}_5 = C_3, \tag{29}$$

$$C_5 = \tilde{C}_5, \tag{30}$$

$$C_6 = \varphi_2 - C_3\left(\frac{1}{\alpha_2R_2} + \frac{\ln(R_2)}{\chi_5}\right), \tag{31}$$

$$\tilde{C}_6 = C_6 + C_3\ln(\tilde{R}_2)\left(\frac{1}{\chi_5} - \frac{1}{\chi_4}\right), \tag{32}$$

$$C_4 = \tilde{C}_6 + C_3\ln(R_1)\left(\frac{1}{\chi_4} - \frac{1}{\chi_3}\right), \tag{33}$$

$$\tilde{C}_2 = B_1e^{\frac{B_1q_1R_0^2}{4}}R_0^{-B_1\tilde{C}_1}\left(\frac{C_3}{\chi_3}\ln(R_0) + C_4 + \frac{A_1}{B_1}\right), \tag{34}$$

$$C_2 = Be^{\frac{Bq\tilde{R}_0^2}{4}}\tilde{R}_0^{-BC_1}\left(\frac{\tilde{C}_2}{B_1}\tilde{R}_0^{B_1\tilde{C}_1}e^{-\frac{B_1q_1\tilde{R}_0^2}{4}} - \frac{A_1}{B_1} + \frac{A}{B}\right). \tag{35}$$

Подставляя найденные значения постоянных (26)–(35) в уравнения (21)–(25), получим формулы для стационарного распределения температуры в каждой из пяти областей. Тогда стационарное распределение температуры в области решения можно описать кусочно-заданной функцией

$$T(r) = \begin{cases} T_1(r), & r_0 \le r < \tilde{R}_0,\\ T_2(r), & \tilde{R}_0 \le r < R_0,\\ T_3(r), & R_0 \le r < R_1,\\ T_4(r), & R_1 \le r < \tilde{R}_2,\\ T_5(r), & \tilde{R}_2 \le r \le R_2. \end{cases} \tag{36}$$

На рис. 3 представлены результаты численного моделирования с указанием аналитического решения.

Таким образом, численное решение за достаточно малый промежуток времени сходится к аналитическому.

Также для дополнительной проверки работы программы мы рассмотрели стационарное уравнение теплопроводности в одной области с различными граничными условиями, для которых построены аналитические решения.

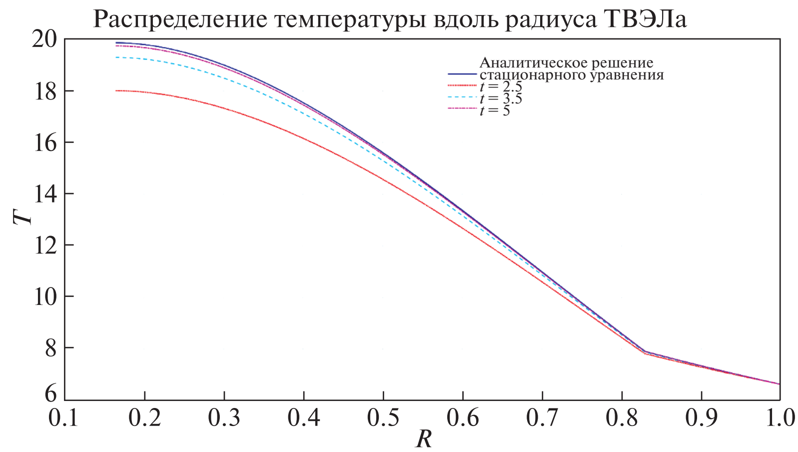

Рис. 3. Результаты численного моделирования распределения температуры с равенством нулю производной температуры на левой границе и теплообменом по закону Ньютона на правой границе.

Рассматривается область $r_0 \le r \le R_2$, где стационарное распределение температуры задается формулой

$$T_1(r) = \frac{C_2}{B} r^{BC_1} e^{-\frac{Bqr^2}{4}} - \frac{A}{B}. \tag{37}$$

В качестве примера рассмотрим следующие граничные условия

$$\frac{\partial T}{\partial r}(r_0, t) = 0, \quad T(R_2, t) = \varphi_2. \tag{38}$$

Тогда стационарное распределение температуры задается формулой

$$T_1(r) = \left(\varphi_2 + \frac{A}{B}\right)\left(\frac{r}{R_2}\right)^{\frac{Bqr_0^2}{2}} e^{\frac{Bq\left(R_2^2 - r^2\right)}{4}} - \frac{A}{B}. \tag{39}$$

Результаты численного моделирования представлены на рис. 4.

Аналогично были рассмотрены и другие вариации граничных условий, для которых строилось аналитическое решение стационарного уравнения. Для каждого рассмотренного случая установлено, что за достаточно короткий промежуток времени численное решение, найденное по схеме, предложенной в разделе 3, сходится к найденному аналитически стационарному распределению.

5. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ КОНЦЕНТРАЦИИ РАДИОНУКЛИДОВ В ТОПЛИВНОМ ЭЛЕМЕНТЕ

В рамках данной модели предполагаем, что радионуклиды накапливаются внутри ТВЭЛа. Система уравнений, описывающая процесс диффузии, запишется в виде

$$\frac{\partial C_i(r,t)}{\partial t} + u_i(r)\frac{\partial C_i(r,t)}{\partial r} - \lambda_{i-1}C_{i-1}(r,t) + \lambda_i C_i(r,t) = \\ = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(D_i(r) r \frac{\partial C_i(r,t)}{\partial r}\right) + \theta_i(r,t), \tag{40} \\ r_0 \le r \le R_2, \quad t \ge 0,$$

где $C_i(r,t)$ – концентрация, u_i – скорость миграции радионуклида, $D_i(r)$ – коэффициент диффузии, λ_i – постоянная распада, θ_i – мощность источника радионуклида. Индекс i показывает номер радионуклида в цепочке распада.

При этом полагается, что $i = 1, \dots, K$, причем

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_K = 0.$$

То есть, распад последнего радионуклида не учитывается, он считается долгоживущим, а радионуклида с номером 0 нет.

Кроме того, источник задается кусочно-постоянной функцией и отличен от нуля только для первого радионуклида

$$\theta_1(r) = \begin{cases} \theta_0, & r_0 \le r < \tilde{R}_0, \\ \theta_1, & \tilde{R}_0 \le r < R_0, \\ 0, & R_0 \le r \le R_2, \end{cases}$$
$$\theta_i = 0, \quad i = 2, \dots, K,$$

где θ_0, θ_1 – константы.

Также предполагается, что коэффициент диффузии зависит от температуры по закону Аррениуса

$$D_i(r) = D_0^{(i)} \exp\left(-\frac{k_i}{T(r)}\right), \quad i = 1, \dots, K,$$

где $D_0^{(i)}$ – постоянные, k_i – постоянные, имеющие значения энергии активации, отнесенной к постоянной Больцмана.

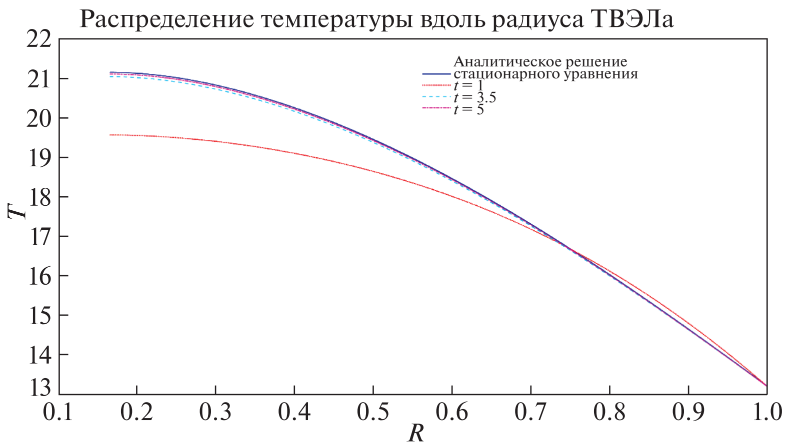

Рис. 4. Результаты численного моделирования распределения температуры с граничными условиями первого рода на правой границе и второго рода на левой.

В рамках данной модели мы рассматриваем процесс без учета конвекции

$$u_i(r) = 0, \quad i = 1, \ldots, K.$$

В начальный момент времени считаем, что концентрация первого радионуклида постоянна во всех областях, а остальные радионуклиды отсутствуют

$$\begin{gathered} C_1(r,0) = \psi_1(r), \\ C_i(r,0) = 0, \quad i = 2, \ldots, K. \end{gathered} \tag{41}$$

Полагаем, что на границе с теплоносителем диффузии не происходит

$$\frac{\partial C_i(R_2,t)}{\partial r} = 0, \quad i = 1, \ldots, K, \tag{42}$$

а внутрь малого отверстия в центре ТВЭЛа радионуклиды могут проникать

$$\frac{\partial C_i(R_2,t)}{\partial r} = \alpha_i \left(C_i(r_0,t) - \phi_i(t)\right), \quad i = 1, \ldots, K. \tag{43}$$

6. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ РАДИОНУКЛИДОВ В ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕМ ЭЛЕМЕНТЕ

Введем равномерную прямоугольную сетку

$$r_i \simeq jh, \quad j = 1, \ldots, N, \quad t^n \simeq n\tau, \quad n = 1, \ldots, M. \tag{44}$$

Зададим на ней сеточные функции и заменим дифференциальные операторы на разностные

$$\begin{gathered} C^n_{(i)j} \simeq C_i(r_i, t^n), \quad u^n_{(i)j} \simeq u(r_i), \\ D^n_{(i)j} \simeq D_i(r_i), \quad \theta^n_{(i)j} \simeq \theta_i(r_i, t^n), \end{gathered} \tag{45}$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} \simeq \frac{C^{n+1}_{(i)j} - C^n_{(i)j}}{\tau}, \quad \frac{\partial C_i}{\partial r} \simeq \frac{C^{n+1}_{(i)j+1/2} - C^{n+1}_{(i)j-1/2}}{h}. \tag{46}$$

Тогда, используя среднее геометрическое для определения значения координаты между соседними узлами, получаем, что система уравнений (40) примет вид

$$\begin{gathered} \frac{C^{n+1}_{(i)j} - C^n_{(i)j}}{\tau} + u_{(i)j}\frac{C^{n+1}_{(i)j+1} - C^{n+1}_{(i)j-1}}{2h} + \lambda_{(i)}C^{n+1}_{(i)j} - \\ - \lambda_{(i-1)}C^{n+1}_{(i-1)j} = D^{n+1}_{(i)j+\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{r_{j+1}}{r_j}}\left(\frac{C^{n+1}_{(i)j+1} - C^{n+1}_{(i)j}}{h^2}\right) - \\ - D^{n+1}_{(i)j-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{r_{j-1}}{r_j}}\left(\frac{C^{n+1}_{(i)j} - C^{n+1}_{(i)j-1}}{h^2}\right) + \theta^{n+1}_{(i)j}, \quad i = 1, \ldots, K, \end{gathered} \tag{47}$$

где

$$D^{n+1}_{(i)j+\frac{1}{2}} = \frac{D^{n+1}_{(i)j+1} + D^{n+1}_{(i)j}}{2}.$$

Каждое из K уравнений системы можно представить в виде

$$A^{n+1}_{(i)j}C^{n+1}_{(i)j-1} + B^{n+1}_{(i)j}C^{n+1}_{(i)j} + E^{n+1}_{(i)j}C^{n+1}_{(i)j+1} = F^{n+1}_{(i,i-1)j}. \tag{48}$$

Граничные условия запишутся в виде

$$\begin{gathered} \frac{C^{n+1}_{(i)2} - C^{n+1}_{(i)1}}{h} = \alpha_{(i)}(C^{(n+1)}_{(i)1} - \varphi^{n+1}_{(i)}), \\ \frac{C^{n+1}_{(i)N} - C^{n+1}_{(i)N-1}}{h} = 0. \end{gathered} \tag{49}$$

Начальные условия запишутся в виде

$$C^0_{(1)j} = \psi_{1j}, \quad C^0_{(i)} = 0, \quad i = 2, \ldots, K. \tag{50}$$

Таким образом, K систем алгебраических уравнений (47), (49) с учетом начальных условий (50) имеют трехдиагональную матрицу и решаются методом прогонки.

В разделе 4 было получено, что в ТВЭЛе достаточно быстро устанавливается стационарный ре-

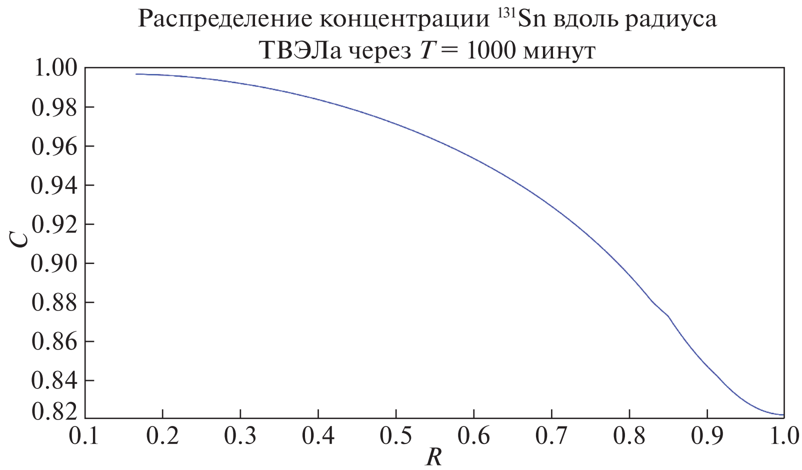

Рис. 5. Результаты численного моделирования распределения концентрации ^{131}Sn.

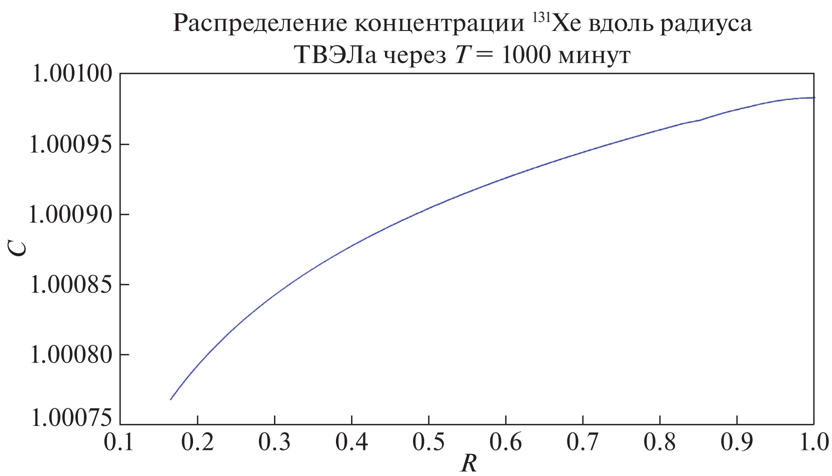

Рис. 6. Результаты численного моделирования распределения концентрации ^{131}Xe.

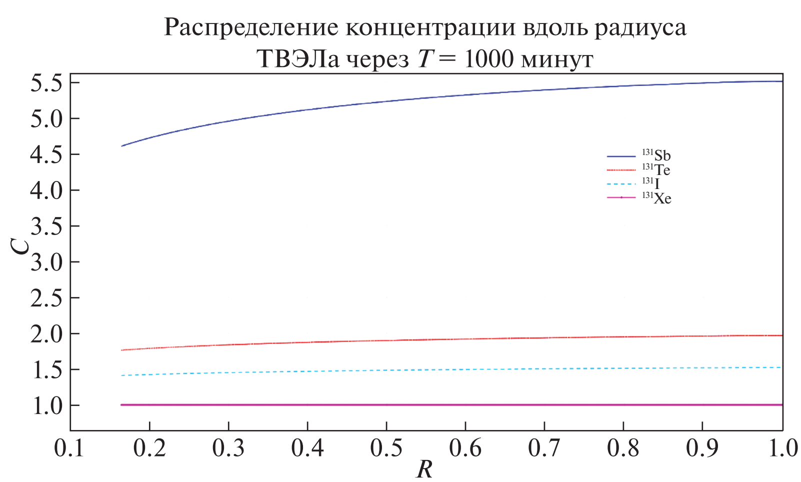

Рис. 7. Результаты численного моделирования распределения концентрации радионуклидов.

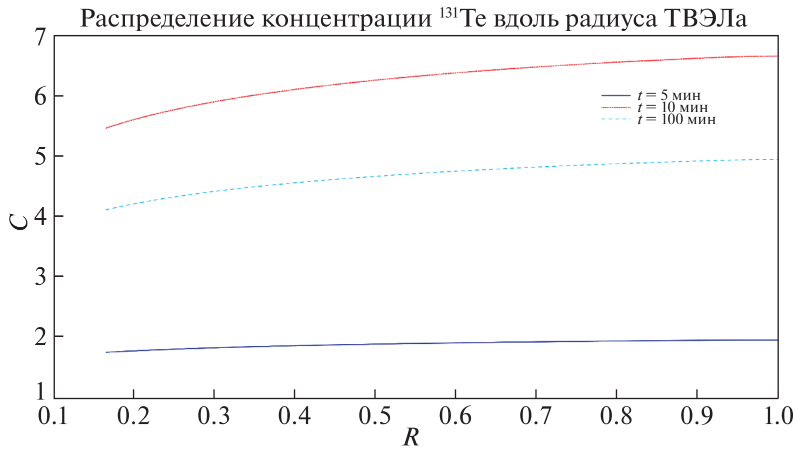

Рис. 8. Изменение распределения концентрации ^{131}Te со временем.

жим для температуры. Поэтому в моделировании распределения концентрации радионуклидов используются значения темепературы при установившемся стационарном распределении. Результаты численного моделирования распределения температуры представлены на рис. 3.

Результаты численного моделирования распределения концентраций радионуклидов при некоторых значениях параметров веществ через большой промежуток времени представлены на рис. 5–8. В качестве примера выбрана цепочка бета-распада ^{131}Sn–^{131}Sb–^{131}Te–^{131}I–^{131}Xe с использованием постоянных распада элементов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрено распределение температуры и концентрации радионуклидов в тепловыделяющем элементе ядерного реактора с учетом пяти областей: топливной таблетки, пористого рим-слоя топливной таблетки, зазора между таблеткой и оболочкой, пленки диоксида циркония на оболочке и самой циркониевой оболочки. Численно решая задачу распределения температуры, мы получили, что во всем тепловыделяющем элементе устанавливается стационарное распределение температуры за достаточно маленький промежуток времени.

Получено общее аналитическое решение стационарного уравнения теплопроводности в каждой области. Получено точное решение стационарной задачи теплопроводности для случая теплоизоляции на левой границе и теплообмена по закону Ньютона на правой границе с учетом условий сшивки на границах областей. Для дополнительной проверки работы программы использованы различные граничные условия, для которых возможно получить аналитическое решение. Результаты показали, что численное решение сходится к найденному аналитически стационарному распределению за достаточно малый промежуток времени.

Далее, с использованием полученного стационарного распределения температуры проведено численное моделирование распределения концентрации для цепочки из пяти радионуклидов. Вид графика распределения концентрации ^{131}Sn отличается от остальных, так как только для этого радионуклида существует источник. Концентрация этого радионуклида достаточно быстро уменьшается с момента начала моделирования, достигает некоторого значения и далее не меняется. Поведение графиков распределения остальных радионуклидов, кроме ^{131}Xe примерно одинаковое: сначала концентрация увеличивается, достигает максимума, затем уменьшается до некоего значения и почти не меняется далее. Так как ^{131}Xe является стабильным и не распадается, то его концентрация все время увеличивается, но не быстро, так как период полураспада ^{131}I составляет примерно восемь дней, в то время, как моделирование проводилось для $T = 1000$ минут.

Итогом данного исследования является программный код, позволяющий моделировать распределение температуры и концентрации радионуклидов в топливном элементе ядерного реактора с различными видами граничных условий и для различных значений параметров тепловыделяющего элемента, которые могут быть заданы пользователем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kudryashov N.A., Khlunov A.V., Chmykhov M.A.* Thermal regimes of high burn-up nuclear fuel rod // Com. in Nonlinear Sci. Numerical Simulation. 2009. V. 15. P. 1240–1252.

2. *Alyushin V.M., Baranov V.G., Kudryashov N.A., Khlunov A.V.* Numerical modeling of the temperature distribution in a VVER fuel element // Atomic Energy. 2010. V. 108. № 3.
3. *Chen An*, *Felippe Celestino Moreira, Jian Su*. Thermal analysis of the melting process in a nuclear fuel rod // Applied Thermal Engineering. 2014. V. 68. P. 133–143.
4. *Jiannan Tang, Mei Huang, Yuanyan Zhao*, *Saad Maqsood, Xiaoping Ouyang*. Numerical investigations on the melting process of the nuclear fuel rod in RIAs and LOCAs // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2018. V. 124. P. 990–1002.
5. *Abdul Razak R.K.*, *Asif Afzal, Mohammed Samee A.D., Ramis M.K.* Effect of cladding on thermal behavior of nuclear fuel element with non-uniform heat generation // Progress in Nuclear Energy. 2019. V. 11. P. 1–14.
6. *Antarip Poddar, Rukmava Chatterjee, Aranyak Chakravarty, Koushik Ghosh, Swarnendu Sen, Achintya Mukhopadhyay* A thermal model to characterize the flattening effect of a nuclear fuel element in an anullar channel using simple analytical approach // Progress in Nuclear Energy. 2015. V. 85. P. 441–453.
7. *Басанский Е.Г., Колобашкин В.М., Кудряшов Н.А.* Расчет двумерного распространения примеси в пористой среде при нестационарной фильтрации газа // Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа. 1982. № 5.
8. *Бондаренко А.Г., Колобашкин В.М., Кудряшов Н.А.* Распространение радионуклидов в пористой среде с учетом сорбции и диффузии // Инженерно-физический журнал, том XXXI. 1976. № 6.
9. *Кудряшов Н.А., Мурзенко В.В.* Автомодельное решение задачи осесимметричного движения газа через пористую среду при квадратичном законе сопротивления // Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа. 1982. № 4.
10. *Басанский Р.Р., Колобашкин В.М., Кудряшов Н.А.* Распространение радионуклидов через раздробленную породу под действием избыточного давления продуктов взрыва // Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа. 1980. № 2.
11. *Бондаренко А.Г., Колобашкин В.М., Кудряшов Н.А.* Неравновесная адсорбция изобарной цепочки радионуклидов // Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа. 1976. № 3.
12. *Арсенин В.Я., Зябрев Н.Б., Кудряшов Н.А.* О решении обратных задач конвективной диффузии и адсорбции радиоактивного газа в пористой среде // Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа. 1978. № 3.
13. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. 1989. С. 413–427.
14. *Калиткин Н.Н., Корякин П.В.* Численные методы: в 2 кн. Кн. 2. Методы математической физики. 2013. С. 194–198.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 2, pp. 155–165

Numerical Simulation of the Temperature Distribution and the Radionuclide Concentration in a Fuel Element of a Nuclear Reactor

A. S. Salin[a,#] **and N. A. Kudryashov**[a,##]

[a] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*
[#]*e-mail: salin.alex01@gmail.com*
[##]*e-mail: nakudr@gmail.com*

Received May 5, 2020; revised May 5, 2020; accepted June 9, 2020

Abstract—The radial distribution of the temperature in a fuel element of a nuclear reactor has been studied taking into account the boundary conditions of the third kind in five regions with different characteristics. The problem with zero derivative of the temperature on the left boundary of the solution domain has been considered separately as a special case of a boundary condition of the third kind. The numerical simulation has shown that a constant radial distribution of the temperature in the fuel element is established quite quickly. For this reason, stationary heat conduction equations are considered in each of the five regions, and a general solution is obtained for each region. For the case of zero derivative of the temperature on the left boundary, an analytical form of the stationary temperature distribution in all regions is obtained. It has been found that the numerical solution converges quite rapidly to the analytical solution. In addition, the distribution of the concentration of radionuclides is studied taking into account radioactive transformations. The radioactive decay chain of ^{131}Sn has been considered as an example. The results of the numerical simulation are presented in the form of plots of the concentration distribution along the radius of the fuel rod. The main result is a program that allows the numerical simulation of the temperature distribution and concentration of radionuclides under various boundary conditions and for different values of the parameters of the fuel element that can be set by the user of the program.

Keywords: temperature, concentration, distribution, nuclear reactor, fuel element, numerical modeling

DOI: 10.1134/S2304487X2002011X

REFERENCES

1. Kudryashov Nikolai A., Khlunov Aleksandr V., Chmykhov Mikhail A., Thermal regimes of high burn-up nuclear fuel rod, Com. in Nonlinear Sci. Numerical Simulation, 15, 1240–1252 (2009).
2. Alyushin V.M., Baranov V.G., Kudryashov N.A., Khlunov A.V., Numerical modeling of the temperature distribution in a VVER fuel element, Atomic Energy, Vol. 108, No. 3 (2010).
3. An Chen, Moreira Felippe Celestino, Su Jian, Thermal analysis of the melting process in a nuclear fuel rod, Applied Thermal Engineering, 68, 133–143 (2014).
4. Tang Jiannan, Huang Mei, Zhao Yuanyan, Maqsood Saad, Ouyang Xiaoping, Numerical investigations on the melting process of the nuclear fuel rod in RIAs and LOCAs, International Journal of Heat and Mass Transfer, 124, 990–1002 (2018).
5. Abdul Razak R.K., Afzal Asif, Mohammed Samee A.D., Ramis M.K., Effect of cladding on thermal behavior of nuclear fuel element with non-uniform heat generation, Progress in Nuclear Energy, 11, 1–14 (2019).
6. Poddar Antarip, Chatterjee Rukmava, Chakravarty Aranyak, Ghosh Koushik, Sen Swarnendu, Mukhopadhyay Achintya, A thermal model to characterize the flattening effect of a nuclear fuel element in an anullar channel using simple analytical approach, Progress in Nuclear Energy, 85, 441–453 (2015).
7. Basanskiy E.G., Kolobashkin V.M., Kudryashov N.A., *Raschet dvumernogo rasprostranenia primesi v poristoi srede pri nestacionarnoy fil'tracii gaza* [Calculation of the two-dimensional distribution of impurities in a porous medium during non-stationary gas filtration], Izv. AS USSR, Fluid and gas mechanics, № 5 (1982) (in Russian).
8. Bondarenko A.G., Kolobashkin V.M., Kudryashov N.A., *Rasprostranenie radionuklidov v poristoi srede s uchetom sorbcii i diffuzii* [Distribution of radionuclides in a porous medium taking into account sorption and diffusion], Physics Engineering Journal, vol. XXXI, № 6 (1976) (in Russian).
9. Kudryashov N.A., Murzenko V.V., *Avtomodel'noe reshenie zadachi osesimmetrichnogo dvizhenia gaza cherez poristuyu sredu pri kvadratichnom zakone soprotivlenia* [Self-similar solution to the problem of axisymmetric gas motion through a porous medium with a quadratic law of resistance], Izv. AS USSR, Fluid and gas mechanics, № 4 (1982) (in Russian).
10. Basanskiy E.G., Kolobashkin V.M., Kudryashov N.A., *Rasprostranenie radionuclidov cherez razdroblennuyu porodu pod deistviem izbitochnogo davlenia productov vzriva* [Propagation of radionuclides through crushed rock under the influence of overpressure of explosion products], Izv. AS USSR, Fluid and gas mechanics, № 2 (1980) (in Russian).
11. Bondarenko A.G., Kolobashkin V.M., Kudryashov N.A., *Neravnovesnaya adsorbciya izobarnoi cepochki radionuklidov* [Nonequilibrium adsorption of an isobaric chain of radionuclides], Izv. AS USSR, Fluid and gas mechanics, № 3 (1976) (in Russian).
12. Arsenin V.Y., Zyabrev N.B., Kudryashov N.A., *O reshenii obratnih zadach konvectivnoy diffuzii i adsorbcii radioactivnogo gaza v poristoi srede* [On solving inverse problems of convective diffusion and adsorption of a radioactive gas in a porous medium], Izv. AS USSR, Fluid and gas mechanics, № 3 (1978) (in Russian).
13. Samarskiy A.A., *Teoriya raznostnikh skhem* [Theory of difference schemes] – 1989, p. 413–427 (in Russian).
14. Kalitkin N.N., Koryakin P.V., *Chislennie metodi: v 2 kn. Kn. 2. Metodi matematicheskoy phisiki* [Numerical methods: in 2 books. Book 2. Methods of mathematical physics.] – 2013, p. 194–198 (in Russian).

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 2, с. 166–176

АВТОМАТИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

УДК 621.382+621.396.6

БЛОКИРОВАНИЕ ИМПУЛЬСОВ ПОМЕХ С-ЭЛЕМЕНТОМ В КМОП ДВУХФАЗНЫХ ЦЕПЯХ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ОДИНОЧНЫХ ИОНИЗИРУЮЩИХ ЧАСТИЦ

© 2020 г. В. Я. Стенин[1,2,*], Ю. В. Катунин[2,]**

[1] Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия
[2] НИИ системных исследований Российской академии наук, Москва, 117218, Россия
**e-mail: vystenin@mephi.ru*
***e-mail: katunin@cs.niisi.ras.ru*

Поступила в редакцию 22.01.2020 г.
После доработки 22.01.2020 г.
Принята к публикации 25.02.2020 г.

Приводятся результаты моделирования средствами TCAD импульсных помех, возникающих при воздействии одиночных ионизирующих частиц на элементы цепочки из двухфазных КМОП инверторов с С-элементом на двухвходовом инверторе с третьим состоянием. Импульсная помеха на одном из входов С-элемент блокируется, и он хранит последнее выходное логическое состояние на емкости выходного узла. Элементы выполнены по объемной КМОП 65 нм технологии. Анализируются переходные процессы при сборе заряда с треков, направленных по нормали к поверхности кристалла, с точками входа трека как в стоковые области транзисторов, так и на расстоянии 0.3–0.65 мкм от них. При точках входа трека в стоки транзистора помеха возникает только на одном выходе двухфазного инвертора и может влиять только на один вход следующего инвертора или С-элемента. С-элемент переходит в высоко резистивное состояние на выходе независимо от завершенности переходных процессов от помех в цепочке инверторов. Длительность хранения составляет 10–20 нс. Задержка переключения С-элемента 25–40 пс.

Ключевые слова: инвертор, импульсная помеха, логический С-элемент, моделирование, одиночная ионизирующая частица

DOI: 10.1134/S2304487X20020133

1. ВВЕДЕНИЕ

Проектирование микропроцессорных КМОП СБИС, устойчивых к воздействиям одиночных ядерных частиц, требует особых схемотехнических, топологических и конструктивных мер. Двухфазная логика элементов суб-100 нм цифровых систем позволяет повысить их помехоустойчивость. Двухфазный С-элемент предложен [1] как часть асинхронной логики и получил развитие в методиках проектирования КМОП элементов, устойчивых к одиночным эффектам воздействия ядерных частиц под названиями С-элемент без хранения данных (keeper-less C-element) [1], инвертор с третьим состоянием (tristate inverter gate) [2]. Двухфазный логический С-элемент [1] имеет два входа и один выход. При синфазных входных сигналах С-элемент работает как инвертор, а разные входные сигналы блокирует и хранит последнее логическое состояние на емкости выходного узла или в триггере. С-элементы используются при радиационно-стойком проектировании КМОП элементов [3], а также в триггерных устройствах с резервированием и само-корректированием [4]. Двухфазная логика дает возможность разработки топологии логических элементов с разделением транзисторов на группы, когда воздействие только на одну из них не приходит к сбою данных, а разнесение групп на кристалле повышает сбоеустойчивость. Особенностью двухфазной логики является возможность такого конструирования, при котором возникновение импульсной помехи происходит только в одной фазе [5, 6], что повышает ее помехоустойчивость. Сочетание двухфазных инверторов с С-элементом позволяет блокировать помеху и минимизировать длительность ложного состояния цепочки двухфазных инверторов, а также исключает передачу ложного сигнала на триггерные элементы.

Практический интерес представляет исследование внесения топологических изменений в структуры элементов, снижающих уровень импульсных помех, возникающих при воздействии одиночных частиц. Реальный эксперимент с на-

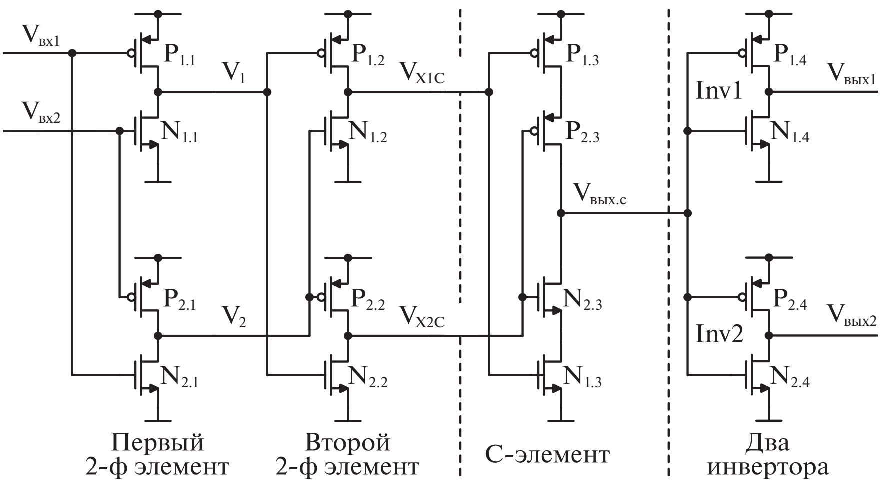

Рис. 1. Цепочка из двух 2ф-инверторов, С-элемента и выходного конвертора на двух обычных инверторах.

блюдением таких процессов в пикосекундном диапазоне времени не осуществим, но виртуальный в виде приборного 3D моделирования средствами TCAD позволяет провести такое исследование.

Цель данной работы – детальное исследование особенностей характеристик КМОП комбинационных логических элементов с минимальными конструктивно-топологическими мерами, дающими заметный результат по повышению помехоустойчивости к воздействиям одиночных ионизирующих частиц.

2. ОСОБЕННОСТИ ЦЕПОЧКИ ИЗ ДВУХФАЗНЫХ ИНВЕРТОРОВ И С-ЭЛЕМЕНТА

К двухфазной логике относятся элементы из двух каналов (фаз), только синфазные одинаковые логические сигналы на их входах которых являются информационными. Двухфазный инвертор (2-ф инвертор) с двухфазным выходом является основой двухфазной логики, в частности цепочек (линий) передачи двухфазных сигналов – это логический инвертор с разделенными входами NМОП и PМОП транзисторов. При одинаковых сигналах на входах он передает сигнал как обычный инвертор. На рис. 1 приведена схема цепочки из двух 2ф-инверторов, С-элемента и конвертора в двухфазный сигнал на двух обычных инверторах. Логический С-элемент – это 2ф-инвертор с однофазным выходом и третьим высоко резистивным состоянием на выходе. Для моделирования использованы 2-ф инверторы с перекрестными связями NМОП и PМОП транзисторов как более помехоустойчивые [5, 6]. В тексте и на рисунках напряжения на входах и выходах цепочки обозначены как $V_{ВХ1}$, $V_{ВХ2}$, $V_{ВЫХ1}$, $V_{ВЫХ2}$, а напряжения на входах и выходе С-элемента как $V_{ВХ1С}$, $V_{ВХ2С}$, $V_{ВЫХ.С}$.

Приборное моделирование проведено на основе 3D TCAD моделей КМОП транзисторов по объемной 65-нм технологии (с длиной канала 65 нм), приведенных в работе [7].

Эскиз 3D приборной модели части цепочки из двух КМОП 2ф-инверторов и С-элемента приведен на рис. 2. КМОП структура имеет охранные области n^+ и p^+ типа для изоляции областей NМОП от PМОП транзисторов.

Кроме того, имеется изоляция групп транзисторов одного типа проводимости мелкими диэлектрическими канавками (shallow trench isolation – STI), охватывающими кремниевые области групп транзисторов до глубины 400 нм. Для наглядности понимания структуры собирающих заряд кремниевых областей на рис. 2 убрано изображение изоляции транзисторных групп оксидом, охватывающих эти области транзисторов. Активные области КМОП транзисторов, собирающие заряд с трека частицы, на рис. 2 представлены кремниевыми “параллелепипедами”, в верхних частях которых выполнены диффузионные *pn*-переходы истоков и стоков транзисторов и их затворы.

Кремниевые “параллелепипеды” приборной структуры на рис. 2 содержат группы из двух транзисторов. В обозначениях групп цифра соответствует номеру группы, а буква N или P – типу канала МОП транзисторов в группе. Первая группа NМОП транзисторов Gr1N включает один транзистор $N_{1.1}$ из первого 2ф-инвертора и один $N_{1.2}$ из второго 2ф-инвертора. Вторая группа Gr2N аналогично состоит из двух NМОП транзи-

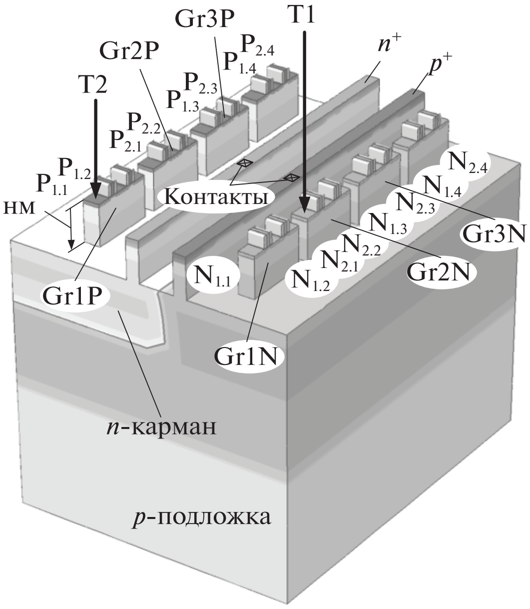

Рис. 2. Эскиз приборной 3D структуры модели, включающей транзисторы двух 2ф-инверторов с С-элементом и 2ф-конвертором; n^+-и p^+-области – элементы защитных полос, изолирующих области нахождения *N*- и *P*МОП транзисторов; Gr1N – Gr3N, Gr1P – Gr3P группы из двух транзисторов смежных двухфазных инверторов или С-элемента; даны примеры треков с направлениями по нормали к поверхности модели – трек T1 (в область *N*МОП транзисторов) и трек T2 (в область *P*МОП транзисторов).

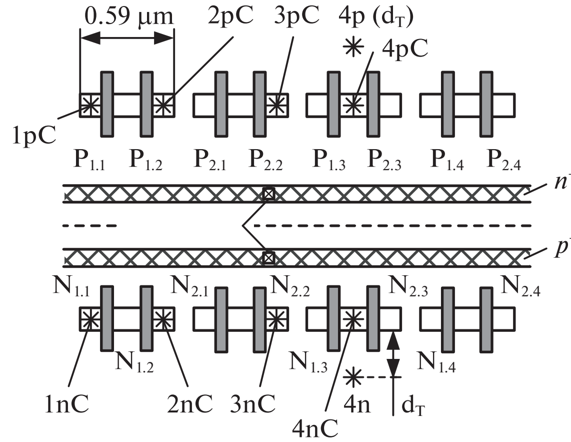

Рис. 3. Эскиз топологии элемента из двух 2ф-инверторов, С-элемента конвертора на двух обычных инверторах; приведены точки входа треков, отмеченные маркером “звездочка”; d_T – расстояние точки входа трека 4n до точки 4nC или точки 4p до точки 4pC.

сторов первого $N_{2.1}$ и второго $N_{2.2}$ 2ф-инверторов (рис. 2). Подобным образом скомпонованы первая Gr1P и вторая Gr2P группы из *P*МОП транзисторов $P_{1.1}$, $P_{1.2}$ и $P_{2.1}$, $P_{2.2}$ первого и второго 2ф-инверторов. Такая компоновка минимизирует одновременный сбор заряда транзисторами одного типа проводимости каждого из 2ф-инверторов и практически исключает возникновение синфазных импульсов помех на двух выходах 2ф-инвертора, которые были бы неотличимы от информационных сигналов. В группах Gr1N, Gr2N, Gr1P и Gr2P объединены пары транзисторов соседних 2ф-инверторов, находящиеся одновременно в разных состояниях (запертом и открытом), которые меняются при смене логических уровней синфазных сигналов V_{BX1}, V_{BX2} на входах первого 2ф-инвертора в цепочке. Группы Gr3N и Gr3P содержат NМОП и *P*МОП транзисторы С-элемента.

На рис. 3 приведен эскиз топологии моделируемой цепочки элементов, на котором приведено расположение вариантов точек входа трека, использованных при моделировании и отмеченных маркерами “звездочка”. Это точки 3nC, 4nC и 4n при сборе заряда *N*МОП транзисторами и 3pC, 4pC и 4p при сборе заряда *P*МОП транзисторами. При точках входов треков, использованных в данной работе, сбор заряда осуществлялся транзисторами первых, вторых, а также третьих групп (рис. 2 и 3) транзисторов. Точки входа с индексом C на рис. 3 являются точками входов треков в стоковые области транзисторов, расположенных в упомянутых группах из двух транзисторов.

Тестовым воздействием принят сбор заряда с трека по нормали к поверхности приборной части структуры. На рис. 2 приведены примеры треков – трек T1 в области *N*МОП транзисторов и трек T2 в области *P*МОП транзисторов.

Неравновесные носители заряда, генерируемые вдоль трека, могут образовываться как в кремниевых группах из двух транзисторов, так и в тонком кремниевом слое под изолирующим оксидом, разделяющим группы транзисторов, когда трек проходит вне кремниевых областей, где изготовлены транзисторы. Энергетическая составляющая генерации заряда характеризуется линейной передачей энергии частицей на трек [8] – (linear energy transfer – LET). Результаты исследования получены средствами 3-D TCAD с использованием симулятора Sentaurus Device при температуре 25°C и напряжении питания 1.0 В для КМОП структуры по объемной 65-нм КМОП технологии с шириной каналов транзисторов 150 нм. Трехмерная приборная структура модели имеет размеры 10.9 мкм × 6.4 мкм при толщине подложки 3.0 мкм.

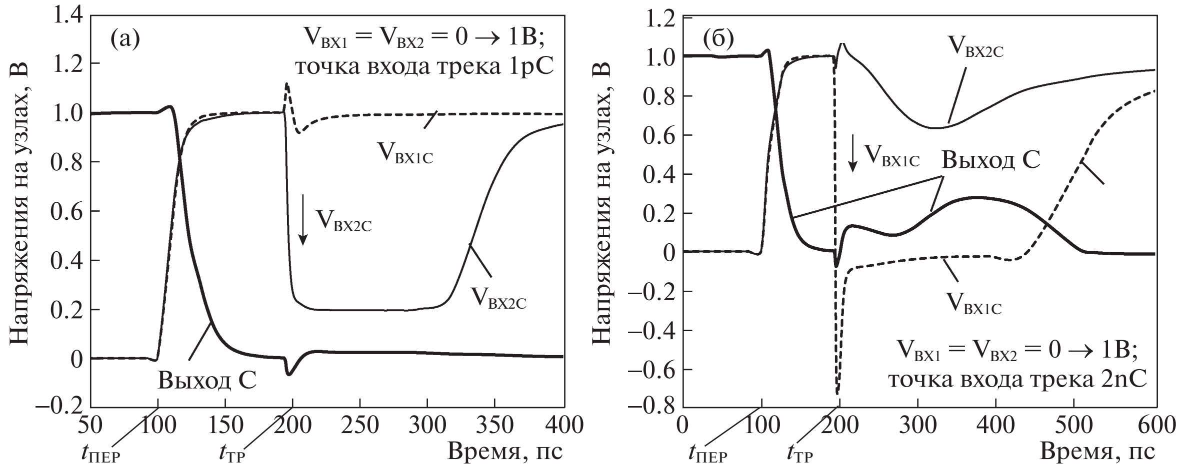

Рис. 4. Зависимости напряжений на узлах С-элемента при сборе заряда с треков по нормали к поверхности при LET = 60 МэВ см^2/мг для случая переключения цепочки из состояния $V_{BX1} = V_{BX2} = 0$ в $V_{BX1} = V_{BX2} = 1$ В в момент времени 100 пс; образование трека в момент времени 200 пс: (а) точка входа трека 1pC в группе Gr1P; (б) точка входа трека 2nC в группе Gr1N.

3. БЛОКИРОВКА С-ЭЛЕМЕНТОМ ИМПУЛЬСОВ ПОМЕХ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ПРЕДШЕСТВУЮЩИХ ДВУХФАЗНЫХ ИНВЕРТОРАХ

3.1. Сбор заряда с трека, образованного после переключения двухфазной цепочки по входам из “0” в “1”

В исходном состоянии на обоих входах первого 2ф-инвертора цепочки $V_{BX1} = V_{BX2} = 0$. В момент времени $t_{ПЕР} = 100$ пс входные сигналы цепочки переключаются на $V_{BX} = V_{BX2} = 1$ В. На рис. 4 приведены зависимости импульсов напряжения на узлах второго 2ф-инвертора и С-элемента для двух вариантов сбора заряда с треков с точками входа 1pC (рис. 4а) и 2nC (рис. 4б). В интервале времени от 100 пс до 150 пс переходный процесс переключения на всех узлах завершается состоянием, соответствующим сигналам $V_{BX1} = V_{BX2} = 1$ В. Задержки переключения, определяемые по выходу С-элемента на уровне 0.5 В, составили 32–35 пс.

При $t_{ТРЕК} = 200$ пс возникает трек частицы с LET = 60 МэВ см^2/мг (рис. 4) и начинается сбор заряда транзисторами. При точке входа трека 1pC образуется импульсная помеха на выходном узле 1.1 первого 2ф-инвертора (рис. 4а) на стоке транзистора P1.1, что вызывает импульс на узле 2.2 на выходе второго 2ф-инвертора при отпирании транзистора N2.2. Импульс отрицательной полярности на узле 2.2, который является и входом С-элемента, переводит С-элемент в высоко резистивное состояние по выходу и режим хранения логического состояния.

В случае точки входа трека 2nC (рис. 4б) заряд собирает транзистор N1.2 второго 2ф-инвертора (рис. 1), импульсная помеха возникает на узле 1.2, который является и входом С-элемента, что переводит С-элемент в высоко резистивное состояние по выходу и режим хранения логического состояния. Некоторые колебания на выходе С-элемента V3 при точке входа трека 2nC (рис. 4б) вызваны диффузионным переносом носителей заряда (электронов) с трека 2nC до транзистора N2.2 в группе Gr2N (рис. 2) и возникновением небольшой импульсной помехи на узле 2.2, что является вторым входом С-элемента. В целом это не приводит к изменению логического состояния С-элемента (рис. 4).

С-элемент блокирует передачу импульса помехи, приходящего в виде разности напряжений на его входы, на рис. 4а эта разность составляет $\Delta V_{BX.C} = 0.8$ В, на рис. 4б разность $\Delta V_{BX.C} = 0.65$–1.0 В и отклонение от 0 на выходе не превышает 0.3 В.

3.2. Начало сбора заряда с трека, образованного одновременно с переключением двухфазной цепочки по входам из “1” в “0”

На рис. 5 приведены зависимости напряжений на узлах второго 2ф-инвертора и С-элемента для двух вариантов сбора заряда с треков с точками входа 2pC в группу Gr1P (рис. 5а) и 2nC в группу Gr1N (рис. 5б). В исходном состоянии на входах цепочки напряжения $V_{BX1} = V_{BX2} = 1$ В. В момент $t_{ПЕР} = 200$ пс возникает трек частицы при $t_{TP} = t_{ПЕР} = 200$ пс и одновременно входные сигналы переключаются на $V_{BX1} = V_{BX2} = 0$, что приводит к совмещению процессов сбора заряда транзисторами, который начинается практически мгновенно после возникновения трека, и изменения напряжений на узлах при переключении.

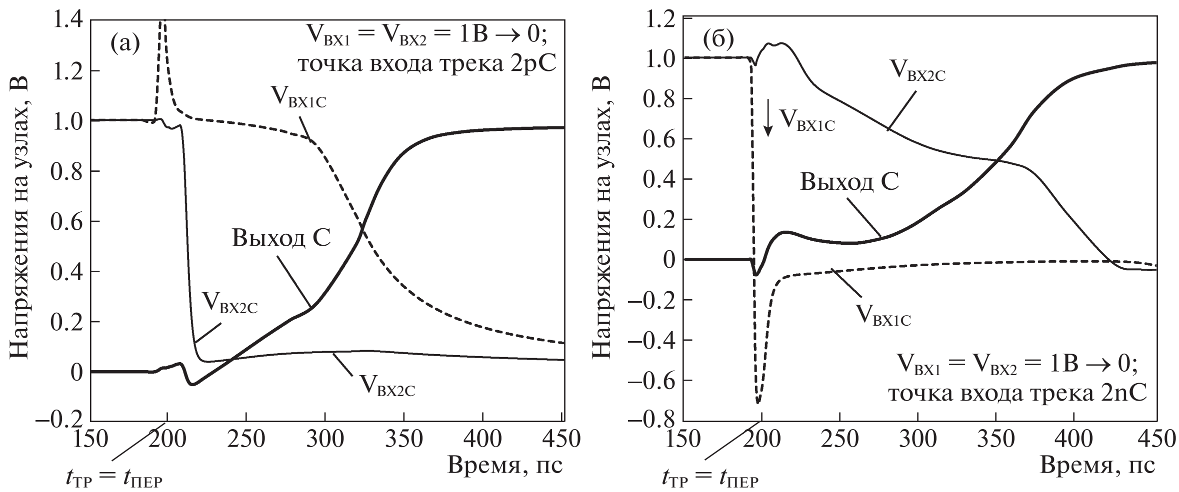

Рис. 5. Зависимости напряжений на узлах С-элемента при сборе заряда с треков по нормали к поверхности при LET = 60 МэВ см^2/мг для случая переключения входов цепочки из $V_{ВХ1} = V_{ВХ2} = 1$ В в $V_{ВХ1} = V_{ВХ2} = 0$ в момент времени 200 пс одновременно с образованием трека: (а) точка входа трека 2pC в группе Gr1P; (б) точка входа трека 2nC в группе Gr1N.

В первом варианте прохождения трека через точку входа 2pC в группу Gr1P транзистор P1.2 открыт до переключения цепочки по входам и сбор заряда с трека в его сток (точка входа 2pC) в момент возникновения трека $t_{ТР} = 200$ пс практически моментально (рис. 5а) переводит его в инверсное смещение с напряжением на стоке $V_{СТ.P1.2} = 1.4$ В. Затем с задержкой 10–15 пс происходит переключение транзисторов первых двух 2ф-инверторов и снижение напряжения на стоках транзисторов P2.2, N2.2 и соответственно (рис. 1) на втором входе С-элемента до $V_{ВХ2С} = 0.2$ В. При этом напряжение на стоке транзистора P1.2, находящегося в инверсном смещении, и соответственно на первом входе С-элемента сохраняется около $V_{ВХ1С} = 1.0$ В (рис. 5а). При завершении переключения цепочки по входам при $t_{ПЕР} + t_{ЗД.ПЕР} = 220$ пс транзистор P1.2 запирается по затвору и оказывается в состоянии, когда все напряжения на его трех выводах: затворе, истоке и стоке равны или близки к значению 1 В. В таком состоянии узел, к которому соединены стоки транзисторов P1.2, N1.2, и первый вход С-элемента начинает медленно разряжаться через открытый NМОП транзистор N1.2, что задерживает переключение С-элемента в состояние логической “1” на выходе, соответствующее входным синфазным сигналам цепочки $V_{ВХ1} = V_{ВХ2} = 0$.

Во втором варианте прохождения трека через точку входа 2nC в группу Gr1N транзистор N1.2 заперт до переключения цепочки по входам и сбор заряда с трека в его сток (точка входа 2nC) в момент возникновения трека $t_{ТР} = 200$ пс практически моментально (рис. 5б) переводит его в инверсное смещение с напряжением на стоке $V_{СТ.N1.2} = -0.7$ В. После переключения цепочки по входам к напряжениям $V_{ВХ1} = V_{ВХ2} = 0$ транзистор N1.2 сохраняется в переключенном сбором заряда открытом состоянии и напряжение на первом входе С-элемента $V_{ВХ1С} = 0$ В. После переключения по входам цепочки транзистор P2.2 второго 2ф-инвертора запирается, транзистор N2.2 того же инвертора открывается и через него начинается разряд узла, объединяющего стоки транзисторов P2.2, N2.2 и второй вход С-элемента (рис. 5б). После снижения напряжения происходит переход С-элемента в состояние логической “1” на выходе, что соответствует входным синфазным сигналам цепочки $V_{ВХ1} = V_{ВХ2} = 0$. Задержки переключения по выходу С-элемента в обоих случаях составляют 120–160 пс.

4. ОБРАЗОВАНИЕ ИМПУЛЬСОВ ПОМЕХ НА ВЫХОДЕ С-ЭЛЕМЕНТА

Для оценки помехоустойчивости С-элемента использованы треки с точками входов, окружающими С-элемент: 1) точка 3nC в сток $N_{2.2}$; 2) точка 3pC в сток $P_{2.2}$; 3) точка 4nC между NМОП транзисторами С-элемента; 4) точка 4pC между PМОП транзисторами С-элемента. Кроме того, проведена оценка сбора заряда диффузионным “переносом” заряда к группам транзисторов Gr3N и Gr3P через тонкий слой кремния под слоем изолирующего оксида. Для этого использованы 5 точек входа трека с расстояниями от 0.1 до 0.65 мкм от точки 4nC в области NМОП транзисторов, а также 5 точек входа трека с расстояниями 0.1 до 0.65 мкм от точки 4pC в области PМОП транзисторов.

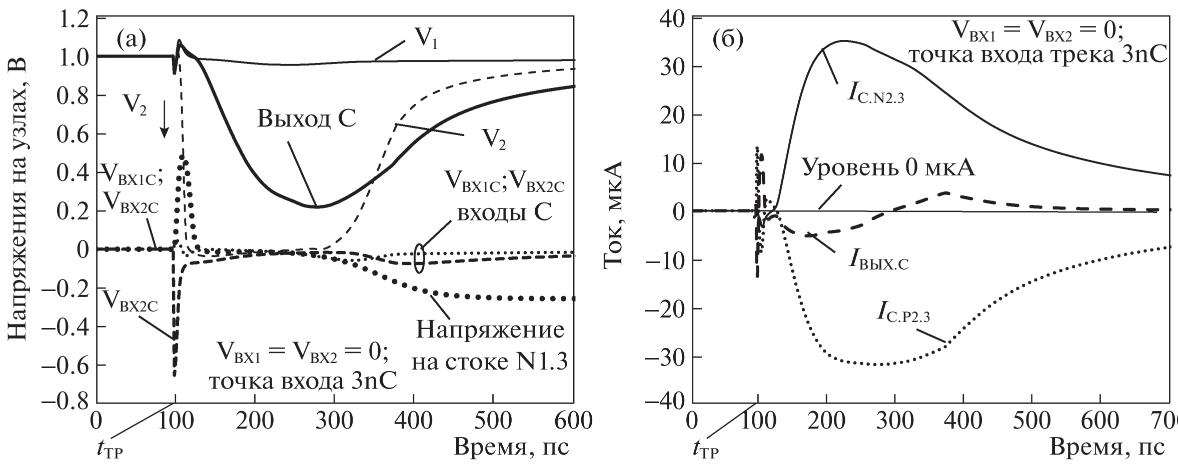

Рис. 6. Зависимости напряжений цепочки из двух 2ф-инверторов, С-элемента и токов на выходе С-элемента при сборе заряда с трека с точкой входа 3nC в группе Gr2N при LET = 60 МэВ см^2/мг, образование трека в момент времени 98 пс, исходное состояние входов $V_{BX1} = V_{BX2} = 0$: (а) напряжения на узлах; (б) токи через узлы С-элемента.

4.1. Сбор заряда с треков с точкой входа 3nC в группе NМОП транзисторов Gr2N

На рис. 6а приведены зависимости напряжений на узлах двух 2ф-инверторов и С-элемента при сборе заряда с трека при LET = 60 МэВ см^2/мг, напряжения на входах цепочки $V_{BX1} = V_{BX2} = 0$. В этом режиме заперты NМОП транзисторы первого 2ф-инвертора и С-элемента (рис. 1), трек проходит через точку 3nC в стоковую область открытого транзистора $N_{2.2}$ группы Gr2N (рис. 3). Начиная с момента образования трека при t = 200 пс, заряд выводят через обратно смещенные стоковые *pn* переходы транзистор $N_{2.1}$ первого 2ф-инвертора и транзисторы С-элемента $N_{1.3}$ и $N_{2.3}$.

При треке с точкой входа 3nC в группу Gr2N заряд собирает и транзистор $N_{2.1}$ первого 2ф-инвертора (зависимость помехи $V_2(t)$ на рис. 6а). Передача этой помехи блокируется делителем напряжения на открытых транзисторах P2.2, N2.2 второго 2ф-инвертора при напряжениях $V_1 = 1$ В и $V_2 = 0$ В. На обоих входах С-элемента сохраняются неизменными во время сбора заряда напряжения $V_{1.2} \approx V_{2.2} \approx 0$.

Импульс помехи с амплитудой 0.78 В и длительностью 200 пс образуется на выходе С-элемента (рис. 6а) в результате сбора заряда транзисторами $N_{1.3}$ и $N_{2.3}$ в группе Gr3N, которая отделена слоем оксида 120 нм от группы Gr2N (рис. 2), через которую проходит трек с точкой входа 3nC. Переход транзистора $N_{1.3}$ в инверсный режим совпадает с моментом, когда импульс помехи на выходе С-элемента $V_{ВЫХ.С}$(t = 294 пс) достигает амплитудного значения, после чего напряжение на выходном узле (на стоке транзистора $N_{2.3}$) начинает восстанавливаться до исходного значения логической единицы “1”.

На рис. 6б приведены зависимости токов, протекающих через транзисторы выходного узла С-элемента во время сбора заряда, это $I_{C.P2.3}$, $I_{C.N2.3}$ – токи стоков транзисторов $P_{2.3}$, $N_{2.3}$ и $I_{ВЫХ.С}$ – выходной ток С-элемента, текущий на емкость узла. Амплитудные значения этих токов 32–37 мкА. Выходной ток С-элемента $I_{ВЫХ.С} = I_{C.N2.3} - I_{C.P2.3}$ определяется разностью токов стоков транзисторов $N_{2.3}$ и $P_{2.3}$. Направление (знак) выходного тока и изменение напряжения на выходном узле связаны между собой. При амплитудном значении импульса помехи $V_{ВЫХ.С}$(t = 294 пс) выходной ток равен нулю $I_{ВЫХ.С}$(t = 294 пс) = 0. До момента t = 294 пс выходной ток имеет отрицательные значения с экстремумом –5.1 мкА, а напряжение импульса помехи $V_{ВЫХ.С}(t)$ – отрицательные приращения. После t = 294 пс выходной ток имеет положительные значения с максимумом +3.63 мкА (рис. 6б), а напряжение импульса помехи $V_{ВЫХ.С}(t)$ – положительные приращения (рис. 6а). При t = 500 пс выходной ток равен +0.91 мкА, и +0.15 мкА при t = 750 пс. Эти значения выходного тока обеспечивают максимальное время хранения данных на выходе С-элемента около 10–20 нс.

4.2. Сбор заряда с треков с точкой входа 3pC в группе PМОП транзисторов Gr2P

С-элемент на основе двухфазного инвертора с третьим состоянием является элементом с динамической памятью на емкости выходного узла, образованной конструктивными емкостями транзисторов, соединенных с выходным узлом. На рис. 7 приведены зависимости напряжений на узлах (рис. 7а) и зависимости токов (рис. 7б), протекающих через выходной узел С-элемента в случае, когда на входах цепочки $V_{BX1} = V_{BX2} = 0$, а

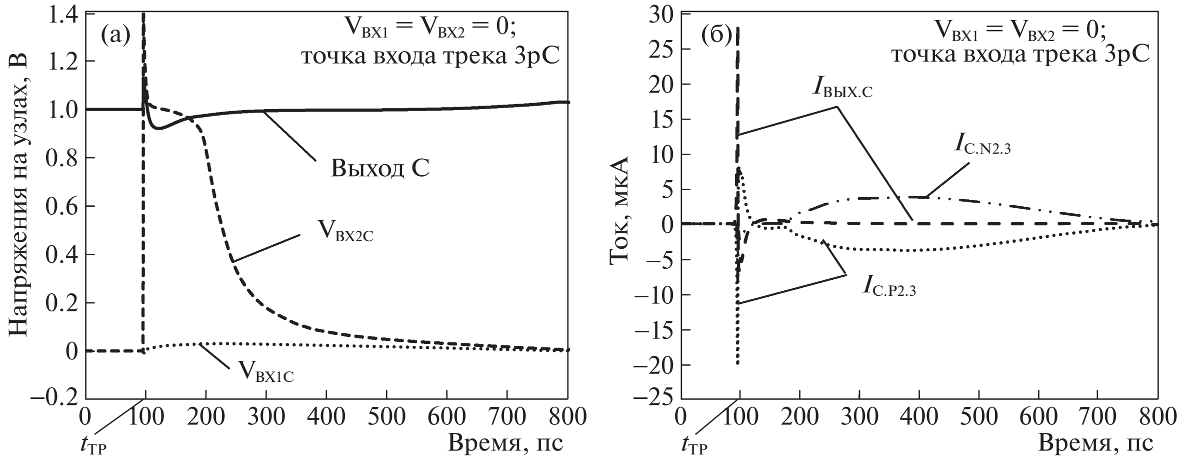

Рис. 7. Напряжения и токи на узлах С-элемента, исходное состояние входов $V_{ВХ1} = V_{ВХ2} = 0$, образование трека в момент времени 98 пс, LET = 60 МэВ см^2/мг, точка входа трека 3рС в группе Gr2P: (а) напряжения на узлах второго 2ф-инвертора и С-элемента; (б) токи выходного узла С-элемента.

трек точкой входа 3рС в группе Gr2P (рис. 2 и 3). С-элемент находится в состоянии логической единицы “1” (рис. 7а). В группе Gr2P транзистор $P_{2.1}$ открыт, а транзистор $P_{2.2}$ заперт и собирает заряд с трека, проходящего через его стоковую область.

На стоке транзистора $P_{2.2}$ и соответственно втором входе С-элемента (рис. 7а) при треке с LET = 60 МэВ см^2/мг образуется импульс помехи $V_{ВХ2С}(t)$ положительной полярности с амплитудой 1 В и длительностью 120 пс, который запирает транзистор P2.3 С-элемента. Образовавшаяся разность входных сигналов переводит С-элемент в высоко резистивное состояние по выходу в режим хранения предшествующего логического состояния.

Зависимости токов, протекающих через выходной узел С-элемента во время активного сбора заряда с трека от 100 до 700 пс, приведены на рис. 7б, где $I_{C.P2.3}$, $I_{C.N2.3}$ – токи стоков транзисторов P2.3 и N2.3, а $I_{ВЫХ.С}$ – выходной ток С-элемента, определяемый разностью токов $I_{C.P2.3}$ и $I_{C.N2.3}$. Выходной ток С-элемента изменяется от +0.18 мкА при 150 пс до -0.4 нА при 380 пс и затем до +40 нА при 750 пс. Напряжение на выходе С-элемента в те же моменты времени: 0.948 В; 0.997 В и 1.019 В сохраняет состояние логической единицы “1”.

4.3. Сбор заряда с треков с точками входа 4nC в группе С-элемента Gr3N

С-элемент состоит из двух последовательно соединенных пар NМОП и РМОП транзисторов, которые образуют двухфазный по входам с третьим высоко резистивным выходом при противофазных входных сигналах (рис. 1). Попарно NМОП транзисторы и РМОП транзисторы образуют конструктивные группы Gr3N и Gr3P (рис. 2), которые окружены слоем оксида толщиной 400 нм, но имеют связи с другими группами транзисторов того же типа проводимости канала по слою кремния под этим оксидом. На рис. 2 слой оксида вокруг кремниевых “параллелепипедов” удален.

На рис. 8 приведены зависимости напряжений на узлах С-элемента и двух выходных инверторов при сборе заряда с трека по нормали к поверхности при LET = 60 МэВ см^2/мг и точкой входа 4nC, образование трека в момент времени $t_{ТР}$ = 100 пс. Исходное состояние входов цепочки $V_{ВХ1} = V_{ВХ2} = 0$, при этом в стационарном состоянии напряжение на выходе С-элемента (на стоке транзистора N2.3) равно $V_{ВЫХ.С}$ = 1 В. Транзисторы N1.3 и N2.3 заперты (рис. 1), а P2.3 и P1.3 открыты.

При образовании трека, проходящего через группу Gr3N, транзисторы N1.3 и N2.3 начинают выводить с трека электроны через обратно смещенные стоковые *pn*-переходы на выходной узел С-элемента, понижая напряжение на нем (рис. 8) и образуя импульс помехи $V_{ВЫХ.С}(t)$. Заряд, собираемый транзисторами N1.3 и N2.3, переводит транзисторы N1.3 и N2.3 в инверсный режим смещения. В противофазе с импульсной помехой на выходе С-элемента изменяются напряжения $V_{ВЫХ.1}$ и $V_{ВЫХ.2}$ на выходах инверторов, передающих на выход цепочки ложные сигналы, образованные помехой в С-элементе.

4.4. Сбор заряда с треков с точками входа вне групп С-элемента Gr3N и Gr3P

Когда трек проходит через изолирующий слой оксида кремния в область транзисторов, заряд на треке образуется в тонком слое кремния под изолирующим слоем оксида. Импульсная помеха на

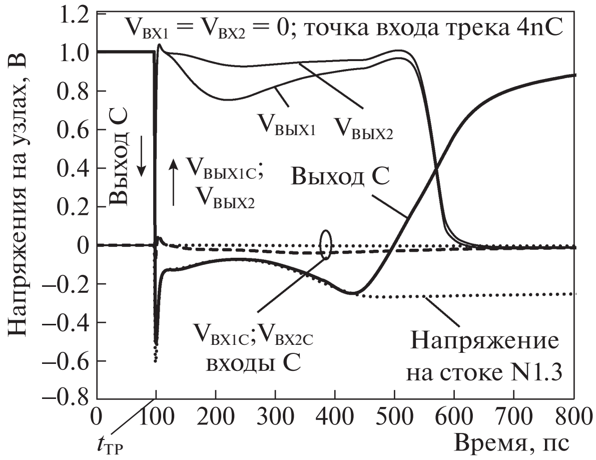

Рис. 8. Зависимости напряжений на узлах второго 2ф-инвертора, С-элемента и выходного конвертора при сборе заряда с трека по нормали к поверхности при LET = 60 МэВ см^2/мг, образование трека при t_{TP} = = 100 пс, состояние входов цепочки $V_{BX1} = V_{BX2} = 0$: (а) точка входа трека 4nC до группы Gr3N.

выходе С-элемента в этом случае возникает, если заряд в достаточном количестве диффундирует до группы Gr3N (или Gr3P). Моделирование сбора заряда, образующегося в слое кремния в области NМОП транзисторов под изолирующим слоем оксида, и образование импульса помехи на выходе С-элемента проведено для 5 точек входа трека 4n с расстояниями d_T = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5 и 0.65 мкм от них до границы группы Gr3N (рис. 3). Для области PМОП транзисторов моделирование проведено также для 5 точек входа трека 4p с теми же расстояниями d_T до группы Gr3P (рис. 3).

На рис. 9а приведены зависимости напряжений на выходах С-элемента для случая, когда точка входа трека 4n проходит на расстояниях d_T = = 0.1, 0.3, 0.5 мкм (рис. 3) от группы транзисторов Gr3N, которые собирают заряд, диффундирующий к ним по тонкому слою кремния под оксидом. Диффузионный процесс переноса неосновных носителей заряда обусловливает инерционность нарастания фронта импульса помехи на рис. 9а для d_T = 0.3, 0.5 мкм по сравнению со случаями, когда точка входа трека 4nC входит непосредственно в группу транзисторов Gr3N (рис. 8) либо находится близко на расстоянии d_T = 0.1 мкм (рис. 9а).

На рис. 9б приведены зависимости напряжений на выходах С-элемента для случая, когда точка входа трека 4pC проходит непосредственно через область группы Gr3P, а также через точку 4p на расстояниях d_T = 0.1, 0.2 мкм (рис. 3) от группы транзисторов Gr3P, которые собирают заряд, диффундирующий по слою кремния под изолирующим оксидом.

Итоговые результаты моделирования для всех входов трека через изолирующий слой оксида толщиной 400 нм приведены на рис. 10 в виде зависимостей амплитуд и длительностей импульсов помех на выходе С-элемента как функции координаты d_T точек входа трека 4n и 4p при LET = = 60 МэВ см^2/мг. Зависимости для области NМОП транзисторов получены при напряжениях на входах цепочки $V_{BX1} = V_{BX2} = 0$, а для области PМОП транзисторов при $V_{BX1} = V_{BX2}$ = 1 В для случаев изначально запертых транзисторов в группе Gr3N либо Gr3P, которые собирали заряд, дошедший от трека.

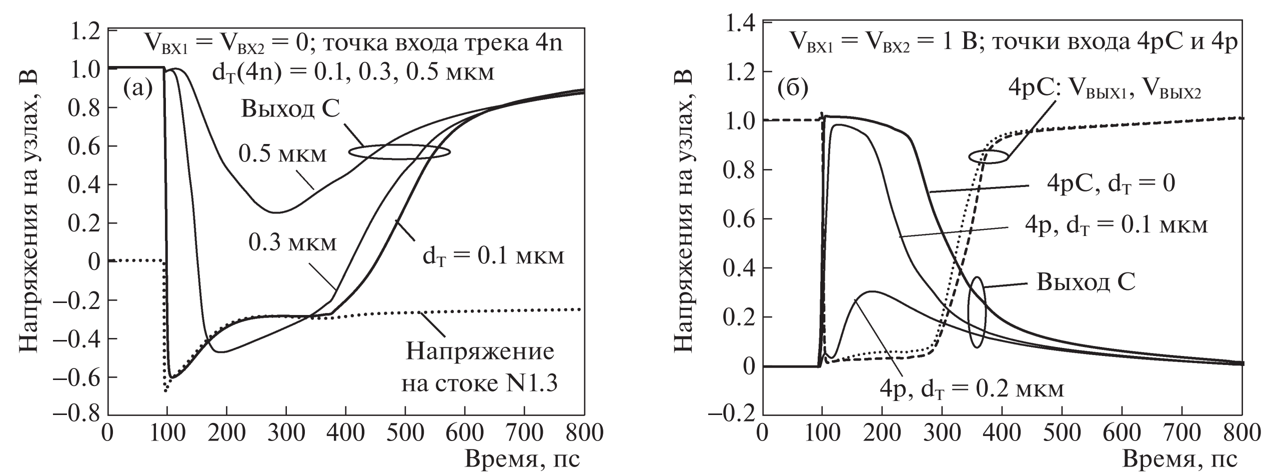

Рис. 9. Зависимости напряжений на выходе С-элемента и выходах конвертора на обычных инверторах при сборе заряда с треков по нормали к поверхности при LET = 60 МэВ см^2/мг, образование трека при t_{TP} = 100 пс, на входах цепочки $V_{BX1} = V_{BX2} = 0$: (а) точки входа трека 4n при расстояниях d_T = 0.1, 0.3, 0.5 мкм до группы Gr3N; (б) точки входа трека 4pC и 4p при расстояниях d_T = 0.1, 0.2 мкм до группы Gr3P.

Длительности импульсов помех определены на уровне 0.3 В от пьедестала импульса. Данные для точек 4nC и 4pC приведены при нулевой координате $d_T = 0$. Сплошными линиями даны зависимости для треков с точками входа в области NМОП транзисторов, штриховыми линиями – для области PМОП транзисторов. Диффузионный перенос заряда от треков с линейной передачей энергии 60 МэВ см^2/мг приводит к помехам на выходе С-элемента с амплитудой 1–1.4 В, если расстояние d_T от точки входа трека 4n до границы группы NМОП транзисторов Gr3N не превышает 400 нм, и 1 В для области PМОП транзисторов, если расстояние d_T до границы группы Gr3P не превышает 100 нм (рис. 10). При удалении точек входа трека 4n и 4p от границ групп амплитуды и длительности импульсных помех на выходе С-элемента снижаются, причем существеннее для сбора заряда в области PМОП транзисторов.

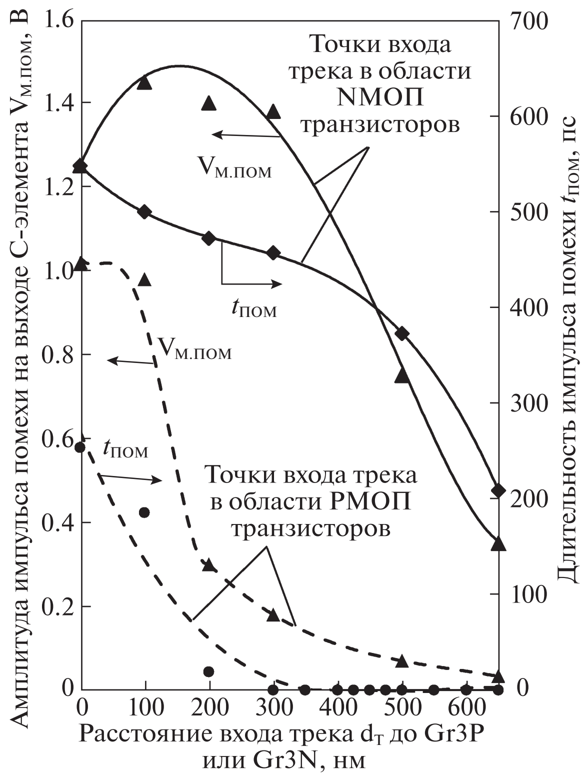

Рис. 10. Амплитуды и длительности импульсов помех на выходе С-элемента в зависимости от расстояния d_T от точки входа трека в области NМОП транзисторов до группы Gr3N (сплошные линии), а также от точки входа трека в области PМОП транзисторов до группы Gr3P (штриховые линии) при LET = 60 МэВ см^2/мг.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Логический С-элемент в цепочке двухфазных элементов останавливает передачу импульса дифференциальной помехи, переходя в высоко резистивное состояние по выходу и сохраняя на выходе предыдущее логическое состояние. Блокировка передачи снимается при восстановлении на входах С-элемента синфазных сигналов.

В таблице 1 приведены значения амплитуд и длительностей импульсов помех на узлах 2ф-инверторов, блокируемые С-элементом при сборе заряда с треков при LET = 60 МэВ см^2/мг.

Трек, проходящий через стоковую область транзистора, вызывает импульсную помеху с амплитудой от 0.82 В до 1 В только на одном из двух выходов 2ф-инвертора, что приводит к временному изменению логического уровня этого узла. При этом длительность импульсов помех, приводящих 2ф-инверторы в нестационарные состояния, не превышает 270–310 пс при сборе заряда *N*МОП транзисторами и 75–210 пс при сборе заряда *P*МОП транзисторами. В таблице рядом со значениями амплитуды и длительности помехи помещено обозначение транзистора, собиравшего заряд с трека, на стоке которого образована по-

Таблица 1. Значения амплитуд и длительностей импульсных помех на узлах первого и второго 2ф-инверторов, блокируемые С-элементом при сборе заряда с треков с направлением по нормали к поверхности приборной модели при LET = 60 МэВ см^2/мг

Точка входа трека	1nC	2nC	3nC	1pC	2pC	3pC
Амплитуда и длительность помехи ($V_{BX1} = V_{BX2} = 0$)	1.0 В 305 пс $N_{1.1}$	1.0 В 300 пс $N_{1.1}$	1.0 В 270 пс $N_{2.1}$	0.84В 78 пс $P_{1.2}$	1.0 В 140 пс $P_{1.2}$	1.0 В 140 пс $P_{2.2}$
Амплитуда и длительность помехи ($V_{BX1} = V_{BX2} = 1В$)	1.0 В 300 пс $N_{1.2}$	1.0 В 300 пс $N_{1.2}$	1.0 В 310 пс $N_{2.2}$	1.0 В 210 пс $P_{1.1}$	0.84 В 75 пс $P_{1.1}$	0.82 В 90 пс $P_{2.1}$

меха; длительность помехи определена на уровне 0.5 В.

Результаты моделирования импульсных помех, возникающих при сборе заряда с треков одиночных частиц при линейной передаче энергии на трек 60 МэВ см^2/мг, следующие:

1) При линейной передаче энергии на трек 60 МэВ см^2/мг в случае точек входа трека в сток или исток *N*МОП или *P*МОП транзистора, импульсная помеха возникает только на одном выходе 2ф-инвертора и может влиять только на один вход следующего 2ф-инвертора или С-элемента. Импульсы напряжения на выходах 2ф-инверторов, следующих за инвертором, собирающим заряд, являются результатом электрического взаимодействия инверторов.

2) С-элемент переходит в третье высоко резистивное состояние по выходу при нарушении синфазности его входных сигналов, фиксируя свое логическое состояние независимо от завершенности переходных процессов от импульсных помех в цепочке предшествующих двухфазных инверторов.

3) Хранение логического состояния С-элементом осуществляется за счет динамического сохранения напряжения на емкости его выходного узла при переходе выхода С-элемента в высоко резистивное состояние на выходе. Длительность хранения логического состояния ограничена значениями выходного тока С-элемента, разряжающего емкость выходного узла, и составляет 10–20 нс в случае объемной технологии 65 нм КМОП.

4) Задержка переключения логического состояния С-элемента при его синфазном переключении по входам в случае объемной технологии 65 нм КМОП составляет 25–40 пс. При совпадении моментов прихода синфазных сигналов на переключение двухфазного инвертора в цепочке и начала сбора заряда с трека инверторов происходит увеличение задержки переключения С-элемента до 120–160 пс в связи с совмещением переходных процессов переключения и реакции на импульсную помеху С-элемента.

5) При сборе заряда с трека непосредственно транзисторами С-элемента на его выходе может формироваться импульс помехи как при прохождении трека через области истоков и стоков *N*МОП или *P*МОП транзисторов, так и при точках входа трека, проходящих на расстояниях до 150 нм для *P*МОП транзисторов и до 400 нм для *N*МОП транзисторов от границ групп транзисторов С-элемента. В зависимости от амплитуды и длительности импульс помехи на выходе С-элемента может являться ошибочным выходным логическим сигналом, который будет передаваться и восприниматься последующими элементами.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Моделирование сбора заряда с трека частицы на основе средств TCAD в пикосекундном диапазоне времен является виртуальной экспериментальной базой исследования элементов микроэлектронных систем. Результаты проведенного исследования позволяют оценить возможности кремниевой объемной 65-нм КМОП технологии для разработки элементной базы высокопроизводительных микропроцессорных систем, предназначенных для космического применения. Моделирование эффектов при сборе заряда с треков одиночных частиц служит основой для оценки ограничений по использованию конкретной технологии при проектировании и изготовлении новой элементной базы для данного класса систем.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-07-00651.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Muller D.E., Bartky W.S.* A theory of asynchronous circuits // Proceedings of International Symposium on the theory of switching, Cambridg, M.A.: Harvard Univ. Press, 1959. P. 204–243.
2. *Baker R.J.* CMOS circuit design, layout, and simulation (IEEE Press Series on Microelectronic Systems). – Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2010. P. 351.
3. *Hao P., Chen S., Huang P., Chen J., Liang B.* A novel SET mitigation technique for clock distribution networks // IEEE Transactions on Device and Materials Reliability. 2018. V. 18. P. 1–8.
4. *Ramamurthy C., Gujja A., Vashishtha V., Chellappa S., Clark L.T.* Muller C-element self-corrected triple modular redundant logic with multithreading and low power modes // in IEEE Xplore (Conference Section, RADECS-2017), e-book, 2019. P. 184–187.
5. *Katunin Yu.V., Stenin V.Ya.* Noise immunity of a 28-nm two-phase CMOS combinational logic to transient effects of single nuclear particles // Russian Microelectronics. 2015. V. 44. № 4. P. 255–262.
6. *Стенин В.Я., Катунин Ю.В.* Моделирование импульсных помех в двухфазных КМОП инверторах при сборе заряда с трека ионизирующей частицы // Вестник НИЯУ МИФИ. 2019. Т. 8. № 3. С. 274–282.
7. *Garg R., Khatri S.P.* Analysis and design of resilient VLSI circuits: mitigating soft errors and process variations. New York: Springer, 2010. P. 194–205.
8. Soft errors in modern electronic systems / Editor M. Nicolaidis. New York: Springer, 2011. P. 35–37.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 2, pp. 166–176

Use of a C-Element in Chains of Two-Phase CMOS Inverters to Block Noise Pulses Induced by Single Ionizing Particles

V. Ya. Stenin[a,b,#] and Yu. V. Katunin[b,##]

[a] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*
[b] *Scientific Research Institute of System Analysis, Russian Academy of Sciences, Moscow, 117218 Russia*
[#]*e-mail: vystenin@mephi.ru*
[##]*e-mail: katunin@cs.niisi.ras.ru*

Received January 22, 2020; revised January 22, 2020; accepted February 25, 2020

Abstract—The TCAD simulation of noise pulses caused by the action of single ionizing particles on the elements of a chain of two-phase CMOS inverters with a C-element on a two-input inverter with the third state has been reported. A noise pulse on one of the inputs of the C-element is blocked, and the C-element stores the last output logical state on the capacitor of the output. The elements are modeled using the 65-nm CMOS bulk technology. Transient processes accompanying the collection of charge from tracks directed along the normal to the crystal surface, with the input points both in the drain area of transistors and at a distance of 0.3–0.65 μm from them have been analyzed. In the case of a track passing through a transistor drain or nearby, interference occurs only on one output of a two-phase inverter and can affect only one input of the next inverter or C-element. The C-element transits to a highly resistive state at the output to store its logical state regardless of the completion of transients in the inverter circuit. The duration of storage is 10–20 ns. The C-element switching delay is 25–40 ps.

Keywords: inverter, noise pulse, logical C-element, simulation, single ionizing particle, transient process

DOI: 10.1134/S2304487X20020133

REFERENCES

1. Muller D.E., Bartky W.S. A theory of asynchronous circuits // in *Proceedings of International Symposium on the Theory of Switching*, Cambridg, M.A.: Harvard Univ. Press, 1959, pp. 204–243.
2. Baker R.J. *CMOS Circuit Design, Layout, and Simulation* (IEEE Press Series on Microelectronic Systems). – Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2010. p. 351.
3. Hao P., Chen S., Huang P., Chen J., Liang B. A novel SET mitigation technique for clock distribution networks // *IEEE Transactions on Device and Materials Reliability*, 2018, v. 18, pp. 1–8.
4. Ramamurthy C., Gujja A., Vashishtha V., Chellappa S., Clark L.T. Muller C-element self-corrected triple modular redundant logic with multithreading and low power modes // in *the RADECS-3017 Conference Papers, in IEEE Xplore (Conference Section, RADECS-3017)*, e-book, 2019, pp. 184–187.
5. Katunin Yu.V., Stenin V.Ya. Noise immunity of a 28-nm two-phase CMOS combinational logic to transient effects of single nuclear particles // *Russian Microelectronics*, 2015, v. 44, no. 4, pp. 255–262.
6. Stenin V.Ya., Katunin Yu.V. Modelirovanie impul'snyh pomekh v dvuhfaznyh KMOP invertorah pri sbore zaryada s treka ioniziruyushchej chasticy (Simulation of noise pulses in two-phase CMOS inverters when collecting charge from an ionizing particle track) // *Vestnik NIYaU MIFI*, 2019, vol. 8, no. 3, pp. 274–282.
7. Garg R., Khatri S.P. *Analysis and design of resilient VLSI circuits: mitigating soft errors and process variations*. New York: Springer, 2010, pp. 194–205.
8. *Soft errors in Modern Electronic Systems* / M. Nicolaidis, Ed. New York: Springer, 2011, pp. 35–37.

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 2, с. 177–183

АВТОМАТИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

УДК 621.311.16:621.315.05:681.89

ЧУВСТВИТЕЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПАССИВНЫХ БЕСПРОВОДНЫХ ДАТЧИКОВ НА ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ТОКА В ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЯХ

В. О. Кислицын[1], В. А. Калинин[1], Г. Я. Карапетьян[1], В. Ф. Катаев[2], Н. В. Ермолаева[2,*]

[1] Научно-технический центр "Радиотехнических Устройств и Систем", Санкт-Петербург, 199178, Россия

[2] Волгодонский инженерно-технический институт – филиал Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ", Волгодонск, 347360, Россия

**e-mail: ermolnv@mail.ru*

Поступила в редакцию 02.04.2020 г.
После доработки 23.06.2020 г.
Принята к публикации 23.06.2020 г.

Приведены результаты исследований чувствительных элементов датчиков тока для трехфазных цепей на основе линий задержки на поверхностных акустических волнах, в которой величина импеданса, подсоединенного к отражательному встречно-штыревому преобразователю зависит от тока в токопроводящей шине. Импеданс представляет собой последовательно соединенные катушку индуктивности с ферритовым сердечником и емкость. Индуктивность меняется под действием магнитного поля, создаваемого током, а емкость – под действием напряжения, индуцируемого в обмотке, намотанной на магнитопровод, расположенный вокруг токопроводящего провода или шины. Исследования показали, что для измерения переменного тока лучше использовать замкнутые магнитопроводы без постоянного магнита, но с намотанной на него обмоткой, напряжение с которой подается через диоды на варикапы либо на дополнительную обмотку, расположенную на ферримагнитном сердечнике магниточувствительной индуктивности. В этом случае положительная и отрицательная полуволны переменного тока измеряются независимо, что позволяет судить о нелинейных искажениях в электросети и более точно оценивать расход электроэнергии. Применение в контуре варикапа в качестве конденсатора позволяет существенно повысить чувствительность и точность измерения тока. Использование прореженных встречно-штыревых преобразователей позволяет существенно сузить полосу рабочих частот, что дает возможность измерения токов одновременно на трех фазах в диапазоне разрешенных частот 2400–2483 МГц. В целом, применение датчиков новой конструкции позволит расширить динамический диапазон измеряемых токов.

Ключевые слова: встречно-штыревой преобразователь, поверхностные акустические волны, линия задержки, магнитопровод, варикап, ферритовый сердечник, бесконтактный датчик тока

DOI: 10.1134/S2304487X20020066

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] показано, что в качестве пассивных беспроводных датчиков для измерения токов в трехфазных цепях перспективно использовать датчики на основе линий задержки (ЛЗ) на поверхностных акустических волнах (ПАВ). Такая ЛЗ содержит узкополосные приемо-передающий и отражательные встречно-штыревые преобразователи (ВШП). Причем отражательный ВШП нагружается на импеданс, величина которого зависит от тока в токопроводящей шине, ток в которой необходимо измерять. Анализ работ [2–9] показал, что все предлагаемые пассивные чувствительные к току элементы основаны на изменении проводимости этих элементов под действием магнитного поля тока, который необходимо измерить. Однако в настоящее время все такие материалы находятся на исследовательской стадии. В настоящей работе предлагается использовать в качестве импеданса последовательно соединенные катушку индуктивности и емкость, величины которых могут зависеть от тока в шине. При этом используются хорошо известные ферромагнитные материалы, если катушка индуктивности, намотанная на ферромагнитное кольцо, помещена в зазор магнитопровода, расположенного вокруг токопроводящей шины, или варикапы, емкость которых будет изменяться под действием напряжения, в обмотке, намотанной на магнитопровод.

ВЫБОР КОНСТРУКЦИИ МАГНИТОЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА

Из рис. 1 следует, что нагрузка к отражательным ВШП представляет собой последовательный

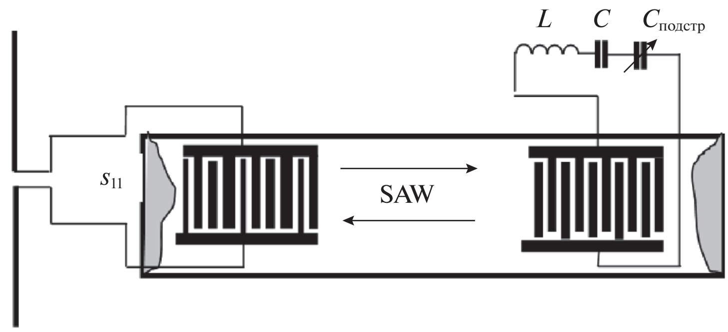

Рис. 1. Конструкция ЛЗ для датчика.

контур, в котором катушка индуктивности имеет добротность Q, т.е. имеет почти реактивный характер при $Q \gg 1$. Под действием магнитного поля индуктивность может меняться в два и более раз [10]. Катушка индуктивности, намотанная на ферромагнитный сердечник, меняет свою индуктивность, так как изменяется под действием магнитного поля магнитная проницаемость ферромагнитного сердечника, которой пропорциональна индуктивность.

Катушка индуктивности, намотанная на ферромагнитный сердечник, меняет свою индуктивность, так как изменяется под действием магнитного поля магнитная проницаемость ферромагнитного сердечника, которой пропорциональна индуктивность. Катушка индуктивности с ферромагнитным сердечником помещается в зазор магнитопровода, расположенного вокруг токопроводящей шины (рис. 2).

Чтобы отличать положительную и отрицательную полуволны переменного тока, в магнитопровод вводится постоянный магнит (рис. 2). В этом случае при одной полярности тока магнитное поле в зазоре будет складываться с магнитным полем постоянного магнита, а при другой полярности – вычитаться. Контуры, подсоединенные к отражательным ВШП, настраиваются таким образом, чтобы изрезанность параметра S11 была бы минимальной. При этом в контуре индуктивность, которая не помещается в зазор магнитопровода, должна быть аналогичной контуру, индуктивность которого помещается в зазор магнитопровода. В этом случае, при изменении температуры не будет происходить разбалансировка отражений от обоих отражательных ВШП, поскольку изменение индуктивности от температуры будет одинаково. На рис. 3 показана зависимость коэффициента отражения от величины тока в шине, вокруг которой расположен магнитопровод, когда катушка индуктивности внешнего импеданса намотанная на ферритовом кольце, расположена в зазоре магнитопровода.

Из рис. 3 видно, что эта зависимость не симметрична относительно нуля тока: она сильно зависит от тока при положительной полуволне тока и слабо зависит от отрицательной полуволны тока. В результате, данная конструкция позволяет достоверно измерять только положительную полуволну тока. Это может привести к потере ин-

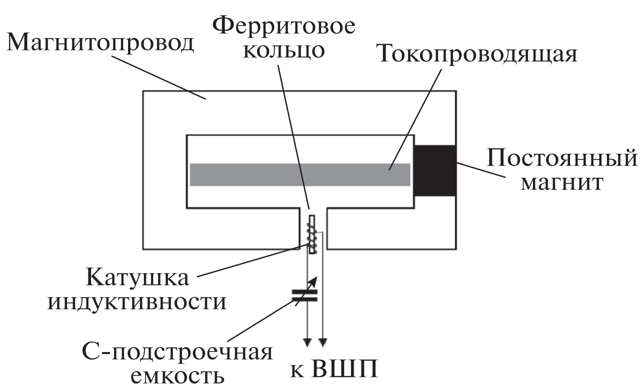

Рис. 2. Магнитопровод с зазором и постоянным магнитом.

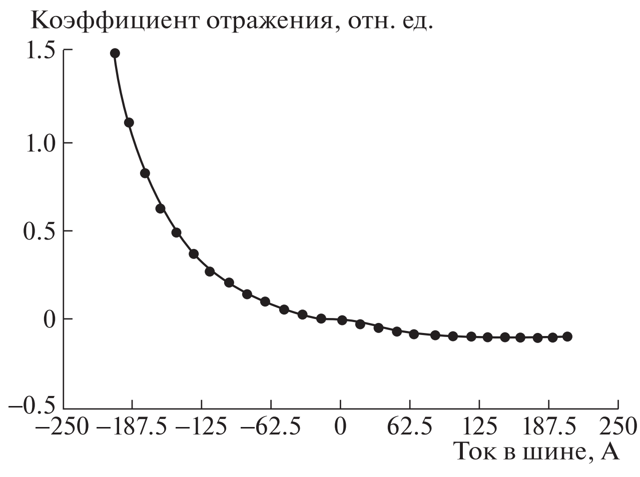

Рис. 3. Зависимость коэффициента отражения от датчика от силы тока в шине.

формации об нелинейных искажениях, возникающих в электросети, связанных с потерей симметричности переменного тока относительно нуля. Для того, чтобы измерять обе полуволны, необходим еще один измерительный канал. В нем индуктивность внешнего импеданса расположена в зазоре другого магнитопровода, в котором полярность постоянного магнита противоположна полярности магнита в первом магнитопроводе.

Центральные частоты в этом датчике сдвинуты таким образом, что на ближайших частотах АЧХ ВШП пересекаются на уровне не менее 20 дБ. В этом случае возникает необходимость установки не одного, а двух магнитопроводов, в которых постоянные магниты имеют противоположные полярности. Чтобы избежать установки двух магнитопроводов, можно использовать замкнутый магнитопровод с обмоткой на нем, которая подсоединяется к обмотке, дополнительно намотанной на сердечник катушки индуктивности внешнего импеданса. При соединении этой обмотки с дополнительной обмоткой катушки индуктивности приводит к модуляции магнитной проницаемости сердечника катушки, а, следовательно, и к модуляции индуктивности и коэффициента отражения ПАВ от отражательного ВШП. В этом случае магнитопровод необязательно должен находиться вблизи датчика, поскольку обмотка магнитопровода и дополнительная обмотка катушки индуктивности соединяются с помощью проводов, так как частота тока равна 50 Гц и длина этих проводов не имеет значение. Эти провода подсоединяются к дополнительной обмотке через дроссель, сопротивление которого на рабочих частотах датчика намного больше, чем на частоте 50 Гц, и не влияют на работу датчика. Измерения показали, что если использовать в датчике, работающем в диапазоне частот 95–100 МГц, в качестве индуктивности ферритовое кольцо диаметром 4 мм, содержащее шесть витков провода диаметром 0.2 мм, намотать дополнительную обмотку в 30 витков проводом диаметром 0.2 мм, то током до 1 А можно управлять коэффициентом отражения ПАВ от ВШП в два раза. Конечно, ток в 1 А – это достаточно большой ток. Но его можно существенно уменьшить, если число витков увеличить до 1000 витков, а диаметр провода уменьшить до 0.06 мм (стандартное значение диаметра намоточного провода). Тогда ток станет менее 0.3 А. Но при таком диаметре провода можно намотать на кольцо и 1000 витков, что позволит уменьшить ток до 30 мА. Кроме того, эксперименты показали, что, используя подмагничивание с помощью постоянного магнита можно смещать рабочую точку изменения индуктивности таким образом, чтобы с ростом тока коэффициент отражения будет все время убывать с ростом тока, что позволит расширить динамический диапазон измеряемых токов (рис. 3).

Используя датчики новой конструкции, где есть возможность эффективно управлять коэффициентом отражения ПАВ от ВШП, можно изменять коэффициент отражения отражательного ВШП на одном частотном канале положительной полуволной тока и изменять коэффициент отражения ВШП в другом частотном канале отрицательной полуволной тока. Кроме того, сам датчик может быть расположен даже не на токопроводящей шине, а в удобном месте для связи со считывателем. Связь с токопроводящей шиной, в этом случае осуществляется с помощью обмотки, намотанной на магнитопровод и пары проводов и диодов, которые направляют сигнал от положительной полуволны тока на первый канал, а сигнал от отрицательной полуволны – на другой канал. В качестве диодов можно использовать диод Д226Б, который имеет допустимое обратное напряжение 400 В и прямой ток 300 мА. Если положить, что при токе в шине в 10 А на обмотке будет напряжение 1 В и ток в обмотке будет около 1 мА. Тогда при токе 1000 А напряжение на обмотке будет 100 В и ток 100 мА, то такие диоды будут работать в пределах допустимых параметров. Кроме того, при больших токах магнитопровод может прийти в насыщение и ток на обмотке будет расти медленнее, чем ток в шине. Для защиты дополнительной обмотки от перегрева при скачке тока (КЗ) параллельно обмотке подключается варистор, который при определенном напряжении резко уменьшает свое сопротивление, пропуская почти весь ток через себя (рис. 3). После прекращения КЗ сопротивление варистора восстанавливается.

В такой конструкции нет необходимости использовать опорный канал, поскольку, когда датчик измеряет положительную полуволну тока, в качестве опорного датчика может служить датчик, который измеряет отрицательную полуволну тока, так как индуктивность в этом датчике не будет меняться в течение полупериода, поскольку диод не пропускает ток на дополнительную обмотку катушки индуктивности. При отрицательной волне тока, наоборот, датчик, который был измерительным при положительной волне тока, станет опорным (рис. 4).

Можно также использовать и изменение емкости под действием магнитного поля, если расстояние между обкладками будет меняться под действием магнитного поля. Но при переменном токе это приведет к тому, что обкладки такого конденсатора будут постоянно вибрировать с частотой переменного тока, что может быстро привести к выходу из строя такого конденсатора. Изменение емкости из-за изменения диэлектрической проницаемости под действием магнитного поля (магнитоэлектрический эффект) слишком мало, чтобы его практически использовать. Но изменение емкости все же можно использовать,

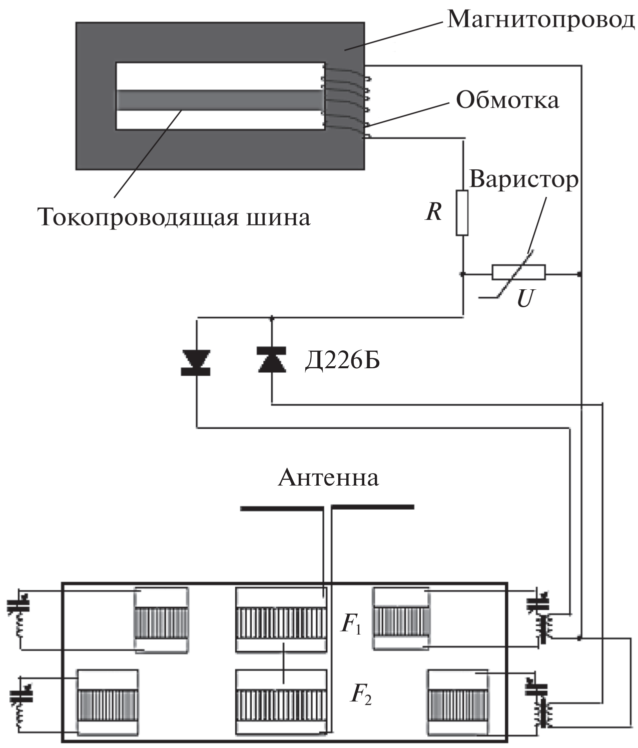

Рис. 4. Датчик тока на ПАВ для измерения переменного тока с управляемой индуктивностью.

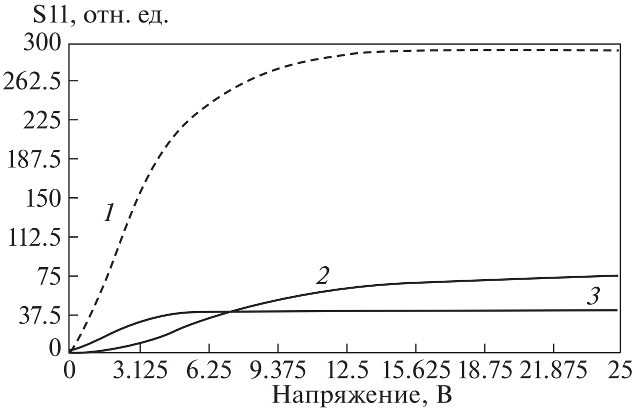

Рис. 5. Зависимость коэффициента отражения датчика в зависимости от приложенного к варикапу напряжения: *1* – варикап Д901, *2* – варикап КВ102, *3* – варикап Д902.

если использовать варикапы. В этом случае емкость будет зависеть от напряжения, приложенного к варикапу. Это напряжение можно получить от обмотки, намотанной на замкнутый вокруг токопроводящей шины магнитопровод.

Варикап Д901 имеет обратное напряжение 80 В, Д902 – 25 В, КВ106 – 120 В, 2В102 – 80 В. Это означает, что при напряжении на обмотке в 1 В при токе в шине 10 А на диод может быть подано напряжение до 1 В, а при токе в шине 1000 А напряжение на обмотке будет 100 В. Как видно, это не превысит предельного напряжения варикапа КВ106, или двух последовательно соединенных варикапов Д901. Так как ток на варикапах будет всегда иметь одно и тоже направление, то нет необходимости постоянного напряжения для создания рабочей точки. Кроме того, нет необходимости в изготовлении моточных компонентов на ферритовых сердечниках. Дроссели имеют индуктивное сопротивление ВЧ сигнала в сотни кОм, а для 50 Гц несколько Ом. Поэтому обмотка на магнитопроводе не будет влиять на параметры импеданса, подсоединенного к отражательным ВШП. В отличие от индуктивности, которая изменяется не более чем в два раза под действием магнитного поля и имеет максимум, емкость варикапа при увеличении приложенного к нему обратного напряжения всегда уменьшается, причем изменяться более чем в пять раз.

На рис. 5 показано изменение коэффициента отражения от датчика в зависимости от напряжения, прилагаемого к нему. Видно, что при применении варикапов изменение коэффициента отражения значительно превышает его изменение при применении управляемой магнитным полем индуктивности. Это дает возможность существенно повысить чувствительность и точность измерения тока такими датчиками.

Экспериментально было установлено, что в сердечнике из феррита при 100 витках при токе в шине 4 А напряжение на обмотке было 0.2 В, в сердечнике из железа при 60 витках было получено напряжение 2 В при токе в шине 4 А. Это означает, что напряжение в 1 В при токе в шине 10 А вполне возможно при числе витков в 100–200 в обмотке на магнитопроводе. При увеличении тока до 1000 А это напряжение повысится до 100 В, если в сердечнике не будет насыщения. Если возник импульс перенапряжения, варистор из-за нелинейности характеристики уменьшает свое сопротивление практически до нуля. Нагрузка шунтируется, а поглощенная энергия рассеивается в виде тепла. Варистор не обладает инерцией, поэтому после "срезания" импульса он мгновенно снова приобретает очень большое сопротивление. В варисторах напряжение срабатывания варьируется в зависимости от марки от 18 до 1800 В. При этом кратковременный ток, который может выдержать варистор без поломки, составляет сотни ампер в течение 20 мкс.

Так как в датчиках используются узкополосные ВШП с различными центральными частотами, то для измерения трехфазного тока датчики располагаются на трех токопроводящих шинах или проводах (рис. 6). При этом центральные частоты подбираются таким образом, что АЧХ соседних частотных каналов пересекаются на уровне не более 20 дБ. Таким образом, получается шесть каналов (по два на каждую фазу). Учитывая, что диапазон разрешенных частот находится в пределах 2400 МГц–2483 МГц, частоты каналов будут различаться на 80/6 = 13.3 МГц. Тогда частоты каналов будут соответственно равны: 2410 МГц, 2423.3 МГц (первая фаза); 2436.6 МГц, 2449.9 МГц (вторая фаза); 2463.2 МГц, 2476.5 МГц (третья фаза).

Задержки в опорных каналах для каждой фазы отличаются от задержек в измерительных каналах на удвоенную величину длительности считывающего импульса. В этом случае отраженные от датчика импульсы не будут перекрываться, что повысит точность измерения. Это необходимо сделать, поскольку в импульсном режиме считывающий импульс с частотой заполнения равной частоте первого опорного канала будет также отражаться в измерительном канале с амплитудой в шесть раз меньшей, что может повлиять на точность измерения, когда ток будет проходить нулевые значения.

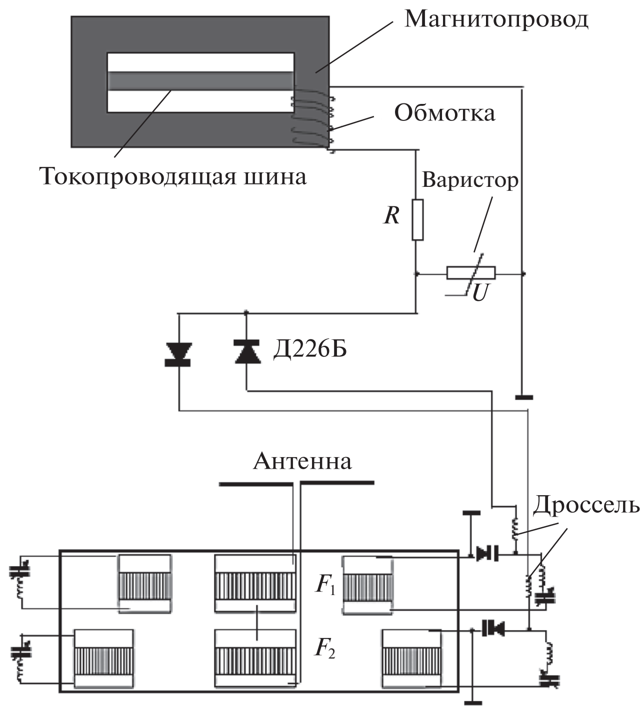

Рис. 6. Датчик тока на ПАВ для измерения переменного тока на основе варикапов.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В результате выбора конструкции магниточувствительного элемента было показано, что наиболее эффективно использовать емкость, либо индуктивность. Показано, что индуктивность может располагаться непосредственно в зазоре магнитопровода с постоянным магнитом (для определения полярности тока), расположенного вокруг токопроводящей шины. Однако такой метод не позволяет достаточно хорошо измерять обе полярности тока. Поэтому было предложено управлять индуктивностью или емкостью контура с помощью обмотки, намотанной на магнитопровод, расположенный вокруг токопроводящей шины. При этом необходимость в постоянном магните отпадает, что упрощает конструкцию магнитопровода. Напряжение с обмотки подается на обмотку расположенной на одном сердечнике индуктивности контура, причем напряжение подается через диод. Это позволяет измерять токи разных полярностей раздельно, просто используя для каждого направления тока отдельную ЛЗ. В этом случае под действием напряжения в обмотке на магнитопроводе в обмотке сердечника индуктивности возникает ток, магнитное поле которого изменяет индуктивность, а, следовательно, и коэффициент отражения опросного сигнала от датчика. Если это напряжение подать на варикап, который используется в контуре в качестве конденсатора, то его емкость будет меняться в соответствии с током в шине, что приведет также к изменению коэффициента отражения от датчика под действием тока в шине. Измерения показали, что при применении варикапов изменение коэффициента отражения значительно превышает его изменение при применении управляемой магнитным полем индуктивности. Это дает возможность существенно повысить чувствительность и точность измерения тока такими датчиками. Использование прореженных ВШП позволяет существенно сузить полосу рабочих частот, что дает возможность измерения токов одновременно на трех фазах в диапазоне разрешенных частот 2400–2483 МГц.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемые в настоящей работе пассивные беспроводные датчики на ПАВ можно с успехом применять для измерения тока в трехфазных линиях электропередачи и распределительных шкафах. При этом в качестве чувствительных элементов можно использовать катушки индуктивности, намотанные на ферромагнитный сердечник, которые помещаются в зазор магнитопровода, расположенного вокруг токопроводящего провода или шины. Для измерения переменного тока лучше использовать замкнутые магнитопроводы без постоянного магнита, но с намотанной на него обмоткой, напряжение с которой подается через диоды на варикапы либо на дополнительную обмотку, расположенную на ферримагнитном сердечнике магниточувствительной индуктивности. В этом случае положительная и отрицательная полуволны переменного тока измеряются независимо, что позволяет судить о нелинейных искажениях в электросети и более точно оценивать расход электроэнергии. Применение датчиков новой конструкции позволит расширить динамический диапазон измеряемых токов. Использование в контуре варикапа в качестве конденсатора позволяет существенно повысить чувствительность и точность измерения тока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кислицин В.О., Калинин В.А., Карапетьян Г.Я., Катаев В.Ф., Сысоев И.А.* Пассивные беспроводные датчики тока для трехфазных цепей // Вестник Северокавказского федерального университета. 2019. № 3 (72). С. 7–16.
2. *Kadota M., Ito S., etc.* SAW magnetic sensors composed of various Ni electrode structures on quartz // IEEE International Ultrasonics Symp. Proc. 2011. P. 805–809.
3. *Zhou H., Talbi A., Tiercelin N. and Bou Matar O.* Multilayer magnetostrictive structure based surface acoustic wave devices // Applied Physics Letters. 2014. V. 104. P. 114101.
4. *Hauser H., Steindl R., Hausleitner Ch., Pohl A., Nicolics J.* Wirelessly Interrogable Magnetic Field Sensor Utilizing Giant Magneto-Impedance Effect and Surface Acoustic Wave Devices // IEEE T INSTRUM MEAS. 2000. V. 49. P. 648–652.
5. *Steindl R., Hausleitner Ch., Pohl A., Hauser H., Nicolics J.* Passive wirelessly requestable sensors for magnetic field measurements // Sens Actuators A. 2011. V. 85. P. 169–174.
6. *Al Rowais H., Li B., Liang C., Green S., Gianchandani Y., Kosel J.* Development of a Passive and Remote Magnetic Microsensor with Thin-Film Giant Magnetoimpedance Element and Surface Acoustic Wave Transponder // Appl. Phys. 2001, V. 109. P. 07E524.
7. *Li B., M. H., Salem N. P., Giouroudi I., Kosel J.* Integration of Thin Film Giant Magneto Impedance Sensor and Surface Acoustic Wave Transponder // Appl. Phys. 2012. V. 111. P. 07E514.
8. *Morikawa T., Nishibe Y., Yamadera H., Nonomura Y., Takeuchi M., Taga Y.* Giantmagneto-Impedance Effect in Layered Thin Films // IEEE Trans Magn. 2009. V. 33. P. 4367–4372.
9. *Дворников А.А., Огурцов В.И., Уткин Г.М.* Стабильные генераторы с фильтрами на поверхностных акустических волнах. М.: Радио и связь, 1983. 136 с.
10. Исследование магнитных свойств ферритов. [Электронный ресурс] – URL https://zdamsam.ru/a59111.html (дата обращения: 12.03.2020)

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 2, pp. 177–183

Sensitive Elements of Passive Wireless Sensors on Surface Acoustic Waves for Measuring Current in Three-Phase Circuits

V. O. Kislitsyn[a], V. A. Kalinin[a], G. Ya. Karapetyan[a], V. F. Kataev[b], and N. V. Ermolaeva[b,#]

[a] *Scientific and Engineering Center Rus, St. Petersburg, 199178 Russia*

[b] *Volgodonsk Engineering Technical Institute, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Volgodonsk, 347360 Russia*

[#]*e-mail: ermolnv@mail.ru*

Received April 2, 2020; revised June 23, 2020; accepted June 23, 2020

Abstract—Sensitive elements of current sensors for three-phase circuits based on delay lines on surface acoustic waves, where the impedance connected to a reflective counter-pin converter depends on the current in the conducting bus, have been studied. The impedance is a series-connected inductor with a ferrite core and a capacitor. The inductance changes under the influence of the magnetic field created by the current, and the capacitance depends on the voltage induced in the winding wound on a magnetic wire located around a current-conducting wire or bus. It has been shown that it is better to use closed magnetic circuits without a permanent magnet, but with a winding wound on it, the voltage from which is fed through diodes to varicaps or to an additional winding located on a ferrimagnetic core of a magnetically sensitive inductance. In this case, the positive and negative half-waves of the alternating current are measured independently, which allows us to estimate nonlinear distortions in the power grid and more accurately evaluate the power consumption. The use of a varicap circuit as a capacitor can significantly increase the sensitivity and accuracy of current measurement. The use of sparse counter-pin converters allows significantly reducing the operating frequency band, which makes it possible to measure currents simultaneously in three phases in the range of permitted frequencies of 2400–2483 MHz. In general, the use of sensors of the new design will expand the dynamic range of measured currents.

Keywords: counter-pin converter, surface acoustic waves, delay line, magnetic conductor, varicap, ferrite core, contactless current sensor

DOI: 10.1134/S2304487X20020066

REFERENCES

1. Kislicin V.O., Kalinin V.A., Karapetyan G.Ya., Kataev V.F., Sysoev I.A. Passivnyye besprovodnyye datchiki toka dlya trekhfaznykh tsepey [Passive wireless current sensors for three-phase circuits]. *Bulletin of the North Caucasus Federal University*, 2019 no. 3 (72), pp. 7–16. (in Russian)
2. Kadota M., Ito S., Ito Y., etc. SAW magnetic sensors composed of various Ni electrode structures on quartz. *IEEE International Ultrasonics Symp.Proc.*, 2011 pp. 805–809.
3. Zhou H., Talbi A., Tiercelin N. and Bou Matar O. Multilayer magnetostrictive structure based surface acoustic wave devices. *Applied Physics Letters,* 2014. vol. 104, p. 114101.
4. Hauser H., Steindl R., Hausleitner Ch., Pohl A., Nicolics J. Wirelessly Interrogable Magnetic Field Sensor Utilizing Giant Magneto-Impedance Effect and Surface Acoustic Wave Devices. *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, 2000. vol. 49. pp. 648–652.
5. Steindl R., Hausleitner Ch., Pohl A., Hauser H., Nicolics J. Passive wirelessly requestable sensors for magnetic field measurements. Sens Actuators A., 2011, vol. 85, pp. 69–174.
6. Al Rowais H., Li B., Liang C., Green S., Gianchandani Y., Kosel J. Development of a Passive and Remote Magnetic Microsensor with Thin-Film Giant Magnetoimpedance Element and Surface Acoustic Wave Transponder. *Appl. Phys.,* 2001, vol. 109, p. 07E524.
7. Li B., M. H., Salem N.P., Giouroudi I., Kosel J. Integration of Thin Film Giant Magneto Impedance Sensor and Surface Acoustic Wave Transponder. *Appl. Phys.* 2012, vol. 111, p. 07E514.
8. Morikawa T., Nishibe Y., Yamadera H., Nonomura Y., Takeuchi M., Taga Y. Giantmagneto-Impedance Effect in Layered Thin Films. *IEEE Trans Magn.*, 2009, vol. 33, pp. 4367–4372.
9. Dvornikov A.A., Ogurtsov V.I., Utkin G.M. *Stabilnyye generatory s filtrami na poverkhnostnykh akusticheskikh volnakh.* [Stable generators with filters on surface acoustic waves]. Moscow, Radio i svyaz., 1983, 136 p.
10. *Issledovaniye magnitnykh svoystv ferritov.* [Research of magnetic properties of ferrites]. Available at: https://zdamsam.ru/a59111.html (accessed: 12.03.2020).

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2020, том 9, № 2, с. 184–188

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 519.218

СВОЙСТВО ТРАНЗИТИВНОСТИ ОТНОШЕНИЯ КОИНТЕГРАЦИИ И ТЕСТ ЭНГЛА–ГРЭНДЖЕРА

© 2020 г. К. С. Кузнецова*

Липецкий государственный технический университет, Липецк, 398050, Россия

**e-mail: xskuznetsova@gmail.com*

Поступила в редакцию 06.10.2019 г.
После доработки 13.03.2020 г.
Принята к публикации 28.04.2020 г.

При попытке рассмотрения системы двух и более уравнений коинтеграции с одинаковыми переменными встал вопрос об исследовании свойств отношения коинтеграции, а именно о наличии у такого отношения стандартных свойств: рефлексивности, симметричности, транзитивности. В данной работе рассмотрено свойство транзитивности отношения коинтеграции. Приведено теоретическое обоснование транзитивности коинтеграции. Проведен вычислительный эксперимент с использованием теста Энгла–Грэнджера для проверки свойства транзитивности отношения коинтеграции. Было показано, что статистические тесты не всегда подтверждают теоретические выкладки: тест Энгла–Грэнджера отвергал нулевую гипотезу для пар (Z, Y) и (Y, X) в пользу коинтеграции, но не всегда отвергал ее для пары (Z, X). Приведена возможная интерпретация данного результата: низкая мощность и высокая вероятность ошибки второго рода теста Дики–Фуллера, на котором основан тест Энгла–Грэнджера. Предложена новая методология выявления коинтегрированных пар активов: тестировать остатки от регрессии, полученные с помощью теста Энгла–Грэнджера, на стационарность с помощью теста KPSS, и объединять результаты данных тестов. Приведены результаты бэктестов предложенной методологии на данных Московской биржи 2017 года. По результатам бэктестов, среднегодовая доходность при использовании предложенной методологии идентификации коинтегрированных пар акций составила 19.67%. По сравнению с идентификацией коинтегрированных пар акций с помощью теста Энгла–Грэнджера, удалось увеличить среднегодовую доходность на 7.05%.

Ключевые слова: случайные процессы, стационарные процессы, коинтеграция, тест Энгла–Грэнджера, тест KPSS

DOI: 10.1134/S2304487X2002008X

1. ВВЕДЕНИЕ

Актуальность данной работы определяется широким применением коинтегрированных пар активов для построения рыночно-нейтральной стратегии и алгоритмической торговли в хедж-фондах [1].

В работе [2] доказано, что если X и Y коинтегрированы и Y и W коинтегрированы, то должна существовать коинтеграция в рядах X, Y и W и в рядах X и W.

Так как X и Y коинтегрированы, то существуют такие a, b и c, что $aX + bY + c$ является $I(0)$. Поскольку коинтегрированы Y и W, то существуют такие p, q и r, что $pY + qW + r$ является $I(0)$.

Сложение дает $aX + (p + b)Y + qW + (c + r)$, что является $I(0)$, отсюда существует коинтеграция X, Y и W. Умножение на p и b соответственно и вычитание дают ряд $apX - bqW + (cp - br)$, который также является $I(0)$, а значит между X и W существует коинтеграция.

В работе [3] дается возможное объяснение, почему иногда каждая из двух переменных Y и Z коинтегрирована с другой переменной X, но Y и Z не коинтегрированы друг с другом (подробнее см. п. 4).

При попытке рассмотрения системы двух и более уравнений коинтеграции с одинаковыми переменными встал вопрос об исследовании свойств отношения коинтеграции, а именно о наличии у такого отношения стандартных свойств: рефлексивности, симметричности, транзитивности.

Целью данной работы является исследование свойства транзитивности отношения коинтеграции. Для достижения указанной цели были поставлены следующие задачи.

1. Теоретическое обоснование свойства транзитивности отношения коинтеграции.

2. Проведение вычислительного эксперимента с использованием теста Энгла–Грэнджера [4] для проверки свойства транзитивности отношения коинтеграции.

3. Интерпретация полученного результата.

4. Разработка новой методологии идентификации коинтегрированных пар активов.

5. Проведение бэктестов полученной методологии.

Тесты, описанные в данной статье, были проведены на данных Московской биржи за 2017 год. Всего в исследовании участвовало 295 акций, представленных временными рядами.

2. КОИНТЕГРАЦИЯ

Рассмотрим нестационарный ряд x_t. Возьмем его первые разности $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$. Если ряд Δx_t является стационарным, то x_t называется интегрируемым порядка 1, $x_t \sim I(1)$. Соответственно, стационарный ряд Δx_t называется $I(0)$. Вообще, ряд называется интегрируемым порядка k, $x_t \sim I(k)$, если он и его разности до порядка $k-1$ включительно нестационарны, а k-я разность стационарна [5].

Пусть есть два $I(1)$ ряда, x_t и y_t. Пусть, кроме того, их линейная комбинация $y_t - \beta x_t$ является стационарной, $I(0)$. В этом случае ряды x_t и y_t называются коинтегрированными:

$$\begin{gathered} y_t = \beta x_t + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t \sim i.i.d.(0, \sigma^2), \quad t = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{1}$$

Другими словами, x_t, y_t коинтегрированы $\Leftrightarrow \exists \beta$, такое что

$$\varepsilon_t = y_t - \beta x_t \sim I(0). \tag{2}$$

Коинтеграция означает, что, хотя многие события могут вызывать необратимые изменения в x_t и y_t, существует некоторое долгосрочное динамическое равновесие, которое связывает x_t и y_t вместе и которое представлено их линейной комбинацией $y_t - \beta x_t$ [5].

3. ТРАНЗИТИВНОСТЬ

Отношение A называется транзитивным, если $A^2 \subseteq A$, где A^2 – его композиция с самим собой. Раскрывая алгебраическое условие, приходим к следующему: если xAy и yAz, то выполнено xAz [6].

Положим, что есть три $I(1)$ ряда x_t, y_t и z_t, $t = 0, \ldots, T$. Коинтеграция транзитивна, если $z_t = \beta_1 y_t + \varepsilon_{1t}$ и $y_t = \beta_2 x_t + \varepsilon_{2t}$ влечет $z_t = \beta_3 x_t + \varepsilon_{3t}$.

Рассмотрим уравнения:

$$z_t = \beta_1 y_t + \varepsilon_{1t}, \tag{3}$$

$$y_t = \beta_2 x_t + \varepsilon_{2t}. \tag{4}$$

Подставим уравнение 4 в уравнение 3:

$$z_t = \beta_1(\beta_2 x_t + \varepsilon_{2t}) + \varepsilon_{1t} = \beta_1\beta_2 x_t + \beta_1\varepsilon_{2t} + \varepsilon_{1t}. \tag{5}$$

Заменим $\beta_1\beta_2$ на β_3, а $\beta_1\varepsilon_{2t} + \varepsilon_{1t}$ на ε_{3t}, получим $z_t = \beta_3 x_t + \varepsilon_{3t}$. Следовательно, отношение коинтеграции является транзитивным.

Из теоретических выкладок можно ожидать, что если переменная Z коинтегрирована с переменной Y, а переменная Y коинтегрирована с переменной X, то переменная Z должна быть коинтегрирована с переменной X. Однако тест Энгла–Грэнджера для коинтеграции не всегда подтверждает это свойство транзитивности, поскольку иногда переменная Z не будет коинтегрирована с переменной X в соответствии с этим тестом.

Протестируем свойство транзитивности:

1. С помощью теста Дики–Фуллера [5] было выявлено 245 акций, которые представляют собой интегрирумый ряд 1-го порядка. Из исследования были исключены акции с нулевым объемом сделок и со структурными разрывами.

2. Из акций, выявленных в п. 1, было составлено 29890 пар.

3. С помощью теста Энгла–Грэнджера было выявлено 7253 коинтегрированные пары вида $\langle z, y \rangle$. Тест проводился без лагов при уровне значимости 0.05.

4. С помощью операции соединения (реляционная алгебра) было составлено 237692 тройки: $\langle z, y \rangle \times \langle y, x \rangle = \langle z, y, x \rangle$.

5. Было проверено, присутствует ли пара $\langle z, x \rangle$ в исходном массиве из п. 3. Для 146124 из 237692 (62%) троек свойство транзитивности выполнилось, для 91568 из 237692 (38%) троек свойство транзитивности не выполнилось.

4. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

В [3] данный парадокс интерпретируется взаимодействием остатков регрессии между Z и Y с одной стороны и между Y и X с другой, что может объяснить различное поведение теста при анализе взаимосвязи между Z и X.

Мы предлагаем интерпретировать данный парадокс низкой мощностью и высокой вероятностью ошибки второго рода теста Дики–Фуллера, на котором основан тест Энгла–Грэнджера. Как описано в [7], тест Дики–Фуллера не способен различить нестационарные и около-нестационарные временные ряды.

Рассмотрим временной ряд $x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$. Стационарным временным рядом называется такой ряд, в котором $0 < \phi < 1$. Нестационарным временным рядом называется такой ряд, в котором $\phi = 1$. Около-нестационарным временным рядом называется такой ряд, в котором значение ϕ близко к единице [8].

В случае около-нестационарных временных рядов мы часто не способны отклонить нулевую гипотезу нестационарности. Это означает, что у теста Дики–Фуллера высокий риск ошибки второго рода, то есть вероятность не отклонить ложную нулевую гипотезу.

Если с помощью тестов были выявлены коинтегрированные пары $\langle z, y\rangle$ и $\langle y, x\rangle$, но не была выявлена коинтегрированная пара $\langle z, x\rangle$, то есть если мы не наблюдаем транзитивность отношения коинтеграции, мы можем заключить, что одна из пар $\langle z, y\rangle$ или $\langle y, x\rangle$ была ошибочно выявлена как коинтегрированная.

5. ТЕСТ KPSS

Возможным ответом на слабость теста Дики–Фуллера является тест KPSS, который обязан своим названием инициалам ученых Квятковского, Филлипса, Шмидта и Шина [9]. Хотя методический подход этого теста полностью отличается от подхода Дики–Фуллера, главное различие следует понимать в перестановке нулевой и альтернативной гипотез.

В тесте KPSS нулевая гипотеза утверждает, что временной ряд является стационарным, против альтернативной о наличии нестационарности. Около-нестационарные временные ряды, которые с помощью теста Дики–Фуллера часто выявлялись как нестационарные, с помощью теста KPSS могут быть корректно выявлены как стационарные.

Однако мы должны сознавать, что любые результаты статистического тестирования являются всего лишь теоретико-вероятностными, и их не следует путать с неким истинным суждением. Всегда существует ненулевая вероятность, что мы ошибаемся. По этой причине в [7] в качестве идеального тестирования на нестационарность предлагается объединение результатов тестов Дики–Фуллера и KPSS.

Из-за низкой мощности тест Дики–Фуллера часто ошибочно выявляет ряд как нестационарный, поэтому результирующее множество временных рядов, выявленных тестом Дики–Фуллера как нестационарные, оказывается больше по сравнению с множеством временных рядов, выявленных как нестационарные с помощью теста KPSS. Следовательно, порядок тестирования важен.

Если временной ряд выявлен как стационарный с помощью теста Дики–Фуллера, то он, скорее всего, будет также выявлен как стационарный и с помощью теста KPSS; в таком случае мы можем предполагать, что ряд и в самом деле стационарный.

Если временной ряд был выявлен как нестационарный с помощью теста KPSS, то он, скорее всего, будет также выявлен как нестационарный и с помощью теста Дики–Фуллера; в таком случае мы можем предполагать, что ряд и в самом деле нестационарный.

Однако, часто случается, что временной ряд, который был выявлен как нестационарный с помощью теста Дики–Фуллера, будет отмечен как стационарный с помощью теста KPSS. В таком случае мы должны быть очень осторожны с нашим окончательным заключением. Мы можем проверить, насколько сильно основание для стационарности в случае теста KPSS и для нестационарности в случае теста Дики–Фуллера и принять соответствующее решение. Конечно, мы также можем оставить вопрос о стационарности такого временного ряда нерешенным.

6. ОБЪЕДИНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕСТОВ

Уточним результаты тестирования, полученные ранее в разделе 3.

1. Количество интегрируемых рядов 1-го порядка, выявленных ранее с помощью теста Дики–Фуллера (245 акций), было уточнено с помощью теста KPSS. В результате было получено 244 интегрируемых ряда 1-го порядка.

2. Из интегрируемых рядов 1-го порядка, полученных в п. 1, было составлено 29646 пар.

3. Пары акций, составленные в п. 2, были протестированы на коинтеграцию с помощью теста Энгла–Грэнджера. В результате было выявлено 7128 коинтегрированных пар.

Мы предлагаем в качестве новой методологии выявления коинтегрированных пар активов тестировать остатки от регрессии, полученные с помощью теста Энгла–Грэнджера, на стационарность с помощью теста KPSS, и объединять результаты трех данных тестов [10, 11].

4. Остатки от регрессии, полученные в результате тестирования в п. 3, были протестированы на стационарность с помощью теста KPSS. Объединив результаты двух тестов, было получено 9 коинтегрированных пар.

Предложенная методология в автоматическом режиме из достаточно большого количества пар (29646 пар) очень аккуратно выбрала 9 коинтегрированных пар.

Таблица 1. Результаты бэктестов

Критерии	Тест Энгла–Грэнжера	+ тест KPSS
Количество пар	6034	173
Максимальная прибыль	287.35%	287.35%
Максимальный убыток	−53.28%	−37.29%
Пар торговалось в плюс	2701	89
Пар торговалось в ноль	259	2
Пар торговалось в минус	3074	82
Среднегодовая доходность	12.62%	19.67%

Таким образом, пары из раздела 3, для которых не подтвердилась транзитивность, были ошибочно выявлены как коинтегрированные.

7. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Предложенная нами новая методология может быть использована для построения рыночно-нейтральной стратегии и алгоритмической торговли в хедж-фондах. Мы провели так называемые бэктесты – имитационное моделирование прибыльности торговой стратегии на исторических данных.

Торговая стратегия, которая применялась в данных бэктестах, была взята из работ [12, 13]. Данные взяты с Московской биржи за 2017 год. Результаты бэктестов, основанных на применения двух методологий, представлены в таблице 1.

Как можно видеть из таблицы 1, благодаря более точной идентификации коинтегрированных пар акций, удалось увеличить среднегодовую доходность при торговле отдельной коинтегрированной парой на 7.05%. Таким образом, предложенная методология может увеличить прибыльность алгоритмической торговли при использовании рыночно-нейтральных стратегий.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье было приведено теоретическое обоснование свойства транзитивности отношения коинтеграции, а также проведен вычислительный эксперимент с использованием теста Энгла–Грэнджера и для проверки свойства транзитивности отношения коинтеграции.

Было показано, что хотя свойство транзитивности отношения коинтеграции, теоретически, должно выполняться, экспериментальные данные расходятся с теоретическими выкладками. Мы рассмотрели парадоксальный результат теста Энгла–Грэнджера: коинтеграция была выявлена для пар (X, Y) и (Y, Z), но не всегда была выявлена для пары (X, Z). Мы интерпретировали данный результат низкой мощностью теста Дики–Фуллера.

В качестве новой методологии выявления коинтегрированных пар активов было предложено тестировать остатки от регрессии, полученные с помощью теста Энгла–Грэнджера, на стационарность с помощью теста KPSS, и объединять результаты данных тестов.

Были проведены бэктесты на данных Московской биржи за 2017 год. По результатам бэктестов, среднегодовая доходность при использовании предложенной выше методологии идентификации коинтегрированных пар акций составила 19.67%. Таким образом, по сравнению с идентификацией коинтегрированных пар акций с помощью теста Энгла–Грэнджера, удалось увеличить среднегодовую доходность на 7.05%.

Полученные результаты могут быть использованы в инвестиционных компания и хедж-фондах для более корректного выявления коинтегрированных пар активов, построения более прибыльной рыночно-нейтральной стратегии и увеличения эффективности алгоритмической торговли на фондовых рынках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vidyamurthy G.* Pairs trading: quantitative methods and analysis. Wiley, 2004.
2. *Уотшем Т., Паррамоу К.* Количественные методы в финансах / Пер. с англ. под ред. М.Р. Ефимовой. М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999.
3. *Ferre M.* The Johansen Test and the Transitivity Property // Economics Bulletin, 2004. V. 3 (27). P. 1–7.
4. *Энгл Р., Грэнджер К.* Коинтеграция и коррекция ошибок: представление, оценивание и тестирование // Прикладная эконометрика, 2015. № 39 (2). С. 107–135.
5. *Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А.* Эконометрика. Начальный курс: учебник. М.: Дело, 2004.
6. *Шрейдер Ю.А.* Равенство, сходство, порядок. М.: Наука, 1951.
7. *Kocenda E.* Elements of time series econometrics: an applied approach. Karolinum press, 2015. 220 p.
8. *Stock J.* Cointegration, Long-Run Comovements, and Long-Horizon Forecasting // Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications, 1997. V. 3. P. 34–60.
9. *Kwiatkowski D., Phillips P., Schmidt P., Shin Y.* Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root // Journal of Econometrics, 1992. V. 54 (1–3). P. 159–178.
10. *Блюмин С.Л., Кузнецова К.С.* Свойство симметричности отношения коинтеграции и тест Энгла–Грэнджера // Вести высших учебных заведений Черноземья, 2019. № 2 (56). С. 76–85.
11. *Кузнецова К.С.* Свойство симметричности отношения коинтеграции – URL: https://habr.com/ru/post/457794/ (дата обр. 29.08.2019)
12. *Кузнецова К.С.* Анализ эффективности торговли коинтегрированными парами на фондовых рынках //

Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем: материалы конференции. Томск, 2017. С. 180–188.

13. *Кузнецова К.С.* Торговая стратегия для торговли коинтегрированными парами акций. URL: https://habr.com/post/344674/ (дата обр. 29.08.2019)

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 2, pp. 184–188

Transitivity Property of the Cointegration Relationship and the Engle–Granger Test

X. Kuznetsova[#]

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, 398050 Russia

[#]*e-mail: xkuznetsova@gmail.com*

Received October 6, 2019; revised March 13, 2020; accepted April 28, 2020

Abstract—To consider the system of two or more cointegration equations with the same variables, it appears necessary to reveal whether the cointegration relationship has the standard properties of reflexivity, symmetry, and transitivity. In this work, the transitivity property of the cointegration relationship is analyzed. The theoretical substantiation for the transitivity of cointegration is presented. The computational experiment with the use of the Engle–Granger test to check the transitivity property of the cointegration relationship is carried out. It has shown that statistical tests do not necessarily confirm the theoretical calculations: the Engle–Granger test rejects the null hypothesis for the (Z; Y) and (Y; X) pairs in favor of cointegration, but does not necessarily reject it for the (Z; X) pair. A possible interpretation of this result has been proposed: low power and high probability of type II error of the Dickey–Fuller test underlying the Engle–Granger test. A new methodology for identifying cointegrated asset pairs has been proposed: to test the regression residuals obtained with the Engle–Granger test for stationarity using the KPSS test and combine the results of these tests. The results of the backtests of the proposed methodology on the Moscow Exchange 2017 data are presented. According to the results of the backtests, the average annual return on the proposed methodology for identifying cointegrated pairs of shares was 19.67%. Compared to identifying cointegrated pairs of shares using the Engle–Granger test, the average annual return increased by 7.05%.

Keywords: stochastic processes, cointegration, Engle–Granger test, KPSS test

DOI: 10.1134/S2304487X2002008X

REFERENCES

1. Vidyamurthy G. Pairs trading: quantitative methods and analysis. Wiley, 2004.
2. Watsham T., Parramore K. Quantitative Methods in Finance. Cengage Learning EMEA, 1996.
3. Ferre M. The Johansen Test and the Transitivity Property. *Economics Bulletin*, 2004, vol. 3 (27), pp. 1–7.
4. Engle R., Granger C. Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing. *Econometrica*, 1987, vol. 55, no. 2, pp. 251–276.
5. Magnus Y.R., Katyshev P.K., Peresetski A.A. *Ekonometrika. Nachalnyj kurs: uchebnik* [Econometrics. Basic course: textbook]. Moscow: Delo, 2004 (in Russian).
6. Shreider Y.A. *Ravenstvo, skhodstvo, poryadok* [Equality, similarity, order]. Moscow: Nauka, 1951 (in Russian).
7. Kocenda E. Elements of time series econometrics: an applied approach. Karolinum press, 2015.
8. Stock J. Cointegration, Long-Run Comovements, and Long-Horizon Forecasting. *Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications*, 1997, vol. 3, pp. 34–60.
9. Kwiatkowski D., Phillips P., Schmidt P., Shin Y. Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. *Journal of Econometrics*, 1992, vol. 54 (1–3), pp. 159–178.
10. Blyumin S., Kuznetsova X. Svojstvo simmetrichnosti otnosheniya kointegracii i test Engla–Grendzhera [The symmetry property of the cointegration relation and Engle–Granger test]. *News of Higher Educational Institutions of the Chernozem Region*, 2019, vol. 2 (56), pp. 76–85 (in Russian).
11. Kuznetsova X. *Svojstvo simmetrichnosti otnosheniya kointegracii* [The symmetry property of the cointegration relation]. Available at: https://habr.com/ru/post/457794/ (accessed 29.08.2019)
12. Kuznetsova X. Analiz effektivnosti torgovli kointegrirovannymi parami na fondovyh rynkah [Analysis of the trade effectiveness of cointegrated pairs in stock markets]. *Matematicheskoe i programmnoe obespechenie informacionnyh, tekhnicheskih i ekonomicheskih sistem: materialy konferencii* [Software of information, technical and economic systems: conference proceedings]. Tomsk, 2017, pp. 180–188 (in Russian).
13. Kuznetsova X. *Torgovaya strategiya dlya torgovli kointegrirovannymi parami akcij* [Trading strategy for trading cointegrated stock pairs]. Available at: https://habr.com/post/344674/ (accessed 29.08.2019)

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2020, том 9, № 2, с. 189–196

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 004.032.26

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТИПА ИМИТАЦИИ ВОЗРАСТА В ТЕКСТЕ[1]

© 2020 г. А. Г. Сбоев[1,2,*], И. А. Молошников[1], Р. Б. Рыбка[1], А. В. Наумов[1]

[1] *Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, 123182, Россия*

[2] *Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия*

**e-mail: sag111@mail.ru*

Поступила в редакцию 19.12.2019 г.
После доработки 19.12.2019 г.
Принята к публикации 10.03.2020 г.

В данной работе рассмотрен метод интерпретации результатов определения типа имитации возраста в тексте для модели на основе управляемого рекуррентного блока (Gated Recurrent Unit, GRU), с дополнительным слоем сети, отражающим активности скрытого слоя для каждого слова в тексте. При этом использовался собранный с помощью краудсорсинговой платформы корпус для задачи определения типа имитации возраста в тексте. Корпус содержит три типа текстов: тексты, написанные в естественном стиле автора, тексты с имитацией стиля младшего возраста, тексты с имитацией стиля старшего возраста. Тексты были представлены в сегментированном на слова и предложения виде, а также произведен их морфологический разбор и лемматизация с использованием программы UDPipe. Топология сети включает: внутренний двунаправленный слой GRU размерностью 32, выходом слоя являются активности для каждого слова документа, передаваемые в полносвязанный слой с активационной функцией ReLU размерностью 32 и в еще один полносвязанный слой с активационной функцией гиперболический тангенс, размерностью 3, по числу классов имитации возраста. Дополнительный интерпретирующий слой возвращает коэффициенты, определяющие к какому классу относится текст. По результатам проведенного анализа экспериментов выявлено, что характерными признаками для определения типа имитации возраста в тексте является то, как человек начинает этот текст и какое приветствие использует.

Ключевые слова: интерпретация результатов, искусственные нейронные сети, обработка естественного языка, классификация текстов, авторское профилирование, имитация стиля другого возраста в тексте

DOI: 10.1134/S2304487X20020121

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос интерпретируемости результатов нейросетевых моделей в последнее время стал носить все более острый характер, в особой степени благодаря более широкому использованию сетей глубокого обучения, которые отличаются высокой эффективностью, но слабой интерпретируемостью получаемых результатов.

Поиски компромисса между точностью модели и интерпретируемостью данных, полученных с ее помощью приводят зачастую к выбору менее эффективного, но более интерпретируемого метода.

Интерперетация результатов классификации достаточно распространена в задачах анализа изображений.

В работе [4] авторы предлагают методику создания “визуальных объяснений” (выделения областей на изображении значимых для определенного класса) на основе сверточных нейронных сетей (CNN).

Этот подход использует градиенты целевого класса, вычисляемые в последнем сверточном слое для получения грубой карты локализации, выделяющей важные области в изображении для прогнозирования этого класса.

Другой подход для интерпретации решений, предложенный в работе [2] основан на работе с данными и уже готовыми обученными моделями.

Авторы предлагают итеративно вносить изменения в оригинальные данные и, анализируя предсказания модели, смотреть, как эти измене-

[1] Работа была выполнена с использованием оборудования центра коллективного пользования “Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса” НИЦ “Курчатовский институт”, http://ckp.nrcki.ru/

ния влияют на правильность предсказания класса.

По сути это решения задачи “черного ящика”: подавая части данных исходной модели на ввод и получая от нее ответ, можно понять, какие именно части отвечают за конечный результат, и за счет этого получить интерпретацию решения.

Данный подход дает хорошие результаты для интерпретации данных фиксированной длины – это могут быть задачи классификации изображений или текстов.

При этом тексты должны быть представлены как фиксированное множество слов, что снижает качество интерпретируемости, так как одни и те же слова в документе в разных контекстах могут отражать разные классы.

Второй проблемой данного метода является необходимость большого числа запусков модели на измененных данных, что накладывает дополнительные ограничения на вычислительные мощности.

В данной работе предлагается подход для интерпретации результатов задачи классификации текста с возможностью указать вклад каждого слова или последовательности слов произвольной длины по отдельному классу.

В отличие от вышеприведенных методов, данный подход позволяет интерпретировать результаты классификации за счет модификации архитектуры нейронной сети.

Анализируя результаты интерпретации легче выделить закономерности, отраженные в данных по конкретной задаче.

В работе приводится пример анализа задачи классификации текстов по трем классам: тексты, написанные в естественном стиле автора, попытка имитировать стиль младшего возраста, попытка имитировать стиль старшего возраста.

Анализ с использованием предложенного метода показал, что характерной чертой, определяющей класс имитации, является приветствие в тексте.

2. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

2.1. Краткое описание метода

В данной работе использовалась модель на основе слоев GRU (Управляемый рекуррентный блок, Gated Recurrent Unit [1]). Для классификации текст подается в виде последовательности слов с различными морфологическими признаками. Классификация производится по сумме активностей скрытого слоя за каждый класс, размерность выхода скрытого слоя равна числу классов.

GRU – это одна из разновидностей рекуррентных сетей с использованием механизмов вентилей (gate). В отличие от аналогичного механизма в сетях с долгосрочной кратковременной памятью (LSTM), данная сеть имеет меньше параметров для обучения и у нее отсутствует отдельное скрытое состояние (ячейка памяти как в LSTM).

То есть активности сети для соседних слов будут более взаимозависимы, чем в LSTM, это улучшает возможности сети по интерпретации результатов.

2.2. Предварительная обработка данных

Тексты были сегментированы на слова и предложения, а также произведен морфологический разбор и лемматизация с использованием программы UDPipe [5].

В модель текст подается в виде последовательности слов.

Для кодирования слов используется посимвольное представление словоформы, уникальное ID леммы, ID словоформы, часть речи, полный морфологический тэг.

Для кодирования символов слова, леммы, словоформы и часть речи используется уникальный ID, который представлен в виде уникального порядкового номера для каждого значения (в модели эти номера передаются в слой вложения – Embedding), полный морфологический тэг представлен в виде конкатенации бинарных представлений для каждой группы (род, число, падеж, и т.д.) (OneHotEncoding).

2.3. Топология сети

Топологию сети можно разделить на 3 уровня анализа:

- Вход сети – отвечает за анализ каждого слова в документе;
- Внутренний слой (скрытый слой) – возвращает активности на каждое слово для каждого класса;
- Выходной слой – производит суммирование и нормализацию активностей всех слов в документе для предсказания типа имитации возраста.

Схема топологии представлена на рисунке 1.

ВХОД СЕТИ

Для обработки посимвольного представления словоформы каждый символ слова подается в слой embedding размерностью 5 (embedding-слой представляет собой совмещение бинарного кодирования (OneHotEncoding) и линейного полносвязного слоя, что позволяет хранить исходные данные в сжатом формате индекса). После embedding-слоя используется двунаправленный слой GRU, размерностью 5 нейронов для каждого

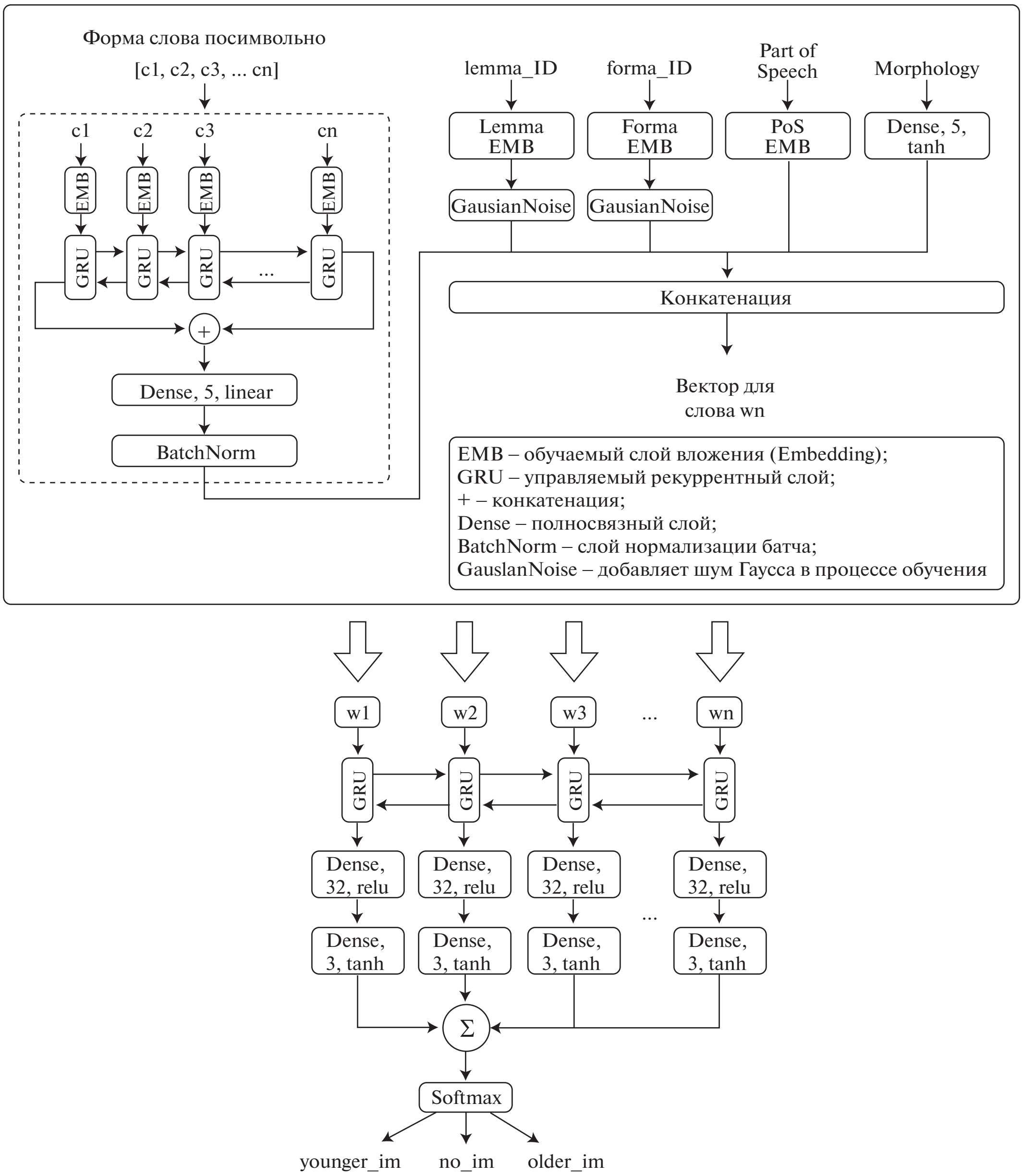

Рис. 1. Топология нейронной сети.

направления. Выходом слоя является вектор для слова.

Далее этот вектор подается в полносвязанный слой размерностью 5 с линейной функцией активации. К выходу этого слоя применяется нормализация батча (BatchNormalization – нормализует активности, таким образом, чтобы активность слоя в батче имела среднее значение 0 со стандартным отклонением, равным 1).

Индексы словоформы и леммы подаются в соответствующие им embedding-слои (на рисунке 1 это входы forma_ID и lemma_ID).

Далее в процессе обучения к закодированным представлениям для лемм и словоформ добавляется гауссов шум (additive zero-centered Gaussian noise) со значением стандартного отклонения, равным 0.8. Использование шума позволяет сделать так, чтобы сеть опиралась на дополнительные признаки, такие как морфология и посимвольное представление, а не “учила” словарь слов.

Дополнительно при кодировании слова используется часть речи, закодированная с использованием слоя embdedding размерностью 5 и полный морфологический тэг. Для кодирования морфологического тэга используется бинарное кодирование (OneHotEncoding) в рамках каждой группы (род, число, падеж и т.д.), далее закодированный морфологический тэг подается в полно-

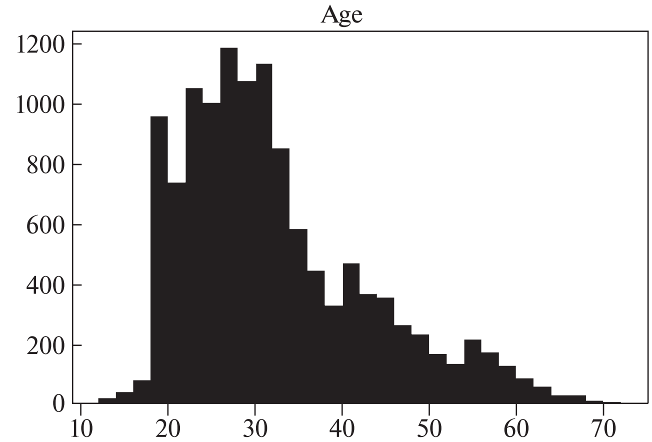

Рис. 2. Гистограмма распределения возрастов авторов по корпусу текстов.

связанный слой с активационной функцией гиперболический тангенс (tanh) размерностью 5.

В итоге все вектора (посимвольное кодирование, embedding для словоформы и леммы, часть речи, морфология) конкатенируются – это и есть закодированное представление слова.

ВНУТРЕННИЙ СЛОЙ (СКРЫТЫЙ СЛОЙ)

Далее для каждого слова необходимо получить активности по каждому из 3-х классов. Для этого закодированное представление подается в двунаправленный слой GRU размерностью 32, выходом слоя являются активности для каждого слова документа.

Далее каждая активность передается в полносвязанный слой с активационной функцией ReLU размерностью 32 и в еще один полносвязанный слой (word_hidden на схеме) с активационной функцией гиперболический тангенс (tanh), размерностью 3, по числу классов имитации возраста.

ВЫХОДНОЙ СЛОЙ

Для интерпретации результатов в сеть был добавлен дополнительный слой “word_hidden”, отражающий активности скрытого слоя для каждого слова. Слой “word_hidden” возвращает коэффициенты для каждого слова в тексте относительно трех классов (без имитации, имитация старшего возраста, имитация младшего возраста), после суммирования всех коэффициентов слов для каждого класса определяется, к какому классу относится текст. Тем самым, получая коэфициент для каждого слова, мы можем понять, почему модель отнесла тот или иной текст к определенному классу.

ПАРАМЕТРЫ ОБУЧЕНИЯ

При обучении использовался метод оптимизации Adam [2] со значением learning rate, равным 0.003, и функцией ошибки categorical crossentropy, с использованием раннего останова по валидационному множеству (ранний останов после 32 эпох с момента, когда ошибка на валидационном множестве стала расти).

После раннего останова загружаются веса на момент наименьшей ошибки на валидационном множестве, размер батча 8.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. Описание корпуса

В работе использовался корпус для задачи определения типа имитации возраста в тексте. Для сбора корпуса использовалась краудсорсинговая платформа.

Каждый респондент мог выполнить одно или более заданий, задание для респондента выбиралось случайным образом:

• “Расскажите о себе или не о себе, но главное попытайтесь понравиться своему собеседнику и добиться его расположения”;

• “Расскажите о запомнившемся событии/приобретении/слухах или еще что-то интересное, так чтобы понравилось вашему собеседнику”;

• “Попробуйте уговорить вашего собеседника (это может быть, кто угодно) встретиться на вашей территории (где угодно)”.

Распределение возрастов авторов по корпусу приведено на рисунке 2.

В каждом задании необходимо было написать 3 текста: от своей возрастной группы, попытаться имитировать стиль человека старшего возраста, попытаться имитировать стиль человека младшего возраста. Исследования проводились на корпусе размером 10014 документов.

Корпус в равном количестве для каждого класса состоит из текстов без имитации возраста, с попыткой имитации более старшего возраста и более младшего.

Для оценки классификации множество было разбито на 3 части: тренировочное (60% 6027 текстов), валидационное (~20%, 1926 текстов) и тестовое (~20%, 2061 текстов). Разбиение проводилось по авторам.

3.2. Точность классификации

Результаты исследования представлены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты, оценка определения типа имитации на тестовом множестве

	Precision	Recall	F-score
Класс “no_im”	0.74	0.64	0.68
Класс “older”	0.73	0.89	0.80
Класс “younger”	0.89	0.82	0.85
В среднем	0.78	0.78	0.78

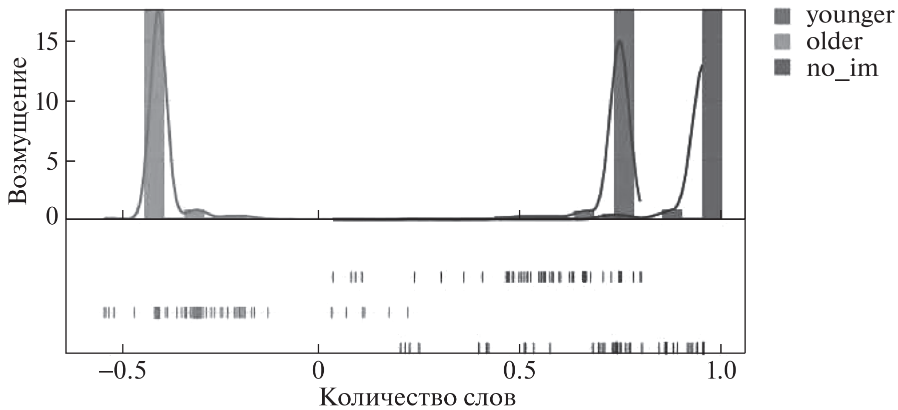

Рис. 3. Распределение коэффициентов для леммы "привет".

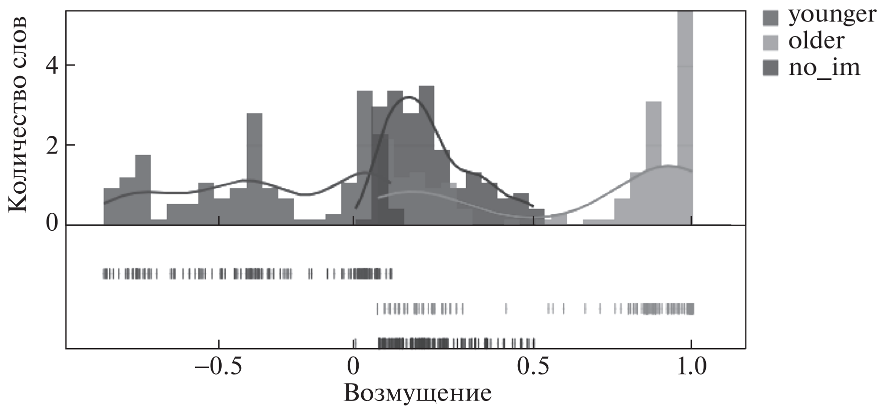

Рис. 4. Распределение коэффициентов для леммы "дорогой".

Средняя оценка по F1-метрике составляет 0.78, лучший результат сеть показала в определении имитации более молодого возраста в тексте – 0.85.

3.3. Интерпретация

Для интерпретации используется активность скрытого слоя для каждого класса. Активность скрытого слоя используется для интерпретации отношения каждого слова к заданным классам. Для каждого слова в рамках тестового множества был получен список его активностей в каждом документе.

По данному списку рассчитаны статистические характеристики, такие как среднее, медиана и стандартное отклонение и построена гистограмма активности за тот или иной класс.

Как видно из графиков на рис. 3 и 4 одна и таже лемма может получать разные значения коэффициентов в зависимости от контекста.

Однако, несмотря на это, можно выделить некоторые слова, которые обычно дают наибольший вклад в сторону того или иного класса.

Например, слова "здравствуйте", "дорогой", "добрый" были определены сетью как слова, свойственные текстам, имитирующим старший возраст, то есть имеющим больший коэффициент для класса "older" и меньший для "younger"; а такие слова как "хай", "прикольный", "бро" вносят больший вклад в сторону класса "younger".

Стоит отметить, что паттерны сформировавшиеся у сети, в целом, верные: очевидно, что пытаясь казаться старше, люди используют более формальную речь, в свою очередь, пытаясь имитировать молодой возраст, люди чаще используют неформальную речь и сленг.

В табл. 2 представлен список из 20 характерных слов для каждого класса и приведена средняя по всему тестовому множеству активность нейрона соответствующего класса (no_im, younger, older). В таблицу отбирались леммы, встречающиеся 10 и более раз в тексте и имеющие максимальную активность для класса (положительную или отрицательную).

Активность отражает значимость слова для данного класса. Положительная активность по-

Таблица 2. Слова, имеющие максимальный и минимальный вклад для классификации текстов за каждый класс

Лемма	“no_im”	Лемма	“younger”	Лемма	“older”
привет	0.93	привет	0.73	здравствовать	0.91
привать	0.69	Приветик	0.68	приветствовать	0.89
прить	0.65	приветик	0.60	добрый	0.80
приветствовать	0.35	Хай	0.59	дорогой	0.62
дмитрий	0.31	Хать	0.57	Николаевна	0.60
здравствовать	0.37	Здаров	0.48	иванович	0.58
юля	0.24	прить	0.48	сутки	0.58
кофе	0.27	здоров	0.41	милый	0.57
прекрасный	0.25	прикинь	0.39	уважаемый	0.54
ольга	0.25	привать	0.34	здоровье	0.50
крутый	–0.43	юный	–0.13	крутый	–0.47
родитель	–0.45	Николаевна	–0.18	крутой	–0.48
крутой	–0.45	дорогий	–0.23	Машка	–0.50
бро	–0.51	милый	–0.24	предок	–0.55
делишки	–0.53	здоровье	–0.32	делишки	–0.55
прикинь	–0.54	сутки	–0.33	прикинь	–0.61
приветик	–0.55	дорогой	–0.35	Хать	–0.65
предок	–0.56	добрый	–0.49	Хай	–0.66
Хай	–0.64	приветствовать	–0.50	приветик	–0.73
Хать	–0.67	здравствовать	–0.54	Приветик	–0.85

Таблица 3. Список словосочетаний различной длины со средними активностями для класса без имитации возраста

Комбинация слов	“no_im”
Привет .	0.91
Привет ! Сегодня	0.84
Привет ! Мы	0.84
Привет Всем	0.82
Привет ! Я	0.81
родители ?	–0.53
Хай , бро . Давно не	–0.53
Хай ! Как твои	–0.53
Хай , бро ! Тыщщу	–0.54
Хай бро , короче есть	–0.57

Таблица 4. Список словосочетаний различной длины со средними активностями для класса younger

Комбинация слов	“younger”
Привет мой	0.70
Привет Маша я	0.64
Привет .	0.61
Привет ,	0.60
Привет ! Я	0.57
Здравствуй , дорогой мой	–0.61
Здравствуй дорогая !	–0.62
Здравствуй , дорогая моя	–0.63
Здравствуй мой дорогой товарищ	–0.63
Здравствуй моя дорогая подруга	–0.66

казывает, что слово хорошо характеризует класс, отрицательная говорит, что слово максимально не соответствует классу.

Можно увидеть, что активность для одного и того же слова может быть разной для каждого класса.

Пример: слово “привет” имеет положительную активность 0.93 за класс “без имитации” и 0.73 за класс “younger” – это говорит, что данное слово характерно для обоих классов. Пример: слово “Хай” имеет отрицательную активность за класс “без имитации” (–0.67) и older (–0.66) и положительную за класс “younger” – это говорит о том, что данное слово является характерным только для одного класс “younger”.

Помимо отдельных слов можно определить значимость последовательностей слов различной длины. Для формирования такого словосочетания берутся слова, идущие последовательно и имеющие активность выше или ниже среднего на значение среднеквадратичного отклонения. При-

Таблица 5. Список словосочетаний различной длины со средними активностями для класса older

Комбинация слов	“older”
Здравствуй , доброго дня	0.93
Здравствуй читатель	0.91
Здравствуй , мой неизвестный друг	0.91
Здравствуй Петровна .	0.91
Добрый времени суток	0.90
Приветик . Ты просила	–0.63
Приветик ! Очень	–0.63
Приветики , как твои	–0.64
приветик ! Что	–0.70
Приветик !	–0.71

меры таких словосочетаний приведены в таблицах 3, 4, 5.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена нейронная сеть со специальной топологией, позволяющая легко интерпретировать результаты классификации. С помощью данного метода проведен анализ результатов интерпретации текстов для задачи определения типа имитации возраста. В ходе анализа выявлено, что самой характерной чертой является то, как человек начинает текст и какое приветствие использует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chung J., Gulcehre C., Cho K.H., Bengio Y.* Empirical evaluation of gated recurrent neural networks on sequence modeling. arXiv preprint arXiv:1412.3555, 2014.
2. *Diederik P., Kingma D.P., Ba J.* Adam: A method for stochastic optimization. ArXiv preprint arXiv:1412.6980, 2014.
3. *Guestrin C., Ribeiro M.T., Singh S.* “why should i trust you?”: Explaining the predictions of any classifier. arXiv:1602.04938, 2016.
4. *Ramakrishna A.D., Parikh V.D., Ramprasaath D.B., Selvaraju R., Cogswell M.* Grad-cam: Visual explanations from deep networks via gradient-based localization. arXiv:1610.02391, 2017.
5. *Straka M., Strakova J.* Tokenizing, pos tagging, lemmatizing and parsing ud 2.0 with udpipe. I*n Proceedings of the CoNLL 2017 Shared Task: Multilingual Parsing from Raw Text to Universal Dependencies*. Association for Computational Linguistics. pages 88–99, Vancouver, Canada, August 2017.

Vestnik Natsional’nogo issledovatel’skogo yadernogo universiteta “MIFI”, 2020, vol. 9, no. 2, pp. 190–197

Neural Net Model to Identify Author Age Imitation with Easy Interpret Results[2]

A. G. Sboev[a,b,#], I. A. Moloshnikov[a], R. B. Rybka[a], and A. V. Naumov[a]

[a] *National Research Center Kurchatov Institute, Moscow, 123182 Russia*

[b] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

[#]*e-mail: sag111@mail.ru*

Received December 19, 2019; revised December 19, 2019; accepted March 10, 2020

Abstract—A method for interpretation of results of identification age style imitation in the text based on a gated recurrent unit (GRU) with an additional network layer to map the activity of the hidden layer for each word in the text has been proposed. At the same time, the special corpus has been collected for the task of age imitation identification. The corpus contains three types of texts: texts written in the author’s natural style, texts with imitation of a younger person style, and texts with imitation of an older person style. The texts have been presented in a segmented form, as words and sentences, and their morphological analysis and lemmatization have been performed using the UDPipe program. The network topology includes: an internal bi-directional GRU layer of 32 neurons providing activity for each word of the document, which is an input of a fully-connected layer with the ReLU activation function and size of 32, which connected to another fully-connected layer with the hyperbolic tangent activation function and 3 neurons (just as the number of age imitation classes). An additional interpretive layer returns the coefficients determining the class to which the text belongs. The analysis of the experiments has revealed that the characteristic features for determining the age imitation type in the text are the beginning and greeting used by a person in the text.

Keywords: result interpretation, artificial neural networks, natural language processing, text classification, author profiling, age style imitation

DOI: 10.1134/S2304487X20020121

[2] This work has been carried out using computing resources of the federal collective usage center Complex for Simulation and Data Processing for Mega-science Facilities at NRC “Kurchatov Institute”, http://ckp.nrcki.ru/

REFERENCES

1. Chung J., Gulcehre C., Cho K.H., Bengio Y. Empirical evaluation of gated recurrent neural networks on sequence modeling. arXiv preprint arXiv:1412.3555, 2014.
2. Diederik P., Kingma D.P., Ba J. Adam: A method for stochastic optimization. ArXiv preprint arXiv:1412.6980, 2014.
3. Guestrin C., Ribeiro M.T., Singh S. "why should i trust you?": Explaining the predictions of any classifier. arXiv:1602.04938, 2016.
4. Ramakrishna A.D., Parikh V.D., Ramprasaath D.B., Selvaraju R., Cogswell M. Grad-cam: Visual explanations from deep networks via gradient-based localization. arXiv:1610.02391, 2017.
5. Straka M., Strakova J. Tokenizing, pos tagging, lemmatizing and parsing ud 2.0 with udpipe. In Proceedings of the CoNLL 2017 Shared Task: Multilingual Parsing from Raw Text to Universal Dependencies. Association for Computational Linguistics. pages 88–99, Vancouver, Canada, August 2017.