
СОДЕРЖАНИЕ

Том 9, номер 4, 2020

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Определение коэффициентов диффузии америция и урана
в процессе их сорбции на твердофазном экстрагенте
на основе ТОДГА

А. А. Савельев, Н. В. Клочкова, В. И. Рачков 293

Перевод реакторов типа РБТ на новое топливо

*А. М. Шараев, А. П. Малков, А. В. Пайдулов, М. Ф. Валишин,
Ю. А. Краснов, В. В. Пименов* 298

Предварительное исследование о переходе к ториевому топливному
циклу в жидкосолевом реакторе SD-TMSR

О. Аишаф, А. Д. Смирнов, С. Н. Рыжов, Г. В. Тихомиров 305

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Точные решения нелинейных уравнений в частных производных
с переменным запаздыванием типа пантографа

А. Д. Полянин, В. Г. Сорокин 315

Обобщенный вариант вариационного уравнения Гинзбурга—Ландау

Д. А. Куликов 329

Аналитические свойства решений трехмерных автономных
консервативных систем с одной или тремя квадратичными
нелинейностями без хаотического поведения

В. В. Цегельник 338

АВТОМАТИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Особенности образования помех при переключении
КМОП-элемента и воздействии ионизирующей частицы

В. Я. Стенин, Ю. В. Катунин 345

Применение многоканальной аналоговой фронтэнд микросхемы
для гамма-детекторов на основе SIPM

А. Ш. Шерги, О. В. Бычкова, Е. В. Попова, А. А. Стифуткин 357

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Прогнозирование удельных дисконтированных затрат
на производство электроэнергии на АЭС с различными
типами ядерных реакторов

Д. В. Ковганко, А. А. Андрианов

368

Обработка неструктурированной текстовой информации
с помощью алгоритмов машинного обучения

И. А. Лисенков, В. А. Кузнецов, Н. М. Леонова

376

Contents

Volume 9, Number 4, 2020

Technical Physics

Determination of the Diffusion Coefficients of Americium and Uranium in the Process of Their Sorption on a Solid-Phase Extractant Based on TODGA

A. A. Savelev, N. V. Klochkova, and V. I. Rachkov 293

Conversion of RBT Research Reactors to a New Fuel Type

A. M. Sharaev, A. P. Malkov, A. V. Paidulov, M. F. Valishin, J. A. Krasnov, and V. V. Pimenov 298

Preliminary Study on Transition to Thorium Fuel Cycle in SD-TMSR

O. Ashraf, A. D. Smirnov, S. N. Ryzhov, and G. V. Tikhomirov 305

Differential Equations and Dynamic Systems

Exact Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations with Pantograph Type Variable Delay

A. D. Polyanin and V. G. Sorokin 315

Generalized Variant of the Variational Ginzburg–Landau Equation

D. A. Kulikov 329

Analytical Properties of Solutions of Three-Dimensional Autonomous Conservative Systems with One or Three Quadratic Nonlinearities without Chaotic Behavior

V. V. Tsegel'nik 338

Automation and Electronics

Features of a Noise Pulse Formation when Switching a CMOS Element and Exposure to an Ionizing Particle

V. Ya. Stenin and Yu. V. Katunin 345

Application of the Multichannel Front-End Chip for SiPM-Based Gamma Detectors

A. C. Chergui, O. V. Bychkova, E. V. Popova, and A. A. Stifutkin 357

Applied Mathematics and Informatics

Prediction of the Levelized Cost of Electricity for Nuclear Power Plants
with Different Nuclear Reactors

D. V. Kovganko and A. A. Andrianov

386

Processing Unstructured Text Information Using by Machine
Learning Algorithms

I. A. Lisenkov, V. A. Kuznetsov, and N. M. Leonova

376

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИФФУЗИИ АМЕРИЦИЯ И УРАНА В ПРОЦЕССЕ ИХ СОРБЦИИ НА ТВЕРДОФАЗНОМ ЭКСТРАГЕНТЕ НА ОСНОВЕ ТОДГА

© 2020 г. А. А. Савельев^{1,2,*}, Н. В. Ключкова¹, В. И. Рачков²

¹ АО “Ведущий научно-исследовательский институт химической технологии”, Москва, 115409, Россия

² Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

*e-mail: AASavelev@mephi.ru

Поступила в редакцию 20.05.2020 г.

После доработки 08.07.2020 г.

Принята к публикации 09.09.2020 г.

Целью настоящей работы является показать на основе расчета и сравнения величин коэффициентов диффузии америция-241 и урана на примере их сорбции из модельного раствора жидких радиоактивных отходов с использованием различных опытных образцов ТВЭКС ТОДГА возможность определения образца с наиболее высокими кинетическими характеристиками. Рассчитаны коэффициенты диффузии америция-241 и урана в процессе их сорбции для трех опытных образцов ТВЭКС ТОДГА. Проведена оценка зависимости скорости протекания реакции от величины коэффициентов диффузии. Основываясь на зависимости величины коэффициентов диффузии от характеристик опытных образцов ТВЭКС ТОДГА, расчетным путем определена увеличенная скорость протекания сорбции для америция-241 по сравнению с ураном. На основе расчета коэффициентов диффузии америция-241 и урана определен опытный образец ТВЭКС ТОДГА с наиболее высокими кинетическими характеристиками — № 2. Показана возможность сокращения объема и затрат при проведении экспериментов по сорбции при предварительном определении коэффициентов диффузии.

Ключевые слова: сорбция, кинетика сорбции, коэффициент диффузии, америций, жидкие радиоактивные отходы, ТОДГА

DOI: 10.1134/S2304487X20040070

Одной из задач для создания нитридного уран-плутониевого топлива является возвращение плутония и урана в ядерный топливный цикл из облученного топлива. Это топливо планируется использовать в реакторах на быстрых нейтронах с целью замыкания ядерного топливного цикла [1, 2]. Так как полученная активность облученного топлива должна быть строго нормирована [3], необходимо выделять наиболее высокоактивные дозообразующие актиноиды. Одним из таких актиноидов является америций [4]. В технологиях очистки жидких радиоактивных отходов низкого и среднего уровня активности широко применяются методы сорбции и ионного обмена. Эти методы обладают высокой селективностью, что позволяет использовать их в задачах выделения заданных радионуклидов [5–7]. Необходимый высокий уровень селективности и избирательности, при экстремальных внешних условиях среды, присущ твердофазным экстрагентам, полученным с помощью лигандов [8–11]. Ранее было проведено исследование сорбции америция-241 и

урана из модельных растворов жидких радиоактивных отходов с использованием твердофазного экстрагента на основе N, N, N', N' – тетраоктилдигликольамида (ТВЭКС ТОДГА) [12]. В ходе исследования определены коэффициенты распределения америция-241 и урана на опытных образцах экстрагента и рассчитаны коэффициенты разделения пары америций-241/уран. В работе были опробованы семь опытных образцов ТВЭКС ТОДГА. Для уменьшения объема и сокращения затрат подобных исследований было решено показать возможность предварительного отбора образцов экстрагента на основе расчета и сравнения их коэффициентов диффузии в процессе сорбции. Для этого необходимо рассмотреть кинетику процесса, что предполагает определение скорости реакции. О скорости сорбции судят по кривым изменения концентрации экстрагируемого элемента из объема при контакте с экстрагентом от времени, которая зависит от величины коэффициента диффузии. Целью настоящей работы является показать на основе расчета

Таблица 1. Характеристики исследуемых образцов ТВЭКС ТОДГА

Образец	Функционал	Пористость, %	Удельная площадь зерна, м ² /г	Средний диаметр зерна, мм
1	катионит	33.8	87.0	1.0
2	катионит	57.7	11.8	1.25
3	нейтральный	54.3	83.2	0.7

и сравнения величин коэффициентов диффузии америция-241 и урана на примере их сорбции из модельного раствора жидких радиоактивных отходов с использованием различных опытных образцов ТВЭКС ТОДГА возможность определения образца с наиболее высокими кинетическими характеристиками.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследование влияния величины коэффициентов диффузии на скорость протекания сорбции америция-241 и урана проводились для трех опытных образцов ТВЭКС ТОДГА из работы [12], характеристики которых представлены в табл. 1.

Поскольку сорбция является сложным и многостадийным процессом во времени, необходимо определить лимитирующую стадию, которая определяет общую скорость процесса при использовании опытных образцов ТВЭКС ТОДГА. Скорость ионного обмена определяется либо скоростью диффузии непосредственно в зерне (гелевая диффузия), либо скоростью диффузии в неподвижной пленке (пленочная диффузия). Таким образом, для определения лимитирующей стадии обмена и расчета коэффициента диффузии, необходимо уменьшить влияние одного из этих механизмов на кинетику сорбции. Поэтому, для оценки коэффициентов диффузии в кинетическом эксперименте, использовался метод ограниченного объема – обменный процесс происходит в некотором реакторе с постоянным объемом перемешиваемого раствора. Исходный раствор: 100 г/л NaNO₃, 1235 мг/л U и 0.043 мг/л Am-241, pH 3.4. Объемное соотношение раствора и ТВЭКС составляло 50:1.

Данный метод подразумевает достаточно высокую скорость переноса вещества из раствора к поверхности сорбента и отсутствие, или слабое влияние диффузионного пограничного слоя на диффузию. Для устранения внешних диффузионных ограничений, связанных с переносом сорбтива из объема раствора к поверхностной пленке жидкости, покрывающей зерно сорбента, эксперимент проводился при постоянном перемешивании раствора ($V_{\text{пост.}} \sim 200$ об/мин.) и температуре окружающей среды ($\sim 23^\circ\text{C}$). Исходя из заданных параметров эксперимента, предполагается, что концентрация америция-241 и урана во всех точках объема модельного раствора радиоактив-

ных отходов и у поверхности ТВЭКС ТОДГА постоянная.

ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИФФУЗИИ

На основании выбранного метода, дающего возможность определить лимитирующую стадию процесса сорбции, рассмотрена кинетика процесса сорбции америция-241 и урана на опытных образцах ТВЭКС ТОДГА. Для расчета коэффициентов диффузии была использована модель гелевой диффузии из ограниченного объема в сферическое тело, основанная на связи динамики заполнения емкости сорбента и времени сорбции. Для расчета коэффициентов диффузии использовали уравнение [13]:

$$F(t) = 1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(-Dn^2\pi^2 t/r_0^2), \quad (1)$$

где F – доля превращения вещества, которая является функцией параметра Dt/r_0^2 ; t – время, в течение которого достигается данная величина F ; n – число слагаемых (1, 2, 3, ...). Отношение $-D\pi^2/r_0^2 = B$ константа скорости гелевой диффузии (с^{-1}); D – коэффициент гелевой диффузии, $\text{см}^2/\text{с}$. Подставив B в уравнение (1), получим:

$$F(t) = 1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(-Bt n^2), \quad (2)$$

где Bt – безразмерный параметр, определяющий диффузию в твердом сферическом теле радиуса r_0 . Расчет коэффициентов диффузии америция-241 и урана в зависимости от характеристик опытных образцов ТВЭКС ТОДГА проводился для экспериментальных данных кинетики сорбции америция-241 и урана [12]. Используя кинетические данные сорбции, была построена зависимость заполнения емкости экстрагента от времени для америция-241 (рис. 1) и урана (рис. 2) для всех образцов. Из построенных зависимостей следует, что время выхода на равновесие при сорбции ^{241}Am у всех исследованных образцов почти одинаковое и составляет ~ 240 мин, равновесная концентрация урана достигается в образцах $\sim$ через 1500 мин.

Линейный вид зависимости подтверждает лимитирующую стадию диффузии в фазе сорбента для обоих радионуклидов. Тангенс угла наклона

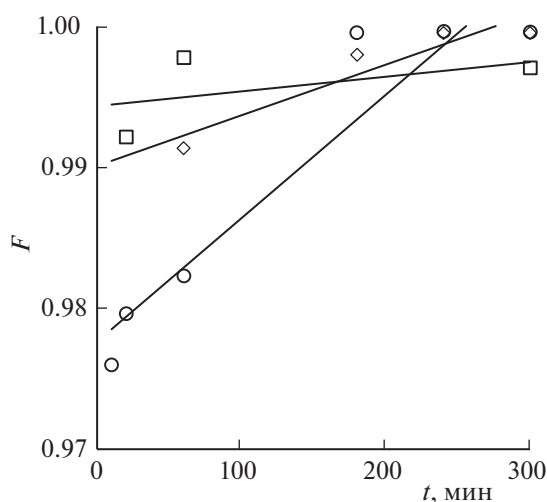


Рис. 1. Зависимость заполнения емкости экстрагента америцием-241 с образцами 1 (○), 2 (◇), 3 (□) от времени.

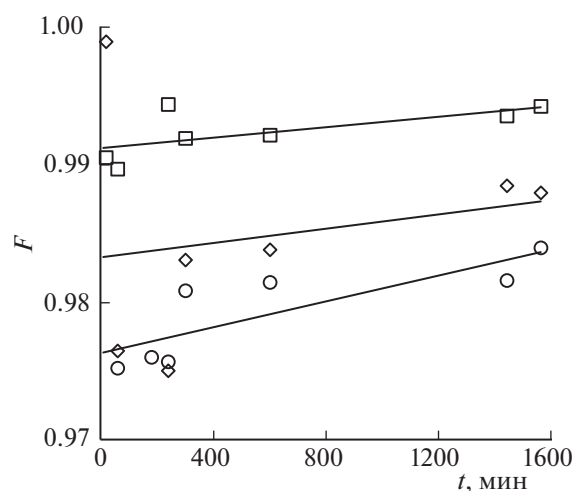


Рис. 2. Зависимость заполнения емкости экстрагента ураном с образцами 1 (○), 2 (◇), 3 (□) от времени.

этих прямых к оси абсцисс равен величине константы гелевой диффузии. Основываясь на полученных значениях константы гелевой диффузии, были рассчитаны коэффициенты диффузии для трех образцов ТВЭКС ТОДГА из модельного раствора. Результаты расчета представлены в табл. 2.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Полученные результаты расчета коэффициентов диффузии америция-241 и урана для трех образцов ТВЭКС ТОДГА в процессе сорбции из модельного раствора жидких радиоактивных отходов совпадают с результатами кинетического эксперимента [12] по времени выхода на равновесие. Таким образом, механизм кинетики сорбции на ТВЭКС ТОДГА удовлетворительно описывается моделью гелевой диффузии, где определяющими скорость процесса является коэффициент диффузии обменивающихся ионов внутри опытных образцов. Коэффициенты диффузии америция-241 и урана на образцах ТВЭКС ТОДГА больше для образца № 2 с большим средним диаметром и большей пористостью экстрагента. Следует отметить, что значения коэффициента диф-

фузии для америция-241 на порядок выше, чем для урана для трех образцов ТВЭКС ТОДГА. Это согласуется с данными о более быстром заполнении емкости экстрагента америцием-241 в системе и более высокими значениями коэффициентов диффузии для него. Проанализировав результаты расчета коэффициентов диффузии для сорбции америция-241 и урана из модельного раствора жидких радиоактивных отходов с использованием опытных образцов ТВЭКС ТОДГА, был определен образец с наиболее высокой скоростью извлечения по обоим радионуклидам — № 2, что полностью согласуется с результатами кинетического эксперимента [12].

ВЫВОДЫ

Рассчитаны коэффициенты диффузии америция-241 и урана в процессе их сорбции для трех опытных образцов ТВЭКС ТОДГА. Проведена оценка зависимости скорости протекания реакции от величины коэффициентов диффузии. Основываясь на зависимости величины коэффициентов диффузии от характеристик опытных образцов ТВЭКС ТОДГА, расчетным путем определена увеличенная скорость протекания сорбции для америция-241 по сравнению с ураном. На основе расчета коэффициентов диффузии америция-241 и урана определен опытный образец ТВЭКС ТОДГА с наиболее высокими кинетическими характеристиками — № 2. Показана возможность сокращения объема и затрат при проведении экспериментов по сорбции при предварительном определении коэффициентов диффузии.

Таблица 2. Расчетные значения коэффициентов гелевой диффузии на образцах ТВЭКС ТОДГА

Образец	Коэффициент диффузии америция-241, $n \times 10^{-8} \text{ см}^2/\text{с}$	Коэффициент диффузии урана, $n \times 10^{-9} \text{ см}^2/\text{с}$
1	2.3	1.3
2	1.6	1.2
3	0.4	0.1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамов Е.О., Алексахин Р.М., Большов Л.А., Дедуль А.В., Орлов В.В., Першуков В.А., Рачков В.И., Толстоухов Д.А., Троянов В.М. Проект “Прорыв” — технологический фундамент для крупномасштабной ядерной энергетики. Известия Российской академии наук. Энергетика. 2015. № 1. С. 5–13.
2. Адамов Е.О., Рачков В.И. Новая технологическая платформа формирования национальной стратегии развития ядерной энергетики. Известия Российской академии наук. Энергетика. 2017. № 2. С. 3–12.
3. Иванов И.К., Чекин С.Ю., Меняйло А.Н., Максютин М.А., Туманов К.А., Кашеева П.В., Ловачев С.С., Адамов Е.О., Лопаткин А.В. Уровни радиологической защиты населения при реализации принципа радиационной эквивалентности: риск-ориентированный подход. Радиация и риск. 2018. Т. 27. № 3. С. 9–23. <https://doi.org/10.21870/0131-3878-2018-27-3-9-23>
4. Иванов И.К., Чекин С.Ю., Меняйло А.Н., Максютин М.А., Туманов К.А., Кашеева П.В., Ловачев С.С., Адамов Е.О., Лопаткин А.В. Сравнительный анализ уровней “радиотоксичности” отдельных радионуклидов ОЯТ реакторов БРЕСТ и ВВЭР при различных временах выдержки на основе современных моделей “доза-эффект” МКРЗ. Радиация и риск. 2018. Т. 27. № 4. С. 8–27. <https://doi.org/10.21870/0131-3878-2018-27-4-8-27>
5. Егорин А.М., Авраменко В.А. Динамика сорбции радионуклидов цезия на селективных ферроцианидных сорбентах. Распределение активности ^{137}Cs в неподвижной фазе. Радиохимия. 2012. Т. 54. № 5. С. 445–450.
6. Ерофеев В.А., Черкашина Н.И., Сулавко Д.Ю., Культенко Э.А. Изучение механизма процессов сорбции радионуклидов на ионообменных лигнинных сорбентах. Энергетические установки и технологии. 2016. Т. 2. № 2. С. 83–90.
7. Милютин В.В., Некрасова Н.А., Яничева Н.Ю. и др. Сорбция радионуклидов цезия и стронция на кристаллических титаносиликатах щелочных металлов. Радиохимия. 2017. Т. 59. № 1. С. 59–62.
8. Моходоева О.Б., Мясоедова Г.В., Захарченко Е.А. Твердофазные экстрагенты для концентрирования и разделения радионуклидов. Новые возможности. Радиохимия. 2011. Т. 53. № 1. С. 34–41.
9. Ansari S.A., Pathak P.N., Mohapatra P.K., Manchanda V.K. Chemistry of diglycolamides: promising extractants for actinide partitioning. *Chem. Rev.* 2012. V. 112. № 3. P. 1751–1772. <https://doi.org/10.1021/cr200002f>
10. Ansari S.A., Pathak P.N., Manchanda V.K., Husain M., Prasad A.K., Paemar V.S. N, N', N' — tetraoctyl diglycidamide (TODGA): a promising extractant for actinide-partitioning from high-level waste (HLW). *Solv. Extr. Ion Exch.* 2005. V. 23. № 4. P. 463–479. <https://doi.org/10.1081/SEI-200066296>
11. Sasaki Y., Tachimori S. Extraction of actinides (III), (IV), (V), (VI), and lanthanides (III) by structurally tailored diamides. *Solv. Extr. Ion Exch.* 2002. V. 20. № 1. P. 21–34. <https://doi.org/10.1081/SEI-100108822>
12. Ключкова Н.В., Савельев А.А., Позднякова Н.Ю., Писаненко С.С., Ананьев А.В. Исследование сорбции америция из модельных растворов жидких радиоактивных растворов с использованием твердофазного экстрагента на основе TODGA. Атомная энергия. 2019. Т. 127. № 1. С. 35–39. <https://doi.org/10.1007/s10512-019-00581-7>
13. Бойд Д.Е., Адамсон А.В., Майерс Л.С. Хроматография. Метод разделения ионов. М.: Мир, 1973. 375 с.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta “MIFI”, 2020, vol. 9, no. 4, pp. 293–297

Determination of the Diffusion Coefficients of Americium and Uranium in the Process of Their Sorption on a Solid-Phase Extractant Based on TODGA

A. A. Savelev^{a,b,#}, N. V. Klochkova^a, and V. I. Rachkov^b

^a All-Russia Research Institute of Chemical Technology, Moscow, 115409 Russia

^b National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: AASavelev@mephi.ru

Received May 20, 2020; revised July 8, 2020; accepted September 9, 2020

Abstract—It has been shown that the sample with the highest kinetic characteristics can be determined from the calculation and comparison of the values of the diffusion coefficients of americium-241 and uranium on the example of their sorption from a model solution of liquid radioactive waste using various experimental samples of solid-phase extractant based on TODGA. The diffusion coefficients of americium-241 and uranium during their sorption have been calculated for three experimental samples of solid-phase extractant based on TODGA. The dependence of the reaction rate on the diffusion coefficients has been estimated. An increased sorption rate for americium-241 in comparison with uranium has been calculated from the dependence of the diffusion coefficients on the characteristics of the experimental samples of solid-phase extractant

based on TODGA. Prototype no. 2 of solid-phase extractant based on TODGA with the highest kinetic characteristics has been determined from the calculation of the diffusion coefficients of americium-241 and uranium. The possibility of reducing the volume and costs of sorption experiments with preliminary determination of diffusion coefficients has been shown.

Keywords: sorption, sorption kinetics, diffusion coefficient, americium, liquid radioactive waste, TODGA

DOI: 10.1134/S2304487X20040070

REFERENCES

- Adamov E.O., Aleksakhin R.M., Bolshov L.A., Dedul A.V., Orlov V.V., Pershukov V.A., Rachkov V.I., Tolstoukhov D.A., Troyanov V.M. Projekt "Proryv" – tekhnologicheskii fundament dlya krupnomasshtabnoy yadernoy energetiki [The Breakthrough Project is the technological foundation for large-scale nuclear power]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Energetika*, 2015, no. 1, pp. 5–13 (in Russian).
- Adamov E.O., Rachkov V.I. Novaya tekhnologicheskaya platforma formirovaniya natsional'noy strategii razvitiya yadernoy energetiki [A new technological platform for the formation of a national strategy for the development of nuclear energy]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Energetika*, 2017, no. 2, pp. 3–12 (in Russian).
- Ivanov I.K., Chekin C.Yu., Menyailo A.N., Maksyutov M.A., Tumanov K.A., Kashcheeva P.V., Lovachev S.S., Adamov E.O., Lopatkin A.V. Urovni radiologicheskoy zashchity naseleniya pri realizatsii printsipa radiatsionnoy ekvivalentnosti: risk-orientirovanny podkhod [Levels of radiological protection of the population when implementing the principle of radiation equivalence: risk-based approach]. *Radiatsiya i risk*, 2018, vol. 27, no. 3, pp. 9–23 (in Russian). doi: 10.21870/0131-3878-2018-27-3-9-23
- Ivanov I.K., Chekin C.Yu., Menyailo A.N., Maksyutov M.A., Tumanov K.A., Kashcheeva P.V., Lovachev S.S., Adamov E.O., Lopatkin A.V. Sravnitel'nyy analiz urovney "radiotoksichnosti" ot del'nykh radionuklidov OYAT reaktorov BREST i VVER pri razlichnykh vremenyakh vyderzhki na osnove sovremennykh modeley "doza-effekt" MKRZ [Comparative analysis of the levels of "radiotoxicity" of individual radionuclides of spent nuclear fuel from the BREST and VVER reactors at various holding times based on modern dose-effect models of the ICRP]. *Radiatsiya i risk*, 2018, vol. 27, no. 4, pp. 8–27 (in Russian). doi: 10.21870/0131-3878-2018-27-4-8-27
- Egorin A.M., Avramenko V.A. Dinamika sorbtzii radionuklidov tseziya na selektivnykh ferrotsianidnykh sorbentakh. Raspredeleniye aktivnosti ^{137}Cs v nepodvizhnoy faze. Radiokhimiya [Dynamics of sorption of cesium radionuclides on selective ferrocyanide sorbents. Distribution of ^{137}Cs activity in the stationary phase]. *Radiokhimiya*, 2012, vol. 54, no. 5, pp. 445–450 (in Russian).
- Erofeev V.A., Cherkashin N.I., Sulavko D.Yu. Kulenko E.A. Izucheniye mekhanizma protsessov sorbtzii radionuklidov na ionoobmennyykh ligninovykh sorbentakh [Study of the mechanism of sorption of radionuclides on ion-exchange lignin sorbents]. *Energeticheskkiye ustanovki i tekhnologii*, 2016, vol. 2, no. 2, pp. 83–90 (in Russian).
- Milyutin V.V., Nekrasova N.A., Yanicheva N.Yu. Kallashnikova G.O., Ganicheva Y.Yu. Sorbtziya radionuklidov tseziya i strontsiya na kristallicheskiykh titanossilikatakh shchelochnykh metallov [Sorption of cesium and strontium radionuclides on crystalline alkali metal titanates]. *Radiokhimiya*, 2017, vol. 59, no. 1, pp. 59–62 (in Russian).
- Mokhodoeva O.B., Myasoedova G.V., Zakharchenko E.A. Tverdogaznyye ekstragenty dlya kontsentrirvaniya i razdeleniya radionuklidov [Solid phase extractants for the concentration and separation of radionuclides. New opportunities]. *Radiokhimiya*, 2011, vol. 53, no. 1, pp. 34–41 (in Russian).
- Ansari S.A., Pathak P.N., Mohapatra P.K., Manchanda V.K. Chemistry of diglycolamides: promising extractants for actinide partitioning. *Chem. Rev.*, 2012, vol. 112, no. 3, pp. 1751–1772. doi: 10.1021/cr200002f
- Ansari S.A., Pathak P.N., Manchanda V.K., Husain M., Prasad A.K., Paemar V.S. N, N', N' – tetraoctyl diglycolamide (TODGA): a promising extractant for actinide-partitioning from high-level waste (HLW). *Solv. Extr. Ion Exch.*, 2005, vol. 23, no. 4, pp. 463–479. doi: 10.1081/SEI-200066296
- Sasaki Y., Tachimori S. Extraction of actinides (III), (IV), (V), (VI), and lanthanides (III) by structurally tailored diamides. *Solv. Extr. Ion Exch.*, 2002, vol. 20, no. 1, pp. 21–34. doi: 10.1081/SEI-100108822
- Klochkova N.V., Savelev A.A., Pozdnyakova N.Yu., Pisanenko S.S., Ananyev A.V. Issledovaniye sorbtzii ameritsiya iz model'nykh rastvorov zhidkikh radioaktivnykh rastvorov s ispol'zovaniyem tverdogaznogo ekstrakta na osnove TODGA [Investigation of Americium Sorption from Model Liquid Radwaste Solutions Using TODGA-Based Solid-Phase Extractant]. *Atomnaya energiya*, 2019, vol. 127, no. 1, pp. 35–39 (in Russian). doi: 10.1007/s10512-019-00581-7
- Boyd D.E., Adamson A.V., Myers L.S. *Khromatografiya. Metod razdeleniya ionov* [Chromatography. The method of separation of ions]. Moscow, Mir, 1973. 375 p.

ПЕРЕВОД РЕАКТОРОВ ТИПА РБТ НА НОВОЕ ТОПЛИВО

© 2020 г. А. М. Шараев^{1,2}, А. П. Малков^{1,2}, А. В. Пайдулов^{1,2}, М. Ф. Валишин^{1,2},
Ю. А. Краснов^{1,2}, В. В. Пименов^{1,2}

¹ Димитровградский инженерно-технологический институт —
филиал Национального исследовательского ядерного университета “МИФИ”, Димитровград, 433507, Россия

² Акционерное общество “Государственный научный центр —
Научно-исследовательский институт атомных реакторов”, Димитровград, 433507, Россия

*e-mail: scharaevairat@mail.ru

Поступила в редакцию 02.04.2020 г.

После доработки 30.06.2020 г.

Принята к публикации 22.09.2020 г.

Статья содержит информацию о том, как в ранее созданных реакторах РБТ происходит поэтапная замена старого типа топлива на новое топливо, так как они используют отработанное топливо реактора СМ, который в свою очередь при модернизации был переведен на более ураноемкое топливо. Здесь описана процедура перевода на новое топливо, реализуемая на реакторах РБТ, потому что процедура перевода действующего ядерного реактора на новое топливо в процессе его плановой эксплуатации не предусмотрена и, соответственно, не регламентирована нормативными документами по безопасности. Также показано состояние реактора в части загрузки активных зон по количеству нового и старого типов топлива в количественном и процентном отношении на начало 2019 года. Представлены результаты расчета эффективности рабочих органов регулирования реакторов РБТ, указанные значения эффективности не превышают паспортные пределы. Уделено внимание качеству подготовки персонала в связи с переводом на новое топливо. Сделаны выводы о безопасной эксплуатации нового типа топлива, правильности выбора такой процедуры и о дальнейшей возможности перевода и использования нового топлива для реакторов типа РБТ.

Ключевые слова: исследовательский реактор, эксплуатация, безопасность, загрузка

DOI: 10.1134/S2304487X20040082

ВВЕДЕНИЕ

В институте были разработаны, сооружены и успешно эксплуатируются два исследовательских реактора типа РБТ, предназначенные, главным образом, для исследований по реакторному материаловедению. Отличительная особенность реакторов РБТ — использование в качестве топлива ТВС, отработавших в реакторе СМ. Предпосылки для создания подобных реакторов — большое содержание ^{235}U в отработавших ТВС реактора СМ, выгружаемых из него по исчерпанию запаса реактивности. Оценки показали, что активная зона реактора РБТ, обладающая достаточным запасом реактивности, могла быть создана увеличением по сравнению с реактором СМ ее объема и изменением конструкции. Работоспособность выгоревших твэлов в реакторе РБТ не вызывала сомнения, поскольку была подтверждена при значительно более жестких режимах эксплуатации в реакторе СМ [1].

Для расширения экспериментальных возможностей высокопоточного исследовательского ре-

актора СМ в 2005 году проведена его модернизация, в результате которой в активной зоне может размещаться до двух дополнительных экспериментальных каналов. Для компенсации потерь реактивности было решено использовать новое ураноемкое топливо при сохранении его геометрии, материалов оболочки и топливной матрицы [2]. Через некоторое время встал вопрос о переводе на новое топливо реакторов РБТ. В начале 2015 года была собрана и проанализирована информация по количеству и состоянию отработавшего топлива реактора СМ, и этот анализ показал, что имеющийся запас ОТВС старого типа близится к исчерпанию. Перевод реакторов РБТ на ТВС нового типа позволит решить проблему обеспечения их топливом на перспективу.

ОПИСАНИЕ

Процедура перевода действующего ядерного реактора на новое топливо в процессе его плановой эксплуатации не предусмотрена и, соответ-

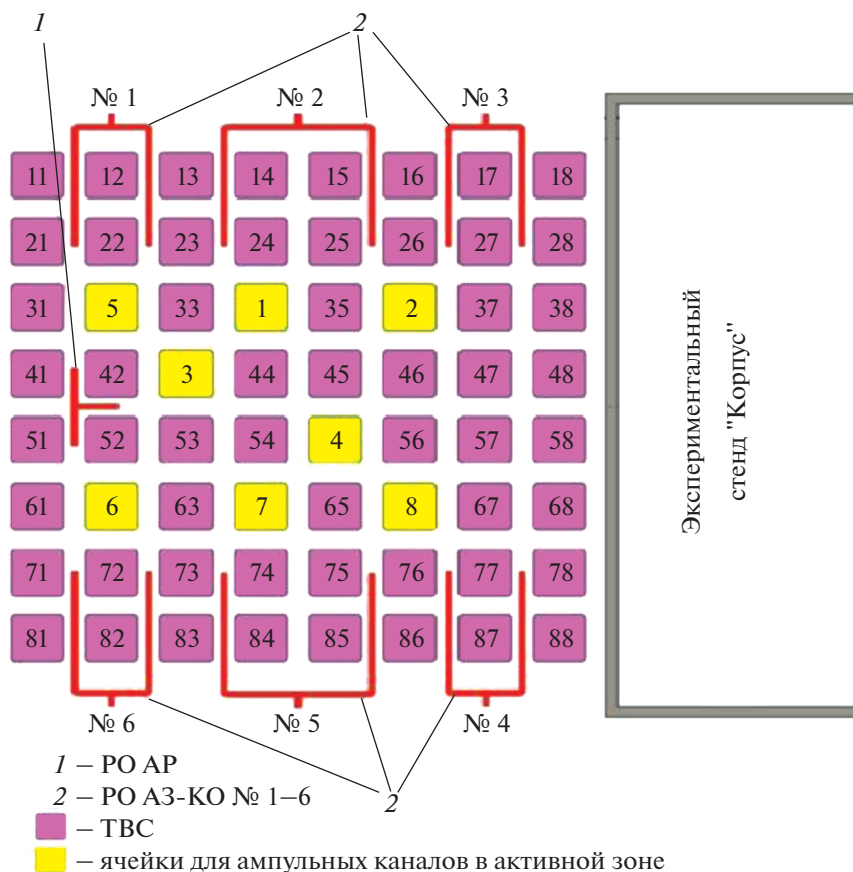


Рис. 1. Поперечное сечение активной зоны реактора РБТ-6.

ственно, не регламентирована нормативными документами по безопасности.

При выполнении необходимого объема исследований требуемого качества и реализации комплекса организационно-технических мероприятий по обеспечению безопасности можно реализовать запланированную модернизацию без остановки ИР на длительный срок. Примером такого подхода может служить перевод реактора СМ с 2005 года на ТВС нового типа в процессе текущей эксплуатации.

Модификации тепловыделяющих сборок нового типа имеют те же габаритные размеры, но набраны из твэлов с увеличенной на 20% загрузкой по ^{235}U по сравнению с ранее использовавшимися твэлами (6 г вместо 5 г ^{235}U на твэл). Кроме того, в таких ТВС чехол из нержавеющей стали заменен на чехол из циркониевого сплава.

В процессе замены типа топлива на реакторах РБТ принята схема действий, апробированная и фактически реализованная при подобной процедуре для реактора СМ. Организационная схема включает следующие основные этапы:

- расчетное обоснование безопасности для каждой планируемой кампании в переходный период;
- экспериментальное определение эффективности органов СУЗ, запаса реактивности и подкритичности активной зоны по завершению перегрузочных работ перед каждой кампанией;
- экспериментальное определение физических характеристик активной зоны, важных для безопасности, после замены всех ТВС старого типа в активной зоне на ТВС с увеличенной загрузкой топлива;
- оформление отчета по обоснованию безопасности реактора и внесение необходимых изменений в эксплуатационную документацию.

Процедура перевода реакторов РБТ начата в 2015 году [3]. В рамках утвержденной программы работ была проведена серия экспериментов на реакторах по исследованию эффектов реактивности и эффективности РО СУЗ при замене штатных ТВС на ТВС с увеличенной загрузкой по ^{235}U . Полученные результаты использованы для уточнения расчетных оценок воздействия загрузки ТВС нового типа на размножающие свойства активной зоны. В результате расчетно-эксперимен-

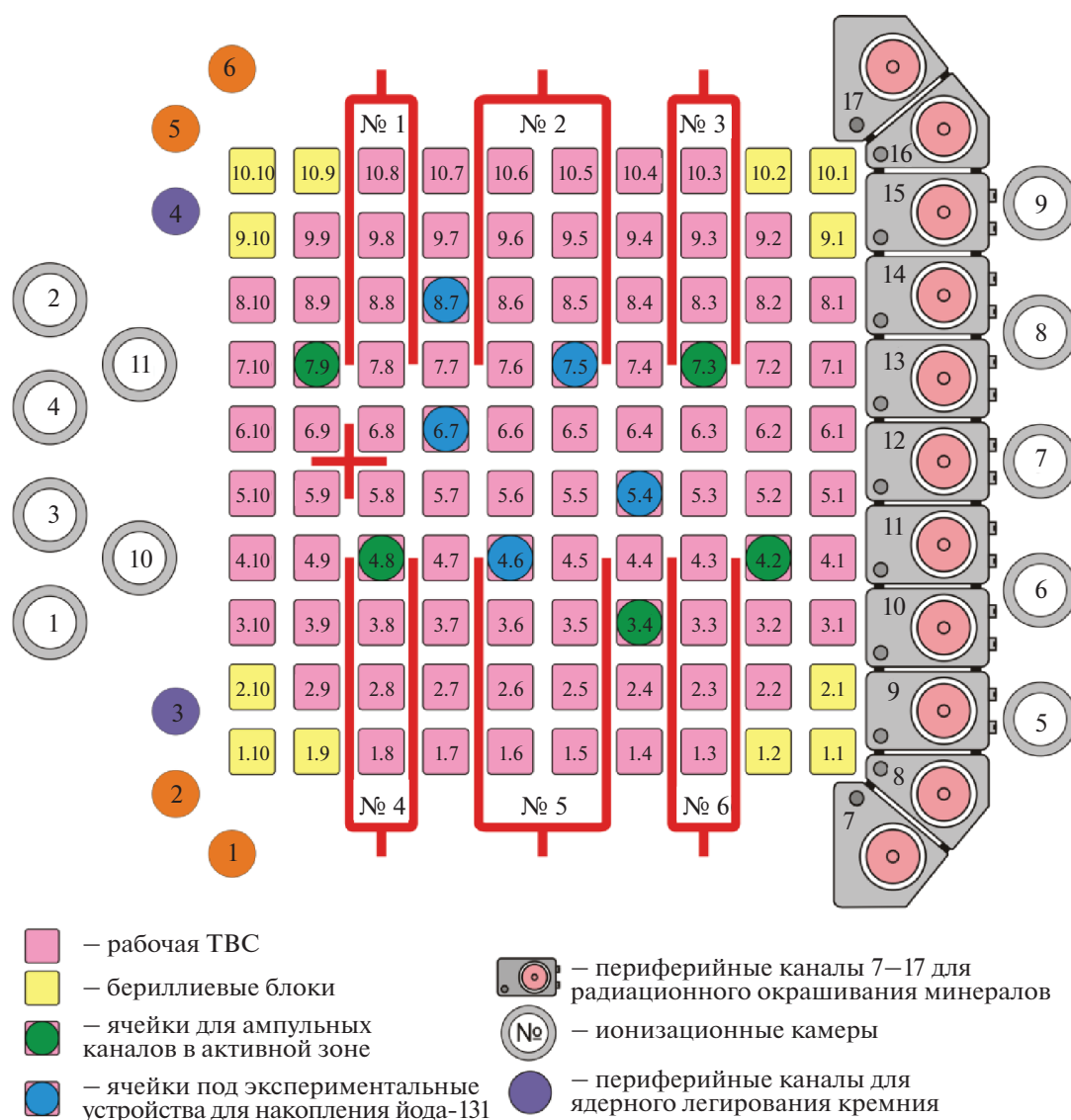


Рис. 2. Поперечное сечение активной зоны реактора РБТ-10.

тальных исследований была подтверждена возможность поэтапного перевода реакторов РБТ на топливо с увеличенной загрузкой ^{235}U в твэле с сохранением основных проектных характеристик реактора при обоснованном выборе размещения ТВС старого и нового типа на этапе формирования загрузки активной зоны.

Картограммы активной зоны реакторов РБТ-6 и РБТ-10 представлены на рис. 1 и на рис. 2 соответственно.

В течение 3,5 лет при перегрузках реакторов ТВС старого типа последовательно заменяли на современные ТВС. Для каждой планируемой перегрузки с использованием аттестованного прецизионного нейтронно-физического кода MCU-RFFI/A рассчитывали запас реактивности,

подкритичность при проведении перегрузочных операций, эффективность органов СУЗ, распределение энерговыделения в активной зоне. По результатам выполненных расчетов для каждой кампании готовили обоснование безопасности, подтверждающее, что пределы безопасной эксплуатации реакторов не нарушаются, а условия безопасной эксплуатации обеспечиваются.

На рис. 3 показана картограмма загрузки топлива в активной зоне реактора РБТ-6 по состоянию на март 2019 г.

На рис. 4 представлено рассчитанное по программе MCU распределение энерговыделения по сечению активной зоны реактора РБТ-6 с нормировкой на среднее значение мощности ТВС.

46.7	45.8	38.6	40.1	42.2	46.5	45.6	44.8
45.7	37.1	34.9	18.7	46.2	46.6	43.4	39.9
42.8		40.6		42.5		46.0	39.8
41.1	28.9		41.3	42.9	46.6	44.2	45.2
2.9	24.7	39.2	41.5		46.8	44.2	45.2
39.5		40.2		42.9		46.0	40.0
45.8	38.8	33.8	18.3	46.3	46.5	43.4	40.1
46.9	45.7	40.4	40.1	42.6	46.7	46.0	44.9

Рис. 3. Картограмма загрузки активной зоны реактора РБТ-6 с обозначением выгорания топлива в ячейках (серым цветом выделены ячейки с ТВС нового типа).

0.29	0.38	0.53	0.69	0.70	0.53	0.43	0.34
0.54	0.85	0.95	1.39	1.13	1.17	0.91	0.65
0.90		1.63		1.79		1.45	0.94
0.90	1.48		1.78	1.78	1.85	1.51	1.03
1.05	1.31	1.47	1.78		1.88	1.50	1.02
0.84		1.44		1.82		1.39	0.94
0.52	0.77	0.91	1.33	1.08	1.13	0.89	0.64
0.28	0.37	0.51	0.68	0.66	0.50	0.42	0.34

Рис. 4. Распределение энерговыделения по сечению активной зоны реактора РБТ-6, отн. ед. (серым цветом выделены ячейки с ТВС нового типа).

На рис. 5 показана картограмма загрузки топлива в активной зоне реактора РБТ-10 по состоянию на март 2019 г.

На рис. 6 представлено рассчитанное по программе MCU распределение энерговыделения по

сечению активной зоны реактора с нормировкой на среднее значение мощности ТВС.

В табл. 1 представлены рассчитанные по программе MCU эффективности РО СУЗ и реактивные параметры активной зоны реакторов РБТ по состоянию на март 2019 г.

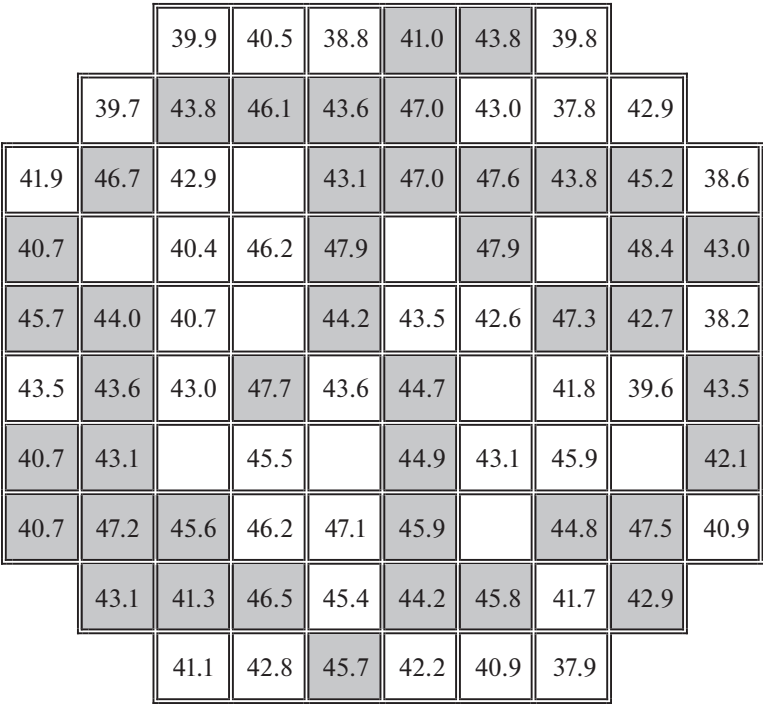


Рис. 5. Картограмма загрузки активной зоны реактора РБТ-10 с обозначением выгорания топлива в ячейках (серым цветом выделены ячейки с ТВС нового типа).

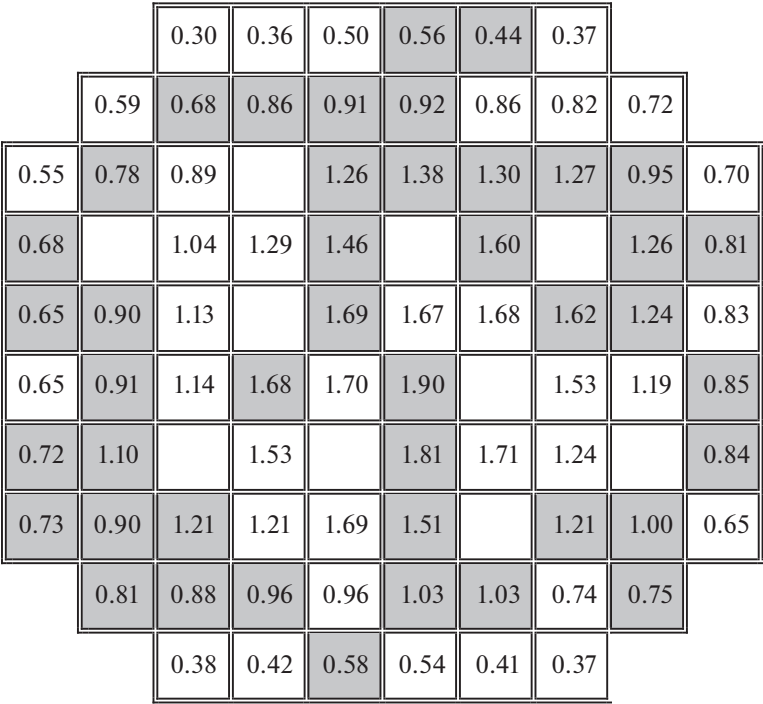


Рис. 6. Распределение энерговыделения по сечению активной зоны реактора РБТ-10, отн. ед. (серым цветом выделены ячейки с ТВС нового типа).

Таблица 1. Рассчитанные по программе MCU эффективности РО СУЗ и реактивностные параметры активной зоны реакторов РБТ по состоянию на март 2019 г.

		РБТ-10		РБТ-6	
РО СУЗ		Эффективность, $\beta_{\text{эфф}}$			
		Расчет	Паспортное значение	Расчет	Паспортное значение
АР		0.33 ± 0.02	0.20—0.60	0.36 ± 0.02	0.25—0.50
АЗ-КО-1	КО	0.85 ± 0.02	0.65—2.20	0.80 ± 0.02	0.50—1.15
	АЗ	1.25 ± 0.02	0.45—1.95	0.28 ± 0.02	0.10—0.35
АЗ-КО-2	КО	1.23 ± 0.02	0.95—2.80	1.82 ± 0.02	1.05—2.40
	АЗ	1.80 ± 0.02	1.20—3.20	0.52 ± 0.02	0.30—0.70
АЗ-КО-3	КО	1.11 ± 0.02	0.65—2.20	1.09 ± 0.02	0.80—1.90
	АЗ	1.81 ± 0.02	0.45—1.95	0.25 ± 0.02	0.20—0.55
АЗ-КО-4	КО	1.02 ± 0.02	0.65—2.20	0.99 ± 0.02	0.80—1.90
	АЗ	1.45 ± 0.02	0.45—1.95	0.26 ± 0.02	0.20—0.55
АЗ-КО-5	КО	1.38 ± 0.02	0.95—2.80	1.64 ± 0.02	1.05—2.40
	АЗ	2.12 ± 0.02	1.20—3.20	0.37 ± 0.02	0.30—0.70
АЗ-КО-6	КО	1.09 ± 0.02	0.65—2.20	0.68 ± 0.02	0.50—1.15
	АЗ	1.79 ± 0.02	0.45—1.95	0.22 ± 0.02	0.10—0.35
Подкритичность		2.12 ± 0.06	не менее 1.54	3.79 ± 0.06	не менее 3.08
Запас реактивности		4.89 ± 0.06	9.0	3.60 ± 0.06	не более 4.6

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При использовании в реакторах РБТ ТВС нового типа проводили постоянный контроль их герметичности. Признаков разгерметизации ТВС зафиксировано не было. К марту 2019 года количество ТВС нового типа в активной зоне реактора РБТ-6 доведено до 46 штук (82% от общего числа ТВС в а.з.), в активной зоне реактора РБТ-10 – до 43 штук (55% от общего числа ТВС в а.з.). Таким образом, количество ТВС нового типа в активной зоне реакторов РБТ превышает количество ТВС старого типа, следовательно, ТВС нового типа можно называть штатным топливом реакторов РБТ [4].

При переводе на новый тип топлива все характеристики реакторов остаются в паспортных пределах и соответствуют данным, предоставленным в отчете по обоснованию безопасности.

Все технологические операции, связанные с переводом на новое топливо, аналогичны операциям, применяемым с топливом старого типа, поэтому переподготовка персонала не требуется.

Успешный опыт эксплуатации реакторов РБТ с новым топливом в течение последних лет с сохранением проектных характеристик установок подтвердил возможность дальнейшего безопасного использования этого топлива.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гаджиев Г.И., Грачев А.Ф., Гремячкин В.А., Калыгин В.В., Клинов А.В., Коротков Р.И., Цыканов В.А. и др. Исследовательские реакторы НИИАР и их экспериментальные возможности. Димитровград: НИИАР, 1991. С. 64.
2. Малков А.П., Краснов Ю.А., Петелин А.Л. и др. Перевод реактора СМ на новое топливо в процессе текущей эксплуатации и основные показатели последующей работы. Международная научная конференция “Исследовательские реакторы в разработке ядерных технологий нового поколения и фундаментальных исследованиях”, Тезисы докладов. – Димитровград: ОАО “ГНЦ НИИАР”, 2011. С. 144–150.
3. Шараев А.М., Малков А.П., Пайдулов А.В. и др. Обеспечение ядерной безопасности реакторов РБТ-6, РБТ-10 в процессе перевода на новое топливо. XX Российская конференция “Безопасность исследовательских ядерных установок”, Тезисы докладов. – Димитровград: АО “ГНЦ НИИАР”, 2018. С. 16–17.
4. Шараев А.М., Малков А.П., Пайдулов А.В. и др. Перевод реакторов РБТ-6 и РБТ-10 на новое топливо (текущее состояние). XXI Российская конференция “Безопасность исследовательских ядерных установок”, Тезисы докладов. – Димитровград: АО “ГНЦ НИИАР”, 2019. С. 34–35.

Conversion of RBT Research Reactors to a New Fuel Type

A. M. Sharaev^{a,b,#}, A. P. Malkov^{a,b}, A. V. Paidulov^{a,b}, M. F. Valishin^{a,b}, J. A. Krasnov^{a,b},
and V. V. Pimenov^{a,b}

^a *Dimitrovgrad Engineering and Technological Institute, National Research Nuclear University MEPhI
(Moscow Engineering Physics Institute), Dimitrovgrad, 433507 Russia*

^b *Research Institute of Atomic Reactors, Dimitrovgrad, 433507 Russia*

[#]*e-mail: scharaevairat@mail.ru*

Received April 2, 2020; revised June 30, 2020; accepted September 22, 2020

Abstract—The replacement of old-type fuel with the new one in the existing RBT reactors, which use spent fuel from the SM reactor converted to uranium-rich fuel after refurbishment, has been discussed. The procedure to convert the reactor to a new fuel is thoroughly described since it is not provided in the reactor regular operation and is not regulated by safety documents. The reactor core loading with new and old fuels in quantitative and percentage terms at the beginning of 2019 is demonstrated. It is shown that the calculated efficiency of RBT control rods does not exceed the designed limits. Attention is paid to the training of personnel engaged in the conversion to the new fuel. Conclusions are made about the safe operation of a new-type fuel, correctness of the selected procedure, and the further possibility of converting the RBT reactors to the new fuel.

Keyword: research reactor, exploitation, safety, fuel loading

DOI: 10.1134/S2304487X20040082

REFERENCES

1. Gadzhiev G.I., Grachev A.F., Gremyachkin V.A., Efimov V.N., Kalygin V.V., Klinov A.V., Korotkov R.I., Markina N.V., Sulaberidze V.SH., Toporov Yu.G., Tsykanov V.A. Issledovatel'skie reaktory NIIAR i ih eksperimentalnye vozmozhnosti [Research reactors of NIIAR and their experimental capabilities]. Dimitrovgrad: NIIAR, 1991. p. 64 (in Russian).
2. Zvir A.I., Malkov A.P., Krasnov Yu.A., Petelin A.L., Svyatkin M.N., Tchekalkin S.I. Perevod reaktora SM na novoe toplivo v protsesse tekuschei ekspluatatsii [Conversion of the SM reactor to new fuel during the current operation and the main indicators of subsequent operation]. Mezhdunarodnaya nauchnaya konferentsiya "Issledovatel'skie reaktory v razrabotke yadernykh tekhnologii novogo pokoleniya i fundamentalnykh issledovaniyach", Tezisy dokladov. — Dimitrovgrad: OAO "GNTz NIIAR", 2011, pp. 144–150 (in Russian).
3. Sharaev A.M., Malkov A.P., Paidulov A.V., Sazontov V.A., Pimenov V.V. Obespechenie yadernoi bezopasnosti reaktorov RBT-6, RBT-10 v protsesse pervoda na novoe toplivo [Ensuring nuclear safety of RBT-6 and RBT-10 reactors in the process of conversion to new fuel]. XX Rossiiskaya konferentsiya "Bezopasnost issledovatel'skikh yadernykh ustanovok", Tezisy dokladov. — Dimitrovgrad: OAO "GNTz NIIAR", 2018. pp. 16–17 (in Russian).
4. Sharaev A.M., Malkov A.P., Paidulov A.V., Sazontov V.A., Pimenov V.V. Perevod reaktorov RBT-6, RBT-10 na novoe toplivo (tekuschee sostoyanie) [Conversion of RBT-6 and RBT-10 reactors to new fuel (current state)]. XXI Rossiiskaya konferentsiya "Bezopasnost issledovatel'skikh yadernykh ustanovok", Tezisy dokladov. — Dimitrovgrad: AO "GNTz NIIAR", 2019. pp. 34–35 (in Russian).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ О ПЕРЕХОДЕ К ТОРИЕВОМУ ТОПЛИВНОМУ ЦИКЛУ В ЖИДКОСОЛЕВОМ РЕАКТОРЕ SD-TMSR

© 2020 г. О. Ашраф^{1,2,*}, А. Д. Смирнов¹, С. Н. Рыжов¹, Г. В. Тихомиров¹

¹ Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

² Университет Айн-Шамс, Каир, 11341, Египет

*e-mail: osama.ashraf@edu.asu.edu.eg

Поступила в редакцию 19.05.2020 г.

После доработки 20.07.2020 г.

Принята к публикации 06.10.2020 г.

Системы жидкосольевых реакторов (ЖСР) представляют собой результат исследований в области эксплуатационной безопасности, экономичности и соблюдения ядерного нераспространения ядерных реакторов. Исходя из этого, ЖСР был выбран в качестве одного из перспективных реакторов в рамках программы Международного форума “Поколение IV” (Generation IV International Forum — GIF). Разработанные проекты ЖСР подразумевают использование топливного цикла $\text{Th}/^{233}\text{U}$. Поскольку ^{233}U не существует в природе, требуются дополнительные исследования по поиску экономически целесообразных топливных материалов, для замены ^{233}U в качестве топлива при пуске реактора. В данной работе был проанализирован топливный цикл и нейтронно-физические характеристики однофазного двухзонного жидкосольевого ториевого реактора (Single-fluid Double-zone Thorium-based Molten Salt Reactor — SD-TMSR) при использовании, в качестве стартовой загрузки, трех различных типов делящихся материалов низкообогащенного урана (НОУ) (19.79%), реакторного Pu и ^{233}U . В данной статье были применены два различных механизма дозагрузки топлива. Кроме того, для моделирования процессов непрерывной переработки и дозагрузки топлива в SD-TMSR в данной работе была использована процедура выгорания в MSR, реализованная в коде SERPENT-2. Результаты анализа показали, что постоянный поток реакторного Pu для дозагрузки способствует переходу к ториевому топливному циклу в течение относительно короткого времени (≈ 4.5 года) по сравнению со сроком в 26 лет, наблюдаемым при использовании ^{233}U в качестве пускового топлива.

Ключевые слова: жидкосольевой реактор, ториевый топливный цикл, непрерывная переработка, метод Монте-Карло, выгорание, реактивность

10.1134/S2304487X20040021

ВВЕДЕНИЕ

В рамках программы Международного форума “Поколение IV” (GIF) было определено восемь технологических целей для ядерных систем следующего поколения. Эти цели были определены в рамках четырех широких областей: безопасность и надежность, экономичность, устойчивость, ядерное нераспространение и физическая защита [1]. ЖСР имеет множество преимуществ, которые соответствуют заданным целям GI. Например, благодаря жидкому топливу, ЖСР обладает повышенной безопасностью, возможностью проведения непрерывной переработки и дозагрузки топлива, высокой экономией нейтронов и рабочим давлением в первом контуре, близком к атмосферному [2, 3]. Исходя из этого, ЖСР был выбран GIF в качестве одного из перспективных

реакторов поколения-IV [1, 4]. В рамках концепции ЖСР топливо растворяют в расплавленных солях (например, LiF или NaCl). Это жидкосольевое топливо (например, $\text{LiF}-\text{BeF}_2-\text{ThF}_4-^{233}\text{UF}_4$) постоянно циркулирует через активную зону и позволяет обеспечить теплообмен между активной зоной реактора и промежуточными теплообменниками.

Проект однофазного двухзонного ториевого реактора (Single-fluid Double-zone Thorium-based Molten Salt Reactor — SD-TMSR) был разработан в Китайской академии наук [5]. SD-TMSR — это проект ЖСР с графитовым замедлителем и топливным циклом $\text{Th}/^{233}\text{U}$. В SD-TMSR делящиеся и фертильные элементы объединены в одной соли. Кроме того, активная зона реактора разделена на внешнюю и внутреннюю подзоны. Радиус топ-

ливных каналов во внешней зоне больше радиуса топливных каналов во внутренней зоне, для улучшения показателя коэффициента размножения нейтронов [5, 6]. Проект ЖСР, работающего на тепловом спектре нейтронов, был разработан для топливного цикла $\text{Th}/^{233}\text{U}$ [3, 6, 7]. Данный проект предполагает, что в наличии имеется стартовая загрузка ^{233}U для запуска новых ЖСР. Однако ^{233}U не присутствует в земной коре и может быть получен только из фертильного ^{232}Th в ядерном реакторе. Следовательно, необходимо исследовать другие делящиеся материалы (например, ^{235}U), чтобы заменить ^{233}U в составе топлива при запуске реактора [8, 9]. Переход к ториевому топливному циклу возможно осуществить после достижения времени удвоения¹ ^{233}U , так как в этом случае весь пусковой делящийся материал заменяется воспроизведенным ^{233}U . Существуют различные исследования, посвященные запуску ЖСР с альтернативным ^{233}U делящимися материалами. Многие из этих исследований фокусируются на проектах ЖСР, работающих на быстром спектре нейтронов [10–14], и гораздо меньше исследований посвящено ЖСР, работающим на тепловом спектре нейтронов [8, 9, 15]. Тем не менее, моделирование концепции SD-TMSR с альтернативными ^{233}U делящимися материалами ранее не изучалось. Поэтому главной целью данной статьи является моделирование работы SD-TMSR в течение продолжительного периода времени (60 лет) с различными делящимися материалами в качестве стартовой загрузки и без какой-либо дозагрузки ^{233}U для перехода к ториевому топливному циклу.

Было проведено исследование трех различных делящихся материалов для стартовой загрузки: НОУ, реакторный Pu и ^{233}U . Кроме того, были выбраны два разных механизма дозагрузки:

1. Механизм дозагрузки торием: непрерывная дозагрузка тория и ^{233}U из резервуара выдержки для распада Pa^2 , где скорость убыли ^{233}Pa = скорость поступления ^{233}U [8].

2. Механизм дозагрузки без тория: непрерывная дозагрузка тяжелых металлов (Heavy Metal – HM) (исключая Th) и одновременная дозагрузка всего материала или отдельной фракции ^{233}U из резервуара выдержки для распада Pa .

Все расчеты, представленные в настоящей статье, были выполнены в коде SERPENT-2 версии 2.1.31 [16].

¹ Время, необходимое для производства достаточного количества ^{233}U , для запуска нового SD-TMSR.

² Хранилище протактиния, извлеченного из активной зоны.

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Конструкция SD-TMSR основана на конструкции реактора-размножителя с расплавом солей (MSBR) [17] при некоторой модификации геометрии для контроля положительного температурного коэффициента в MSBR. Геометрия SD-TMSR была подробно описана в [5]. Активная зона представляет собой цилиндр с высотой и диаметром, равными 460 см. В активной зоне расположены гексагональные графитовые сборки. Длина стороны гексагональной графитовой сборки была оптимизирована в [5] и составила 7.5 см. Активная зона разделена на две разные подзоны для повышения коэффициента размножения нейтронов в рамках топливного цикла $\text{Th}/^{233}\text{U}$. Радиусы топливных каналов во внешней и внутренней подзонах составляют 5 и 3.5 см соответственно. Основные характеристики SD-TMSR приведены в табл. 1.

СОСТАВ ТОПЛИВА

Общий состав жидкой топливной соли в данной работе составляет $70\text{LiF}-17.5\text{BeF}_2-12.5(\text{HM})\text{F}_4$ мол. %, где HM представляет собой тяжелый металл (смесь тория и других актинидов). В настоящей статье рассматриваются три различных типа делящихся материалов: НОУ (19.79%), реакторный Pu [18] и ^{233}U . Для случая реакторного плутония состав соответствует плутонию, извлеченному из отработавшего ядерного топлива (ОЯТ) коммерческого водяного реактора под давлением (Pressurized Water Reactor – PWR) со средним выгоранием в 33 GWd/tHM и после 10 лет расхолаживания перед переработкой [18]. Состав реакторного плутония приведен в табл. 2. Кроме того, молярный состав стартовой загрузки топлива для всех трех рассматриваемых сценариев приведен в табл. 3.

МЕТОДОЛОГИЯ И ИНСТРУМЕНТЫ

В данной работе для моделирования SD-TMSR с различными типами стартовой загрузки топлива используется SERPENT-2 версии 2.1.31 [16]. Расширение SERPENT позволяет реализовать непрерывную переработку и дозагрузку топлива [19]. Для всех расчетов в этой работе использовалась библиотека сечений ENDF-VII.0. Результаты расчетов соответствуют работе реактора и были получены при моделировании 1.25×10^7 нейтронных историй на каждый шаг выгорания. Время выгорания в SD-TMSR составило 60 лет, а статистическая ошибка при расчете коэффициента размножения нейтронов (K_{eff}) составила $\pm 12 \text{ pcm}$. На рис. 1 представлена диаграмма потока шагов расчета. После запуска расчета входного файла расширенное матричное экспоненциаль-

Таблица 1. Основные характеристики SD-TMSR [5]

Параметры	Величина
Тепловая мощность (МВт)	2250
Состав топлива (моль %)	$70\text{LiF}-17.5\text{BeF}_2-12.5\text{HMF}_4$
Обогащение ^7Li (%)	99.995
Температура топлива (К)	900
Плотность топлива при 900 К (г/см ³)	3.3
Коэффициент расширения топлива (г/(см ³ К))	-6.7×10^{-4}
Плотность графита (г/см ³)	2.3
Плотность B_4C (г/см ³)	2.52
Обогащение ^{10}B (%)	18.4
Диаметр/высота активной зоны (см)	460/460
Длина стороны гексагональной графитовой сборки (см)	7.5
Внутренний радиус (см)	3.5
Внешний радиус (см)	5
Соотношение расплавленной соли и графита во внутренней подзоне	0.357
Соотношение соли расплава и графита во внешней подзоне	1.162
Объем топлива (м ³)	52.9

ное решение, основанное на методе рационального приближения Чебышева [20], использовалось для решения уравнения Бейтмена. Затем, с оптимальной скоростью производилось извлечение газообразных продуктов деления (ПД) и других материалов (нерастворенные металлы, лантаноиды и растворимые металлы, кроме Pu). Скорость извлечения можно регулировать изменяя размер потока газообразных ПД и других материалов из топлива в резервуар хранения ПД³. Протактиний удаляется со скоростью, соответствующей размеру потока из топлива во внешний резервуар выдержки для распада Pa, для распада и производства ^{233}U . Полученный ^{233}U используется в качестве свежего делящегося материала, а оставшийся ^{233}U — это чистая выработка ^{233}U .

СКОРОСТЬ ДОЗАГРУЗКИ И ИЗВЛЕЧЕНИЕ ПД

Продукты деления действуют как нейтронные яды, таким образом, они сильно влияют на поведение реактора. ПД следует извлекать во время работы ЖСР. Обозначим, что T_r — это время, в течение которого вся соль подвергается повторной переработке, а dN_e — количество определенного элемента e из общего количества данного элемента N_e , которое извлекается за время dt [6]:

$$dN_e = N_e \frac{dt}{T_r} \epsilon_e, \quad (1)$$

³ Хранилище газообразных ПД и других материалов, за исключением протактиния

где ϵ_e — эффективность извлечения. Интегрируя уравнение (1), получим новый параметр, который называется константой удаления $\lambda_e = \frac{\epsilon_e}{T_r}$. Для простоты, будем считать ϵ_e равным 100%, поэтому λ_e обратно пропорциональна T_r . Следовательно, константа удаления газообразных ПД и других материалов (нерастворенных металлов, лантаноидов и растворимых металлов) была точно рассчитана и приведена в табл. 4. Эффективное время переработки для газообразных ПД и нерастворенных металлов было установлено равным 30 секундам ($\lambda_e = -3.333\text{E}-02 \text{ c}^{-1}$), поскольку данные элементы должны удаляться быстро и непрерывно с помощью системы барботирования газа. Извлечение же растворимых ПД и лантаноидов происходит с помощью химической переработки, поэтому лишь небольшое количество расплавленной соли перерабатывается каждый день. Эффективное время переработки для растворимых ПД длится ~10.59 дня ($\lambda_e = -1.09195\text{E}-06 \text{ c}^{-1}$). Это эквивалентно эффективной скорости химической переработки, равной 5 м³/сут [6]. Кроме того, протактиний извлекается с помощью химической переработки с тем же временем обработки,

Таблица 2. Состав реакторного плутония (мас. %) [18]

^{238}Pu	^{239}Pu	^{240}Pu	^{241}Pu	^{242}Pu
1.3	60.3	24.3	9.1	5

Таблица 3. Состав стартовой загрузки топлива (мол. %)

Компонент топливной соли	НОУ (19.79%)	Реакторный Pu	^{233}U
LiF	70	70	70
BeF ₂	17.5	17.5	17.5
ThF ₄	8.25	10.75	12.3
UF ₄	4.25		0.2
PuF ₃		1.75	

что и для растворимых ПД (т.е. 10.59 дня). Однако протактиний извлекается и помещается в отдельный резервуар выдержки для распада. Эффективные скорости дозагрузки НМ и ^{233}U варьировались в зависимости от времени выгорания. Для того чтобы поддерживать реактор в критическом состоянии и сохранять постоянной общую массу топливной соли, требуется изменение скорости дозагрузки.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Механизм дозагрузки торием

Механизм дозагрузки тория представляет собой обеспечение непрерывного потока дозагрузки тория (из хранилища Th) и ^{233}U из резервуара выдержки для распада Pa. Молярная доля тяжелого металла в исходной загрузке топлива поддерживалась постоянной и равной 12.5 мол. % для всех сценариев. Кроме того, исходная доля делящегося материала увеличивалась для трех композиций топливной соли, пока реактор SD-TMSR не стал достаточно критичным при старте. Рис. 2 иллюстрирует динамику изменения коэффициента размножения нейтронов (k_{eff}) во время работы реактора при реализации механизма дозагрузки

ки торием. Как видно из рис. 2, k_{eff} резко уменьшается во время работы реактора для сценариев с использованием НОУ и реакторного Pu в качестве стартовой загрузки топлива. Коэффициент размножения нейтронов уменьшается в результате выгорания исходных делящихся материалов и производства продуктов деления, являющихся нейтронным ядом. Таким образом, при сценариях использования НОУ и реакторного Pu, в качестве начальной загрузки топлива, реактор относительно быстро становится подкритичным (за 6 лет в случае НОУ и за 12 лет в случае реакторного Pu). Количество ^{233}U , производимого в SD-TMSR, недостаточно для поддержания критичности реактора и противодействия паразитическому поглощению нейтронов продуктами деления. Тем не менее, непрерывный поток дозагрузки тория и ^{233}U позволяют управлять SD-TMSR в течение продолжительного периода времени (случай U-233 на рис. 2).

Механизм дозагрузки без тория

Механизм дозагрузки без тория представляет собой непрерывную дозагрузку ^{233}U из резервуара выдержки для распада Pa и тяжелых металлов извне (исключая Th). При использовании механизма дозагрузки без тория были рассмотрены только два различных исходных делящихся материала: НОУ и реакторный Pu. Непрерывная дозагрузка ^{233}U без ^{232}Th приводит к сверхкритичности реактора, таким образом, сценарий использования ^{233}U в качестве исходного топлива исключен из исследования механизма дозагрузки без тория. На рис. 3 представлено изменение K_{eff} в течение 60 лет работы реактора при использовании механизма дозагрузки без тория. Использо-

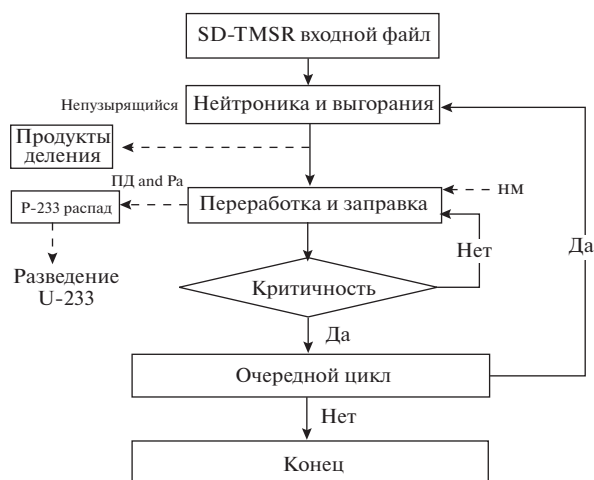
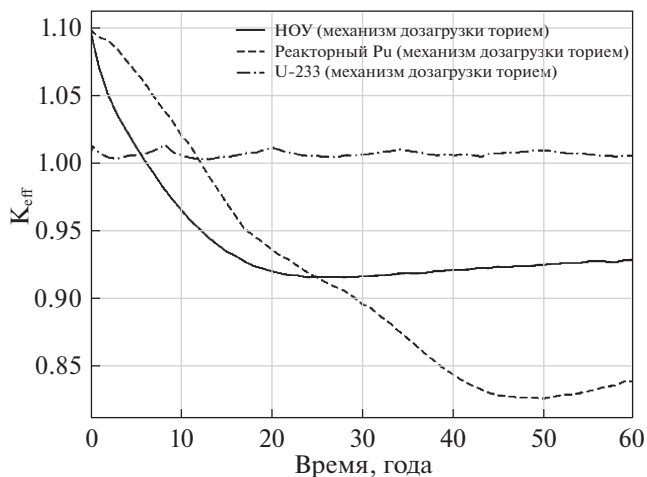
**Рис. 1.** Блок-схема процедур расчета.**Рис. 2.** Изменение эффективного коэффициента размножения нейтронов в течение 60 лет работы реактора при использовании механизма дозагрузки торием.

Таблица 4. Таблица обработки

Перерабатывающая группа	Элементы	Время обработки	константа удаления λ_r [s ⁻¹]
ПД и нерастворенные металлы	(атомный номер $Z = 1, 2, 7, 8, 10, 18, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 51, 52, 54, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79$ and 86)	30 с	$-3.333E^{-2}$
Извлечение лантаноидов и других растворимых ПД путем химической переработки	(атомный номер $Z = 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 48, 49, 50, 53, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70$)	10.5994 дней (температура удаления = 5м ³ /д)	$-1.09195E^{-6}$
Извлечение Ра путем химической переработки	Ра	10.5994 дней (температура удаления = 5м ³ /д)	$-1.09195E^{-6}$

вание реакторного Pu в качестве стартовой загрузки показывает многообещающие результаты по сравнению со сценарием использования НОУ. В сценарии использования реакторного Pu количество ^{233}U , производимого в SD-TMSR в дополнение к потоку Pu дозагружаемого извне, достаточно для поддержания критичности реактора и противодействию поглощения нейтронов продуктами деления. НОУ менее привлекателен для данного механизма дозагрузки, так как непрерывная дозагрузка НОУ увеличивает количество фертильного ^{238}U и, следовательно, снижает возможность использования таких делящихся материалов. Согласно рассчитанным значениям k_{eff} , реакторный Pu является единственным альтернативным делящимся материалом, которые можно использовать для запуска и поддержания работы SD-TMSR.

Реакторный Pu и ^{233}U

В данном разделе рассматривается моделирование SD-TMSR с реакторным Pu и ^{233}U в качестве делящегося материала. Рис. 4 демонстрирует динамику изменения скорости дозагрузки тяжелыми металлами в течение 60 лет работы SD-TMSR. Скорость дозагрузки тяжелыми металлами была выбрана так, чтобы поддерживать критичность реактора, а общая масса топлива во время работы реактора была почти постоянной⁴. При сценарии использования ^{233}U средние значения скоростей дозагрузки ^{233}U и ^{232}Th составляют 1.77 и 2.21 кг/день, соответственно. Аналогичным образом при сценарии использования реакторного Pu средние значения скоростей подачи ^{233}U и Pu составляют 0.75 и 2.75 кг/день соответственно. На рис. 5 показано изменение количества тория в топливной соли для сценариев использования ^{233}U и реакторного Pu. Количество тория в сценарии с ^{233}U уменьшается только на 3.2% под конец

работы реактора (60 лет), при реализации механизма дозагрузки торием. В случае применения механизма дозагрузки без тория и сценария с использованием реакторного Pu общая масса тория значительно уменьшается на 39.2% под конец работы реактора.

На рис. 6 представлены значения массы ^{233}U в топливной соли для сценариев использования ^{233}U и Pu в качестве стартовой топливной загрузки. Примечательно, что масса ^{233}U достигает равновесия через ≈ 30 лет. В целом, количество ^{233}U достаточно для поддержания критичности в SD-TMSR. В механизме дозагрузки без тория, SD-TMSR непрерывно дозагружается НМ (т.е. Pu) для поддержания критичности, что увеличивает молярную долю Pu (мол. %) в расплавленной соли. Согласно литературным данным, предел растворимости Pu в соли FLiBe составляет ≈ 4.0 мол. % [21]. На рис. 7 представлена доля Pu в топливной соли (мол. %) для сценариев использования ^{233}U и

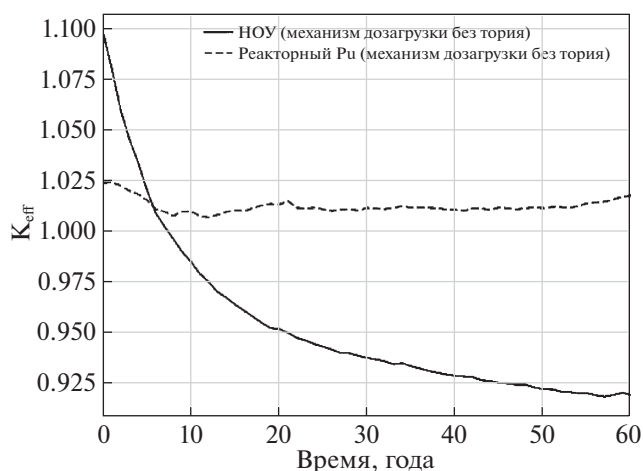


Рис. 3. Изменение эффективного коэффициента размножения нейтронов в течение 60 лет работы реактора при использовании механизма дозагрузки без тория.

⁴ Изменение общей массы топлива составляет менее 0.1%.

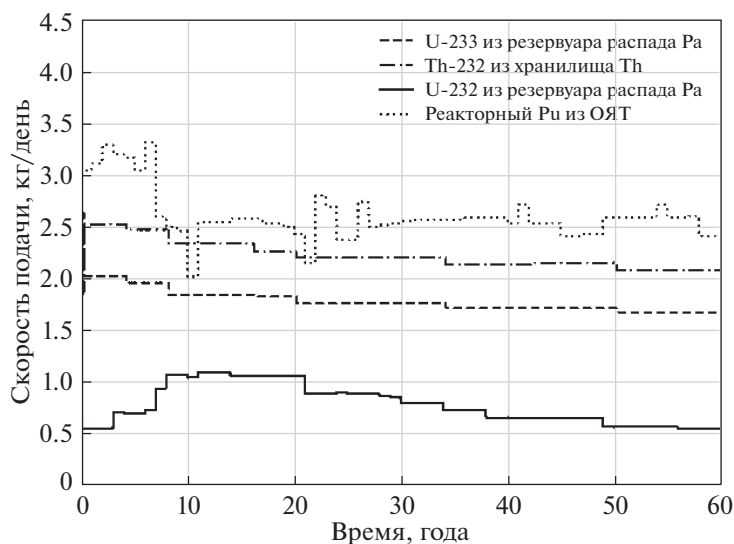


Рис 4. Динамика скорости подачи тяжелых металлов за 60 лет эксплуатации реактора. Сплошные линии для ^{233}U и пунктирные линии для реакторного сорта Pu.

Pu для стартовой топливной загрузки соответственно. Отметим, что при сценарии использования ^{233}U доля Pu немного увеличивается, однако, она все же ниже предела растворимости. Так же и в сценарии использования реакторного Pu доля Pu увеличивается, но и в данном случае она ниже предела растворимости.

На рис. 8 представлены размеры чистого производства ^{233}U во время работы реактора для сценариев стартовой загрузки ^{233}U и реакторного Pu. Рассматривая данные сценарии, можно отметить, что чистое производство ^{233}U увеличивается с выгоранием и достигает в конце срока работы реактора значений примерно в 1.77 т и 10 т, соответ-

ственно. Для сценария ^{233}U чистое производство ^{233}U через 26 лет достигает 1.3 т; этого достаточно для запуска другого SD-TMSR. Точно так же можно видеть, что такое же количество ^{233}U (1.3 т) может быть достигнуто через 4.5 года, если мы применяем механизм дозагрузки без тория на SD-TMSR, который первоначально загружался альтернативным ^{233}U топливом. Кроме того, на основе полученных данных можно сделать вывод, что для сценария стартовой загрузки ^{233}U в качестве топлива, чистое производство ^{233}U в течение первых 455 дней является отрицательным, поэтому в этот период необходимо дозагрузить около 175.28 кг ^{233}U .

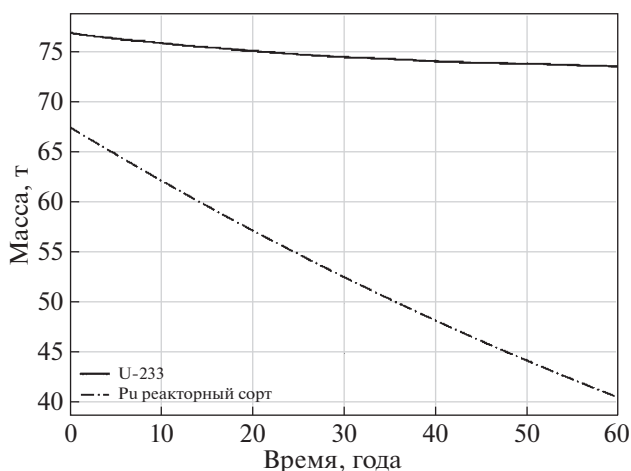


Рис. 5. Изменение массы тория в топливной соли для случаев ^{233}U и реакторного сорта Pu.

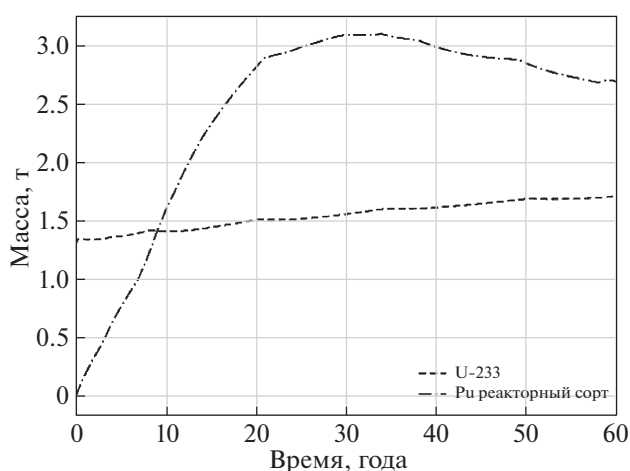


Рис. 6. Масса ^{233}U в топливной соли для случаев ^{233}U и реакторного сорта Pu.

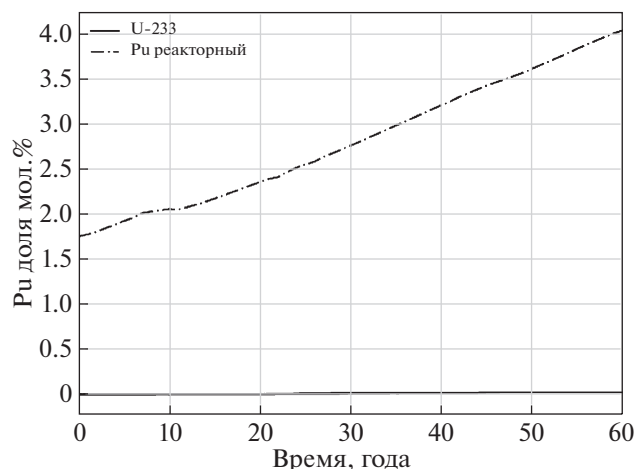


Рис. 7. Доля Pu в топливной соли (мол. %) для случаев ^{233}U и реакторного сорта Pu.

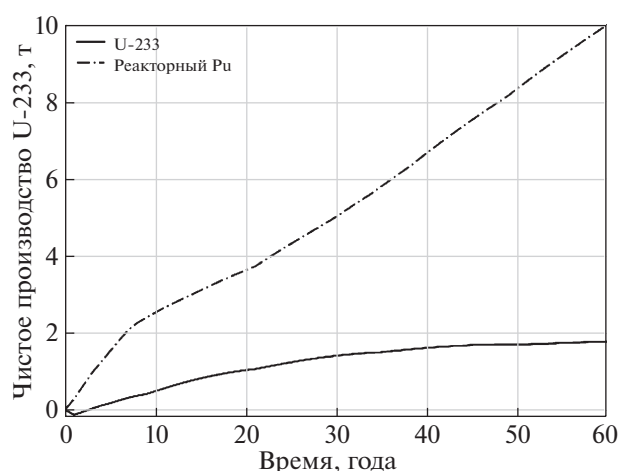


Рис. 8. Чистое производство ^{233}U на протяжении всего времени выгорания (60 лет) для случаев ^{233}U и реакторного сорта Pu.

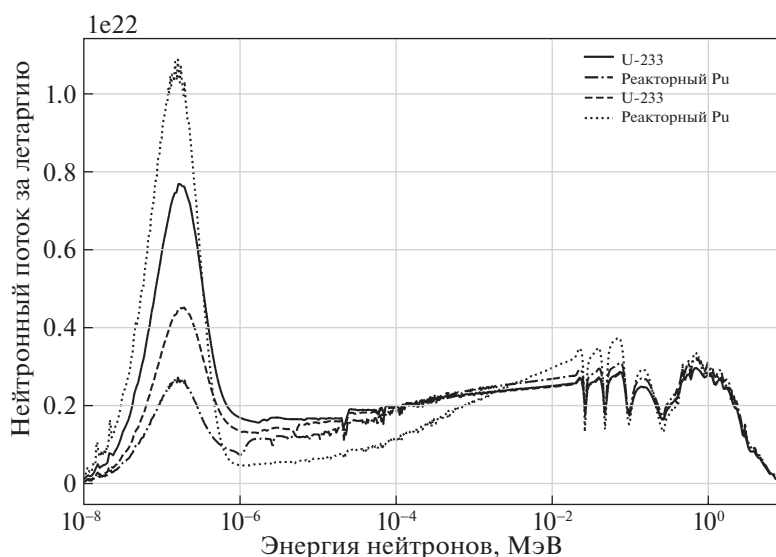


Рис. 9. Энергетический спектр нейтронного потока при BOL (сплошные линии) и EOL (пунктирные линии) для случаев ^{233}U и реакторного сорта Pu.

НЕЙТРОННЫЙ СПЕКТР

На рис. 9 представлены значения потока нейтронов на единицу летаргии для исследуемой модели SD-TMSR в диапазоне энергий от 10^{-8} до 10 МэВ для сценариев использования ^{233}U и реакторного Pu в качестве стартовой загрузки на начало жизни (Beginning of Life – BOL) и конец жизни (End of Life – EOL). При сценарии использования ^{233}U в EOL спектр нейтронов более жесткий, чем в BOL, из-за большого накопленного количества Pu и других сильных поглотителей тепловых нейтронов в топливной соли. При сценарии использования реакторного Pu во время работы ре-

актора делящийся Pu выгорает, и ^{233}U становится основным делящимся изотопом (см. рис. 6), спектр нейтронов смягчается и становится аналогичным начальному тепловому спектру SD-TMSR, работающего на ^{233}U .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были изучены три различных типа делящихся материалов для изначальной загрузки топлива для последующего перехода к ториевому топливному циклу в SD-TMSR. Были рассмотрены два различных механизма дозагрузки топлива:

механизм дозагрузки торием и механизм дозагрузки без тория.

Расчеты выгорания для модели SD-TMSR с цельной активной зоной были выполнены с использованием НОУ (19.79%), реакторного Pu и ^{233}U в качестве исходных делящихся материалов. Кроме того, были исследованы динамики изменения эффективного коэффициента размножения нейтронов (k_{eff}) и нейтронного энергетического спектра. Результаты показали, что обеспечение непрерывного потока реакторного Pu для топливной дозагрузки, позволяет обеспечить переход к планируемому топливному циклу за относительно короткое время (4.5 года). Важно отметить, что рассчитанная молярная доля Pu (мол. %) в топливной соли оказалась ниже предела растворимости.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы объявили, что нет никаких конфликтов интересов.

ПОДТВЕРЖДЕНИЯ

Работа финансировалась Программой конкурентоспособности МИФИ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. U. S. DoE, "A technology roadmap for generation {IV} nuclear energy systems," in *Nuclear {Energy} {Research} {Advisory} {Committee} and the {Generation} {IV} {International} {Forum}*, 2002. P. 48–52.
2. Siemer D.D. "Why the molten salt fast reactor (MSFR) is the 'best' gen IV reactor," *Energy Sci. Eng.* 2015. V. 3. № 2. P. 83–97.
3. Rosenthal M.W., Kasten P.R., Briggs R.B. "Molten-Salt Reactors—History, Status, and Potential," *Nucl. Appl. Technol.* 1970. V. 8. № 2. P. 107–117.
4. Piro I.L. *Handbook of Generation IV Nuclear Reactors*. 2016.
5. Li G.C. et al. "Optimization of Th-U fuel breeding based on a single-fluid double-zone thorium molten salt reactor," *Prog. Nucl. Energy*. Sep. 2018. V. 108. P. 144–151.
6. Nuttin A. et al. "Potential of thorium molten salt reactors detailed calculations and concept evolution with a view to large scale energy production," *Prog. Nucl. Energy*. 2005. V. 46. № 1. P. 77–99.
7. Rykhlevskii A., Bae J.W., Huff K.D. "Modeling and simulation of online reprocessing in the thorium-fueled molten salt breeder reactor," *Ann. Nucl. Energy*. 2019. V. 128. P. 366–379.
8. Betzler R., Powers J.J., Worrall A. "Modeling and simulation of the start-up of a thorium-based molten salt reactor," in *Proc. {Int}. {Conf}. {PHYSOR}*, 2016.
9. Zou Y., Cai C.Z., Yu C.G., Wu J.H., Chen J.G. "Transition to thorium fuel cycle for TMSR," *Nucl. Eng. Des.*, 2018.
10. Heuer D., Merle-Lucotte E., Allibert M., Brovchenko M., Ghetta V., Rubiolo P. "Towards the thorium fuel cycle with molten salt fast reactors," *Ann. Nucl. Energy*. Feb. 2014. V. 64. P. 421–429.
11. Ashraf O., Smirnov A.D., Tikhomirov G.V. "Modeling and criticality calculation of the Molten Salt Fast Reactor using Serpent code," *J. Phys. Conf. Ser.* Mar. 2019. V. 1189. P. 012007.
12. Ashraf O., Smirnov A.D., Tikhomirov G.V. "Nuclear fuel optimization for molten salt fast reactor," in *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. V. 1133. № 1.
13. Fiorina C. "The molten salt fast reactor as a fast spectrum candidate for thorium implementation," *Politecnico Di Milano*, 2013.
14. Fiorina C. et al. "Investigation of the {MSFR} core physics and fuel cycle characteristics," *Prog. Nucl. Energy*. Sep. 2013. V. 68. P. 153–168.
15. Zou C., Zhu G., Yu C., Zou Y., Chen J. "Preliminary study on TRUs utilization in a small modular Th-based molten salt reactor (smTMSR)," *Nucl. Eng. Des.*, V. 339. № August. 2018. P. 75–82.
16. Leppanen J., Pusa M., Viitanen T., Valtavirta V., Kaltiaisenaho T. "The Serpent Monte Carlo code: Status, development and applications in 2013," *Ann. Nucl. Energy*. Aug. 2015. V. 82. P. 142–150.
17. Robertson R.C. "Conceptual {Design} {Study} of a {Single}-{Fluid} {Molten}-{Salt} {Breeder} {Reactor}," Jan. 1971.
18. Mark J.C., Hippel F.V.O.N., Lyman E., "Science & Global Security": The Technical Basis for Arms Control, Disarmament, and Nonproliferation Initiatives Explosive Properties of Reactor-Grade Plutonium." 1972. V. 4. № July 2014. P. 37–41.
19. Aufiero M., Cammi A., Fiorina C., Leppänen J., Luzzi L., Ricotti M.E. "An extended version of the SERPENT-2 code to investigate fuel burn-up and core material evolution of the Molten Salt Fast Reactor," *J. Nucl. Mater.* Oct. 2013. V. 441. № 1–3. P. 473–486.
20. Isotalo A.E., Pusa M. "Improving the Accuracy of the Chebyshev Rational Approximation Method (CRAM) by Using Substeps," *Nucl. Sci. Eng.* 2016. V. 183. № 1. P. 65–77.
21. Ignatiev V., Feynberg O., Gnidoi I. "Progress in Development of Li,Be,Na/F Molten Salt Actinide Recycler & Transmuter Concept." 2007. V. 13–18. P. 7548.

Preliminary Study on Transition to Thorium Fuel Cycle in SD-TMSR

O. Ashraf^{a,b,#}, A. D. Smirnov^a, S. N. Ryzhov^a, and G. V. Tikhomirov^a

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

^b Ain Shams University, Cairo, 11341 Egypt

[#]e-mail: osama.ashraf@edu.asu.edu.eg

Received May 19, 2020; revised July 20, 2020; accepted October 6, 2020

Abstract—Molten salt reactors (MSRs) represent advances in safety, sustainability, proliferation resistance, and economics. Therefore, an MSR has been chosen as one of the promising reactors for next generation by the Generation IV International Forum. The MSR has been designed to operate on the basis of the Th/²³³U fuel cycle. Hence, ²³³U does not exist in nature; it is required to investigate commercially available fuel materials to replace ²³³U in starting fuel. We have analyzed the fuel cycle and neutron performance of the SD-TMSR with three different fissile materials loading at startup: low-enriched uranium (LEU) (19.79%), reactor-grade Pu, and ²³³U. Two different feed mechanisms have been applied. Moreover, the MSR burnup routine within SERPENT-2 has been utilized to simulate the online reprocessing and refueling in the SD-TMSR. In conclusion, the continuous flow of Pu reactor-grade offers the transition to a thorium fuel cycle within a relatively short time (≈ 4.5 yr) compared to 26 yr for ²³³U startup fuel.

Keywords: molten salt reactor, thorium fuel cycle, on-line reprocessing, Monte-Carlo method, burnup, reactivity

DOI: 10.1134/S2304487X20040021

REFERENCES

1. U. S. DoE, "A technology roadmap for generation {IV} nuclear energy systems," in *Nuclear {Energy} {Research} {Advisory} {Committee} and the {Generation} {IV} {International} {Forum}*, 2002, pp. 48–52.
2. Siemer D.D. "Why the molten salt fast reactor (MSFR) is the 'best' gen IV reactor," *Energy Sci. Eng.*, vol. 3, no. 2, pp. 83–97, 2015.
3. Rosenthal M.W., Kasten P.R., Briggs R.B. "Molten-Salt Reactors—History, Status, and Potential," *Nucl. Appl. Technol.*, vol. 8, no. 2, pp. 107–117, 1970.
4. Piro I.L. *Handbook of Generation IV Nuclear Reactors*. 2016.
5. Li G.C. et al. "Optimization of Th-U fuel breeding based on a single-fluid double-zone thorium molten salt reactor," *Prog. Nucl. Energy*, vol. 108, pp. 144–151, Sep. 2018.
6. Nuttin A. et al. "Potential of thorium molten salt reactors detailed calculations and concept evolution with a view to large scale energy production," *Prog. Nucl. Energy*, vol. 46, no. 1, pp. 77–99, 2005.
7. Rykhlevskii A., Bae J.W., Huff K.D. "Modeling and simulation of online reprocessing in the thorium-fueled molten salt breeder reactor," *Ann. Nucl. Energy*, vol. 128, pp. 366–379, 2019.
8. Betzler B.R., Powers J.J., Worrall A. "Modeling and simulation of the start-up of a thorium-based molten salt reactor," in *Proc. {Int}. {Conf}. {PHYSOR}*, 2016.
9. Zou C.Y., Cai C.Z., Yu C.G., Wu J.H., Chen J.G. "Transition to thorium fuel cycle for TMSR," *Nucl. Eng. Des.*, 2018.
10. Heuer D., Merle-Lucotte E., Allibert M., Brovchenko M., Ghetta V., Rubiolo P. "Towards the thorium fuel cycle with molten salt fast reactors," *Ann. Nucl. Energy*, vol. 64, pp. 421–429, Feb. 2014.
11. Ashraf O., Smirnov A.D., Tikhomirov G.V. "Modeling and criticality calculation of the Molten Salt Fast Reactor using Serpent code," *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1189, p. 012007, Mar. 2019.
12. Ashraf O., Smirnov A.D., Tikhomirov G.V. "Nuclear fuel optimization for molten salt fast reactor," in *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 1133, no. 1.
13. Fiorina C. "The molten salt fast reactor as a fast spectrum candidate for thorium implementation," *Politecnico Di Milano*, 2013.
14. Fiorina C. et al. "Investigation of the {MSFR} core physics and fuel cycle characteristics," *Prog. Nucl. Energy*, vol. 68, pp. 153–168, Sep. 2013.
15. Zou C., Zhu G., Yu C., Zou Y., Chen J. "Preliminary study on TRUs utilization in a small modular Th-based molten salt reactor (smTMSR)," *Nucl. Eng. Des.*, vol. 339, no. August, pp. 75–82, 2018.

16. Leppanen J., Pusa M., Viitanen T., Valtavirta V., Kaltiaisenaho T. "The Serpent Monte Carlo code: Status, development and applications in 2013," *Ann. Nucl. Energy*, vol. 82, pp. 142–150, Aug. 2015.
17. Robertson R.C. "Conceptual {Design} {Study} of a {Single}-{Fluid} {Molten}-{Salt} {Breeder} {Reactor}." Jan. 1971.
18. Mark J.C., Hippel F.V.O.N., Lyman E. "Science & Global Security": The Technical Basis for Arms Control, Disarmament, and Nonproliferation Initiatives Explosive Properties of Reactor-Grade Plutonium," vol. 4, no. July 2014, pp. 37–41, 1972.
19. Aufiero M., Cammi A., Fiorina C., Leppänen J., Luzzi L., Ricotti M.E. "An extended version of the SERPENT-2 code to investigate fuel burn-up and core material evolution of the Molten Salt Fast Reactor," *J. Nucl. Mater.*, vol. 441, no. 1–3, pp. 473–486, Oct. 2013.
20. Isotalo A.E., Pusa M. "Improving the Accuracy of the Chebyshev Rational Approximation Method (CRAM) by Using Substeps," *Nucl. Sci. Eng.*, vol. 183, no. 1, pp. 65–77, 2016.
21. Ignatiev V., Feynberg O., Gnidoi I. "Progress in Development of Li,Be,Na/F Molten Salt Actinide Recycler & Transmuter Concept," vol. 13–18, p. 7548, 2007.
22. Čerba Š., Vrbán B., Luley J., Nečas V., Haščík J., "Optimization of the heterogeneous GFR 2400 control rod design," *Prog. Nucl. Energy*, vol. 97, pp. 170–181, May 2017.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ТИПА ПАНТОГРАФА

© 2020 г. А. Д. Полянин^{1,*}, В. Г. Сорокин^{1,**}

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

*e-mail: polyanin@ipmnet.ru

**e-mail: vsesor@gmail.com

Поступила в редакцию 14.09.2020 г.

После доработки 14.09.2020 г.

Принята к публикации 12.10.2020 г.

Исследуются нелинейные уравнения в частных производных с переменным запаздыванием типа пантографа, которые помимо искомой функции $u = u(x, t)$ содержат также функции с растяжением одной или нескольких независимых переменных вида $u(px, t)$, $u(x, qt)$ или $u(px, qt)$, где p и q – параметры масштабирования ($0 < p < 1$, $0 < q < 1$). Впервые описаны точные решения различных классов таких уравнений. Приведены примеры нелинейных уравнений в частных производных с переменным запаздыванием типа пантографа, которые допускают автомодельные решения (отметим, что уравнения в частных производных с постоянным запаздыванием не имеют автомодельных решений). Получены точные решения с аддитивным, мультипликативным и обобщенным разделением переменных, а также решения более сложного вида. Особое внимание уделяется нелинейным уравнениям в частных производных типа пантографа достаточно общего вида, которые содержат произвольные функции. В целом рассмотрено более сорока нелинейных уравнений с переменным запаздыванием типа пантографа, допускающих точные решения. Показано, что некоторые уравнения допускают обобщение на случай запаздывания, которое произвольным образом зависит от времени. Описанные уравнения и их точные решения могут быть использованы для формулировки тестовых задач, предназначенных для проверки адекватности и оценки точности численных и приближенных аналитических методов решения соответствующих нелинейных начально-краевых задач для уравнений в частных производных с переменным запаздыванием типа пантографа.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения типа пантографа, уравнения в частных производных с переменным запаздыванием, реакционно-диффузионные уравнения, волновые уравнения, точные решения, автомодельные решения

DOI: 10.1134/S2304487X20040069

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения с постоянным запаздыванием. В естествознании важную роль играет изучение наследственных свойств нелинейных систем различной природы, скорость изменения искомых величин которых зависит не только от состояния в данный момент времени, но и от предыдущей эволюции процесса. В частном случае состояние системы может определяться не всей ее историей, а только каким-то моментом в прошлом. Такие системы называют системами с запаздыванием. При математическом моделировании подобных систем в простейшем случае в дифференциальные уравнения помимо искомой функции $u(t)$ входит также функция $u(t - \tau)$, где t – время, $\tau > 0$ – время запаздывания [1–3]. Обычно считается, что время запаздывания постоянно.

При моделировании нелинейных систем с постоянным запаздыванием и двумя независимыми переменными x, t , где x – пространственная координата, чаще всего встречаются реакционно-диффузионные уравнения вида [4]:

$$u_t = au_{xx} + F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (1)$$

Наличие запаздывания значительно затрудняет анализ уравнений вида (1). Такие уравнения допускают решения типа бегущей волны $u = u(z)$, где $z = x + \lambda t$ (см., например, [4–7]), но не допускают автомодельных решений вида $u = t^\beta \varphi(xt^\lambda)$, которые часто имеют уравнения с частными производными без запаздывания.

Более сложные, чем решения типа бегущей волны, точные решения нелинейных уравнений с запаздыванием реакционно-диффузионного ти-

па были получены в работах [8–19]. Точные решения нелинейных уравнений типа Клейна–Гордона с запаздыванием и других нелинейных уравнений гиперболического типа приведены в [20–28]. Некоторые точные решения дифференциально-разностных уравнений вязкой несжимаемой жидкости (которые обобщают уравнения Навье–Стокса) описаны в [29].

Важно отметить, что дифференциальные уравнения с запаздыванием обладают рядом специфических качественных особенностей [4, 21, 23, 30], которые не присущи уравнениям без запаздывания.

Уравнение пантографа и родственные уравнения. В некоторых случаях запаздывание может зависеть от времени, т.е. $\tau = \tau(t)$, где $\tau(t) > 0$ – заданная функция [2].

Для иллюстрации сказанного рассмотрим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с переменным запаздыванием, пропорциональным независимой переменной:

$$u'_t = au + bw, \quad w = u(pt), \quad (2)$$

которое при $0 < p < 1$ называется *уравнением пантографа*. Это уравнение описывает динамику контактного токоприемника (пантографа) электроваза [31] и является частным случаем ОДУ с переменным запаздыванием при $\tau(t) = (1 - p)t$. Функция $u(pt)$, входящая в уравнение пантографа (2), отличается от функции $u(t)$ растяжением вдоль оси t в $1/p$ раз.

Уравнение пантографа и более сложные родственные дифференциальные уравнения, которые содержат искомые функции с растяжением аргумента, используются для математического моделирования различных процессов в биологии [32, 33], астрофизике [34], электродинамике [35], теории популяций [36], теории чисел [37], стохастических играх [38], теории графов [39], теории риска и очередей [40]. Анализ и решению таких уравнений посвящены также, например, работы [31, 41–47].

Нам неизвестны публикации, в которых были бы приведены точные решения нелинейных уравнений с частными производными типа пантографа. В [9, 11, 15] были описаны несколько классов точных решений нелинейных уравнений с частными производными с произвольным запаздыванием. Эти результаты использованы в данной статье для получения точных решений соответствующих уравнений типа пантографа. Кроме того, рассмотрено много других нелинейных уравнений с частными производными типа пантографа второго и более высоких порядков, которые допускают точные решения, включая и автомодельные решения. Некоторые точные решения

были получены с помощью различных модификаций метода функциональных связей [10, 15].

В данной статье термин “точное решение” для нелинейных уравнений в частных производных типа пантографа (с растяжением одного или нескольких независимых переменных) и других уравнений с переменным запаздыванием будем применять в случаях, когда решение выражается:

(i) через элементарные функции, функции, входящие в уравнение (это необходимо, когда уравнение содержит произвольные функции), и неопределенные или/и определенные интегралы;

(ii) через решения обыкновенных дифференциальных уравнений без запаздывания или систем таких уравнений;

(iii) через решения обыкновенных дифференциальных уравнений типа пантографа и других уравнений с переменным запаздыванием или систем таких уравнений.

Допустимы комбинации решений из пп. (i)–(iii). В случае (i) точное решение может быть представлено в явной, неявной или параметрической форме. Данное определение обобщает термин “точное решение”, который использовался в [10, 12] для нелинейных уравнений в частных производных с постоянным запаздыванием и в [48] – для уравнений без запаздывания.

Далее, если специально не оговаривается, в нелинейных уравнениях с частными производными типа пантографа считается, что $0 < p < 1$ и $0 < q < 1$, $f(z)$ и $g(z)$ – произвольные функции. Искомая функция обозначается u , а искомая функция с растяжением одного или нескольких аргументов – w .

2. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕАКЦИОННО-ДИФFUЗИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ПАНТОГРАФА

2.1. Уравнения, линейные по производным, содержащие свободные параметры

Уравнение 1. Уравнение со степенной нелинейностью

$$u_t = au_{xx} + bw^k, \quad w = u(px, qt) \quad (3)$$

при $k \neq 1$ допускает автомодельное решение

$$u(x, t) = t^{\frac{1}{1-k}} U(z), \quad z = xt^{-1/2}, \quad (4)$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ типа пантографа

$$aU''_{zz} + \frac{1}{2}zU'_z - \frac{1}{1-k}U + bq^{\frac{k}{1-k}}W^k = 0, \quad (5)$$

$$W = U(sz), \quad s = pq^{-1/2}.$$

Замечание 1. Интересно отметить, что нелинейное уравнение (3) с переменным запаздыванием при $0 < p, q < 1$ в частном случае $p = q^{1/2}$ имеет точное решение, которое выражается через решение ОДУ без запаздывания (5) при $s = 1$, при $p < q^{1/2}$ уравнение (3) сводится к ОДУ с запаздыванием при $s < 1$, а при $p > q^{1/2}$ – к ОДУ с опережением при $s > 1$. Более того, решение уравнения (3) с опережением при $p, q > 1$ при подходящих значениях параметров p и q также может выражаться через решение ОДУ с запаздыванием ($s < 1$), без запаздывания ($s = 1$) и с опережением ($s > 1$).

Уравнение 2. Уравнение со степенной нелинейностью

$$u_t = au_{xx} + bu^m w^k, \quad w = u(px, qt),$$

при $k \neq 1 - m$ допускает автомодельное решение

$$u(x, t) = t^{\frac{1}{1-m-k}} U(z), \quad z = xt^{-1/2},$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ типа пантографа

$$aU''_{zz} + \frac{1}{2}zU'_z - \frac{1}{1-m-k}U + bq^{\frac{k}{1-m-k}}U^m W^k = 0, \\ W = U(sz), \quad s = pq^{-1/2} \leq 1.$$

Уравнение 3. Уравнение с логарифмической нелинейностью

$$u_t = au_{xx} + u(b \ln u + c \ln w), \quad w = u(px, qt),$$

допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются нелинейными ОДУ типа пантографа

$$a\varphi''_{xx} + \varphi(b \ln \varphi + c \ln \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px);$$

$$\psi'_t = \psi(b \ln \psi + c \ln \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 4. Уравнение с логарифмической нелинейностью

$$u_t = au_{xx} + u(b \ln u + c \ln w + d), \quad w = u(x, qt), \quad (6)$$

допускает точное решение вида

$$u(x, t) = \exp[\psi_2(t)x^2 + \psi_1(t)x + \psi_0(t)],$$

где функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ типа пантографа

$$\psi'_2 = 4a\psi_2^2 + b\psi_2 + c\bar{\psi}_2, \quad \bar{\psi}_2 = \psi_2(qt),$$

$$\psi'_1 = 4a\psi_1\psi_2 + b\psi_1 + c\bar{\psi}_1, \quad \bar{\psi}_1 = \psi_1(qt),$$

$$\psi'_0 = a[\psi_1^2 + 2\psi_2] + b\psi_0 + c\bar{\psi}_0 + d, \quad \bar{\psi}_0 = \psi_0(qt).$$

Уравнение 5. Уравнение с логарифмической нелинейностью

$$u_t = au_{xx} + u(b \ln^2 u + c \ln u + d \ln w + s), \quad (7) \\ w = u(x, qt),$$

в зависимости от знака произведения ab допускает два точных решения, приведенных ниже.

1°. Решение при $ab > 0$:

$$u(x, t) = \exp[\psi_1(t)\varphi(x) + \psi_2(t)],$$

$$\varphi(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x), \quad \lambda = \sqrt{b/a},$$

где A и B – произвольные постоянные, а функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ типа пантографа

$$\psi'_1 = 2b\psi_1\psi_2 + (c - b)\psi_1 + d\bar{\psi}_1, \quad \bar{\psi}_1 = \psi_1(qt),$$

$$\psi'_2 = b(A^2 + B^2)\psi_1^2 + b\psi_2^2 + c\psi_2 + d\bar{\psi}_2 + s,$$

$$\bar{\psi}_2 = \psi_2(qt).$$

2°. Решение при $ab < 0$:

$$u(x, t) = \exp[\psi_1(t)\varphi(x) + \psi_2(t)],$$

$$\varphi(x) = A \operatorname{ch}(\lambda x) + B \operatorname{sh}(\lambda x), \quad \lambda = \sqrt{-b/a},$$

где A и B – произвольные постоянные, а функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ типа пантографа

$$\psi'_1 = 2b\psi_1\psi_2 + (c - b)\psi_1 + d\bar{\psi}_1, \quad \bar{\psi}_1 = \psi_1(qt),$$

$$\psi'_2 = b(A^2 - B^2)\psi_1^2 + b\psi_2^2 + c\psi_2 + d\bar{\psi}_2 + s,$$

$$\bar{\psi}_2 = \psi_2(qt).$$

При $A = \pm B$ имеем $\varphi(x) = Ae^{\pm \lambda x}$. В этом случае второе уравнение системы становится независимым, а первое – линейным для ψ_1 .

Замечание 2. Уравнения (6) и (7) и их решения допускают обобщения на случай переменного запаздывания общего вида, когда $w = u(x, t - \tau(t))$, где $\tau(t)$ – произвольная функция [9].

2.2. Уравнения, линейные по производным, содержащие произвольные функции вида $f(u - w)$

Уравнение 6. Уравнение, содержащее произвольную функцию,

$$u_t = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(x, qt),$$

допускает точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u(x, t) = C_1 x^2 + C_2 x + \psi(t),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка типа пантографа

$$\psi'_t = 2aC_1 + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 7. Уравнение, содержащее произвольную функцию,

$$u_t = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(px, t),$$

допускает точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u(x, t) = Ct + \varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка типа пантографа

$$a\varphi''_{xx} - C + f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

Уравнение 8. Уравнение, содержащее произвольную функцию,

$$u_t = au_{xx} + bu + f(u - w), \quad w = u(x, qt), \quad (8)$$

в зависимости от знака произведения ab допускает два точных решения, приведенных ниже.

1°. Решение при $ab < 0$:

$$u(x, t) = A \operatorname{ch}(\lambda x) + B \operatorname{sh}(\lambda x) + \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{-b/a},$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка типа пантографа

$$\psi'_t = b\psi + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (9)$$

2°. Решение при $ab > 0$:

$$u(x, t) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) + \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{b/a},$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка типа пантографа (9).

Отметим, что уравнение (8) и его решения допускают обобщение на случай переменного запаздывания общего вида, когда $w = u(x, t - \tau(t))$, где $\tau(t)$ — произвольная функция [9, 11].

Уравнение 9. Уравнение, содержащее произвольную функцию,

$$u_t = au_{xx} + bu + f(u - w), \quad w = u(px, t),$$

допускает точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u(x, t) = Ce^{bt} + \varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка типа пантографа

$$a\varphi''_{xx} + b\varphi + f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

2.3. Уравнения, линейные по производным, содержащие произвольные функции вида $f(w/u)$

Уравнение 10. Уравнение, содержащее произвольную функцию,

$$u_t = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(px, t),$$

допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = e^{\lambda t} \varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка типа пантографа

$$a\varphi''_{xx} + \varphi[f(\bar{\varphi}/\varphi) - \lambda] = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

Уравнение 11. Уравнение, содержащее произвольную функцию,

$$u_t = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(x, qt),$$

допускает несколько точных решений с мультипликативным разделением переменных, приведенных ниже.

1°. Решение

$$u(x, t) = [A \operatorname{ch}(\lambda x) + B \operatorname{sh}(\lambda x)]\psi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка типа пантографа

$$\psi'_t = a\lambda^2\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

2°. Решение

$$u(x, t) = [A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)]\psi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка типа пантографа

$$\psi'_t = -a\lambda^2\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

3°. Вырожденное решение

$$u(x, t) = (Ax + B)\psi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка типа пантографа

$$\psi'_t = \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 12. Уравнение, содержащее произвольную функцию,

$$u_t = au_{xx} + bu \ln u + uf(w/u), \quad w = u(x, qt), \quad (10)$$

допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются нелинейным ОДУ второго порядка и ОДУ первого порядка типа пантографа

$$a\varphi''_{xx} = C_1\varphi - b\varphi \ln \varphi, \quad (11)$$

$$\psi'_t = C_1\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi) + b\psi \ln \psi, \quad \bar{\psi} = \psi(qt),$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Первое уравнение (11) является автономным, его общее решение может быть получено в неяв-

ной форме. Частное однопараметрическое решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = \exp \left[-\frac{b}{4a} (x + C_2)^2 + \frac{C_1}{b} + \frac{1}{2} \right],$$

где C_2 — произвольная постоянная.

Отметим, что уравнение (10) и его решение допускают обобщение на случай переменного запаздывания общего вида, когда $w = u(x, t - \tau(t))$, где $\tau(t)$ — произвольная функция [9, 11].

Уравнение 13. Уравнение, содержащее произвольную функцию,

$$u_t = au_{xx} + bu \ln u + uf(w/u), \quad w = u(px, t),$$

допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = \exp(Ce^{bt})\varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ типа пантографа

$$a\varphi''_{xx} + b\varphi \ln \varphi + \varphi f(\bar{\varphi}/\varphi) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

2.4. Нелинейные уравнения более сложного вида

Уравнение 14. Уравнение с переменным коэффициентом переноса степенного вида

$$u_t = a(u^k u_x)_x + uf(w/u), \quad w = u(x, qt), \quad (12)$$

допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ определяются из ОДУ и ОДУ типа пантографа

$$a(\varphi^k \varphi'_x)'_x = b\varphi,$$

$$\psi'_t = b\psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt),$$

b — произвольная постоянная.

Уравнение 15. Уравнение с переменным коэффициентом переноса степенного вида

$$u_t = a(u^k u_x)_x + uf(w/u) + bu^{k+1}, \quad w = u(x, qt), \quad (13)$$

допускает три решения с мультипликативным разделением переменных, которые приведены ниже.

1°. Решение при $b(k+1) > 0$:

$$u(x, t) = [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]^{1/(k+1)} \psi(t),$$

$$\beta = \sqrt{b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа

$$\psi'_t = \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (14)$$

2°. Решение при $b(k+1) < 0$:

$$u(x, t) = [C_1 \exp(-\beta x) + C_2 \exp(\beta x)]^{1/(k+1)} \psi(t),$$

$$\beta = \sqrt{-b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа (14).

3°. Решение при $k = -1$:

$$u(x, t) = C_1 \exp\left(-\frac{b}{2a} x^2 + C_2 x\right) \psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа (14).

Уравнение 16. Уравнение с переменным коэффициентом переноса степенного вида

$$u_t = a(u^k u_x)_x + u^{k+1} f(w/u), \quad w = u(x, qt),$$

допускает точное решение

$$u(x, t) = t^{-1/k} \varphi(z), \quad z = x + \lambda \ln t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(z)$ удовлетворяет ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием

$$a(\varphi^k \varphi'_z)'_z - \lambda \varphi'_z + \frac{1}{k} \varphi + \varphi^{k+1} f(\varphi^{-1/k} \bar{\varphi}/\varphi) = 0,$$

$$\bar{\varphi} = \varphi(z + \lambda \ln q).$$

Уравнение 17. Уравнение с переменным коэффициентом переноса степенного вида

$$u_t = a(u^k u_x)_x + b + u^{-k} f(u^{k+1} - w^{k+1}), \quad (15)$$

$$w = u(x, qt),$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u(x, t) = \left[\psi(t) - \frac{b(k+1)}{2a} x^2 + C_1 x + C_2 \right]^{1/(k+1)},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа

$$\psi'_t = (k+1)f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 18. Уравнение с переменным коэффициентом переноса экспоненциального вида

$$u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w), \quad w = u(x, qt), \quad (16)$$

допускает решение с аддитивным разделением переменных

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln(Ax^2 + Bx + C) + \psi(t),$$

где A , B и C — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа

$$\psi'_t = 2a(A/\lambda)e^{\lambda \psi} + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 19. Уравнение с переменным коэффициентом переноса экспоненциального вида

$$u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w) + be^{\lambda u}, \quad w = u(x, qt), \quad (17)$$

допускает два решения с аддитивным разделением переменных.

1°. Решение при $b\lambda > 0$:

$$u(x, t) = \frac{1}{\lambda} \ln[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)] + \psi(t),$$

$$\beta = \sqrt{b\lambda/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа

$$\psi'_t = f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (18)$$

2°. Решение при $b\lambda < 0$:

$$u(x, t) = \frac{1}{\lambda} \ln[C_1 \exp(-\beta x) + C_2 \exp(\beta x)] + \psi(t),$$

$$\beta = \sqrt{-b\lambda/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа (18).

Уравнение 20. Уравнение с переменным коэффициентом переноса экспоненциального вида

$$u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + b + e^{-\lambda u} f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}), \quad w = u(x, qt), \quad (19)$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u(x, t) = \frac{1}{\lambda} \ln \left[\psi(t) - \frac{b\lambda}{2a} x^2 + C_1 x + C_2 \right],$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа

$$\psi'_t = \lambda f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 21. Уравнение с переменным коэффициентом переноса логарифмического вида

$$u_t = [(a \ln u + b)u_x]_x - cu \ln u + uf(w/u), \quad w = u(x, qt), \quad (20)$$

допускает решения

$$u(x, t) = \exp(\pm \sqrt{c/ax}) \psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа

$$\psi'_t = c(1 + b/a)\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 22. Уравнение с переменным коэффициентом переноса общего вида

$$u_t = [uf'_u(u)u_x]_x + \frac{1}{f'_u(u)}[af(u) + bf(w) + c], \quad w = u(x, qt), \quad (21)$$

допускает решение в неявной форме

$$f(u) = \phi(t)x + \psi(t),$$

где функции $\phi = \phi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ удовлетворяют ОДУ типа пантографа

$$\phi'_t = a\phi + b\bar{\phi}, \quad \bar{\phi} = \phi(qt),$$

$$\psi'_t = a\psi + b\bar{\psi} + c + \phi^2, \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 23. Уравнение с переменным коэффициентом переноса общего вида

$$u_t = a[g'_u(u)u_x]_x + b + \frac{1}{g'_u(u)} f(g(u) - g(w)), \quad w = u(x, qt), \quad (22)$$

допускает решение в неявной форме

$$g(u) = \psi(t) - \frac{b}{2a} x^2 + C_1 x + C_2,$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа (18).

Уравнение 24. Уравнение с переменным коэффициентом переноса общего вида

$$u_t = a[g'_u(u)u_x]_x + bg(u) + \frac{g(u)}{g'_u(u)} f(g(w)/g(u)), \quad w = u(x, qt), \quad (23)$$

допускает два решения с разделением переменных в неявной форме.

1°. Решение при $ab > 0$:

$$g(u) = [C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x)]\psi(t), \quad \lambda = \sqrt{b/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа (14).

2°. Решение при $ab < 0$:

$$g(u) = [C_1 \exp(-\lambda x) + C_2 \exp(\lambda x)]\psi(t),$$

$$\lambda = \sqrt{-b/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа (14).

Замечание 3. Уравнения (12), (13), (15), (16), (17), (19), (20), (21), (22), (23) и их решения допускают обобщения на случай переменного запаздывания общего вида, когда $w = u(x, t - \tau(t))$, где $\tau(t)$ — произвольная функция [15].

Уравнение 25. Уравнение с переменным коэффициентом переноса общего вида

$$u_t = [f(w)u_x]_x, \quad w = u(px, qt),$$

допускает автомодельное решение

$$u(x, t) = U(z), \quad z = xt^{-1/2},$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ типа пантографа

$$[f(W)U'_z]_z + \frac{1}{2}zU'_z = 0, \\ W = U(sz), \quad s = pq^{-1/2} \leq 1.$$

Уравнение 26. Эволюционное уравнение второго порядка общего вида

$$u_t = F(u, w, u_{xx}, u_{xx}), \quad w = u(px, pt),$$

допускает решение типа бегущей волны

$$u(x, t) = U(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ типа пантографа

$$F(U, W, kU'_z, k^2U''_{zz}) + \lambda U'_z = 0, \quad W = U(pz).$$

3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ПАНТОГРАФА

3.1. Уравнения, линейные по производным

Уравнение 27. Уравнение типа Клейна—Гордона со степенной нелинейностью

$$u_{tt} = au_{xx} + bw^k, \quad w = u(px, qt),$$

при $k \neq 1$ допускает автомодельное решение

$$u(x, t) = t^{\frac{2}{1-k}}U(z), \quad z = x/t,$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ типа пантографа

$$\frac{2(1+k)}{(1-k)^2}U - \frac{2(1+k)}{1-k}zU'_z + z^2U''_{zz} = aU''_{zz} + bq^{\frac{2k}{1-k}}W^k, \\ W = U(sz), \quad s = p/q \leq 1.$$

Уравнение 28. Уравнение с логарифмической нелинейностью

$$u_{tt} = au_{xx} + u(b \ln u + c \ln w), \quad w = u(px, qt),$$

допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются нелинейными ОДУ второго порядка типа пантографа

$$a\varphi''_{xx} + \varphi(b \ln \varphi + c \ln \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px);$$

$$\psi''_t = \psi(b \ln \psi + c \ln \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 29. Уравнение, содержащее произвольную функцию

$$u_{tt} = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(x, qt),$$

допускает точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u(x, t) = C_1x^2 + C_2x + \psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка типа пантографа

$$\psi''_t = 2aC_1 + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 30. Уравнение, содержащее произвольную функцию

$$u_{tt} = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(px, t), \quad (24)$$

допускает точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u(x, t) = C_1t^2 + C_2t + \varphi(x),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка типа пантографа

$$a\varphi''_{xx} - 2C_1 + f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

Уравнение 31. Уравнение, содержащее произвольную функцию

$$u_{tt} = au_{xx} + bu + f(u - w), \quad w = u(x, qt), \quad (25)$$

в зависимости от знака произведения ab допускает два точных решения, приведенных ниже.

1°. Решение при $ab < 0$:

$$u(x, t) = A \operatorname{Ach}(\lambda x) + B \operatorname{Sh}(\lambda x) + \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{-b/a},$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка типа пантографа

$$\psi''_t = b\psi + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (26)$$

2°. Решение при $ab > 0$:

$$u(x, t) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) + \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{b/a},$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка типа пантографа (26).

Отметим, что уравнение (25) и его решение допускают обобщение на случай переменного запаздывания общего вида, когда $w = u(x, t - \tau(t))$, где $\tau(t)$ — произвольная функция.

Уравнение 32. Нелинейное волновое уравнение типа пантографа

$$u_{tt} = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(px, t), \quad (27)$$

допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = e^{\lambda t} \varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка типа пантографа

$$a\varphi''_{xx} + \varphi[f(\bar{\varphi}/\varphi) - \lambda^2] = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

Замечание 4. Уравнения (24) и (27) и их решения допускают обобщения на случай переменного запаздывания общего вида, когда $w = u(x - \tau(x), t)$, где $\tau(x)$ — произвольная функция.

3.2. Нелинейные уравнения более сложного вида

Уравнение 33. Нелинейное волновое уравнение типа пантографа

$$u_{tt} = a(u^k u_x)_x + uf(w/u), \quad w = u(x, qt), \quad (28)$$

допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ определяются из ОДУ и ОДУ типа пантографа

$$a(\varphi^k \varphi'_x)'_x = b\varphi,$$

$$\psi''_{tt} = b\psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt),$$

b — произвольная постоянная.

Уравнение 34. Нелинейное волновое уравнение типа пантографа

$$u_{tt} = a(u^k u_x)_x + uf(w/u) + bu^{k+1}, \quad (29)$$

$$w = u(x, qt),$$

допускает три решения с мультипликативным разделением переменных, которые приведены ниже.

1°. Решение при $b(k+1) > 0$:

$$u(x, t) = [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]^{1/(k+1)} \psi(t),$$

$$\beta = \sqrt{b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа

$$\psi''_{tt} = \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (30)$$

2°. Решение при $b(k+1) < 0$:

$$u(x, t) = [C_1 \exp(-\beta x) + C_2 \exp(\beta x)]^{1/(k+1)} \psi(t),$$

$$\beta = \sqrt{-b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (30).

3°. Решение при $k = -1$:

$$u(x, t) = C_1 \exp\left(-\frac{b}{2a}x^2 + C_2 x\right) \psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа (30).

Замечание 5. Уравнения (28) и (29) и их решения допускают обобщения на случай переменного запаздывания общего вида, когда $w = u(x, t - \tau(t))$, где $\tau(t)$ — произвольная функция.

Уравнение 35. Нелинейное волновое уравнение типа пантографа

$$u_{tt} = a(u^k u_x)_x + u^{k+1} f(w/u), \quad w = u(x, qt),$$

допускает точное решение вида

$$u(x, t) = t^{-2/k} \varphi(z), \quad z = x + \lambda \ln t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(z)$ удовлетворяет ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием

$$\frac{2(k+2)}{k^2} \varphi - \lambda \frac{k+4}{k} \varphi'_z + \lambda^2 \varphi''_{zz} =$$

$$= a(\varphi^k \varphi'_z)'_z + \varphi^{k+1} f(q^{-2/k} \bar{\varphi}/\varphi),$$

$$\bar{\varphi} = \varphi(z + \lambda \ln q).$$

Уравнение 36. Нелинейное волновое уравнение типа пантографа

$$u_{tt} = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w), \quad w = u(x, qt),$$

допускает решение с аддитивным разделением переменных

$$u(x, t) = \frac{1}{\lambda} \ln(Ax^2 + Bx + C) + \psi(t),$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ типа пантографа

$$\psi''_{tt} = 2a(A/\lambda)e^{\lambda\psi} + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 37. Нелинейное волновое уравнение

$$u_{tt} = [f(w)u_x]_x, \quad w = u(px, qt), \quad (31)$$

допускает автомодельное решение

$$u(x, t) = U(z), \quad z = x/t,$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ типа пантографа

$$(z^2 U'_z)'_z = [f(W)U'_z]'_z, \quad W = U(sz), \quad s = p/q.$$

Это уравнение допускает первый интеграл

$$z^2 U'_z = f(W)U'_z + C, \quad (32)$$

где C — произвольная постоянная. В специальном случае $C = 0$ уравнение (32) вырождается в трансцендентное уравнение и приводит к решению $z^2 = f(W)$, которое порождает точное решение исходного уравнения (31), заданное в неявной форме:

$$u(x, t) = U(z), \quad z^2 = f(U(sz)), \\ z = x/t, \quad s = p/q.$$

Это решение можно представить в виде $u = f^{-1}(x^2/(st)^2)$, где f^{-1} – функция, обратная к f .

Уравнение 38. Уравнение второго порядка, содержащее u_{tt} , общего вида

$$u_{tt} = F(u, w, u_x, u_{xx}), \quad w = u(px, pt),$$

допускает решение типа бегущей волны

$$u(x, t) = U(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ типа пантографа

$$F(U, W, kU'_z, k^2U''_{zz}) - \lambda^2 U''_{zz} = 0, \quad W = U(pz).$$

4. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СТАРШИХ ПОРЯДКОВ

4.1. Уравнения, линейные по производным

Уравнение 39. Уравнение типа пантографа

$$\sum_{i=1}^k b_i(t) u_t^{(i)} = \sum_{i=1}^m a_i(x) u_x^{(i)} + u f(t, w/u), \quad w = u(x, qt),$$

допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = \varphi(x) \psi(t).$$

Здесь функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ определяются из ОДУ и ОДУ типа пантографа

$$\sum_{i=1}^m a_i(x) \varphi_x^{(i)} = c \varphi,$$

$$\sum_{i=1}^k b_i(t) \psi_t^{(i)} = c \psi(t) + \psi(t) f(t, \bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt),$$

где c – произвольная постоянная.

Уравнение 40. Уравнение типа пантографа

$$\sum_{i=1}^k b_i(t) u_t^{(i)} = \sum_{i=1}^m a_i(x) u_x^{(i)} + bu + f(t, u - w), \\ w = u(x, qt),$$

допускает решение с аддитивным разделением переменных

$$u(x, t) = \varphi(x) + \psi(t).$$

Здесь функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ определяются из ОДУ и ОДУ типа пантографа

$$\sum_{i=1}^m a_i(x) \varphi_x^{(i)} = c - b \varphi,$$

$$\sum_{i=1}^k b_i(t) \psi_t^{(i)} = c + b \psi(t) + f(t, \psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt),$$

где c – произвольная постоянная.

Уравнение 41. Уравнение типа пантографа

$$\sum_{i=1}^k b_i(t) u_t^{(i)} = \sum_{i=1}^m a_i(x) u_x^{(i)} + bu \ln u + u f(t, w/u), \\ w = u(x, qt),$$

допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x, t) = \varphi(x) \psi(t).$$

Здесь функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ определяются из ОДУ и ОДУ типа пантографа

$$\sum_{i=1}^m a_i(x) \varphi_x^{(i)} = c \varphi - b \varphi \ln \varphi,$$

$$\sum_{i=1}^k b_i(t) \psi_t^{(i)} = c \psi(t) + b \psi(t) \ln \psi(t) + \psi f(t, \bar{\psi}/\psi),$$

$$\bar{\psi} = \psi(qt),$$

где c – произвольная постоянная.

4.2. Нелинейные уравнения более сложного вида

Уравнение 42. Уравнение типа пантографа

$$u_t = u^k F\left(\frac{u_x}{u}, \frac{u_{xx}}{u}, \dots, \frac{u_x^{(n)}}{u}, \frac{w}{u}\right), \quad w = u(x, qt),$$

допускает точное решение вида

$$u(x, t) = t^{\frac{1}{1-k}} \varphi(z), \quad z = x + \lambda \ln t,$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается ОДУ с постоянным запаздыванием

$$\frac{1}{1-k} \varphi + \lambda \varphi'_z = \varphi^k F\left(\frac{\varphi'_z}{\varphi}, \frac{\varphi''_{zz}}{\varphi}, \dots, \frac{\varphi_z^{(n)}}{\varphi}, q^{\frac{1}{1-k}} \frac{\bar{\varphi}}{\varphi}\right),$$

$$\bar{\varphi} = \varphi(z + \lambda \ln q).$$

Уравнение 43. Уравнение типа пантографа

$$F(u, w, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}, u_{ttt}, \dots), \quad w = u(px, pt),$$

допускает решение типа бегущей волны

$$u(x, t) = U(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ типа пантографа

$$F(U, W, -\lambda U'_z, k U'_z, \lambda^2 U''_{zz}, -k \lambda U''_{zz}, k^2 U''_{zz}, -\lambda^3 U'''_{zzz}, \dots) = 0, \\ W = U(pz).$$

Уравнение 44. Уравнение типа пантографа

$$G(t, u, \dots, u_t^{(k)}, u - w) = au + F(x, u_x, \dots, u_x^{(n)}), \quad (33) \\ w = u(x, qt),$$

допускает точное решение в виде суммы функций разных аргументов

$$u(x, t) = \varphi(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ определяются из ОДУ и ОДУ типа пантографа

$$F(x, \varphi'_x, \dots, \varphi_x^{(n)}) + a\varphi = C,$$

$$G(t, \psi'_t, \dots, \psi_t^{(n)}, \psi - \bar{\psi}) - a\psi = C, \quad \bar{\psi} = \psi(qt),$$

C — произвольная постоянная. Без ограничения общности можно положить $C = 0$ (соответствует замене $\varphi = \varphi_1 + C/a$ и $\psi = \psi_1 - C/a$).

Уравнение 45. Уравнение типа пантографа

$$G(t, u_t/u, \dots, u_t^{(k)}/u, w/u) = a \ln u + F(x, u_x/u, \dots, u_x^{(n)}/u), \quad w = u(x, qt), \quad (34)$$

допускает точное решение в виде произведения функций разных аргументов

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ определяются из ОДУ и ОДУ типа пантографа

$$F(x, \varphi'_x/\varphi, \dots, \varphi_x^{(n)}/\varphi) + a \ln \varphi = C,$$

$$G(t, \psi'_t/\psi, \dots, \psi_t^{(n)}/\psi, \bar{\psi}/\psi) - a \ln \psi = C, \quad \bar{\psi} = \psi(qt),$$

C — произвольная постоянная. Без ограничения общности можно положить $C = 0$.

Замечание 6. Уравнения (33) и (34) и их решения допускают обобщения на случай переменного запаздывания общего вида, когда $w = u(x, t - \tau(t))$, где $\tau(t)$ — произвольная функция.

5. КРАТКИЕ ВЫВОоды

Впервые представлены точные решения различных классов нелинейных уравнений в частных производных с переменным запаздыванием типа пантографа, которые помимо искомой функции $u = u(x, t)$ содержат также функции с растяжением одной или нескольких независимых переменных вида $u(px, t)$, $u(x, qt)$ или $u(px, qt)$. Приведены примеры нелинейных уравнений в частных производных типа пантографа, которые допускают автомодельные решения, решения с аддитивным, мультипликативным и обобщенным разделением переменных, а также решения более сложного вида. Особое внимание уделяется нелинейным уравнениям типа пантографа достаточно общего вида, которые содержат произвольные функции. Рассмотренные уравнения и их точные решения могут быть использованы для формулировки тестовых задач, предназначенных для оценки точности численных и приближенных аналитических методов решения соответствующих нелинейных начально-краевых задач для уравнений в частных производных с переменным запаздыванием типа пантографа.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690135-5)

и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10025).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
2. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
3. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.
4. Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer, 1996.
5. Mei M. et al. Traveling wavefronts for time-delayed reaction-diffusion equation: (I) Local nonlinearity // J. Dif. Equations. 2009. V. 247. № 2. P. 495–510.
6. Lv G., Wang Z. Stability of traveling wave solutions to delayed evolution equation // J. Dyn. Control Syst. 2015. V. 21. № 2. P. 173–187.
7. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nonlinear delay reaction-diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions // Appl. Math. Lett. 2015. V. 46. P. 38–43.
8. Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction-diffusion equation with a delay // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 338. P. 448–466.
9. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time // Int. J. Non-Linear Mech. 2013. V. 54. P. 115–126.
10. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2014. V. 19. № 3. P. 417–430.
11. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction-diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2014. V. 19. P. 409–416.
12. Polyanin A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction-diffusion equations // Int. J. Non-Linear Mech. 2014. V. 59. P. 16–22.
13. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions // Appl. Math. Lett. 2014. V. 37. P. 43–48.
14. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Non-linear instability and exact solutions to some delay reaction-diffusion systems // Int. J. Non-Linear Mech. 2014. V. 62. P. 33–40.
15. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients // Int. J. Non-Linear Mech. 2014. V. 67. P. 267–277.
16. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The generating equations method: Constructing exact solutions to delay reaction-diffusion systems and other non-linear coupled

- delay PDEs // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2015. V. 71. P. 104–115.
17. Сорокин В.Г. Точные решения некоторых нелинейных уравнений и систем уравнений в частных производных с запаздыванием // *Вестник НИЯУ “МИФИ”*. 2016. Т. 5. № 3. С. 199–219.
 18. Polyanin A.D. Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay and variable coefficients // *Appl. Math. Lett.* 2019. V. 90. P. 49–53.
 19. Sorokin V.G., Polyanin A.D. Nonlinear partial differential equations with delay: Linear stability/instability of solutions, numerical integration // *J. Physics: Conf. Series*. 2019. V. 1205. 012053.
 20. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Generalized and functional separable solutions to non-linear delay Klein–Gordon equations // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2014. V. 19. № 8. P. 2676–2689.
 21. Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Вязьмин А.В. Точные решения и качественные особенности гиперболических реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием // *Теор. основы хим. технологии*. 2015. Т. 49. № 5. С. 527–541.
 22. Long F.-S., Meleshko S.V. On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein – Gordon equation with a delay // *Math. Methods Appl. Sci.* 2016. V. 39. № 12. P. 3255–3270.
 23. Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: Математические модели и качественные особенности // *Вестник НИЯУ МИФИ*. 2017. Т. 6. № 1. С. 41–55.
 24. Long F.-S., Meleshko S.V. Symmetry analysis of the nonlinear two-dimensional Klein – Gordon equation with a time-varying delay // *Math. Methods Appl. Sci.* 2017. V. 40. № 13. P. 4658–4673.
 25. Сорокин В.Г. Точные решения нелинейных телеграфных уравнений с запаздыванием // *Вестник НИЯУ МИФИ*. 2019. Т. 8. № 5. С. 453–464.
 26. Polyanin A.D., Sorokin V.G. New exact solutions of nonlinear wave type PDEs with delay // *Appl. Math. Lett.* 2020. Vol. 108, 106512.
 27. Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Построение точных решений нелинейных уравнений математической физики с запаздыванием с помощью решений более простых уравнений без запаздывания // *Вестник НИЯУ МИФИ*. 2020. Т. 9. № 2. С. 115–128.
 28. Polyanin A.D., Sorokin V.G. A method for constructing exact solutions of nonlinear delay PDEs. *J. Math. Anal. Appl.* 2021. V. 494. № 2. 124619.
 29. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of non-linear differential-difference equations of a viscous fluid with finite relaxation time // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2013. V. 57. P. 116–122.
 30. Jordan P.M., Dai W., Mickens R.E. A note on the delayed heat equation: Instability with respect to initial data // *Mech. Research Comm.* 2008. V. 35. P. 414–420.
 31. Ockendon J.R., Tayler A.B. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1971. V. 332. P. 447–468.
 32. Derfel G., van Brunt B., Wake G.C. A cell growth model revisited // *Functional Differential Equations*. 2012. V. 19. № 1–2. P. 71–81.
 33. Zaidi A.A., van Brunt B., Wake G.C. Solutions to an advanced functional partial differential equation of the pantograph type // *Proc. R. Soc. A*. 2015. V. 471. 20140947.
 34. Ambartsumyan V.A. On the fluctuation of the brightness of the Milky Way // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1944. V. 44. P. 223–226.
 35. Dehghan M., Shakeri F. The use of the decomposition procedure of Adomian for solving a delay differential equation arising in electrodynamics // *Phys. Scripta*. 2008. V. 78. № 6. 065004.
 36. Ajello W.G., Freedman H.I., Wu J. A model of stage structured population growth with density depended time delay // *SIAM J. Appl. Math.* 1992. V. 52. P. 855–869.
 37. Mahler K. On a special functional equation // *J. London Math. Soc.* 1940. V. 1. № 2. P. 115–123.
 38. Ferguson T.S. Lose a dollar or double your fortune. In: *Proceedings of the 6th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, vol. III (eds. L.M. Le Cam et al.), pp. 657–666. Berkeley: Univ. California Press, 1972.
 39. Robinson R.W. Counting labeled acyclic digraphs. In: *New Directions in the Theory of Graphs* (ed. F. Harari), pp. 239–273. New York: Academic Press, 1973.
 40. Gaver D.P. An absorption probability problem // *J. Math. Anal. Appl.* 1964. V. 9. P. 384–393.
 41. Fox L. et al. On a functional differential equation // *IMA J. Appl. Math.* 1971. V. 8. P. 271–307.
 42. Iserles A. On the generalized pantograph functional differential equation // *Eur. J. Appl. Math.* 1993. V. 4. № 1. P. 1–38.
 43. Kato T., McLeod J.B. Functional-differential equation $y' = ay(\lambda t) + by(t)$ // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1971. V. 77. № 6. P. 891–937.
 44. Liu M.Z., Li D. Properties of analytic solution and numerical solution of multi-pantograph equation // *Appl. Math. Comput.* 2004. V. 155. № 3. P. 853–871.
 45. Yüzbaşı S., Sezer M. An exponential approximation for solutions of generalized pantograph-delay differential equations // *Appl. Math. Modelling*. 2013. V. 37. № 22. P. 9160–9173.
 46. Doha E.H. et al. A new Jacobi rational-Gauss collocation method for numerical solution of generalized pantograph equations // *Appl. Numer. Math.* 2014. V. 77. P. 43–54.
 47. Patade J., Bhalekar S. Analytical solution of pantograph equation with incommensurate delay // *Phys. Sci. Rev.* 2017. V. 2. № 9. 20165103.
 48. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition. Boca Raton: CRC Press, 2012.

Exact Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations with Pantograph Type Variable Delay

A. D. Polyanin^{a,*} and V. G. Sorokin^{a,**}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia*

^{*}*e-mail: polyanin@ipmnet.ru*

^{**}*e-mail: vsesor@gmail.com*

Received September 14, 2020; revised September 14, 2020; accepted October 12, 2020

Abstract—Nonlinear partial differential equations with variable delay of pantograph type are studied. These equations, in addition to the unknown function $u = u(x, t)$, also contain functions with stretching of one or several independent variables of the form $u(px, t)$, $u(x, qt)$, or $u(px, qt)$, where p and q are the scaling parameters ($0 < p < 1$, $0 < q < 1$). Exact solutions of various classes of such equations are described for the first time. Examples of nonlinear partial differential equations with variable delay of pantograph type that allow self-similar solutions are given (note that partial differential equations with constant delay do not have self-similar solutions). Additive, multiplicative, and generalized separable solutions, as well as solutions of a more complex form, are obtained. Special attention is paid to nonlinear partial differential equations of pantograph type of a fairly general form that contain arbitrary functions. In total, more than 40 nonlinear equations with variable delay of pantograph type, admitting exact solutions, are considered. It is shown that some equations can be generalized to the case of delay, which arbitrarily depends on time. The described equations and their exact solutions can be used to formulate test problems designed to check the adequacy and assess the accuracy of numerical and approximate analytical methods for solving the corresponding nonlinear initial-boundary value problems for partial differential equations with variable delay of pantograph type.

Keywords: nonlinear pantograph-type differential equations, partial differential equations with variable delay, reaction-diffusion equations, wave equations, exact solutions, self-similar solutions

DOI: 10.1134/S2304487X20040069

REFERENCES

1. Bellman R., Cooke K.L. *Differential-difference equations*. New York, Academic Press, 1963.
2. Elsgolt's L.E., Norkin S.B. *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations With Deviating Arguments*. New York, Academic Press, 1973.
3. Myshkis A.D. *Linear Delay Differential Equations*. Moscow, Nauka, 1972 (in Russian).
4. Wu J. *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*. New York, Springer, 1996.
5. Mei M. et al. Traveling wavefronts for time-delayed reaction–diffusion equation: (I) Local nonlinearity. *J. Dif. Equations*, 2009, vol. 247, no. 2, pp. 495–510.
6. Lv G., Wang Z. Stability of traveling wave solutions to delayed evolution equation. *J. Dyn. Control Syst.*, 2015, vol. 21, no. 2., pp. 173–187.
7. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nonlinear delay reaction–diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions. *Appl. Math. Lett.*, 2015, vol. 46, pp. 38–43.
8. Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction-diffusion equation with a delay. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 338, pp. 448–466.
9. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2013, vol. 54, pp. 115–126.
10. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction–diffusion equations and more complex nonlinear equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 417–430.
11. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, pp. 409–416.
12. Polyanin A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction–diffusion equations. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 59, pp. 16–22.
13. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nonlinear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients:

- Exact methods and new solutions. *Appl. Math. Lett.*, 2014, vol. 37, pp. 43–48.
14. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Non-linear instability and exact solutions to some delay reaction-diffusion systems. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 62, pp. 33–40.
 15. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 67, pp. 267–277.
 16. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The generating equations method: Constructing exact solutions to delay reaction-diffusion systems and other non-linear coupled delay PDEs. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2015, vol. 71, pp. 104–115.
 17. Sorokin V.G. Tochnye resheniya nekotorykh nelinejnykh uravnenij i sistem uravnenij v chastnykh proizvodnykh s zapazdyvanijem [Exact solutions of some nonlinear partial differential equations with delay and systems of such equations]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2016, vol. 5, no. 3, pp. 199–219 (in Russian).
 18. Polyanin A.D. Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction-diffusion equations with delay and variable coefficients. *Appl. Math. Lett.*, 2019, vol. 90, pp. 49–53.
 19. Sorokin V.G., Polyanin A.D. Nonlinear partial differential equations with delay: Linear stability/instability of solutions, numerical integration. *J. Physics: Conf. Series*. 2019, vol. 1205, 012053.
 20. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Generalized and functional separable solutions to non-linear delay Klein – Gordon equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 8, pp. 2676–2689.
 21. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Vyazmin A.V. Exact solutions and qualitative features of nonlinear hyperbolic reaction-diffusion equations with delay. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2015, vol. 49, no. 5, pp. 622–635.
 22. Long F.-S., Meleshko S.V. On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein – Gordon equation with a delay. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2016, vol. 39, no. 12, pp. 3255–3270.
 23. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Reakcionno-diffuzionnye uravneniya s zapazdyvanijem: Matematicheskie modeli i kachestvennye osobennosti [Reaction-diffusion equations with delay: Mathematical models and qualitative features]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2017, vol. 6, no. 1, pp. 41–55 (in Russian).
 24. Long F.-S., Meleshko S.V. Symmetry analysis of the nonlinear two-dimensional Klein – Gordon equation with a time-varying delay. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2017, vol. 40, no. 13, pp. 4658–4673.
 25. Sorokin V.G. Tochnye reshenija nelinejnykh telegrafnykh uravnenij s zapazdyvanijem [Exact solutions of nonlinear telegraph equations with delay]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2019, vol. 8, no. 5, pp. 453–464 (in Russian).
 26. Polyanin A.D., Sorokin V.G. New exact solutions of nonlinear wave type PDEs with delay. *Appl. Math. Lett.*, 2020, vol. 108, 106512.
 27. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Postroenie tochnykh reshenij nelinejnykh uravnenij matematicheskoj fiziki s zapazdyvanijem s pomoshh'ju reshenij bolee prostykh uravnenij bez zapazdyvanija [Construction of exact solutions for nonlinear equations of mathematical physics with delay using solutions of simpler equations without delay]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2020, vol. 9, no. 2, pp. 115–128 (in Russian).
 28. Polyanin A.D., Sorokin V.G. A method for constructing exact solutions of nonlinear delay PDEs. *J. Math. Anal. Appl.*, 2021, vol. 494, no. 2, 124619.
 29. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of non-linear differential-difference equations of a viscous fluid with finite relaxation time. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2013, vol. 57, pp. 116–122.
 30. Jordan P.M., Dai W., Mickens R.E. A note on the delayed heat equation: Instability with respect to initial data. *Mech. Research Comm.* 2008, vol. 35, pp. 414–420.
 31. Ockendon J.R., Tayler A.B. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 1971, vol. 332, pp. 447–468.
 32. Derfel G., van Brunt B., Wake G.C. A cell growth model revisited. *Functional Differential Equations.*, 2012, vol. 19, nos. 1–2, pp. 71–81.
 33. Zaidi A.A., van Brunt B., Wake G.C. Solutions to an advanced functional partial differential equation of the pantograph type. *Proc. R. Soc. A.*, 2015, vol. 471, 20140947.
 34. Ambartsumyan V.A. On the fluctuation of the brightness of the Milky Way. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1944, vol. 44, pp. 223–226.
 35. Dehghan M., Shakeri F. The use of the decomposition procedure of Adomian for solving a delay differential equation arising in electrodynamics. *Phys. Scripta.*, 2008, vol. 78, no. 6, 065004.
 36. Ajello W.G., Freedman H.I., Wu J. A model of stage structured population growth with density depended time delay. *SIAM J. Appl. Math.*, 1992, vol. 52, pp. 855–869.
 37. Mahler K. On a special functional equation. *J. London Math. Soc.*, 1940, vol. 1, no. 2, pp. 115–123.
 38. Ferguson T.S. Lose a dollar or double your fortune. In: *Proceedings of the 6th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, vol. III (eds. L.M. Le Cam et al.), pp. 657–666. Berkeley, Univ. California Press, 1972.
 39. Robinson R.W. Counting labeled acyclic digraphs. In: *New Directions in the Theory of Graphs* (ed. F. Harari), pp. 239–273. New York, Academic Press, 1973.
 40. Gaver D.P. An absorption probability problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 1964, vol. 9, pp. 384–393.
 41. Fox L. et al. On a functional differential equation. *IMA J. Appl. Math.*, 1971, vol. 8, pp. 271–307.
 42. Iserles A. On the generalized pantograph functional differential equation. *Eur. J. Appl. Math.*, 1993, vol. 4, no. 1, pp. 1–38.

43. Kato T., McLeod J.B. Functional-differential equation $y' = ay(\lambda t) + by(t)$. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1971, vol. 77, no. 6, pp. 891–937.
44. Liu M.Z., Li D. Properties of analytic solution and numerical solution of multi-pantograph equation. *Appl. Math. Comput.*, 2004, vol. 155, no. 3, pp. 853–871.
45. Yüzbaşı S., Sezer M. An exponential approximation for solutions of generalized pantograph-delay differential equations. *Appl. Math. Modelling*, 2013, vol. 37, no. 22, pp. 9160–9173.
46. Doha E.H. et al. A new Jacobi rational-Gauss collocation method for numerical solution of generalized pantograph equations. *Appl. Numer. Math.*, 2014, vol. 77, pp. 43–54.
47. Patade J., Bhalekar S. Analytical solution of pantograph equation with incommensurate delay. *Phys. Sci. Rev.*, 2017, vol. 2, no. 9, 20165103.
48. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition*. Boca Raton, CRC Press, 2012.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ОБОБЩЕННЫЙ ВАРИАНТ ВАРИАЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ

© 2020 г. Д. А. Куликов*

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, 150003, Россия

*e-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Поступила в редакцию 10.09.2020 г.

После доработки 10.09.2020 г.

Принята к публикации 12.10.2020 г.

Рассматривается вариационное уравнение Гинзбурга–Ландау, возникающее в теории конденсированных сред. В работе изучается вариант этого уравнения, который называют ψ^6 – модель. Как и в случае ψ^4 – модели соответствующее уравнение изучается вместе с периодическими краевыми условиями. Для периодической краевой задачи получены условия существования одномодовых состояний равновесия. Дан ответ об их устойчивости в смысле определения А.М. Ляпунова. В случае смены устойчивости одномодовыми состояниями равновесия изучены локальные бифуркации в окрестности этих решений. Показано, что в рассматриваемой задаче характерны докритические (жесткие) бифуркации. Бифуркационный анализ использует методы теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством и в первую очередь метод интегральных многообразий и метод нормальных форм Пуанкаре. Показано, что от одномодовых состояний равновесия бифурцируют двумерные инвариантные многообразия, сформированные пространственно неоднородными решениями, отличными от одномодовых. Для таких решений получены асимптотические формулы.

Ключевые слова: вариационное уравнение Гинзбурга–Ландау, одномодовые состояния равновесия, устойчивость, бифуркации, пространственно неоднородные решения

DOI: 10.1134/S2304487X20040045

ВВЕДЕНИЕ

Среди нелинейных моделей физики можно отметить несколько уравнений и систем, которые занимают особое положение. Такой феномен частично быть может объяснен обширными приложениями не только в физике, но и химии, биологии. Вторая причина состоит в том, что эти уравнения демонстрируют сложную динамику решений. К таким уравнениям можно отнести такие уравнения как нелинейное уравнение Шредингера, Кортевега де Вриза, Курамото–Сивашинского и т.д. В данной работе речь пойдет об одном из вариантов уравнения, которое принято называть комплексным уравнением Гинзбурга–Ландау (УГЛ) (см., например, [1–3])

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^2 + (a + ib)u_{xx}, \quad (1)$$

где $u = u(t, x) = u_1(t, x) + iu_2(t, x)$, $c, a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$. В случае, если $c = b = 0$, получаем частный вариант такого уравнения. Этот вариант заслужил собственное название вариационного уравнения Гинзбурга–Ландау [2]. В этой работе указаны области физики, где используется уравнение (1) и

его частные варианты. Например, вариационное уравнение Гинзбурга–Ландау было использовано в теории конденсированных сред, где получило название ψ^4 – модель (см., например, [4]). Достаточно часто уравнение (1) и вариационный его вариант дополняют периодическими краевыми условиями, которые после соответствующих перенормировок можно записать в следующем виде

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \quad (2)$$

Уравнение (1) – это классический вариант УГЛ. Рассматривались его обобщения и варианты. Например,

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^2 + (a + ib)\Delta u, \quad (3)$$

где $u = u(t, x) = u_1(t, x) + iu_2(t, x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $n = 1, 2, \dots$. В работах [5, 6] уравнение (3) рассматривалось вместе с периодическими краевыми условиями по каждой из пространственных переменных x_j , $j = 1, 2, \dots, n$. Так, например, в работе [5] сочетание аналитических и численных методов показало, что начиная с размерности 2 ($n = 2$) и

выше при достаточно больших c, b возможна жесткая турбулентность — динамика с редкими, но исключительно высокими выбросами. По мнению многих исследователей такую динамику предваряет наличие “жестких” (докритических) локальных бифуркаций. В работе [6] было показано, что начиная с $n = 3$ такие бифуркации характерны для уравнения (3), если $a = 0$.

В случае одной пространственной переменной в ряде работ (см., например, [7]) высказывалось мнение, подкрепленное численным анализом, что аналогичные эффекты возможны, если рассмотреть краевую задачу

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^4 + (a + ib)u_{xx}, \quad (4)$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad (5)$$

даже если $x \in \mathbb{R}$ (“одномерный” случай). Как уже отмечалось, наличие “жесткой” турбулентности связано с реализацией жестких бифуркаций. В данной работе будет показано, что при $c = b = 0$ реализуются жесткие бифуркации в окрестности одномерных состояний равновесия, т.е. решений вида

$$u(t, x) = \eta_k \exp(ikx), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k_0,$$

при соответствующем выборе k и основных параметров задачи.

Отметим, что более классический вариант вариационного УГЛ

$$u_t = u - u|u|^2 + du_{xx} (d > 0),$$

дополненный периодическими краевыми условиями был рассмотрен в работе [8].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОДНОМЕРНЫЕ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Далее будем изучать динамику решений краевой задачи

$$u_t = u - u|u|^4 + du_{xx}, \quad (6)$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad (7)$$

где действительная постоянная $d > 0$. Краевая задача (6), (7) имеет решения вида

$$u(t, x) = u_k(x) = \eta_k \exp(ikx), \quad \eta_k = (1 - dk^2)^{1/4}, \quad (8)$$

если $1 - dk^2 > 0$. Такие решения можно квалифицировать как одномерные состояния равновесия. Они существуют, если $1 - dk^2 > 0$, т.е. однородное состояние равновесия $u_0(x) = 1$ существует всегда. Отметим, что $k < 1/\sqrt{d}$. Следовательно, $|k| \leq k_0$,

где $k_0 = [1/\sqrt{d}]$, если $1/\sqrt{d} \in \mathbb{N}$ и $k_0 = [1/\sqrt{d}] - 1$, если $1/\sqrt{d}$ — целое. Здесь через $[x]$ обозначена целая часть числа $x \in \mathbb{R}$. Вместе с решением (8) краевая задача (6), (7), очевидно, имеет решения вида $u_k(x + h)$, $h \in \mathbb{R}$, т.е. решения вида $u_k(x + h) = \eta_k \exp(ikx + ikh)$, где h — любое действительное число. Решения $u_k(x + h)$ порождают однопараметрическое семейство состояний равновесия $S_k(h)$, если, конечно, $|k| \leq k_0$ (k_0 было выбрано ранее).

В работе будет рассмотрен вопрос о структуре окрестности состояний равновесия $S_k(h)$. Окрестность следует понимать в смысле нормы фазового пространства решений соответствующей краевой задачи, т.е. в смысле нормы гильбертова пространства $\mathbb{H}_2$. Подчеркнем, что если дополнить краевую задачу (6), (7) начальным условием

$$u(0, x) = f(x), \quad (9)$$

то из результатов работ [9, 10] вытекает, что начально-краевая (смешанная) задача (5), (6), (7) локально корректна разрешима, если $f(x) \in \mathbb{H}_2$, т.е. $f(x)$ имеет период 2π , а также $f(x) \in \mathbb{W}_2^2[-\pi, \pi]$ — пространство Соболева [11], состоящее из тех функций $f(x)$, для которых $f(x), f'(x), f''(x) \in \mathbb{L}_2(-\pi, \pi)$. Уместно подчеркнуть, что из теорем вложения Соболева вытекает включение $f(x) \in \mathbb{C}^1[-\pi, \pi]$ — пространству непрерывно дифференцируемых функций, а также, что $f(x) \in \mathbb{L}_p(-\pi, \pi)$ при любом $p \geq 1$. Нормы в $\mathbb{H}_2$ определяют равенством

$$\|f\|_{\mathbb{H}_2} = \|f\|_{\mathbb{L}_2(-\pi, \pi)} + \|f'\|_{\mathbb{L}_2(-\pi, \pi)} + \|f''\|_{\mathbb{L}_2(-\pi, \pi)},$$

$$\|\phi\|_{\mathbb{L}_2(-\pi, \pi)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \phi^2(x) dx}.$$

Далее будут изучены следующие вопросы:

- 1) об устойчивости одномерных инвариантных многообразий $S_k(h)$;
- 2) о существовании и устойчивости инвариантных многообразий из окрестности отличных от $S_k(h)$;
- 3) об асимптотическом представлении решений, принадлежащих таким инвариантным многообразиям.

Для анализа первого из поставленных вопросов, в частности, для анализа устойчивости состояний равновесия, формирующих $S_k(h)$ выполним замену

$$u(t, x) = \eta_k \exp(ikx)(1 + v(t, x)), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, k_0.$$

В новых переменных краевая задача (5), (6) перепишется в следующем виде

$$v_t = -2\eta_k^4(v + \bar{v}) - \eta_k^4[3v^2 + 6v\bar{v} + \bar{v}^2 + 6v^2\bar{v} + 3v\bar{v}^2 + v^3 + 3v^2\bar{v}^2 + 2v^3\bar{v} + v^3\bar{v}^2] + 2ikdv_x + dv_{xx}, \quad (10)$$

$$v(t, x + 2\pi) = v(t, x), \quad (11)$$

для которой следует исследовать вопрос об устойчивости состояния равновесия $v = 0$.

В свою очередь, при анализе этого вопроса следует обратиться к изучению линеаризованной в нуле краевой задачи (10), (11)

$$v_t = A_k v, \quad (12)$$

$$v(t, x + 2\pi) = v(t, x). \quad (13)$$

В краевой задаче (12), (13) через A_k обозначен дифференциальный оператор, определенный на достаточно гладких функциях, имеющих период 2π , следующим образом

$$A_k f = df'' + 2ikdf' - 2\eta_k^4(f + \bar{f}),$$

где $f = f(x)$.

Пусть $v = v_1(t, x) + iv_2(t, x)$. Перепишем краевую задачу (12), (13) в действительной форме записи

$$w_t = B_k w,$$

$$w(t, x + 2\pi) = w(t, x),$$

где использованы следующие обозначения

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad w_1 = v_1 = \operatorname{Re} v, \quad w_2 = v_2 = \operatorname{Im} v,$$

$$B_k w = \begin{pmatrix} -4\eta_k^4 w_1 + dw_{1xx} - 2dkw_{2x} \\ 2dkw_{1x} + dw_{2xx} \end{pmatrix}$$

или в “матричной” форме

$$B_k w = \begin{pmatrix} -4\eta_k^4 + d\partial_{xx}^2 & -2dk\partial_x \\ 2dk\partial_x & d\partial_{xx}^2 \end{pmatrix} w.$$

Вопрос об устойчивости решений (и в том числе нулевого) после замены

$$w(t, x) = \exp(\lambda t)y(x)$$

сводится к анализу спектра линейного дифференциального оператора B_k . Его собственные функции следует искать в виде

$$E_m(x) = \exp(imx)h_m, \quad h_m = \operatorname{colon}(h_{1m}, h_{2m}), \\ h_{j,m} \in \mathbb{C} \quad (\text{или } \mathbb{R}).$$

После элементарных преобразований вопрос о нахождении λ сводится к анализу спектра счетного семейства матриц второго порядка

$$B_{m,k} = \begin{pmatrix} -4\eta_k^4 - dm^2 & -2dkmi \\ 2dkmi & -dm^2 \end{pmatrix},$$

т.е. соответствующие $\lambda_{k,m}$ можно найти как корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + p_{k,m}\lambda + q_{k,m} = 0, \quad (14)$$

где $p_{k,m} = 2(dm^2 + 2\eta_k^4) > 0$ при всех $m \in Z$ и рассматриваемых k . Наконец,

$$q_{k,m} = dm^2(dm^2 + 4\eta_k^4 - 4dk^2) = \\ = dm^2(dm^2 + 4 - 8dk^2).$$

Ясно, что $q_{k,0} = 0$. Пусть далее $m \neq 0$. Тогда $q_{k,m}$ может менять знак при изменении параметров (коэффициентов). Сразу отметим, что $q_{0,m} > 0$ при всех m и, кроме того, $\lim_{|m| \rightarrow \infty} q_{0,m} = \infty$. Следовательно, однородные состояния равновесия, $u(t, x) = \exp(ih)(h \in \mathbb{R})$ устойчивы при любом выборе коэффициентов.

Пусть теперь $k \neq 0$ ($k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm k_0$). Тогда $q_{k,m} > 0$ при всех $m \neq 0$, если $q_{k,\pm 1} > 0$. Последние условия приводят к неравенству

$$d + 4 - 8dk^2 > 0. \quad (15)$$

Неравенство (15) – достаточное условие устойчивости решений, формирующих $S_k(h)$, так как при выполнении неравенства (15) все корни характеристического уравнения (14) лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости. Если же $d + 4 - 8dk^2 < 0$, то характеристическое уравнение (14) имеет корни в правой полуплоскости и поэтому семейство решений $S_k(h)$ состоит из неустойчивых состояний равновесия. Наконец, если

$$d + 4 - 8dk^2 = 0,$$

то реализуется критический случай в задаче об устойчивости соответствующих решений. Ясно, что соответствующее значение

$$d = d_k = \frac{4}{8k^2 - 1} > 0$$

при любом $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k_0$.

Итак, справедливо утверждение.

Теорема 1. Семейство $S_k(h)$ с номером k ($k = \pm 1, \dots, \pm k_0$) состоит из устойчивых решений в смысле определения Ляпунова, если $d \in (0, d_k)$ и они неустойчивы, если $d \in (d_k, \infty)$.

При $d = d_k$ в задаче об устойчивости решений $S_k(h)$ реализуется критический случай, когда спектру устойчивости принадлежит нулевое собственное значение кратности 3. Собственному

значению $\lambda = 0$ отвечают в нашем случае ($k \neq 0$) собственные элементы (вектор-функции)

$$E_{k,0}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_{k,1}(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ -2k \sin x \end{pmatrix},$$

$$E_{k,2}(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ 2k \cos x \end{pmatrix}.$$

Собственные элементы следует выбирать как нетривиальные решения системы дифференциальных уравнений

$$-4\eta_k^4 f_1 - 2d_k k f_2' + d_k f_1'' = 0, \quad d_k f_2'' + 2d_k k f_1' = 0.$$

Сделаем несколько простых замечаний.

Семейства состояний равновесия $S_k(h)$ и $S_{-k}(h)$ одновременно устойчивы или неустойчивы.

Пусть $S_{k_1}(h)$, $S_{k_2}(h)$ два семейства состояний равновесия, где $k_1, k_2 \geq 1$ (в силу предыдущего замечания вполне приемлемо ограничиться положительными “номерами”). Будем считать, что $k_1 < k_2$. Тогда $d_{k_1} > d_{k_2}$, т.е. если семейство с номером $p = 1, 2, \dots, k_0$ потеряло устойчивость, то неустойчивы будут все семейства с “большими” номерами. Иначе, если состояние равновесия с большим номером k_2 асимптотически устойчиво, то и состояние равновесия с номером k_1 также будет асимптотически устойчивым.

Нетривиальные состояния равновесия с номером k существуют при $d < \frac{1}{k^2}$, а устойчиво, если

$$d < d_k = \frac{4}{8k^2 - 1} < \frac{1}{k^2}, \text{ т.е. каждое состояние равновесия } S_k(h) \text{ в зависимости от } d \text{ может существовать и быть устойчивым, существовать как неустойчивое состояние равновесия.}$$

2. БИФУРКАЦИИ ВО ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

Рассмотрим краевую задачу (6), (7) в случае близком к критическому, т.е. при

$$d = d_k(1 + \gamma\epsilon), \quad (16)$$

где $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, $0 < \epsilon_0 \ll 1$ (ϵ — малый положительный параметр), $\gamma = \pm 1$ и соответствующее значение будет выбрано позднее, в ходе анализа соответствующего варианта краевой задачи. В частности, при $\gamma = -1$ нулевое решение краевой задачи (6), (7) асимптотически устойчиво и неустойчиво, если $\gamma = 1$.

Перепишем краевую задачу (6), (7) в действительной форме записи

$$w_t = B_k(\epsilon)w + F_2(w, \epsilon) + F_3(w, \epsilon) + F_4(w, \epsilon) + F_5(w, \epsilon), \quad (17)$$

$$w(t, x + 2\pi) = w(t, x). \quad (18)$$

Здесь дифференциальные операторы $B_k(\epsilon)$ определены равенствами

$$B_k(\epsilon) = B_k + \gamma\epsilon C_k,$$

$$B_k = \begin{pmatrix} -4 + 4d_k k^2 + d_k \partial_{xx}^2 & -2kd_k \partial_x \\ 2kd_k \partial_x & d_k \partial_{xx}^2 \end{pmatrix},$$

$$C_k = \begin{pmatrix} 4d_k k^2 + d_k \partial_{xx}^2 & -2kd_k \partial_x \\ 2kd_k \partial_x & d_k \partial_{xx}^2 \end{pmatrix},$$

$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_{xx}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ — операторы дифференцирования, $d_k = \frac{4}{8k^2 - 1}$, $k = \pm 1, \dots, \pm k_0$.

В дифференциальном уравнении (17) также использованы обозначения

$$F_2(w, \epsilon) = -2\eta_k^4(\epsilon) \begin{pmatrix} 5w_1^2 + w_2^2 \\ 2w_1 w_2 \end{pmatrix},$$

$$F_3(w, \epsilon) = -2\eta_k^4(\epsilon) \begin{pmatrix} 5w_1^3 + 3w_1 w_2^2 \\ w_2^3 + 3w_1^2 w_2 \end{pmatrix},$$

$$F_4(w, \epsilon) = -\eta_k^4(\epsilon) \begin{pmatrix} 5w_1^4 + 6w_1^2 w_2^2 + w_2^4 \\ 4w_1 w_2 (w_1^2 + w_2^2) \end{pmatrix},$$

$$F_5(w, \epsilon) = -\eta_k^4(\epsilon) \begin{pmatrix} w_1 (w_1^2 + w_2^2)^2 \\ w_2 (w_1^2 + w_2^2)^2 \end{pmatrix},$$

$$\eta_k^4(\epsilon) = (1 - d_k k^2) - \epsilon \gamma d_k k^2 = \eta_k^4 - \epsilon \gamma k^2 d_k.$$

Далее, как правило, будут использоваться постоянная $\eta_k^4 = \eta_k^4(0)$, а также вектор-функции $F_j(w) = F_j(w, 0)$, $j = 2, 3, 4, 5$.

Линейный дифференциальный оператор $B_k(\epsilon)$ при всех рассматриваемых ϵ будет симметричным, т.е. таким, для которого выполнены равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} (B_k(\epsilon)f(x), g(x))dx = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x), B_k(\epsilon)g(x))dx,$$

где обе двумерные вектор-функции $f(x), g(x)$ имеют период 2π и являются достаточно гладкими, $(*, **)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$. Следовательно, линейный дифференциальный оператор $B_k(\epsilon)$ имеет только действительные собственные значения. При этом собственные элементы, формируют полную ортогональную систему в $\mathbb{L}_2((-\pi, \pi); \mathbb{R}_2)$, т.е. пространстве двумерных вектор-функций, где их компоненты интегрируемы с

квадратом. При этом линейный дифференциальный оператор $B_k(\varepsilon)$ имеет собственные числа

$$\lambda_0(\varepsilon) = 0, \quad \lambda_{1,2} = \gamma \frac{4}{4k^2 + 1} \varepsilon + o(\varepsilon),$$

т.е. при $\varepsilon = 0$ у него есть трехмерное нулевое собственное число. Остальные его собственные числа $\lambda_n(\varepsilon)$ таковы, что $\lambda_n(\varepsilon) \leq -\gamma_0 < 0$, где постоянная γ_0 — не зависит от ε . Следовательно, для краевой задачи (17), (18) анализ окрестности нулевого состояния равновесия приводит к необходимости изучения локальных бифуркаций в случае близком к критическому трехкратного нулевого собственного значения, т.е. к задаче, которая не решена к настоящему времени в полном объеме даже для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Вместе с тем, это не означает, что такую задачу нельзя изучать для конкретной краевой задачи, в нашем случае это краевая задача (17), (18). Она, как легко показать, имеет ряд свойств, облегчающих анализ бифуркаций.

Отметим, что краевая задача (17), (18) такова, что для ее решений выполнены следующие свойства. Дополним краевую задачу (17), (18) начальным условием

$$w(0, x) = g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Пусть $g_1(x), g_2(x) \in \mathbb{H}_2$ и, кроме того, $g_1(x)$ — четная функция x , а $g_2(x)$ — нечетная. Тогда при всех t , когда решение начально-краевой задачи (17), (18), (19) существует, справедливы тождества

$$w_1(t, -x) = w_1(t, x), \quad w_2(t, -x) = -w_2(t, x), \quad (20)$$

т.е. первая компонента четная, а вторая нечетная функции переменного x . В данном разделе ограничимся рассмотрением вспомогательной краевой задачи (17), (18), (20). Перенесение результатов анализа краевой задачи (17), (18), (20) на основную краевую задачу (17), (18) будет сделано в следующем разделе. Основным моментом перенесения полученных результатов на основную краевую задачу будет то обстоятельство, что краевая задача (17), (18) инвариантна относительно замены $x \rightarrow x + h$, т.е. одного из преобразований Галилея.

Итак, приступим к анализу вспомогательной краевой задачи (17), (18), (20). В таком случае, линейный дифференциальный оператор $B_k(\varepsilon)$ имеет уже однократное собственное число $\lambda_1(\varepsilon) = \gamma \varepsilon \frac{4}{4k^2 + 1}$, а для остальных его собственных значений справедливо неравенство $\lambda_n(\varepsilon) \leq -\gamma < 0$.

Собственное значение $\lambda_1(\varepsilon)$ отвечает собственному элементу

$$E_{k,1}(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ -2k \sin x \end{pmatrix}.$$

Отметим, что собственные функции $E_{k,0}, E_{k,2}$ в рассматриваемый класс функций явно не входят.

В таком случае анализ бифуркационной задачи может быть сведен к изучению скалярного уравнения (см, например, [8, 12])

$$z' = \varphi(z, \varepsilon), \quad (21)$$

которую называют нормальной формой (НФ–Пуанкаре). Здесь $z = z(s)$, $s = \varepsilon t$ — “медленное” время, $\varphi(z, \varepsilon)$ — достаточно гладкая функция, для которой $\varphi(0, \varepsilon) = 0$, а также

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = \gamma \frac{4}{4k^2 + 1} + O(\varepsilon).$$

Далее, основную роль будет играть функция $\psi(z) = \varphi(z, 0)$, т.е. уравнение

$$z' = \psi(z), \quad (22)$$

которое принято называть укороченной нормальной формой. В ситуации общего положения именно уравнение (22) играет основную роль при анализе локальных бифуркаций (т.е. бифуркаций в окрестности $w = 0$).

Нормальная форма (22) — это дифференциальное уравнение, решая которое, можно восстановить решения начально-краевой задачи (17), (18), (20), принадлежащие одномерному инвариантному многообразию $M_1(\varepsilon)$ в окрестности нулевого решения. При этом решения принадлежащие $M_1(\varepsilon)$ можно и удобно искать в следующей форме [8]

$$w(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} q_1(x, z) + \varepsilon q_2(x, z) + \varepsilon^{3/2} q_3(x, z) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (23)$$

где $q_j(x, z) = \text{colon}(q_{j1}(x, z), q_{j2}(x, z))$, $q_1 = z E_{k,1}(x)$, $j = 1, 2, 3$. Решения, принадлежащие $M_1(\varepsilon)$ ищем в форме, которая индуцирована применением метода Крылова–Боголюбова, адаптированного к данной краевой задаче. Здесь достаточно гладкие вектор-функции $q_j(x, z)$ обладают априори следующими свойствами:

1) при фиксированном z они удовлетворяют краевым условиям (18), (20);

2) $q_j(x, 0) = 0$;

$$3) \int_{-\pi}^{\pi} (q_j, E_{k,1}(x)) dx = 0, \quad j = 2, 3, \dots$$

Подстановка суммы (23) в краевую задачу (17), (18), (20) приводит к линейным неоднородным

краевым задачам, сформированным после приравнивания выражений при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$. При $\varepsilon^{1/2}$ сразу получаем однородную краевую задачу, для которой $E_{k,1}(x)$ будет решением. Содержательные задачи получаем, на втором и третьем шагах. Приравняв члены при ε , получаем краевую задачу

$$B_k q_2 + F_2(q_1) = 0, \quad (24)$$

$$q_2(x + 2\pi, z) = q_2(x, z), \quad (25)$$

$$q_{21}(-x, z) = q_{21}(x, z), \quad q_{22}(-x, z) = -q_{22}(x, z). \quad (26)$$

Если же собрать члены пропорциональные $\varepsilon^{3/2}$, то получим краевую задачу для определения q_3

$$z'E_{k,1}(x) = B_k q_3 + \gamma C_k z E_k + F_3(q_1) + G(q_1, q_2), \quad (27)$$

$$q_3(x + 2\pi, z) = q_3(x, z), \quad (28)$$

$$q_{31}(-x, z) = q_{31}, \quad q_{32}(-x, z) = -q_{32}(x, z). \quad (29)$$

Здесь $G(q_1, q_2) = -4\eta_k^4 \begin{pmatrix} 5q_{11}q_{21} + q_{12}q_{22} \\ q_{11}q_{22} + q_{21}q_{12} \end{pmatrix}$, вектор-функции $q_1(x, z) = zE_{k,1}(x)$, а вектор-функция $q_2(x, z)$ определяется после анализа краевой задачи (24), (25), (26).

$$F_3(q_1) = -2\eta_k^4 \begin{pmatrix} 5q_{11}^3 + 3q_{11}q_{12}^2 \\ q_{12}^3 + 3q_{11}^2q_{12} \end{pmatrix},$$

где $q_{11} = z \cos x$, $q_{12} = -2zk \sin x$.

Вектор-функцию $q_2(x, z)$ находим в виде

$$q_2(x, z) = z^2 Q_2(x, k) = z^2 \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \cos 2x \\ a_2 \sin 2x \end{pmatrix},$$

$$a_0 = -\frac{5 + 4k^2}{4}, \quad a_1 = -\frac{5(4k^2 - 1)}{12},$$

$$a_2 = \frac{2k(4k^2 - 1)}{3}.$$

Перейдем теперь к анализу неоднородной краевой задачи (27), (28), (29).

Замечание. Рассмотрим неоднородную краевую задачу

$$B_k g = f(x), \quad g(x + 2\pi) = g(x),$$

$$g_1(-x) = g_2(x), \quad g_2(-x) = -g_2(x),$$

$$f(x) = \text{colon}(f_1, f_2), \quad g(x) = \text{colon}(g_1, g_2).$$

Она имеет решение, если выполнены условия разрешимости

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x), E_{k,1}(x)) dx = 0.$$

Решение, для которого справедливо равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} (g(x), E_{k,1}(x)) dx = 0,$$

единственно.

Подчеркнем, содержательность замечания: линейный оператор B_k не имеет обратного (у него есть нулевое собственное число). Данное замечание — утверждение, входят в серию утверждений, которые принято называть альтернативой Фредгольма.

Итак, используя условия разрешимости неоднородной краевой задачи (27), (28), (29) получаем, что с необходимостью

$$z' = \varphi(z) = \alpha_k z + l_k z^3, \quad (30)$$

где $\alpha_k = \gamma \frac{4}{4k^2 + 1}$, $l_k = \frac{8(4k^2 - 1)(16k^2 + 5)}{3(8k^2 - 1)(4k^2 + 1)} > 0$, т.е. уравнение (30) это вариант укороченной нормальной формы (22), соответствующей вспомогательной краевой задаче (17), (18), (20).

Лемма 1. Обыкновенное дифференциальное уравнение (30) имеет три состояния, если $\alpha_k l_k < 0$:

$$S_0 : z = 0, \quad S_+ : z = \sqrt{-\frac{\alpha_k}{l_k}}, \quad S_- : z = -\sqrt{-\frac{\alpha_k}{l_k}}.$$

Состояние равновесия S_0 асимптотически устойчиво, если $\alpha_k < 0$ и неустойчиво, если $\alpha_k > 0$. Состояния равновесия S_+, S_- асимптотически устойчивы, если $\alpha_k > 0$ и неустойчивы, если $\alpha_k < 0$.

В нашем случае $l_k > 0$. Таким образом с необходимостью $\alpha_k < 0$, т.е. следует выбирать $\gamma < 0$ ($\gamma = -1$).

Из результатов работ [13–15] и леммы 1 вытекает справедливость утверждения.

Теорема 2. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ нетривиальным состояниям равновесия S_+, S_- нормальной формы (30) соответствуют состояния равновесия краевой задачи (17), (18), (20) с сохранением свойств устойчивости, т.е. в данном случае состояниям равновесия S_+, S_- соответствуют два ненулевых состояния равновесия краевой задачи (17), (18), (20).

Для соответствующих состояний равновесия краевой задачи справедливы асимптотические формулы

$$w_{\pm}(x, \varepsilon) = \pm \varepsilon^{1/2} \rho_k E_{k,1}(x) + \varepsilon \rho_k^2 Q_2(x, k) + o(\varepsilon), \quad (31)$$

где $\rho_k = \sqrt{-\frac{\alpha_k}{l_k}}$, $q_2(x, z) = \rho_k^2 Q_2(x, k)$. Оба решения (31) неустойчивы.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В предыдущем разделе были найдены состояния равновесия краевой задачи (17), (18), (20). Ясно, что эти решения удовлетворяют и краевой задаче (17), (18). Вместе с тем наряду с решениями (31) краевая задача (17), (18) имеет решения вида

$$w_{\pm}(x + h, \varepsilon) = \pm \varepsilon^{1/2} \rho_k E_{k,1}(x + h) + \varepsilon \rho_k^2 Q_2(x + h, k) + o(\varepsilon), \quad (32)$$

где $h \in \mathbb{R}$ и произвольно.

Наконец, если возвратиться к исходной краевой задаче (6), (7), то для нее справедливо утверждение.

Теорема 3. Пусть $d = d_k(1 - \varepsilon)$. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ краевая задача (6), (7) имеет двухпараметрическое семейство состояний равновесия

$$u(t, x, \varepsilon) = u(x, \varepsilon) = \eta_k \exp(ikx + ih_0)(1 + v(x + h, \varepsilon)),$$

где $h_0, h \in \mathbb{R}$ и произвольны, а

$$v(x + h, \varepsilon) = w_1(x + h, \varepsilon) + iw_2(x + h, \varepsilon).$$

Здесь w_1, w_2 компоненты решения (32). Эти состояния равновесия неустойчивы.

Наличие множителя $\exp(ih_0)$ вытекает из вида замены $u(t, x) = \eta_k \exp(ikx)(1 + v(t, x))$. Действительно, положим

$$u(t, x) = \eta_k \exp(ikx + ih_0)(1 + v(t, x)).$$

Тогда для $v(t, x)$ получим, ту же краевую задачу, как и при $h_0 = 0$.

Отметим, что

$$\begin{aligned} u(x + h, \varepsilon) &= \\ &= \eta_k \exp(ikx + ih_0) [1 \pm \varepsilon^{1/2} \rho_k (\cos(x + h) - \\ &\quad - 2ik \sin(x + h)) + O(\varepsilon)], \end{aligned}$$

если ограничиться первым членом асимптотических формул.

В заключении уместно акцентировать внимание на то обстоятельство, что для бифуркаций в окрестности состояний равновесия характерны докритические (жесткие) бифуркации. Аналогичный вариант, т.е. жесткие бифуркации, имели

место для стандартного варианта вариационного УГЛ [8], т.е. уравнения вида

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^2 + du_{xx}.$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00672.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin: Springer-Verlag. 1984. 156 p.
2. Aronson I.S., Kramer L. The world of the complex Ginzburg-Landau equation // Reviews of modern physics. 2002. V. 74. P. 99–143.
3. Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. New-York: Springer-Verlag, 1997. 650 p.
4. Kulikov A.N., Rudy A.S. States of equilibrium of condensed matter within Ginzburg-Landau ψ^4 -model // Chaos, Solitons and Fractals. 2003. V. 15. P. 75–85.
5. Bartuccelli M., Constantin P., Doering Ch.R., Gibbon J.D., Gisseloft M. On the possibility of soft and hard turbulence in the complex Ginzburg-Landau equation // Physica D. 1990. V. 44. P. 421–444.
6. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Локальные бифуркации плоских бегущих волн обобщенного кубического уравнения Шредингера // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 9. С. 1290–1299.
7. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Подлазов А.В. Нелинейная динамика. Подходы, результаты, надежды. М.: Комкнига, 2006. 280 с.
8. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Состояния равновесия вариационного уравнения Гинзбурга–Ландау // Вестник национального исследовательского ядерного ун-та “МИФИ”. 2017. Т. 3. № 4. С. 408–415.
9. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
10. Соболевский П.Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Тр. Москов. мат. об-ва. 1961. Т. 10. С. 297–350.
11. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград: Изд-во ЛГУ. 1950.
12. Guckenheimer J., Holmes P.J. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Berlin.: Springer-Verlag, 1983. 462 p.
13. Колесов А.Ю., Куликов А.Н., Розов Н.Х. Инвариантные торы одного класса отображений: сохранение тора при возмущениях // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 6. С. 738–753.
14. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Журнал

- вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. № 5. С. 930–945.
15. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Локальные бифуркации в уравнения Кана–Хиллиарда, Курамото–Сива-

шинского и их обобщениях // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59. № 4. С. 670–683.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 4, pp. 329–337

Generalized Variant of the Variational Ginzburg–Landau Equation

D. A. Kulikov[#]

Yaroslavl State University named after P.G. Demidov, Yaroslavl, 150003 Russia

[#]*e-mail: kulikov_d_a@mail.ru*

Received September 10, 2020; revised September 10, 2020; accepted October 12, 2020

Abstract—The version of the Ginzburg–Landau variational equation occurring in condensed matter physics which is called the ψ^6 -model is studied. As in the case of the ψ^4 -model, the corresponding equation is studied together with periodic boundary conditions. Conditions for the existence of single-mode equilibrium states are obtained for a periodic boundary value problem. An answer is given to the question of their stability in the sense of Lyapunov's definition. In the case of a change in stability by single-mode equilibrium states, local bifurcations near these solutions are studied. It is shown that subcritical (rigid) bifurcations are characteristic of the problem under consideration. Bifurcation analysis involves the methods of the theory of dynamical systems with infinite-dimensional phase space and, first of all, the method of integral manifolds and the method of Poincaré normal forms. It is shown that two-dimensional invariant manifolds formed by spatially inhomogeneous solutions other than single-mode ones bifurcate from single-mode equilibrium states. For such solutions, asymptotic formulas are obtained.

Keywords: variational Ginzburg–Landau equation, single-mode equilibrium states, stability, bifurcations, spatial inhomogeneous solutions

DOI: 10.1134/S2304487X20040045

REFERENCES

1. Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin: Springer-Verlag, 1984. 156 p.
2. Aronson I.S., Kramer L. The world of the complex Ginzburg–Landau equation // Reviews of modern physics. 2002. V. 74. P. 99–143.
3. Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. New-York: Springer-Verlag, 1997. 650 p.
4. Kulikov A.N., Rudy A.S. States of equilibrium of condensed matter within Ginzburg–Landau ψ^4 -model // Chaos, Solitons and Fractals. 2003. V. 15. P. 75–85.
5. Bartuccelli M., Constantin P., Doering Ch.R., Gibbon J.D., Gisselalt M. On the possibility of soft and hard turbulence in the complex Ginzburg–Landau equation // Physica D. 1990. V. 44. P. 421–444.
6. Kulikov A.N., Kulikov D.A. Local bifurcations of plane running waves for the generalized cubic Schrodinger equation // Differential equations. 2010. V. 46. № 9. P. 1299–1308.
7. Malinetskiy G.G., Potapov A.B., Podlazov A.V. Nelineynaya dinamika. Podhody, rezultaty, nadeshdy [Nonlinear dynamics. Approaches, results, hopes]. M.: Komkniga. 2006. 280 p. (in Russian).
8. Kulikov A.N., Kulikov D.A. Equilibrium states of the variational Ginzburg–Landau equation // Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI". 2017. V. 6. № 6. P. 496–502.
9. Krein S.G. Lineynie differentsialnye uravnenia v banachovom prostranstve [Krein G. Linear differential equations in a Banach space]. M.: Nauka, 1977. 464 p. (in Russian).
10. Sobolevskiy P.E. Ob uravneniyach parabolicheskogo tipa v Banachovom prostranstve [On equations of parabolic type in a Banach space]. Tr. MMO. 1967. V. 10. P. 297–350.
11. Sobolev S.L. Nekotorye primeneniya funktsionalnogo analiza v matematicheskoy fizike [Some applications of

- functional analysis in mathematical physics]. Leningrad. Isd-vo LGU. 1950. 256 p. (in Russian).
12. Guckenheimer J., Holmes P. J. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Berlin.: Springer-Verlag. 1983. 462 p.
 13. Kolesov A.Yu, Kulikov A.N., Rozov N.Kh. Invariant Tori of a class of point transformations: preservation of an invariant torus under perturbations // Differential equations. V. 39. № 6. P. 775–790.
 14. Kulikov A.N., Kulikov D.A. Formation of wavy nanostructures on the surface of flat substrates by ion bombardment // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2012. V. 52. № 5. P. 800–814.
 15. Kulikov A.N., Kulikov D.A. Local bifurcations in the Cahn-Hilliard and Kuramoto–Sivashinsky equations and in their generalizations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2019. V. 59. № 4. P. 630–643.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.925.7

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ТРЕХМЕРНЫХ АВТОНОМНЫХ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ ИЛИ ТРЕМЯ КВАДРАТИЧНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ БЕЗ ХАОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ

© 2020 г. В. В. Цегельник*

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, 220013, Беларусь

*e-mail: tsegvv@bsuir.by

Поступила в редакцию 10.09.2020 г.

После доработки 08.10.2020 г.

Принята к публикации 12.10.2020 г.

Исследованы аналитические свойства решений 4-х семейств трехмерных автономных консервативных систем с одной или тремя квадратичными нелинейностями. Консервативные системы первого семейства имеют одну квадратичную нелинейность и три линейные компоненты. Системы второго семейства — консервативные системы, имеющие одну квадратичную нелинейность, две линейные компоненты и одну константу. Консервативные системы третьего семейства содержат три квадратичные нелинейности и одну линейную компоненту. К системам четвертого семейства относятся консервативные системы с тремя квадратичными нелинейностями и одним постоянным членом. Общим (с качественной точки зрения) для данных систем является отсутствие в них хаоса. Для анализа решений рассматриваемых систем использован тест Пенлеве, а также сведение систем к эквивалентным им уравнениям второго или третьего порядков и сравнение последних с известными нелинейными уравнениями P -типа. Выделены системы, общие решения которых обладают свойством Пенлеве. Решения таких систем выражаются через эллиптические функции, либо через функции-решения первого уравнения Пенлеве. Показано, что среди систем, общие решения которых содержат подвижные критические точки, есть такие, у которых одна из компонент решения вообще не имеет подвижных особых точек. Рассмотренные в работе системы принадлежат к классу из 7 семейств консервативных систем (с общим числом членов в правых частях, равным 4). Исследованию аналитических свойств решений систем остальных трех семейств будет посвящена отдельная статья.

Ключевые слова: консервативная система, нехаотичное поведение, тест Пенлеве, P -свойство, уравнения Пенлеве

DOI: 10.1134/S2304487X20040100

1. ВВЕДЕНИЕ

Построение как можно более простой хаотической системы является интересной и значимой темой в изучении динамических систем, а также практических применений в безопасной связи и широкополосной генерации сигналов. Основываясь на классических работах [1, 2], Спротт [3, 4] построил ряд простых автономных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с несколькими квадратичными нелинейностями и показал с помощью численного моделирования, что они обладают хаотическим поведением. Работы Спротта ставят вопрос, насколько простой может быть трехмерная автономная система непрерывного времени, если она хаотична. Ответ на данный вопрос был частично дан в работах [5, 6]. В [5] было показано, что все дисси-

пативные трехмерные автономные квадратичные системы с общим числом членов в правых частях, равным 4, нехаотичны. Аналогичный результат для консервативных систем (за исключением одной) был получен в [6].

Представляет интерес исследование аналитических свойств (в частности, характера подвижных особых точек решений) в предположении, что неизвестные функции и независимая переменная являются комплекснозначными.

Для диссипативных систем [5] указанная задача решена в [7], где, в частности, было показано, что все трехмерные диссипативные квадратичные системы с общим числом членов в правых частях, равным 4 (за исключением одной), не являются системами Пенлеве-типа.

Заметим, что система дифференциальных уравнений (или уравнение) является системой (уравнением) Пенлеве-типа, если подвижными (зависящими от начальных условий) ее (его) общего решения могут быть только полюсы [8]. В данном случае говорят, что система (уравнение) является системой (уравнением) P -типа или обладает P -свойством решений.

В данной работе аналогичная задача решается для трехмерных автономных консервативных систем (с общим числом членов в правых частях равным 4) с одной или тремя квадратичными нелинейностями [6] без хаоса.

2. КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И ТРЕМЯ ЛИНЕЙНЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

$$\dot{x} = y^2 + ky, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = x. \quad (1)$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = y. \quad (2)$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = x. \quad (3)$$

$$\dot{x} = yz + x, \quad \dot{y} = -y, \quad \dot{z} = x. \quad (4)$$

$$\dot{x} = yz + y, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = y. \quad (5)$$

$$\dot{x} = yz + y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = x. \quad (6)$$

$$\dot{x} = y^2, \quad \dot{y} = x + z, \quad \dot{z} = x. \quad (7)$$

$$\dot{x} = y^2, \quad \dot{y} = x + z, \quad \dot{z} = y. \quad (8)$$

$$\dot{x} = yz, \quad \dot{y} = x + z, \quad \dot{z} = x. \quad (9)$$

$$\dot{x} = yz, \quad \dot{y} = x + z, \quad \dot{z} = y. \quad (10)$$

$$\dot{x} = y^2, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = x + y. \quad (11)$$

В системах (1)–(11) x, y, z – неизвестные функции независимой переменной t ; k – параметр. Всюду ниже будем считать переменную t комплексной.

Теорема 1. Ни одна из систем (1)–(3), (6), (7), (9), (11) не является системой P -типа.

Действительно, системы (1)–(3), (6), (7) эквивалентны уравнениям третьего порядка соответственно

$$\ddot{y} = y^2 + ky, \quad (12)$$

$$\ddot{y} = 2y\dot{y} + y, \quad (13)$$

$$\ddot{y} = y^2 + \dot{y}, \quad (14)$$

$$\ddot{y} = y\dot{y} + y, \quad (15)$$

$$\ddot{y} = 2y\dot{y} + y^2. \quad (16)$$

Система (11) также эквивалентна уравнению (14). Уравнения (12)–(16) не принадлежат к классу уравнений $\ddot{y} = P(t, u, \dot{u}, \ddot{u})$, где P – полином отно-

сительно $u, \dot{u}, \ddot{u}$ с аналитическими по t коэффициентами, общие решения которых не имеют подвижных критических особых точек [9]. На основании этого ни одна из систем (1)–(3), (6), (7), (9), (11) не является системой P -типа. Для исследования характера подвижных особых точек решений системы (9) применим к ней тест Пенлеве [10, 11]. Первые два шага теста Пенлеве система (9) успешно проходит, однако третий шаг, связанный с определением коэффициентов рядов Лорана, представляющих формальные решения системы (9), не удастся реализовать. Таким образом, система (9) не является системой Пенлеве-типа.

Теорема 2. Система (4) является системой P -типа. Ее общее решение не имеет подвижных особых точек.

Действительно, из второго уравнения системы $y = C_1 e^{-t}$, где C_1 – произвольная постоянная. В результате для определения $x(t), z(t)$ получаем линейную систему $\dot{x} = C_1 e^{-t} \cdot z + x, \dot{z} = x$, общее решение которой не имеет подвижных особых точек.

Теорема 3. Общие решения систем (5), (8), (10) не имеют многозначных подвижных особых точек.

Легко проверить, что система (5) имеет первый интеграл $x = \frac{z^2}{2} + z + C_1$, где C_1 – произвольная постоянная. Тогда $y = \dot{z}$, где z – общее решение уравнения

$$\ddot{z} = \frac{z^2}{2} + z + C_1, \quad (17)$$

интегрируемого в эллиптических функциях.

Система (10) имеет первый интеграл $x = \frac{z^2}{2} + C_1$. Тогда $y = \dot{z}$, где z – общее решение уравнения (17).

Система (8) эквивалентна уравнению $\ddot{z} = \dot{z}^2 + \dot{z}$, представимому в виде

$$\dot{z} = u, \quad \ddot{u} = u^2 + u. \quad (18)$$

Общее решение второго уравнения системы (18) (интегрируемого в эллиптических функциях) есть функция мероморфная с вычетом равным нулю. Значит, z – функция однозначная. А тогда y, x ($y = \dot{z}, x = \dot{y} - z$) – однозначные функции. Теорема доказана.

3. КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И ДВУМЯ ЛИНЕЙНЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

$$\dot{x} = 1 + yz, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = y. \quad (19)$$

$$\dot{x} = \varepsilon + y^2, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = x. \quad (20)$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = 1. \quad (21)$$

$$\dot{x} = y^2, \quad \dot{y} = x + z, \quad \dot{z} = \varepsilon. \quad (22)$$

$$\dot{x} = y^2, \quad \dot{y} = 1 + z, \quad \dot{z} = \varepsilon x. \quad (23)$$

$$\dot{x} = yz, \quad \dot{y} = 1 + x, \quad \dot{z} = x. \quad (24)$$

$$\dot{x} = y^2, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = 1 + x. \quad (25)$$

$$\dot{x} = yz, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = 1 + y, \quad (26)$$

где $\varepsilon^2 = 1$.

Теорема 4. Каждая из систем (19), (21) редуцируется к первому уравнению Пенлеве и является системой P -типа.

Доказательство. Система (19) имеет первый интеграл $x - \frac{z^2}{2} = t + C_1$, где C_1 — произвольная постоянная. Тогда из второго и третьего уравнений системы (19) находим, что

$$\ddot{z} = \frac{z^2}{2} + t + C_1. \quad (27)$$

Полагая $z = \lambda w$, $t + C_1 = \mu s$, $\lambda\mu^2 = 6$, $\mu^3 = \lambda$, относительно w получим первое уравнение Пенлеве

$$\frac{d^2 w}{ds^2} = 6w^2 + s. \quad (28)$$

Легко показать (принимая во внимание $z = t + C_1$), что система (21) эквивалентна уравнению $\ddot{y} = y^2 + t + C_1$, которое может быть приведено, к каноническому виду (28). Теорема доказана.

Теорема 5. Система (22) является системой Пенлеве-типа. Ее общее решение имеет вид: $x = \dot{y} - z$, $z = \varepsilon t + C_1$ (C_1 — произвольная постоянная), а y — общее решение уравнения $\ddot{y} = y^2 + \varepsilon$, интегрируемого в эллиптических функциях.

Доказательство. Из третьего уравнения системы (22) имеем $z = \varepsilon t + C_1$. А из первого и второго уравнений этой системы получаем $\ddot{y} = y^2 + \varepsilon$. Что и следовало показать. Теорема доказана.

Теорема 6. Ни одна из систем (20), (23)–(26) не является системой P -типа.

Доказательство. Несложно убедиться, что система (20) эквивалентна уравнению $\ddot{y} = \varepsilon + y^2$, общее решение которого согласно [9] не свободно от подвижных критических точек. Аналогичное заключение получается и относительно системы (23).

Из второго и третьего уравнений системы (24) следует, что $y - z = t + C_1$, где C_1 — произвольная постоянная. Тогда из третьего и первого уравне-

ний системы получаем уравнение относительно z : $\ddot{z} = z(z + t + C_1)$. Данное уравнение не входит в список уравнений Пенлеве–Гамбье [12].

Система (25) эквивалентна уравнению $\ddot{y} = y^2$, которое согласно [9] не является уравнением P -типа.

Система (26) не проходит третий шаг теста Пенлеве. А именно, одна из систем для определения коэффициентов рядов Лорана, представляющих формальные решения системы (26), не является совместной.

4. КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ С ТРЕМЯ КВАДРАТИЧНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ И ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ КОМПОНЕНТОЙ

$$\dot{x} = x^2 + yz, \quad \dot{y} = -2xy, \quad \dot{z} = y. \quad (29)$$

$$\dot{x} = -2xy + y^2, \quad \dot{y} = y^2, \quad \dot{z} = x. \quad (30)$$

$$\dot{x} = -2xy + yz, \quad \dot{y} = y^2, \quad \dot{z} = x. \quad (31)$$

$$\dot{x} = -2xy + z^2, \quad \dot{y} = y^2, \quad \dot{z} = x. \quad (32)$$

$$\dot{x} = y^2 + yz, \quad \dot{y} = \varepsilon xz, \quad \dot{z} = y. \quad (33)$$

$$\dot{x} = y^2 + yz, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = x. \quad (34)$$

$$\dot{x} = y^2 + yz, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = y. \quad (35)$$

$$\dot{x} = y^2 + yz, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = x. \quad (36)$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon z^2, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = x. \quad (37)$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon z^2, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = y. \quad (38)$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon z^2, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = y. \quad (39)$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon z^2, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = x. \quad (40)$$

$$\dot{x} = x^2 + y, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = -2xz. \quad (41)$$

$$\dot{x} = xy + y, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = -yz. \quad (42)$$

$$\dot{x} = xy + z, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = -yz. \quad (43)$$

$$\dot{x} = xy + z, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = -yz. \quad (44)$$

$$\dot{x} = -2xy + z, \quad \dot{y} = y^2, \quad \dot{z} = xy. \quad (45)$$

$$\dot{x} = -2xy + z, \quad \dot{y} = y^2, \quad \dot{z} = x^2. \quad (46)$$

$$\dot{x} = x^2 + y, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = x^2. \quad (47)$$

$$\dot{x} = y^2 + y, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = y^2. \quad (48)$$

$$\dot{x} = y^2 + y, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = x^2. \quad (49)$$

$$\dot{x} = y^2 + y, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = xy. \quad (50)$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = xy. \quad (51)$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = y^2. \quad (52)$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = x^2. \quad (53)$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = y^2. \quad (54)$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = x^2. \quad (55)$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = xy. \quad (56)$$

Теорема 7. Ни одна из систем (29)–(32), (34), (36), (37), (39)–(56) не является системой Пенлеве-типа.

Доказательство. Для системы (29) не выполняется одно из условий первого шага теста Пенлеве. Она эквивалентна уравнению $2\ddot{z}\ddot{z}' - \dot{z}^2 + 4z \cdot \dot{z}^3 = 0$, которое имеет один доминантный член и согласно [13] не имеет целых трансцендентных решений. Данное уравнение не имеет полиномиальных решений, отличных от постоянной. Заметим, что система (29) имеет однопараметрическое семейство решений

$$x = \frac{3}{4}\tau^{-1}, \quad y = -\frac{1}{2}z_0 \cdot \tau^{-\frac{3}{2}}, \\ z = z_0\tau^{\frac{1}{2}}, \quad z_0^2 = \frac{21}{8}, \quad \tau = t - t_0,$$

t_0 — произвольная постоянная.

Система (30) имеет общее решение

$$x = \frac{-1}{3\tau^2} + C_1\tau^2, \quad y = -\frac{1}{\tau}, \quad z = \frac{C_1}{3}\tau^3 - \frac{1}{3}\ln\tau + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Как видно, две компоненты общего решения не имеют подвижных критических особых точек.

Система (31) редуцируется к неавтономному уравнению второго порядка $\tau\ddot{x} - \dot{x} + x = 0$, которое преобразованием $x = \left(\frac{s}{2}\right)^2 u$, $\tau = \left(\frac{s}{2}\right)^2$ сводится к уравнению Бесселя $s^2 u'' + su' + (s^2 - 4)u = 0$, общее решение которого содержит логарифм.

Система (32) сводится к уравнению $\ddot{z} = \frac{2}{\tau}\dot{z} + z^2$, $\tau = t - t_0$, не входящему в список [12] уравнений P -типа. Система (34) не проходит тест Пенлеве. Кроме того, она эквивалентна уравнению третьего порядка с одним доминантным членом и, следовательно, не имеет полиномиальных и целых трансцендентных решений. Это же справедливо и для систем (36), (37). Система (39) не проходит первый шаг теста Пенлеве, не имеет полиномиальных и целых трансцендентных решений, так как эквивалентна уравнению $\ddot{z}\ddot{z}' - \dot{z}^2 - \varepsilon z^4 = 0$

с одним доминантным членом. Системы (40), (41) не являются системами P -типа по той же причине, что и система (39).

Система (42) имеет первый интеграл $xz + z = C_1$, где C_1 — произвольная постоянная. Она редуцируется к уравнению $\dot{y} + y\dot{y} - C_1 y = 0$, которое согласно [12] не является уравнением P -типа. Если $C_1 = 0$, то система (42) имеет двухпараметрическое семейство мероморфных решений, порождаемых общим решением уравнения

Риккати $\dot{y} + \frac{1}{2}y^2 = H$, где H — произвольная постоянная. Отметим также, что система (42) имеет

точное решение $x = -1$, $y = 2\tau^{-1}$, $z = 2\tau^{-2}$. Для системы (43) не выполняется условие третьего шага теста Пенлеве: 2 корня резонансного уравнения являются комплексно-сопряженными с положительной действительной частью.

Система (44) эквивалентна уравнению $\ddot{y} + 2y\ddot{y} = 0$, которое не принадлежит к классу уравнений [9] без подвижных критических особых точек.

Система (45) по переменной z редуцируется к уравнению $\tau\ddot{z} - \dot{z} + z = 0$, которое (как в случае системы (31)) сводится к уравнению Бесселя, общее решение которого содержит логарифм.

Система (46) редуцируется к уравнению второго порядка, которое не является уравнением P -типа. Система (47) не является системой P -типа, так как 2 корня резонансного уравнения являются комплексно-сопряженными с положительной действительной частью. Сказанное справедливо относительно систем (49), (50), (53), (55).

Для системы (48) не выполняется условие третьего шага теста Пенлеве: одна из систем для определения коэффициентов рядов Лорана, представляющих формальные решения системы, несовместна. Сказанное справедливо и по отношению к системам (51), (52), (54).

Что касается системы (56), то корни резонансного уравнения являются целыми, причем один корень имеет кратность 2. Но ряды Лорана, представляющие формальные разложения решений системы, содержат только 2 произвольные константы.

Каждая из систем (33), (35), (38) не проходит первый шаг теста Пенлеве. Они эквивалентны уравнениям

$$\ddot{z}\ddot{z}' - \dot{z}\ddot{z} = \varepsilon z^2(\dot{z}^2 + z\dot{z}), \quad (57)$$

$$\ddot{z}^2 = 4\ddot{z}(\dot{z}^2 + z\dot{z}), \quad (58)$$

$$\ddot{z}^2 = 4\ddot{z}(\dot{z}^2 + \varepsilon z^2) \quad (59)$$

соответственно, которые имеют более одного доминантного члена.

5. КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ С ТРЕМЯ КВАДРАТИЧНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ И ОДНИМ ПОСТОЯННЫМ ЧЛЕНОМ

$$\dot{x} = y^2 + yz, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = 1. \quad (60)$$

$$\dot{x} = y^2 + yz, \quad \dot{y} = \varepsilon xz, \quad \dot{z} = 1. \quad (61)$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon z^2, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = 1. \quad (62)$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon z^2, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = 1. \quad (63)$$

$$\dot{x} = xy + 1, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = -yz. \quad (64)$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = x^2. \quad (65)$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = xy. \quad (66)$$

$$\dot{x} = yz + 1, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = xy. \quad (67)$$

$$\dot{x} = yz + 1, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = y^2. \quad (68)$$

$$\dot{x} = \varepsilon + y^2, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = x^2. \quad (69)$$

$$\dot{x} = \varepsilon + y^2, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = y^2. \quad (70)$$

$$\dot{x} = x^2 + yz, \quad \dot{y} = -2xy, \quad \dot{z} = 1. \quad (71)$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon z^2, \quad \dot{y} = 1, \quad \dot{z} = x^2. \quad (72)$$

Теорема 8. Ни одна из систем (60)–(72) не является системой Пенлеве-типа.

Доказательство. Система (60) с учетом $z = t + C_1$, где C_1 – произвольная постоянная, эквивалентна системе

$$\dot{x} = y^2 + y(t + C_1), \quad \dot{y} = x^2. \quad (73)$$

Для данной системы первые 2 шага теста Пенлеве выполняются. Но на третьем шаге произвольная константа C_2 отсутствует. Значит, система (73), а следовательно, и система (60) не является системой P -типа, хотя компонента z вообще не имеет подвижных особых точек.

Система (61) с учетом $z = t + C_1$ сводится к уравнению

$$\ddot{y} = \frac{1}{t + C_1} \dot{y} + (t + C_1)\varepsilon y^2 + y,$$

которое не содержится в списке Пенлеве–Гамбье [12]. Таким образом, система (61) не является системой Пенлеве-типа, хотя компонента z не имеет подвижных особых точек.

Система (62) сводится к системе уравнений

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon(t + C_1)^2, \quad \dot{y} = x^2, \quad (74)$$

которая не проходит тест Пенлеве (3-й шаг), а поэтому не является системой P -типа.

Система (63), аналогично, как и система (61), эквивалентна уравнению второго порядка, кото-

рое не содержится в списке уравнений Пенлеве–Гамбье [12].

Для системы (64) не выполняется первый шаг теста Пенлеве. Она эквивалентна уравнению

$$z^2 \ddot{z} = 3\dot{z}\ddot{z} - 2\dot{z}^3 - z^4, \quad (75)$$

которое не имеет полиномиальных и целых трансцендентных решений согласно [13]. На основании этого система (64) не является системой Пенлеве-типа. Для системы (65) не выполняются условия 2-го шага теста Пенлеве: 2 корня резонансного уравнения являются комплексно-сопряженными с положительной действительной частью. Значит, система (65) не является системой P -типа.

Для системы (66) (как и в случае системы (65)) не выполняются условия 2-го шага теста Пенлеве. Поэтому она не является системой Пенлеве-типа. Система (67) проходит 2 первых шага теста Пенлеве. При этом среди корней резонансного уравнения, которые являются целыми, один имеет кратность, равную 2. Но на 3-м шаге теста Пенлеве одна из систем для определения коэффициентов рядов Лорана, представляющих формальные решения системы (67), оказывается несовместной. Поэтому системы (67) не является системой P -типа.

Система (68) проходит 2 первых шага теста Пенлеве. Заметим, что корни резонансного уравнения у нее такие же, как в системе (67). Однако формальные ряды Лорана, определяющие решения системы (68) содержат только 2 произвольные константы (вместо 3-х). Таким образом, система (68) не является системой Пенлеве-типа. Доказательство отсутствия свойства Пенлеве у общего решения системы (69) проводится точно так же, как и в случае системы (68).

Система (70) имеет неавтономный первый интеграл $x - z = \varepsilon t + C_1$, который позволяет свести ее к системе второго порядка

$$\dot{y} = z^2 + (\varepsilon t + C_1)z, \quad \dot{z} = y^2, \quad (76)$$

которая не проходит тест Пенлеве (3-й шаг). Следовательно, система (70) не является системой Пенлеве-типа.

Из третьего уравнения системы (71) находим $z = t + C_1$. В результате получаем неавтономную систему

$$\dot{x} = y^2 + (t + C_1)z, \quad \dot{y} = -2xy. \quad (77)$$

Система (77) эквивалентна по y нелинейному уравнению второго порядка, не содержащемуся в списке Пенлеве–Гамбье [12]. Таким образом, система (71) не является системой Пенлеве-типа, хотя компонента z не имеет подвижных особых точек.

Система (72) с учетом $z = t + C_1$ сводится к неавтономной системе

$$\dot{x} = \varepsilon z^2 + (t + C_1)^2, \quad \dot{z} = x^2, \quad (78)$$

которая не проходит тест Пенлеве (3-й шаг). Таким образом, система (72) также не является системой P -типа, хотя компонента y не имеет подвижных особых точек. Теорема полностью доказана.

Замечание. Отсутствие у систем (74), (78) решений со свойством Пенлеве следует также из результатов работы [14].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы аналитические свойства решений четырех семейств трехмерных автономных консервативных систем с одной или тремя квадратичными нелинейностями без хаотического поведения. Общее число членов в правых частях каждой из указанных систем равно 4. Для анализа решений использован тест Пенлеве, а также замена систем эквивалентными им уравнениями второго или третьего порядков и сравнение последних с известными нелинейными уравнениями Пенлеве-типа. Выделены системы, общие решения которых обладают свойством Пенлеве. Решения таких систем выражаются либо через эллиптические функции, либо через функции-решения первого уравнения Пенлеве. Показано, что среди систем, не являющихся системами Пенлеве-типа имеются такие, одна из компонент которых вообще не имеет подвижных особых точек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow // *J. Atmos. Sci.* 1963. V. 20. P. 130–141.
2. *Rössler O.E.* An equation for continuous chaos // *Phys. Lett. A.* 1987. V. 57. P. 397–398.
3. *Sprott J.C.* Some simple chaotic flows // *Phys. Rev. E.* 1994. V. 50. P. R647–R650.
4. *Sprott J.C.* Simplest dissipative chaotic flow // *Phys. Lett. A.* 1997. V. 228. P. 271–274.
5. *Heidel J., Zhang Fu.* Nonchaotic behaviour in three – dimensional quadratic systems // *Nonlinearity.* 1999. V. 10. P. 1289–1303.
6. *Heidel J., Zhang Fu.* Nonchaotic behaviour in three – dimensional quadratic systems // *Nonlinearity.* 1999. V. 12. P. 617–633.
7. *Цегельник В.В.* Пенлеве-анализ решений одного класса трехмерных нелинейных диссипативных систем // *Вестник НИЯУ МИФИ.* 2018. Т. 7. № 2. С. 133–137.
8. *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
9. *Cosgrove C.M.* Chazy classes IX–XI of third-order differential equations // *Stud. Appl. Math.* 2001. V. 104. № 3. P. 171–228.
10. *Громак В.И., Грицук Е.В.* К теории нелинейных дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве // *Весті НАН Беларусі. Серія фіз.-мат. навук.* 2010. № 3. С. 25–30.
11. *Цегельник В.В.* Аналитические свойства решений автономных систем нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков с хаотическим поведением // *Вестник НИЯУ МИФИ.* 2015. Т. 4. № 2. С. 101–106.
12. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ОНТИ, 1939.
13. *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М.: ГИФМЛ, 1960.
14. *Яблонский А.И.* Об одной системе дифференциальных уравнений без подвижных критических точек // *Дифференциальные уравнения.* 1966. Т. 2. № 6. С. 752–762.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 4, pp. 338–344

Analytical Properties of Solutions of Three-Dimensional Autonomous Conservative Systems with One or Three Quadratic Nonlinearities without Chaotic Behavior

V. V. Tsegel'nik[#]

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, 220013 Belarus

[#]*e-mail: tsegvv@bsuir.by*

Received September 10, 2020; revised October 8, 2020; accepted October 12, 2020

Abstract—Analytical properties of solutions of four families of three-dimensional autonomous conservative systems with one or three quadratic nonlinearities are investigated. Conservative systems of the first family have one quadratic nonlinearity and three linear components. Systems of the second family are conservative systems that have one quadratic nonlinearity, two linear components, and one constant. Conservative systems of the third family contain three quadratic nonlinearities and one linear component. Systems of the

fourth family include conservative systems with three quadratic nonlinearities and one constant term. The absence of chaos in these systems is their common qualitative property. To analyze the solutions of the considered systems, Painlevé test, as well as the reduction of the systems to their equivalent equations of the second or third order and the comparison of the latter with the known nonlinear P -type equations, has been used. The systems whose general solutions have the Painlevé properties are highlighted. The solutions of such systems are expressed in terms of elliptic functions or solutions of the first Painlevé equation. It is shown that the systems whose general solutions contain moving critical points include those in which one of the component has no moving singular points at all. The systems considered in this work belong to a class of seven families of conservative systems (with the total number of members in the right parts equal to 4). The analytical properties of solutions of the systems of the other three families will be studied elsewhere.

Keywords: conservative system, non-chaotic behavior, Painlevé test, Painlevé equations

DOI: 10.1134/S2304487X20040100

REFERENCE

1. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.* 1963. V. 20. Pp. 130–141.
2. Rössler O.E. An equation for continuous chaos. *Phys. Lett. A.* 1987. V. 57. Pp. 397–398.
3. Sprott J.C. Some simple chaotic flows. *Phys. Rev. E.* 1994. V. 50. no 2. Pp. R647–R650.
4. Sprott J.C. Simplest dissipative chaotic flow. *Phys. Lett. A.* 1997. V. 228. Pp. 271–274.
5. Heidel J., Zhang Fu. Nonchaotic behaviour in three-dimensional quadratic systems. *Nonlinearity.* 1999. V. 10. Pp. 1289–1303.
6. Heidel J., Zhang Fu. Nonchaotic behaviour in three-dimensional quadratic systems. The conservative case. 1999. V. 12. Pp. 617–633.
7. Tsegel'nik V.V. // Penleve analiz reshenii odnogo klassa trekhmernykh nelineynykh dissipativnykh system [Painlevé analysis of solutions for one class of three-dimensional nonlinear dissipative systems]. *Vestnik NIYaU MIFI.* 2018. Vol. 7, no. 2. Pp. 133–137 (in Russian).
8. Kudryashov N.A. Analyticheskaya teoriya nelineynykh differentsial'nykh uravnenii [Analytical theory of nonlinear differential equations] Moskau-Izhevsk, Institute puternykh issledovaniy, 2004. 360 p.
9. Cosgrove C.M. Chazy classes IX–XI of third-order differential equations. *Stud. Appl. Math.* 2001. V. 104, no. 3. Pp. 171–228.
10. Gromak V.I., Gritsuk E.V. K teorii nelineynykh differentsial'nykh uravnenii so svoistvom Penleve [On the theory nonlinear differential equations with Painlevé property]. *Izvestiya NAN Belarusi. Seria fiz.-mat. Nauk.* 2010, no. 3. Pp. 25–30 (in Russian).
11. Tsegel'nik V.V. Analiticheskie svoistva reshenii avtonomnykh system nelineynykh differentsial'nykh uravnenii tret'ego i chetvertogo poryadkov s chaoticheskimi povedeniyami [Analytical properties of solutions to autonomous systems of nonlinear third and fourth-order differential equations with chaotic behavior]. *Vestnik NIYaU MIFI.* 2015, vol. 4, no. 2. Pp. 101–106 (in Russian).
12. Ince E.L. Obiknovennyye differentsial'nye uravneniya [Ordinary differential equations] Kharkov. ONTI, 1939. 720 p.
13. Wittich H. Noveishie issledovaniya po odnoznachnym analiticheskimi funktsiyami [The latest research on the unique analytic functions] Moskau. M.: GIFML. 1960. 319 p.
14. Yablonskii A.I. Ob odnoi sisteme differentsial'nykh uravnenii bez podvizhnykh kriticheskikh tochek [On one system differential equations without movable critical points] *Differentsial'nye uravneniya.* 1966. V. 2, no. 6. Pp. 752–762 (in Russian).

ОСОБЕННОСТИ ОБРАЗОВАНИЯ ПОМЕХ ПРИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИИ КМОП-ЭЛЕМЕНТА И ВОЗДЕЙСТВИИ ИОНИЗИРУЮЩЕЙ ЧАСТИЦЫ

© 2020 г. В. Я. Стенин^{1,2,*}, Ю. В. Катунин^{1,**}

¹ НИИ системных исследований Российской академии наук, Москва, 117218, Россия

² Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

*e-mail: vystenin@mephi.ru

**e-mail: katunin@cs.niisi.ras.ru

Поступила в редакцию 18.06.2020 г.

После доработки 26.06.2020 г.

Принята к публикации 08.09.2020 г.

Приводятся результаты моделирования элементов И и ИЛИ в составе мажоритарного элемента при переключении по входам и одновременном сборе заряда с трека частицы. Моделирование проведено с использованием 3D TCAD физических моделей КМОП-транзисторов по проектной норме 65-нм объемной технологии с мелкой траншейной изоляцией групп транзисторов при треках с линейным переносом энергии 60 МэВ см²/мг. Установлено, что начало переключения элементов И и ИЛИ по входам практически не влияет на зависимость переходных процессов образования импульсов помех на выходе элемента при сборе заряда с трека. Импульсы помехи сдвигаются во времени на интервал времени, равный смещению момента образования трека относительно момента переключения элемента по входам. Сбор заряда с трека приводит к переключению элемента до изменения входных сигналов, либо к дополнительной задержке переключения. Длительности импульсов помех на выходах элементов И и ИЛИ заключены в пределах от 12 пс до 345 пс. При этом сохраняется практически неизменной длительность импульса помехи для конкретных точек входа трека в общую область расположения транзисторов. При этом длительность импульса помехи остается практически неизменной для каждой конкретной точки входа трека в общую область расположения транзистора независимо от момента формирования трека.

Ключевые слова: импульс помехи, логический элемент, моделирование, одиночная частица, сбор заряда, трек

DOI: 10.1134/S2304487X20030098

1. ВВЕДЕНИЕ

КМОП комбинационные логические элементы являются основой кодирующих, декодирующих устройств и мажоритарной логики. Моделирование эффектов воздействия одиночных ионизирующих частиц с использованием приборных физических моделей (physics-based device models) как двумерных (2D), так и трехмерных (3D), посвящен ряд обобщающих работ, в которых моделированием предсказано [1] снижение помехоустойчивости КМОП-логики по объемной технологии до уровня линейной передачи энергии частицы на трек 2 МэВ см²/мг при понижении проектной нормы до 100 нм, а также эффект перехода КМОП-транзисторов в инверсный режим смещения [2] и увеличение длительности импульса помехи до 300–500 пс при 30 МэВ см²/мг. При проектных нормах менее 100 нм в КМОП-логике проявилось влияние диффузионного пе-

реноса носителей заряда, индуцированных на треке, на смежные элементы. При этом совместный сбор заряда может снижать длительности импульсных помех [4]. Проведено моделирование [5] основных характеристик мажоритарного элемента на основе элементов И и ИЛИ с проектной нормой объемный 65-нм КМОП с мелкой траншейной оксидной изоляцией групп транзисторов.

Целью данной работы является моделирование средствами TCAD базовых элементов с логикой И и ИЛИ в составе мажоритарного элемента по проектной норме объемный 65-нм КМОП с мелкой траншейной изоляцией транзисторов для получения количественных оценок временных параметров импульсов помех при одновременном переключении элементов по входам и сборе заряда с трека одиночной частицы.

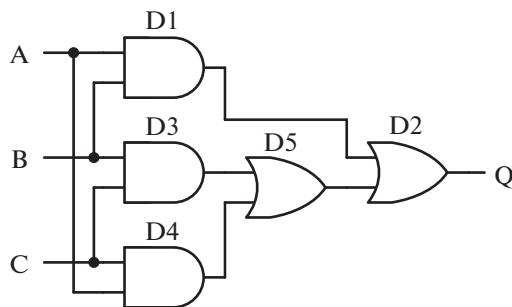


Рис. 1. Функциональная схема мажоритарного элемента на логических элементах И и ИЛИ.

2. ТРОЙНОЙ МАЖОРИТАРНЫЙ ЭЛЕМЕНТ НА И и ИЛИ ЭЛЕМЕНТАХ

2.1. Схема и топологии комбинационных элементов

На рис. 1 приведен вариант функциональной схемы тройного мажоритарного элемента на основе двухвходовых КМОП-элементов И (D1, D3, D4) и ИЛИ (D2, D5).

На рис. 2 приведены схема (рис. 2а) и эскиз топологии (рис. 2б) двухвходовой КМОП логический элемент И. Первая цифра в обозначениях транзисторов на рис. 2 соответствует номеру элемента на рис. 1, а вторая — номеру транзистора в элементе. Элемент И (рис. 2) состоит из логического элемента И-НЕ на транзисторах N1.1, N1.2, P1.1, P1.2 и инвертора на транзисторах N1.3, P1.3. На рис. 3 приведены схема (рис. 3а) и эскиз топологии (рис. 3б) двухвходового КМОП логического элемента ИЛИ (рис. 3) состоит из элемента ИЛИ-НЕ на транзисторах N2.1, N2.2, P2.1, P2.2 и инвертора на транзисторах N2.3, P2.3.

Области кремния на эскизах топологии на рис. 2б и рис. 3б, в которых выполнены МОП-

транзисторы элементов, ограничены прямоугольниками, которые окружены мелкой траншейной изоляцией диэлектриком (диоксидом кремния) глубиной 400 нм; полосы со штриховкой обозначают затворы транзисторов, звездочками отмечены точки входа треков одиночных частиц.

Элемент И (рис. 2) состоит из группы НМОП-транзисторов Gr1N и группы РМОП-транзисторов Gr1P. Аналогично элемент ИЛИ (рис. 3) состоит из группы НМОП-транзисторов Gr2N и группы РМОП-транзисторов Gr2P. Группы транзисторов Gr1N, Gr2N, Gr1P, Gr2P выполнены в областях кремния размером 885 нм × 400 нм, окруженных мелкой траншейной изоляцией глубиной 400 нм (прямоугольное обрамление транзисторов на рис. 2б и 3б показывает границы мелкой траншейной изоляции).

2.2. Особенности моделирования сбора заряда с трека частицы

В работе проведено гибридное TCAD-SPICE моделирование КМОП мажоритарного элемента (рис. 1), при котором средствами TCAD моделировались процессы генерации носителей заряда при передаче им энергии с трека в кремнии и процессы сбора заряда транзисторами в элементах D1 (И) и D2 (ИЛИ). Средствами SPICE моделировались характеристики двух элементов И (D3, D4) и элемента ИЛИ D5, которые обеспечивали передачу сигналов на вход элемента ИЛИ D2.

Использованы 3D TCAD физические модели КМОП-транзисторов [6] по проектной норме 65-нм КМОП объемной технологии. Как тестовое воздействие приняты треки частиц по нормали к поверхности приборной части модели элемента. Звездочками на рис. 2 и 3 отмечены точки входа треков частиц в области транзисторов. Ши-

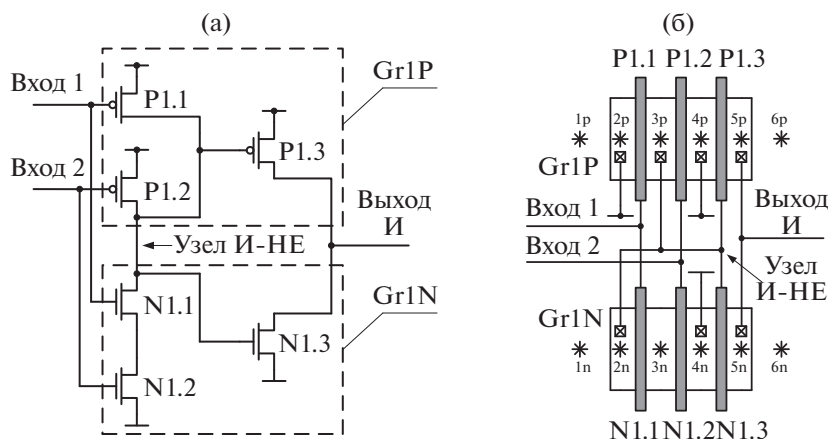


Рис. 2. Комбинационный КМОП-элемент И: (а) схема элемента; (б) эскиз топологии.

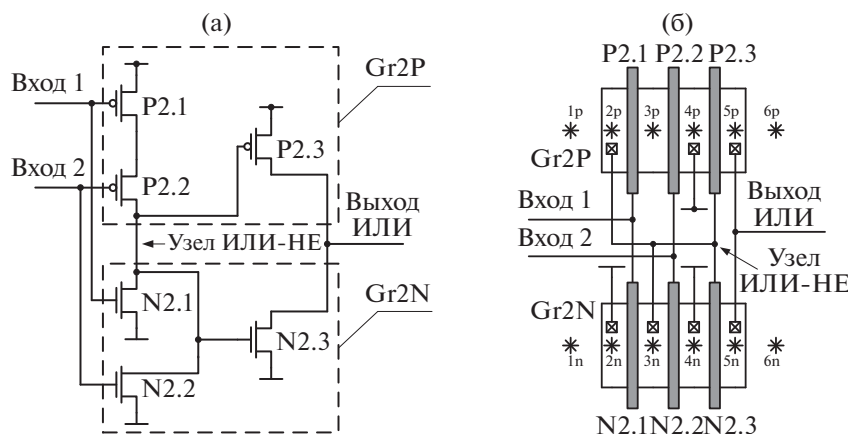


Рис. 3. Комбинационный КМОП-элемент ИЛИ: (а) схема элемента; (б) эскиз топологии.

рина каналов транзисторов элементов И и ИЛИ равна 400 нм. Конструкции элементов И и ИЛИ состоят из транзисторов, выполненных в кремниевых областях, окруженных мелкой траншейной изоляцией с глубиной 400 нм (shallow trench isolation — STI). Области НМОП- и РМОП-транзисторов разделены охранными полосами для вывода неравновесных зарядов на шину питания и общую шину.

Полные размеры 3D приборной структуры составляют $6.4 \text{ мкм} \times 10.9 \text{ мкм}$ при толщине подложки 3.0 мкм. Энергетическая составляющая генерации заряда на треке характеризуется линейной передачей энергии частицей на трек — (linear energy transfer — LET). При моделировании использовались треки с $\text{LET} = 60 \text{ МэВ см}^2/\text{мг}$. Результаты 3D TCAD-моделирования получены с использованием симулятора Setaurus Device при температуре 25°C и напряжении питания 1.0 В.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ ПОМЕХ В ЛОГИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТАХ

Алгоритм работы тройного мажоритарного элемента заключается в получении выходного сигнала, который соответствует совпадению как минимум двух входных сигналов из трех. В этом случае два сигнала управляют правильным переключением только одного из трех элементов И. Для получения достоверных данных о влиянии импульсов помех на выход мажоритарного элемента достаточно моделирования средствами TCAD этого входного элемента И и следующего в цепочке элемента ИЛИ, а именно двух элементов D1, D2 (рис. 1) с двумя вариантами входных сигналов: $A = B = C = 0$ и $A = B = 1, C = 0$ (или $A = B = C = 1$).

Как области входа трека одиночной частицы выбраны следующие области:

- 1) область стока транзистора N1.1 группы Gr1N элемента И (точка входа трека 2n на рис. 2б);
- 2) область истока транзистора P1.1 группы Gr2P элемента И (точка входа трека 2p на рис. 2б);
- 3) область общих стоков транзисторов N2.1, N2.2 группы Gr2N элемента ИЛИ (точка входа трека 3n на рис. 3б);
- 4) область стока транзистора P2.1 и истока транзистора P2.2 группы Gr2P (точка входа трека 3p на рис. 3б).

Зависимости напряжений на узлах элемента И получены для точек входа трека 2n, 2p, а для элемента ИЛИ для точек входа трека 3n, 3p, направления треков по нормали к поверхности кристалла, линейная передача энергии на трек $\text{LET} = 60 \text{ МэВ см}^2/\text{мг}$, образование трека в моменты $t_{\text{ТР}} = 100 \text{ пс}$, 160 пс и 220 пс . Переключение мажоритарного элемента по входам при $t_{\text{ПЕР}} = 200 \text{ пс}$. Трек с $t_{\text{ТР}} = 220 \text{ пс}$ образуется при переключении элемента по входам.

3.1. Сбор заряда с трека НМОП-транзисторами группы Gr1N элемента И D1

На рис. 4 приведены зависимости напряжений на узлах элемента И для точки входа трека 2n группы Gr1N, транзисторы которой выполнены в кремниевой подложке Р-типа проводимости в общей для этих транзисторов области кремния (рис. 2б). На рис. 4а приведены зависимости при исходных сигналах на входах элемента $A = B = C = 0$ с переключением на $A = B = 1, C = 0$; а на рис. 4б при начальных сигналах на входах элемента $A = B = 1, C = 0$ с переключением на $A = B = C = 0$.

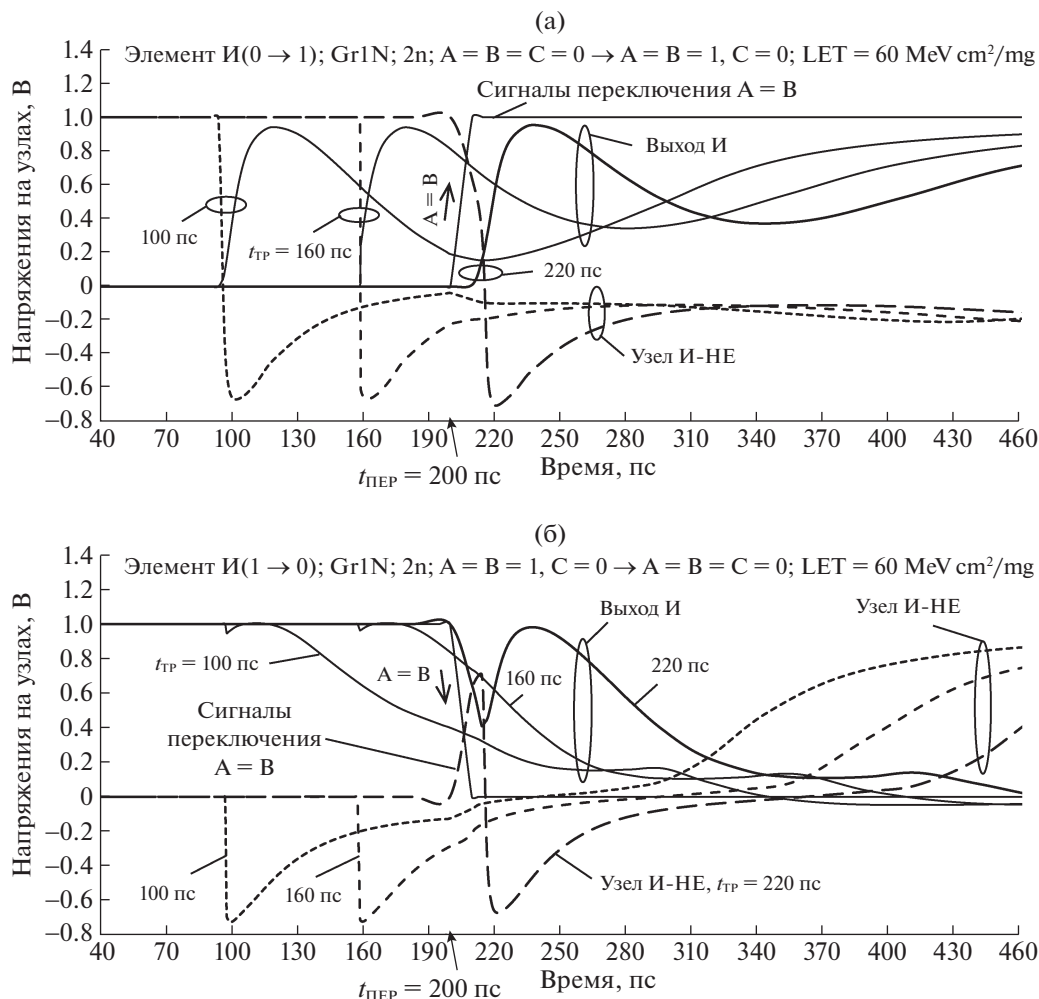


Рис. 4. Зависимости напряжений на узлах элемента И мажоритарного элемента при образовании трека с LET = 60 МэВ×см²/мг с точкой входа 2n в группу транзисторов Gr1N, возникновение трека при $t_{\text{ТР}} = 100$ пс, 160 пс и 220 пс; при $t_{\text{ПЕР}} = 200$ пс переключение входов: (а) из $A = B = C = 0$ в $A = B = 1, C = 0$; (б) из $A = B = 1, C = 0$ в $A = B = C = 0$.

Два семейства зависимостей на рис. 4а и 4б соответствуют трекам через одну точку входа 2n в сток транзистора N1.1 узла И-НЕ для двух вариантов переключения элемента: из $0 \rightarrow 1$ и из $1 \rightarrow 0$. В обоих случаях в момент образования трека происходит переход цепочки двух NМОП-транзисторов N1.1, N1.2 в инверсное смещение с образованием на узле И-НЕ импульса отрицательной полярности со значением экстремума напряжения – (0.66–0.7) В.

После перехода транзисторов N1.1, N1.2 в инверсное смещение инвертор переключается и затем его запертый NМОП-транзистор начинает собирать заряд с того же трека в группе Gr1N и напряжение на выходе инвертора (выходе элемента И) начинает снижаться. В случае режима переключения $0 \rightarrow 1$ изменение напряжения до 1 В на

выходе И фактически осуществляет опережающее переключение элемента при треках с $t_{\text{ТР}} = 100$ пс и 160 пс до смены сигналов на входах элемента. При этом после опережающего переключения сбор заряда с трека запертым NМОП-транзистором инвертора формирует импульс помехи отрицательной полярности (рис. 4а) с амплитудой 0.6–0.8 В. Во втором случае (рис. 4б) при переключении выхода И из $1 \rightarrow 0$ сбор заряда NМОП-транзистором инвертора переводит элемент И в состояние логического нуля "0" с дополнительно увеличенной задержкой на выходе.

Переключение элемента И из $0 \rightarrow 1$ с опережением

При опережающем переключении выхода И импульс помехи ("просадка" напряжения на вы-

ходе) имеет одинаковые зависимости во времени и длительность 188 пс по уровню 0.7 В от напряжения на общей шине элемента для всех треков с $t_{\text{ТР}} = 100$ пс, 160 пс и 220 пс (см. рис. 4а). Длительности задержек переключения относительно момента возникновения трека составляет 9 пс и 7 пс для треков с $t_{\text{ТР}} = 100$ пс и 160 пс. Относительно момента начала переключения входов при $t_{\text{ПЕР}} = 200$ пс задержки опережающего переключения имеют отрицательные значения $t_{\text{ЗД.ПЕР}} = -91$ пс при $t_{\text{ТР}} = 100$ пс и $t_{\text{ЗД.ПЕР}} = -33$ пс при $t_{\text{ТР}} = 160$ пс. При треке с $t_{\text{ТР}} = 220$ пс переключение происходит с задержкой $t_{\text{ЗД.ПЕР}} = 22$ пс относительно изменения входных сигналов при $t_{\text{ПЕР}} = 200$ пс, но также с импульсом помехи на выходе.

Переключение элемента И из 1 → 0 с дополнительной задержкой

При переключении входов из 1 → 0 НМОП-транзисторы узла И-НЕ запираются, а транзисторы РМОП открываются, но на емкости узла И-НЕ сохраняется напряжение отрицательной полярности (см. рис. 4б), что сохраняет запертым НМОП-транзистор инвертора при треках с $t_{\text{ТР}} = 100$ пс и 160 пс с напряжениями, которые были до переключения входов. После чего напряжение на выходном узле И продолжает снижаться до уровня логического нуля за счет сбора заряда с трека.

В случае образования трека при $t_{\text{ТР}} = 220$ пс после переключения сигналов на входах элемента при $t_{\text{ПЕР}} = 200$ пс, то переключение по входам вызывает снижение напряжения на выходе инвертора и выходе И до 0.4 В в интервале времени до 220 пс, когда образуется трек. Одновременно на узле И-НЕ (рис. 4б) образуется импульс отрицательной полярности при сборе заряда НМОП-транзисторами узла, который переключает выход инвертора до 0.98 В, запирая НМОП-транзистор инвертора, который, собирая заряд с трека, снижает напряжение на выходе И до уровня логического нуля. В итоге задержки переключения составляют $t_{\text{ЗД.ПЕР}} = 20$ пс, 48 пс и 107 пс для треков с $t_{\text{ТР}} = 100$ пс, 160 пс и 220 пс.

3.2. Сбор заряда с трека РМОП-транзисторами группы Gr1P элемента И D1

На рис. 5 приведены зависимости напряжений на узлах элемента И для точки входа трека 2р группы Gr2P, транзисторы которой выполнены в кармане N-типа проводимости в общей для этих транзисторов области (рис. 2б). На рис. 5а даны зависимости при сигналах на входах $A = B = 1$, $C = 0$ с переключением на $A = B = C = 0$; а на рис. 4б при сигналах на входах элемента $A = B =$

$C = 0$ с переключением элемента по входам на $A = B = 1$, $C = 0$.

Два семейства зависимостей на рис. 5а и 5б соответствуют трекам через точку входа 2р в область истока РМОП-транзистора P1.1 в группе Gr2P узла И-НЕ для двух вариантов переключения элемента: из 1 → 0 и из 0 → 1. Зависимости на рис. 5а характеризуют опережающее переключение элемента И сбором заряда РМОП запертыми транзисторами P1.1, P1.2, а зависимости на рис. 5б характеризуют переключение элемента И с дополнительной задержкой при треке с точкой входа 2р в исток открытого РМОП-транзистора P1.1.

Переключение элемента И из 1 → 0 с опережением

Переключившиеся сбором заряда с трека исходно запертые РМОП-транзисторы P1.1, P1.2 переводят узел И-НЕ в состояние с напряжением 1 В, что переключает инвертор и выход И через 12 пс после возникновения трека с $t_{\text{ТР}} = 100$ пс или 160 пс в состояние логического нуля “0” с напряжением 0.1 В (рис. 5а), что осуществляет опережающее переключение элемента И до смены сигналов на входах элемента при треках с $t_{\text{ТР}} = 100$ пс и 160 пс. Переключение элемента по входам при $t_{\text{ПЕР}} = 200$ пс до момента образования трека при $t_{\text{ТР}} = 220$ пс вызывает переключение инвертора и запирает РМОП-транзистор инвертора, который после переключения инвертора начинает собирать заряд с трека, что формирует небольшой импульс положительной полярности на выходе элемента И с амплитудой 0.2 В (рис. 5а).

Задержки опережающего переключения элемента И относительно момента образования трека составляют 12 пс при треках как с $t_{\text{ТР}} = 100$ пс, так и 160 пс. Относительно момента начала переключения входов при $t_{\text{ПЕР}} = 200$ пс задержки опережающего переключения имеют отрицательные значения: $t_{\text{ЗД.ПЕР}} = -88$ пс при $t_{\text{ТР}} = 100$ пс и $t_{\text{ЗД.ПЕР}} = -28$ пс при $t_{\text{ТР}} = 160$ пс. При треке с $t_{\text{ТР}} = 220$ пс переключение происходит с задержкой $t_{\text{ЗД.ПЕР}} = 20$ пс относительно изменения входных сигналов при $t_{\text{ПЕР}} = 200$ пс с небольшим импульсом на выходе.

Переключение элемента И из 0 → 1 с дополнительной задержкой

При сигналах на входах $A = B = C = 0$ РМОП транзисторы P1.1, P1.2 узла И-НЕ открыты и не собирают заряд с трека, так что напряжение на узле И-НЕ и на входе инвертора остается около 1 В. Заряд собирает запертый РМОП-транзистор P1.3 инвертора, что увеличивает напряжение до 0.2 В на выходе И вплоть до переключения элемента И по входам (рис. 5б).

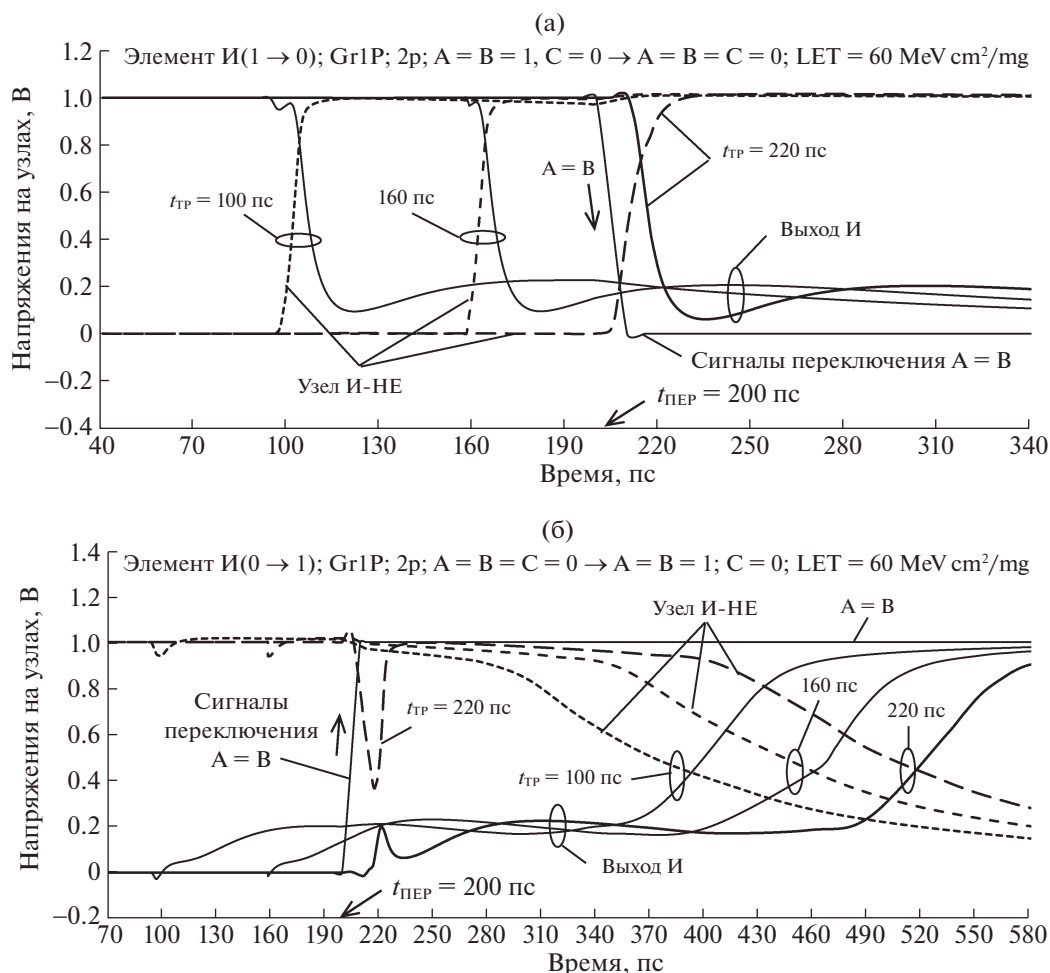


Рис. 5. Зависимости напряжений на узлах элемента И мажоритарного элемента при образовании трека с LET = 60 МэВ×см²/мг с точкой входа 2p в группу транзисторов Gr1P, возникновение трека при $t_{TR} = 100$ пс, 160 пс и 220 пс; при $t_{PER} = 200$ пс переключение: (а) из A = B = 1, C = 0 в A = B = C = 0; (б) из A = B = C = 0 в A = B = 1, C = 0.

После переключения входов на A = B = 1, C = 0 при $t_{PER} = 200$ пс РМОП транзисторы узла И-НЕ запираются, но напряжение на этом узле около 1 В сохраняет заряд на емкости узла. Это сохраняет напряжение на выходе инвертора и выходе И на уровне 0.2 В (рис. 5б). Ток открывшихся после переключения НМОП-транзисторов узла И-НЕ (рис. 2а) начинает медленно понижать напряжение на нем. После снижения напряжения на узле И-НЕ ниже 0.5 В начинает переключаться инвертор и повышать напряжение на выходе элемента И.

В итоге зависимости напряжений на узле И-НЕ и выходе И практически повторяются со сдвигом во времени на 60 пс для всех моментов образования треков с $t_{TR} = 100$ пс, 160 пс и 220 пс. Повышенные значения задержек переключения элемента И составляют $t_{зд.пер} = 224$ пс, 285 пс и 345 пс для треков с $t_{TR} = 100$ пс, 160 пс и 220 пс, что

также повторяет одинаковый сдвиг моментов образования треков по 60 пс.

3.3. Сбор заряда с трека НМОП-транзисторами группы Gr2N элемента ИЛИ D2

На рис. 6 приведены зависимости напряжений на узлах элемента ИЛИ для точки входа трека 3n группы Gr2N, транзисторы которой выполнены в кремниевой подложке Р-типа проводимости в общей области кремния (рис. 3б). На рис. 6а приведены зависимости при сигналах на входах мажоритарного элемента A = B = C = 1 с переключением на A = B = C = 0; а на рис. 6б при сигналах на входах A = B = C = 0 с переключением на A = B = C = 1.

Два семейства зависимостей на рис. 6а и 6б соответствуют трекам через точку входа трека 3n в общую область стоков НМОП-транзисторов узла

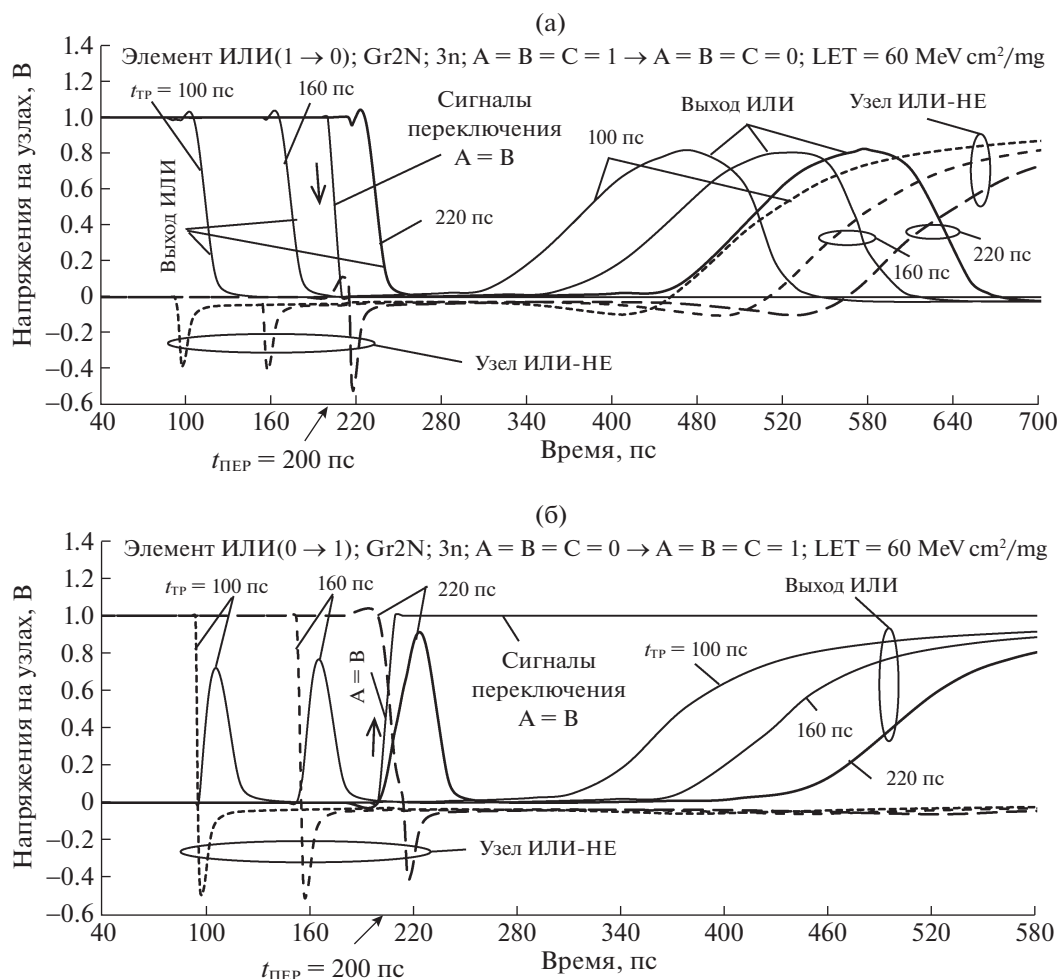


Рис. 6. Зависимости напряжений на узлах элемента ИЛИ мажоритарного элемента при образовании трека с LET = 60 МэВ×см²/мг с точкой входа 3n в группу транзисторов Gr2N, образование трека при t_{тр} = 100 пс, 160 пс и 220 пс; переключение при t_{пер} = 200 пс: (а) из A = B = C = 1 в A = B = C = 0; (б) из A = B = C = 0 в A = B = C = 1.

ИЛИ-НЕ группы Gr2N для вариантов переключения элемента из 1 → 0 и из 0 → 1. Сбор заряда в момент его образования на треке приводит к переходу NМОП-транзисторов N2.1, N2.2 в инверсное смещение с образованием на узле ИЛИ-НЕ короткого импульса отрицательной полярности с экстремумом −(0.4–0.5) В. Это происходит в обоих случаях исходных сигналов на входах мажоритарного элемента A = B = C = 1 (рис. 6а), так и при A = B = C = 0 (рис. 6б).

Для треков с t_{тр} = 100 пс и 160 пс в первом случае при A = B = C = 1 (рис. 6а) исходно запертый NМОП-транзистор N2.3 инвертора начинает собирать заряд с трека и через 20 пс после образования трека происходит опережающее переключение элемента ИЛИ до изменения сигналов на входах мажоритарного элемента и элемента ИЛИ.

Во втором случае для треков с t_{тр} = 100 пс и 160 пс при A = B = C = 0 (рис. 6б) исходно запертый NМОП-транзистор N2.3 инвертора инверсным смещением транзисторов узла ИЛИ-НЕ переключает инвертор и выход ИЛИ до напряжения (0.7–0.73) В, после чего сбор заряда (электронов) с трека запертым NМОП-транзистором N2.3 инвертора переводит выход инвертора и выход ИЛИ в состояние с напряжения 0 В, что образует короткий импульс на выходе ИЛИ сразу после образования трека (рис. 6б).

В обоих случаях сигналов на входах через 20 пс после образования треков с t_{тр} = 100 пс и 160 пс на выходах NМОП-транзистора N2.3 инвертора устанавливается режим, когда напряжение на его затворе, истоке и стоке близко к 0 В, и в этом состоянии выход ИЛИ удерживается 210–220 пс. При исходных сигналах на входах A = B = C = 0 это приводит к дополнительной задержке пере-

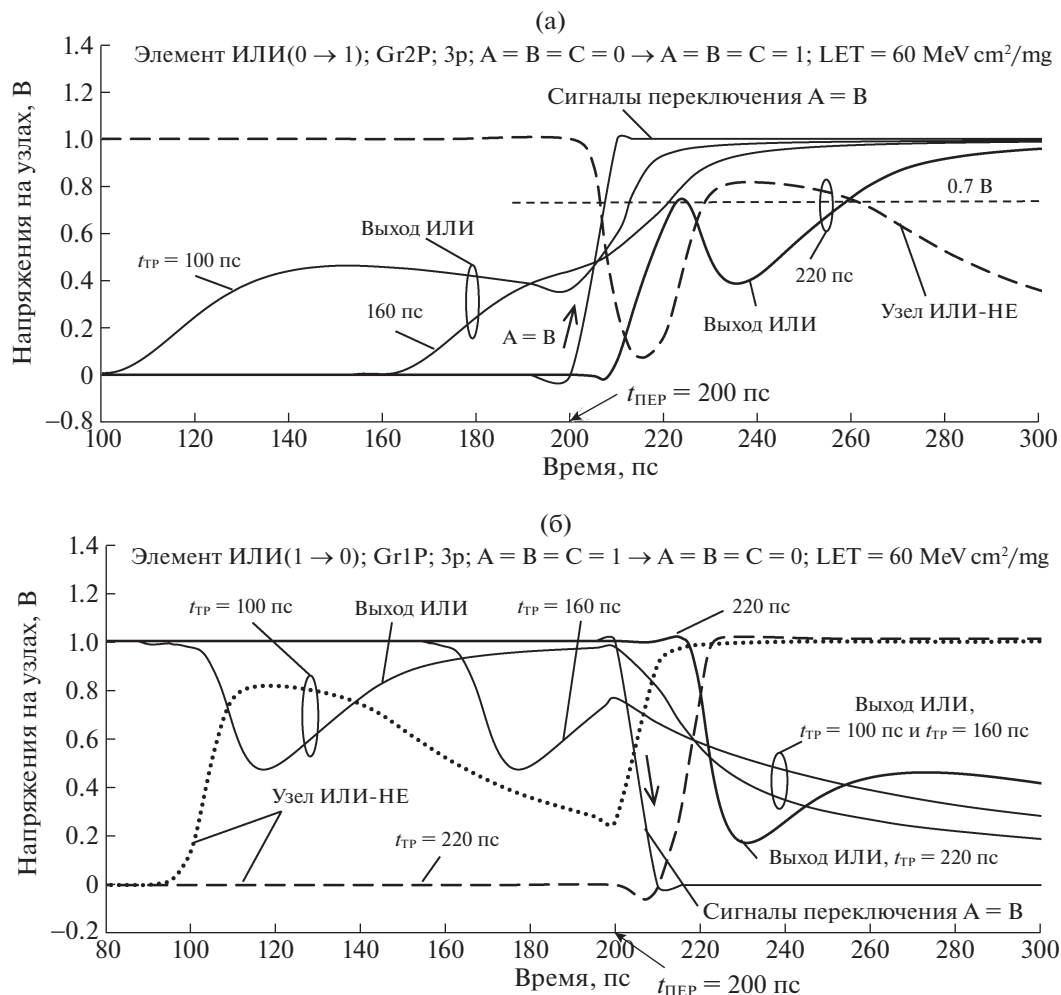


Рис. 7. Зависимости напряжений на узлах элемента ИЛИ мажоритарного элемента при образовании трека с LET = 60 МэВ×см²/мг с точкой входа 3p в группу транзисторов Gr2P, возникновение трека при t_{TR} = 100 пс, 160 пс и 220 пс; при t_{ПЕР} = 200 пс переключение: (а) из A = B = C = 0 в A = B = C = 1; (б) из A = B = C = 1 в A = B = C = 0.

ключения элемента ИЛИ после смены входных сигналов (рис. 6б).

Переключение элемента ИЛИ из 1 → 0 с опережением

После переключения входов на A = B = C = 0 в случае треков с t_{TR} = 100 пс, 160 пс и 220 пс сохраняется состояние на узле ИЛИ-НЕ и выходе ИЛИ с напряжением 0 В до момента, когда начинает преобладать заряд выходного узла ИЛИ током открытого РМОП-транзистора P2.3 инвертора и напряжение на выходе ИЛИ (рис. 6а) начинает повышаться до уровня 0.8–0.82 В. Затем увеличение напряжения на узле ИЛИ-НЕ переключает инвертор, что формирует импульс помехи с амплитудами 0.8–0.82 В и длительностью 74–77 пс по уровню 0.7 В.

В итоге задержки опережающего переключения элемента ИЛИ относительно момента начала переключения входов при t_{ПЕР} = 200 пс имеют отрицательные значения: t_{зд.ПЕР} = –80 пс при t_{TR} = 100 пс и t_{зд.ПЕР} = –20 пс при t_{TR} = 160 пс. При треке с t_{TR} = 220 пс переключение происходит с задержкой t_{зд.ПЕР} = 40 пс относительно изменения входных сигналов.

Переключение элемента ИЛИ из 0 → 1 с дополнительной задержкой

После состояния с напряжением 0 В на узле ИЛИ-НЕ и выходе ИЛИ в течение 210–220 пс после образования трека при t_{TR} = 100 пс, 160 пс и 220 пс (рис. 6б) напряжение на выходе ИЛИ до уровня логической единицы “1” начинает повышать заряд емкости выходного узла ИЛИ током

открытого РМОП-транзистора P2.3 инвертора. В итоге длительности задержек переключения составляют $t_{зд.пер} = 220$ пс, 280 пс и 345 пс по уровню 0.7 В при $t_{тр} = 100$ пс, 160 пс и 220 пс.

3.4. Сбор заряда с трека РМОП-транзисторами группы Gr2P элемента ИЛИ D2

На рис. 7 приведены зависимости напряжений на узлах элемента ИЛИ для точки входа трека 3p группы Gr2P, транзисторы которой выполнены в кремниевом кармане N-типа проводимости в общей для транзисторов области кремния (рис. 3б). На рис. 7а приведены зависимости при сигналах на входах $A = B = C = 0$ с переключением на $A = B = C = 1$; а на рис. 7б при сигналах на входах $A = B = C = 1$ с переключением на $A = B = C = 0$.

Два семейства зависимостей на рис. 7а и 7б соответствуют трекам через точку входа 3p в объединенную область стока транзистора P2.1 и истока P2.2 группы Gr2P для двух вариантов переключения элемента из $0 \rightarrow 1$ и из $1 \rightarrow 0$. Зависимости на рис. 7а и рис. 7б характеризуют переключение элемента ИЛИ с небольшой задержкой.

При исходных сигналах на входах $A = B = C = 0$ транзисторы P2.1, P2.2 узла ИЛИ-НЕ открыты, РМОП-транзистор P2.3 инвертора собирает заряд (дырки) при образовании треков с $t_{тр} = 100$ пс, 160 пс (рис. 7а). Этот сбор увеличивает напряжение на выходе ИЛИ до 0.5 В к моменту переключения входов элемента на $A = B = C = 1$ при $t_{пер} = 200$ пс.

При сигналах на входах $A = B = C = 1$ (рис. 7б) и треке с $t_{тр} = 100$ пс или 160 пс транзисторы P2.1, P2.2 заперты и с возникновением трека начинают сбор заряда (дырок), что повышает напряжение на узле ИЛИ-НЕ до максимума 0.81 В (см. зависимость на рис. 7б “Узел ИЛИ-НЕ” при $t_{тр} = 100$ пс). Далее ток открытых транзисторов N2.1, N2.2 снижает напряжение на узле ИЛИ-НЕ до момента переключения входов на $A = B = C = 0$ при $t_{пер} = 200$ пс. Напряжение на узле ИЛИ-НЕ отслеживает инвертор, что формирует на выходе ИЛИ до переключения входов импульсы напряжения отрицательной полярности с минимумами напряжения 0.47 В при 117 пс и 177 пс при треках с $t_{тр} = 100$ пс и 160 пс (рис. 7б).

Переключение элемента ИЛИ из $0 \rightarrow 1$ с небольшой задержкой

При переключении входов из $A = B = C = 0$ на $A = B = C = 1$ транзисторы P2.1, P2.2 запираются, напряжение на узле ИЛИ-НЕ снижается при $t_{тр} = 100$ пс и 160 пс, что переключает инвертор и выход элемента ИЛИ без существенной задержки до уровня 1 В (рис. 7а). В случае трека с $t_{тр} = 220$ пс после смены сигналов на входах напряжение на

узле ИЛИ-НЕ также снижается, но, когда достигает значения 0.07 В (рис. 7а), то сбор заряда с трека запертыми транзисторами P2.1, P2.1 начинает поднимать напряжение узла ИЛИ-НЕ до максимума 0.81 В при 237 пс, после чего начинается разряд узла ИЛИ-НЕ током открытых транзисторов N2.1, N2.2 до уровня 0 В. Напряжение на выходе ИЛИ (рис. 7а) отслеживает через инвертор изменение напряжения на узле ИЛИ-НЕ. В итоге на выходе ИЛИ после подъема возникает просадка напряжения, а затем выход ИЛИ достигает 1 В. Длительности задержек переключения составляют $t_{зд.пер} = 12$ пс при $t_{тр} = 100$ пс, $t_{зд.пер} = 20$ пс при $t_{тр} = 160$ пс и $t_{зд.пер} = 57$ пс при $t_{тр} = 220$ пс с последующим импульсом “просадки” напряжения длительностью 35 пс до минимального уровня 0.4 В.

Переключение элемента ИЛИ из $1 \rightarrow 0$ с задержкой

После переключения входов из $A = B = C = 1$ на $A = B = C = 0$ при $t_{пер} = 200$ пс при треке с $t_{тр} = 100$ пс и 160 пс НМОП-транзисторы узла ИЛИ-НЕ запираются, что быстро увеличивает напряжение на узле до 1 В (см. зависимость при $t_{тр} = 100$ пс для узла ИЛИ-НЕ на рис. 7б). Инвертор отслеживает это изменение с задержкой, снижая напряжение на выходе ИЛИ до уровня логического нуля. Длительности задержек переключения по уровню 0.3 В составляют $t_{зд.пер} = 40$ пс при $t_{тр} = 100$ пс, $t_{зд.пер} = 90$ пс при $t_{тр} = 160$ пс.

В случае образования трека при $t_{тр} = 220$ пс трек образуется после переключения входов при $t_{пер} = 200$ пс, в этом случае запертые НМОП-транзисторы узла ИЛИ-НЕ после смены сигналов на входах быстро переключают инвертор в состояние с запертым РМОП-транзистором инвертора, напряжение на выходе ИЛИ снижается с 1 В до 0.17 В при $t = 230$ пс (рис. 7б). Затем запертый РМОП-транзистор инвертора, собирая заряд дырок с трека, образует на выходе ИЛИ (рис. 7б) импульс помехи. Длительность задержки переключения при $t_{тр} = 220$ пс составляет $t_{зд.пер} = 25$ пс с последующим небольшим импульсом помехи с амплитудным значением 0.46 В и длительностью 95 пс.

Зависимости импульсов напряжения на узле ИЛИ-НЕ и выходе ИЛИ на временных отрезках сигналов, когда на входах $A = B = C = 0$, практически одинаковы при $t \geq 100$ пс на рис. 7а для трека с $t_{тр} = 100$ пс и при $t \geq 220$ пс на рис. 7б для трека с $t_{тр} = 220$ пс.

4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Зависимости во времени напряжений на выходах элементов И и ИЛИ при образовании им-

Таблица 1. Длительности задержек переключения элементов И и ИЛИ $t_{зд.пер}$ на выходах относительно момента переключения элемента входными сигналами при треках с линейным переносом энергии на них 60 МэВ см²/мг

Характер переключения	Опережающее переключение элемента			Переключение элемента с дополнительной задержкой				
	“0” в “1”	“1” в “0”		“1” в “0”		“0” в “1”		
Трек в элемент	И	И	ИЛИ	И	ИЛИ	И	ИЛИ	ИЛИ
Группа	Gr1N	Gr1P	Gr2N	Gr1N	Gr2P	Gr1P	Gr2P	Gr2N
Точка входа трека	2n	2p	3n	2n	3p	2p	3p	3n
$t_{зд.пер}$, пс при $t_{TP} = 100$ пс	–91 (188)	–88	–80 (74)	20	40	224	12	220
$t_{зд.пер}$, пс при $t_{TP} = 160$ пс	–33 (188)	–28	–20 (75)	48	90	285	20	280
$t_{зд.пер}$, пс при $t_{TP} = 220$ пс	22 (188)	20	40 (77)	107	25 (95)	345	57 (35)	345
Графики зависимостей	Рис. 4а	Рис. 5а	Рис. 6а	Рис. 4б	Рис. 7б	Рис. 5б	Рис. 7а	Рис. 6б

Примечание: в скобках в таблице указана длительность “просадки” напряжения (импульса помехи), вызванного сбором заряда элемента И и ИЛИ после переключения элемента

пульса помехи под действием сбора заряда с трека одиночной частицы не изменяют свой характер при смене момента образования трека, но смещаются во времени на интервал, равный смещению начала образования трека. В табл. 1 приведены значения задержек переключения элементов И и ИЛИ $t_{зд.пер}$ относительно момента переключения входных сигналов для опережающего переключения сбором заряда и с дополнительной задержкой.

При изменении момента образования трека сохраняется практически неизменной зависимость переходного процесса во времени и длительность импульса помехи для конкретных точек входа трека в общую область транзисторов, ограниченную мелкой траншейной изоляцией. В группе опережающих переключений значения времени задержки переключения на выходе элемента даны относительно момента изменения сигналов на входах элемента, в скобках указана длительность “просадки” переключенного уровня (или импульса помехи), вызванной сбором заряда транзисторами элемента после его переключения.

Основные выводы из результатов моделирования следующие:

1. Длительность импульса помехи на выходах элементов И и ИЛИ мажоритарного элемента при переключении по входам элемента и одновременно сборе заряда с трека частицы практически не зависит от момента образования трека для конкретной точки входа трека в область группы транзисторов одного типа проводимости, объединенных в общей области кремния, ограниченной мелкой траншейной изоляцией.

2. Транзисторы групп И-НЕ (ИЛИ-НЕ), которые находятся в запертом состоянии при заданных входных сигналах элементов И (ИЛИ), при сборе заряда переключаются, обуславливая опережающее переключение элемента до изменения сигналов на его входах.

3. Транзисторы групп И-НЕ (ИЛИ-НЕ), которые находятся в открытом состоянии при заданных входных сигналах элементов И (ИЛИ), не переключаются при сборе заряда ими; при этом их сбор заряда затягивает переключение элемента входными сигналами.

4. Длительности импульсов помех максимальны для треков, проходящих через исходно до переключения открытые транзисторы с общими областями их стоков в группе РМОП-транзисторов элемента И и в группе НМОП-транзисторов элемента ИЛИ.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Особенности характеристик элементов при сборе заряда с трека ионизирующей частицы совместно с переключением сигналов на входах следует учитывать при проектировании КМОП микропроцессорных систем, предназначенных для космического применения. К этим особенностям относятся практически неизменные длительности нестационарного их состояния независимо от момента возникновения трека, если он возникает до переключения по входам. Другой особенностью является либо опережающее переключение мажоритарного элемента, либо дополнительное увеличение задержки переключения, инициируемые сбором заряда с трека в зависимости от значений сигналов на входах. Задержка переключе-

ния может варьироваться от 12 пс до 345 пс в зависимости от точки входа трека и сигналов на входах.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена в рамках госзадания, проект № 0065-2019-0008 “Архитектурные и схемотехнические методы снижения энергопотребления и повышения сбоеустойчивости микропроцессоров и коммуникационных контроллеров высокопроизводительных ЭВМ”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dodd P.E., Shaneyfelt M.R., Felix J.A., Shwank J.R. Production and Propagation of Single-Event Transients in High-Speed Digital Logic ICs // *IEEE Transactions on Nuclear Science*. 2004. V. 51. № 6. P. 3278–3284.
2. Dodd P.E., Messengill L.W. Basic Mechanisms and Modeling of Single-Event Upset in Digital Microelectronics // *IEEE Transactions on Nuclear Science*. 2003. V. 50. № 3. P. 583–602.
3. Ferlet-Cavrois V., Messengill L.W., Couker P. Single-Event Transients in Digital CMOS – A Review // *IEEE Transactions on Nuclear Science*. 2013. V. 60. № 3. P. 1767–1790.
4. Atkinson N.M., Witulski A.F., Holman W.T., Ahlbin J.R., Bhuvu B.L., Massengill L.W. Layout technique for single-event transient mitigation via pulse quenching // *IEEE Transactions on Nuclear Science*. 2011. V. 58. № 3. P. 885–890.
5. Катунин Ю.В., Стенин В.Я. Моделирование воздействия одиночных ионизирующих частиц на логические элементы КМОП тройного мажоритарного элемента // *Микроэлектроника*. 2020. Т. 49. № 3. С. 230–240.
6. Garg R., Khatri S.P. Analysis and design of resilient VLSI circuits: mitigating soft errors and process variations. New York: Springer, 2010. P. 194–205.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta “MIFI”, 2020, vol. 9, no. 4, pp. 345–356

Features of a Noise Pulse Formation when Switching a CMOS Element and Exposure to an Ionizing Particle

V. Ya. Stenin^{a,b,#} and Yu. V. Katunin^{a,##}

^a Scientific Research Institute of System Analysis, Russian Academy of Sciences, Moscow, 117218 Russia

^b National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: vystenin@mephi.ru

^{##}e-mail: katunin@cs.niisi.ras.ru

Received June 18, 2020; revised June 26, 2020; accepted September 8, 2020

Abstract—The results of modeling the AND and OR elements as components of the majority element are presented when switching inputs and simultaneously collecting charge from the particle track. The simulation is performed using 3D TCAD physical models of CMOS transistors according to the design rule of 65 nm bulk technology with shallow trench isolation of transistor groups for tracks with linear energy transfer of 60 MeV cm²/mg. It is found that the beginning of switching elements AND and OR at the inputs hardly affects the transient processes of the formation of noise pulses at the output of the element when collecting the charge from the track. The noise pulses are shifted in time by a time interval equal to the time offset of the track relative to the time of switching element inputs. Collection of the charge from the track leads either to switching an element in advance of the input signals changing or to an additional switching delay. The widths of the noise pulses at the outputs of the AND and OR elements are distributed in the range from 12 to 345 ps. At the same time, the duration of the noise pulse remains almost unchanged for the each specific track input point into the common area of the transistor location regardless of the time of formation of the track.

Keywords: noise pulse, logical element, simulation, single particle, charge collection, track

DOI: 10.1134/S2304487X20030098

REFERENCES

1. Dodd P.E., Shaneyfelt M.R., Felix J.A., Shwank J.R., Production and propagation of single-event transients in high-speed digital logic ICs, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 2004, vol. 51, no. 6, pp. 3278–3284.

2. Dodd P.E., Messengill L.W., Basic mechanisms and modeling of single-event upset in digital microelectronics, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 2003, vol. 50, no. 3, pp. 583–602.
3. Ferlet-Cavrois V., Messengill L.W., Couker P., Single-event transients in digital CMOS – A review, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 2013, vol. 60, no. 3, pp. 1767–1790.
4. Atkinson N.M., Witulski A.F., Holman W.T., Ahlbin J.R., Bhuva B.L., Massengill L.W., Layout technique for single-event transient mitigation via pulse quenching, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 2011, vol. 58, no. 3, pp. 885–890.
5. Katunin Yu.V., Stenin V.Ya., Modeling of single ionizing particles impact on logic elements of a CMOS triple majority gate, *Russian Microelectronics*, 2020, vol. 49, no. 3, pp. 214–223.
6. Garg R., Khatri S.P., *Analysis and design of resilient VLSI circuits: Mitigating soft errors and process variations*. New York: Springer, 2010, pp. 194–205.

ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОКАНАЛЬНОЙ АНАЛОГОВОЙ ФРОНТЭНД МИКРОСХЕМЫ ДЛЯ ГАММА-ДЕТЕКТОРОВ НА ОСНОВЕ SiPM

© 2020 г. А. Ш. Шерги^{1,*}, О. В. Бычкова¹, Е. В. Попова¹, А. А. Стифуткин¹

¹ Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

*e-mail: cherguicherif@hotmail.com

Поступила в редакцию 17.07.2020 г.

После доработки 06.10.2020 г.

Принята к публикации 12.10.2020 г.

Проведены испытания разработанного в НИЯУ МИФИ прототипа специализированной многоканальной микросхемы, предназначенной для использования в качестве фронтэнда в детекторных системах на основе “медленных” сцинтилляционных кристаллов NaI(Tl) или CsI(Tl) и кремниевых фотоумножителей (SiPM). Для проведения измерений использовались специально разработанные тестовая плата и пакет программного обеспечения в среде LABVIEW. Детекторная часть состояла из кристалла NaI(Tl) и матрицы SiPM PM6600 (KETEK) в качестве фотоприемника. Энергетическое разрешение системы при регистрации гамма-квантов с энергией 59.5 кэВ составило $16.9 \pm 0.9\%$ ПШПВ. Для сравнения те же измерения были проведены с использованием аналоговой части многоканальной микросхемы MAROC3, для которой разрешение на этой энергии составило $27.7 \pm 0.9\%$.

Ключевые слова: SiPM, ФЭУ, MAROC, LABVIEW, МР-томография

DOI: 10.1134/S2304487X20040094

1. ВВЕДЕНИЕ

Российская отечественная ядерная медицина страдает от дефицита современного оборудования для диагностики. Почти все это оборудование было импортировано. Большинство установок эксплуатируется более 10 лет и теперь нуждается либо в модернизации, либо в полной замене. При этом для новых систем желательно совмещение функций — например, гамма-камеры и МР-томографа — в одной установке.

Однако при разработке новых, более универсальных систем, возникают проблемы совместимости. Дело в том, что полноразмерные гамма-камеры (full-body gamma-camera) предыдущего поколения, широко использующиеся в радиологических отделениях больниц по всему миру [1], традиционно построены на основе монокристаллов NaI(Tl) большого размера и вакуумных фотоумножителей (ФЭУ), при этом количество ФЭУ достигает порядка 100 штук. Поскольку использование ФЭУ в магнитных полях невозможно, то, для современных многофункциональных медицинских установок с сильными магнитными полями (МР-томография), необходимо применение других фотоприемников, нечувствительных к нему, например, кремниевых фотоумножителей (SiPM) [2]. SiPM не уступают ФЭУ по коэффициенту усиления, имеют более высокую эффективность регистрации, низкое напря-

жение питания (25–50 В), компактные размеры, а также гораздо менее хрупки.

SiPM совместно со сцинтилляционными кристаллами может быть использован для компактных и надежных гамма-спектрометров и является очень привлекательным выбором для создания многоканальных высоко-гранулярных систем, особенно в области ядерной медицины.

При этом, следует учитывать, что повышение гранулярности систем, особенно большого размера, приводит к резкому увеличению необходимого числа каналов сопутствующей электроники и требует применения многоканальных микросхем для сохранения разумных размеров и уровней энергопотребления.

К настоящему времени разработано и используется большое количество многоканальных микросхем для разных областей применения, с количеством каналов от 8-ми до 128-ми и функциональными возможностями от чисто аналогового фронтэнда до систем на кристалле, включающих в себя аналоговую и цифровую части для спектрометрических и временных измерений и быстрыми цифровыми интерфейсами для вывода информации. Однако, большая часть таких микросхем разработана для специальных целей (например, детекторы в области физики высоких энергий или ядерной физики) и трудно применима в других областях.

Среди коммерчески доступных многоканальных микросхем более или менее широкого применения, специально оптимизированных для работы совместно с SiPM или, которые можно использовать для этих целей, можно назвать (не претендуя на полноту), такие как Citiroc 1A [3], Petiroc 2A [4], Triroc 1A [5], Maroc 3A [6], Catiroc 1 [7] фирмы WeeRoc; TOFPET2 [8] фирмы PETselectronics; VA32HDR14-3 [9], IDE3160-2 [10], IDE3380 SIPHRA [11], VATA64HDR16-2 [12] фирмы Integrated Detector Electronics AS (IDEAS). Однако, перечисленные выше микросхемы ориентированы на работу с быстрыми сцинтилляторами, такими как LYSO, LSO или LaBr₃:Ce. Эти микросхемы, как правило, имеют времена интегрирования входного сигнала от 100 до 300 нс, что для систем, основанных на кристаллах NaI(Tl), CsI(Tl) или BGO, приводит к потере энергетического разрешения из-за неполного сбора количества высвечиваемых фотонов. Исключение составляют недавно появившиеся микросхемы Triroc 1A и IDE3380 SIPHRA, имеющие времена интегрирования соответственно до 1.28 мкс и 1.6 мкс.

В НИЯУ МИФИ в рамках Мегагранта разработан прототип отечественной многоканальной микросхемы для считывания сигналов с SiPM, ориентированной на системы ядерной медицины (гамма-камеры), в которых используются сцинтилляционные кристаллы NaI(Tl) или CsI(Tl), с целью обеспечить задел для создания многоканальной электроники для применения с этими “медленными” (времена высвечивания порядка микросекунд) сцинтилляторами [13].

Исходя из характеристик современных гамма-камер, к разрабатываемой микросхеме были сформулированы следующие требования:

- время интегрирования заряда достаточное для сбора 96% фотонов, испускаемых сцинтилляторами NaI(Tl) и CsI(Tl);
- линейность отклика для системы сцинтиллятор—SiPM—микросхема в диапазоне энергий гамма-квантов 59.6–511 кэВ;
- обеспечение получения одноэлектронного разрешения сигналов от SiPM для проведения калибровки регистрируемых от гамма-квантов сигналов в зависимости от количества сработавших ячеек;
- обеспечение асинхронной работы по появлению сигнала от гамма-квантов (режим “самотриггера”).

Прототип микросхемы был изготовлен на XFAB Foundry [14] с использованием технологии XH035.

В дальнейшем мы будем называть эту микросхему SLOSIC (SLOwSignalIC).

В данной работе проводится проверка функционирования SLOSIC совместно с модулем гамма-детектора на основе сцинтиллятора NaI(Tl) и SiPM при регистрации гамма-квантов. Измеренное энергетическое разрешение сравнивается с разрешением, полученным при использовании коммерчески доступной микросхемы MAROC3, уже применявшейся в макете гамма-камеры [15].

2. ОПИСАНИЕ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ МИКРОСХЕМЫ SLOSIC И ТЕСТОВОЙ ПЛАТЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

2.1. Архитектура SLOSIC

Состав и функциональное назначение основных блоков разработанной микросхемы показаны на структурно-функциональной схеме (рис. 1). SLOSIC включает три одинаковых канала A_1 – A_3 , каждый из которых содержит предварительный усилитель с токовым входом, управляемый кодом усилитель тока, интегратор с возможностью выбора одной из двух постоянных времени интегрирования (750 нс и 3 мкс) и включенную с интегратором в общую петлю отрицательной обратной связи схему стабилизации базовой линии.

Обобщенная функциональная схема одного канала SLOSIC показана на рис. 2. Каждый канал содержит два программируемых усилителя, состоящих из цифрового потенциометра и усилителя с фиксированным коэффициентом передачи, амплитудный дискриминатор, состоящий из компаратора с гистерезисом и программируемого источника опорного напряжения для задания порога. Выход компаратора служит сигналом запуска схемы синхронизации, включающей два программируемых таймера и логику управления. Программируемый усилитель, дискриминатор и таймеры образуют в совокупности временной подканал. Кроме него каждый канал содержит амплитудный подканал. Он включает в себя ФНЧ на базе одного из программируемых усилителей, управляемый пиковый (амплитудный) детектор, буферный масштабирующий усилитель — драйвер АЦП и программируемую схему сдвига постоянного уровня (базовой линии). Пиковый детектор может находиться в следующих состояниях: прозрачный, поиск максимума, удержание, сброс. Управление работой пик-детектора может быть как внутренним — автоматический режим с использованием таймеров, так и внешним — ручной режим с подачей управляющих сигналов извне. Все параметры программируются индивидуально для каждого из каналов.

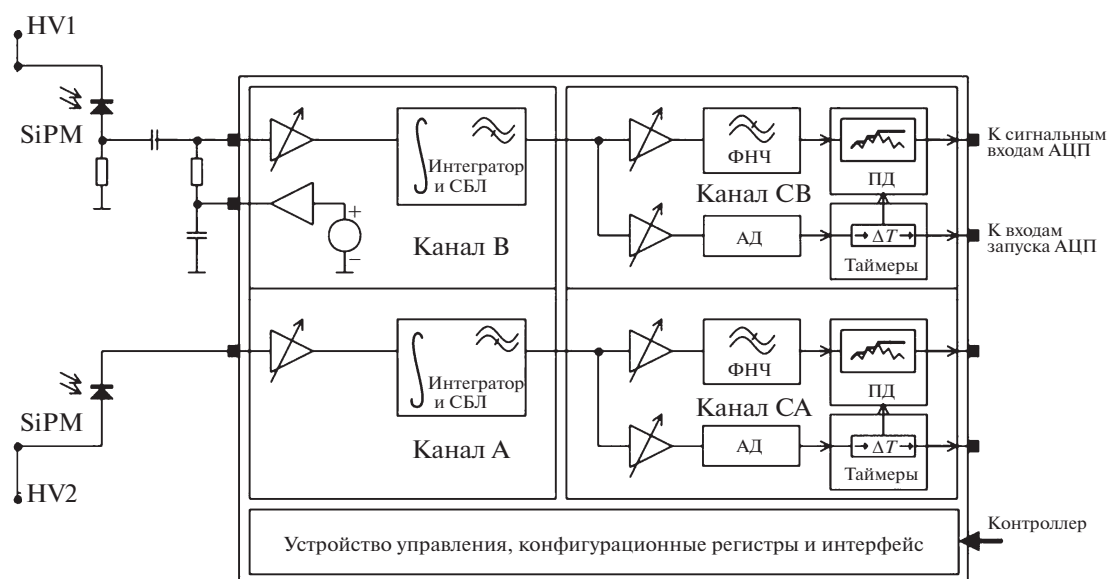


Рис. 1. Структурно-функциональная схема SLOSIC. СБЛ – стабилизатор базовой линии, ФНЧ – фильтр нижних частот, АД – амплитудный дискриминатор, ПД – пиковый детектор.

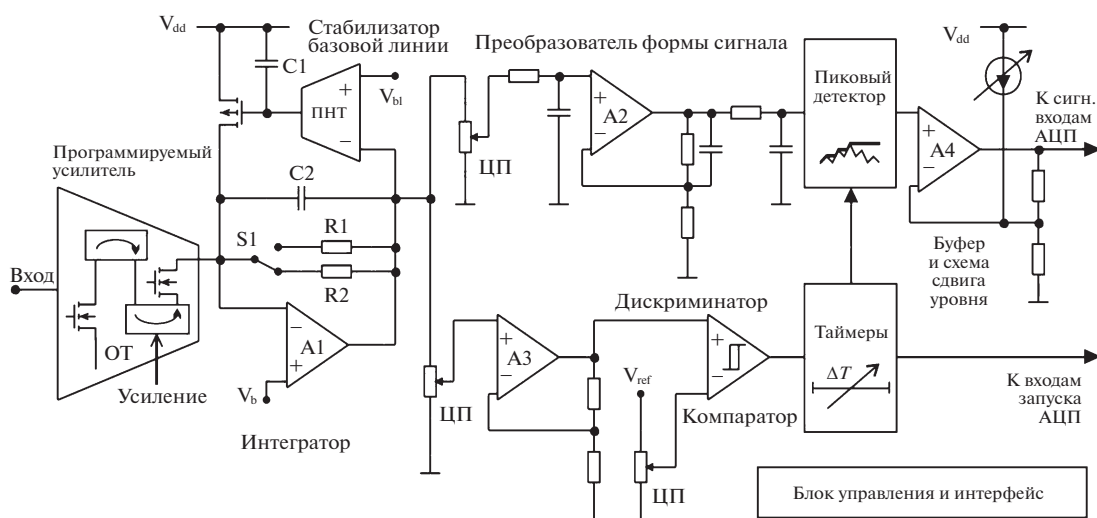


Рис. 2. Функциональная схема одного сквозного канала SLOSIC. ЦП – цифровой потенциометр, ПНТ – преобразователь напряжение-ток.

2.2. Тестовая плата

Для проведения измерений была разработана и изготовлена тестовая плата, обеспечивающая подачу стабилизированных напряжений питания для структурных блоков SLOSIC и имеющая разъемы для подключения аналоговых и управляющих сигналов, а также порт для связи с компьютером (рис. 3). Автоматический режим работы SLOSIC с использованием встроенных таймеров для управления работой пик-детектора в измерениях не применялся, сигналы управления режи-

мами работы (прозрачный, поиск максимума, удержание, сброс) подавались от внешней схемы. В качестве управляющего элемента платы использовался микрокомпьютер ARDUINO.

Для управления микросхемой было разработано приложение в среде LabVIEW, которое позволяет конфигурировать микросхему, в режиме реального времени считывать данные с внешнего АЦП, который может быть установлен на ту же плату. Более подробно разработанное программное обеспечение описано ниже.

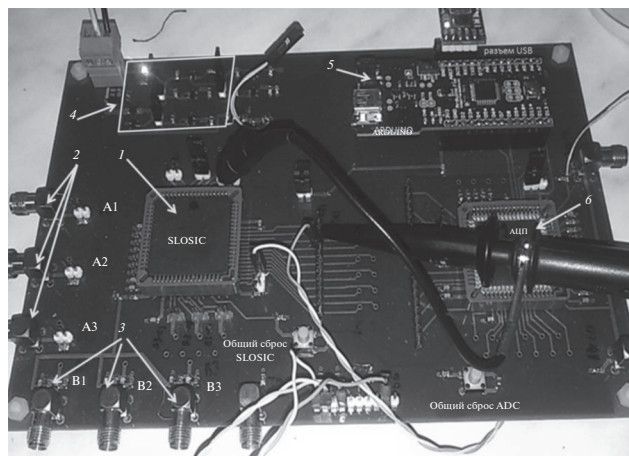


Рис. 3. Фотография тестовой платы. 1 – микросхема SLOSIC, 2 – входы каналов типа A, 3 – входы каналов типа B, 4 – стабилизаторы питания, 5 – плата ARDUINO для связи с компьютером, 6 – микросхема аналого-цифрового преобразователя.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

3.1. Модуль гамма-детектора

Модуль гамма-детектора состоит из трех основных компонентов: фотодетекторы, плата-носитель фотодетекторов и сцинтиллятор. Фотография модуля показана на рис. 4, где используются обозначения: 1 – источник гамма-квантов, 2 – сцинтилляционный кристалл, 3 – матрица кремниевых фотоумножителей, 4 – система фиксации сцинтиллятора относительно матрицы фотодетекторов, 5 – плата сумматора и считывания сигнала для определенных каналов матрицы.

Фотодетекторы представляют из себя 64-канальную матрицу (8×8 элементов), составленную из SiPM KETEK PM6660TP-SB [16]. SiPM данной модели имеет геометрический размер $6.8 \times 7.8 \text{ мм}^2$, чувствительную область $6 \times 6 \text{ мм}^2$ и содержит 10000 микроячеек, каждая из которых имеет размер $60 \times 60 \text{ мкм}^2$.

Матрица фотодетекторов SiPM собрана в ГУП НПП “Пульсар” (г. Москва). Зазор между соседними SiPM на матрице составляет 0.3 мм. Матрица устанавливается на плату-носитель при помощи четырех 40-контактных разъемов высокой плотности серии DF17 фирмы Hirose [17]. К каждому разъему подключены 16 SiPM (1 квадрант матрицы), каждый SiPM использует на разъеме 2 контакта – питание и сигнал. Остальные контакты разъема используются для подачи общего потенциала. Следует отметить, что для каждой линии питания SiPM на матрице смонтирован RC-фильтр для подавления перекрестных электрических наводок по шине питания. Плата-носитель обеспечивает разводку напряжения питания от одного входного разъема по индивидуаль-

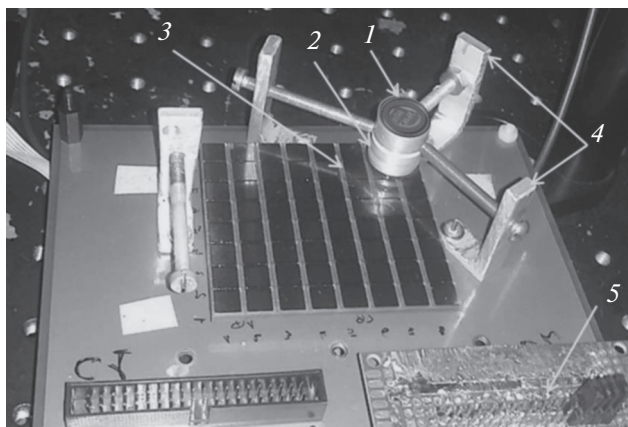


Рис. 4. Фотография гамма-детектора.

ным линиям, а также подключение сигнальных линий к четырем 40-контактным разъемам типа IDC (1 разъем на квадрант).

Для измерений использовался сцинтиллятор NaI(Tl) высотой 10 мм и диаметром 10 мм, в алюминиевом корпусе с толщиной выходного окна около 2 мм. Данный сцинтиллятор геометрически существенно отличается от кристаллов, используемых в полномасштабных гамма-камерах, однако основной задачей, стоящей перед нами на данном этапе, являлось экспериментальное определение энергетического разрешения системы сцинтиллятор–матрица SiPM–электроника и сравнение результатов по его величине, полученных при использовании микросхем SLOSIC и MAROC3.

Сцинтилляционный кристалл с помощью оптической смазки монтировался на 4 смежных элементах матрицы, выходы которых были соединены параллельно, образуя SiPM с площадью $\sim 12 \times 12 \text{ мм}^2$, как показано на рис. 4. Остальные элементы матрицы были отключены. Выходной сигнал по коаксиальному кабелю подавался на измерительный стенд. В процессе измерений модуль гамма-детектора находился в светозащищенной термокамере MC-811 фирмы ESPEC.

3.2. Измерительный стенд

Измерительный стенд включает в себя:

- специально разработанную и изготовленную тестовую плату для SLOSIC, обеспечивающую подачу напряжения питания для микросхемы и имеющую разъемы для аналогового и управляющего сигналов, а также порт для связи с компьютером;
- многоканальную систему сбора данных на основе микросхемы MAROC3 фирмы WeeRoc (evaluation board MAROC3) [18], для сравнительных измерений;

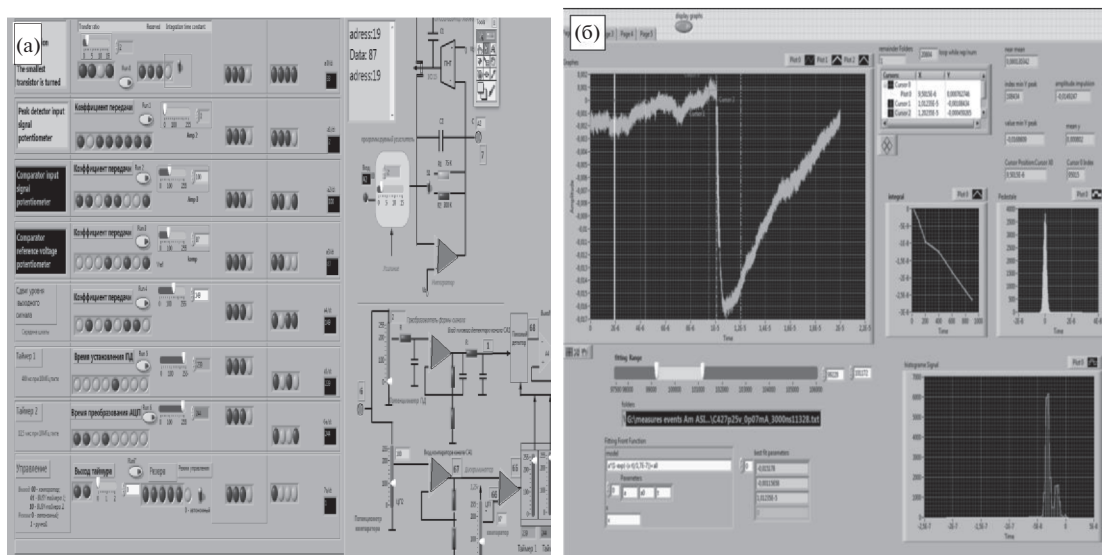


Рис. 5. Скриншот ПО. 5а — блок управления микросхемой SLOSIC, 5б — блок осциллограмм и обработки сигналов.

- цифровой осциллограф LeCroyWR620zi, используемый в качестве системы сбора данных;
- генератор точной амплитуды ORTEC 419;
- систему оптического attenuатора;
- источники питания для SiPM (Keithley 2400) и электроники.

4. ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ SLOSIC И ОБРАБОТКА ДАННЫХ

Для тестирования SLOSIC было разработано управляющее программное обеспечение (ПО) в среде LABVIEW, которое позволяет конфигурировать микросхему, управлять работой тестовой платы, а также вести обработку данных on-line или off-line, в зависимости от формата и скорости потока данных. Скриншоты ПО показаны на рис. 5.

Управляющее ПО выполняет следующие действия:

- конфигурирует микросхему путем загрузки управляющих слов через последовательный интерфейс;
- схематично показывает текущее состояние основных структурных блоков микросхемы, облегчая процесс конфигурирования и визуального контроля состояния микросхемы;
- считывает данные с внешнего АЦП, который может быть установлен на тестовой плате, и представляет данные графически;
- проводит построение и обработку спектров;
- в случае использования цифрового осциллографа для регистрации и записи осциллограмм сигналов, ПО содержит блок off-line обработки записанных данных — воспроизведение осцилло-

грамм, анализ формы импульсов, построение и обработка зарядовых и амплитудных спектров, подбор оптимальных параметров обработки и гистограммирования.

Поскольку количество событий в пике полного поглощения зависит от энергии и интенсивности гамма-линии источника, использование одинаковой ширины канала при построении спектров от разных источников является неоптимальным для определения параметров пика. Правильно подобранная ширина каналов гистограммы позволяет дать наиболее точную оценку параметров функции распределения [19–22]. В управляющем ПО была реализована процедура выбора оптимальной ширины каналов. Ниже приведен алгоритм данной процедуры:

1) начальное количество каналов гистограммы задается пользователем так, чтобы ширина пика полного поглощения на его полувысоте находилась в пределах 5–10 каналов [23] (при этом полученное распределение контролируется визуально);

2) используя процедуру фитирования функцией Гаусса (1), из полученного распределения определяем координату центра пика полного поглощения X_0^i и погрешность ее измерения ΔX_0 :

$$y = y_0 + \frac{Ae^{-\frac{4 \ln(2)(X-X_0)^2}{w^2}}}{w \sqrt{\frac{\pi}{4 \ln(2)}}}, \quad (1)$$

где y_0 — подложка, X_0 — координата центра пика, A — площадь, w — полная ширина на половине максимума пика [24]. Учитывая несимметричность пиков полного поглощения, границы интервала, на котором производится фитирование,

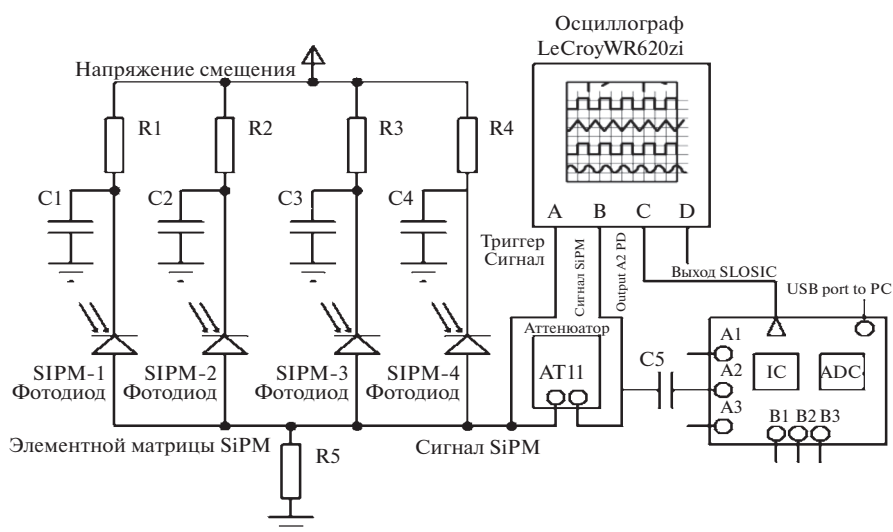


Рис. 6. Схема экспериментальной установки.

устанавливаются следующим образом: правая граница определяется как канал для которого $y = y_0$; левая граница как канал для которого $y = 2h/3$, где h — высота пика;

3) затем ширина канала уменьшается на величину, заданную оператором, осуществляется гистограммирование исходных экспериментальных данных и повторяется шаг 2.

Данный алгоритм повторяется, пока не будет выполнено условие: значение X_0^i и w^i для выбранного разбиения равно предыдущему X_0^{i-1} и w^{i-1} и последующему значению X_0^{i+1} и w^{i+1} в пределах полученной при i шаге фитирования погрешности. Тогда значение ширины канала для i шага считаем оптимальным.

5. ИЗМЕРЕНИЯ

Базовая схема подключения аппаратуры показана на рис. 6.

Все измерения со SLOSIC проводились на канале с токовым входом, сконфигурированным для работы со сцинтиллятором NaI(Tl) (постоянная времени интегрирования 750 нс), а с MAROC3 — при конфигурации с максимальным временем интегрирования (приблизительно 120 нс).

Сигнал от гамма-детектора подавался на вход цифрового осциллографа и служил триггером для захвата осциллограмм. Тот же сигнал, ослабленный при помощи аттенюатора, подавался на второй вход осциллографа и на тестовую плату. Аттенюатор потребовался для того, чтобы согласовать диапазон изменения сигналов от гамма-детектора с динамическим диапазоном SLOSIC. Выходной сигнал пик-детектора SLOSIC подавался на

третий вход осциллографа. Встроенный в SLOSIC пик-детектор управлялся следующим образом: процесс поиска максимума сигнала интегратора запускался при срабатывании внутреннего дискриминатора; выходной сигнал этого дискриминатора запускал внешнюю схему управления (на схеме подключения не показана), генерирующую сигналы переходов в режимы Удержание и Сброс.

Управление работой MAROC3 осуществлялось примерно так же, с той разницей, что в этой микросхеме нет пик-детектора и захват уровня сигнала происходит в момент подачи синхросигнала.

Осциллограммы сигналов записывались на внешний носитель для последующей обработки.

Параметры конфигурации системы подбирались таким образом, чтобы можно было производить измерения в диапазоне энергий от 59.6 кэВ (^{241}Am) до 1274 кэВ (^{22}Na) без перенастройки. Измерения с гамма-источниками были проведены во всем указанном диапазоне, включая область, где наблюдается заметное отклонение сигнала собственно SiPM от линейности. Напряжение питания матрицы SiPM — 28.25 В — было определено как напряжение, при котором достигалось наилучшее разрешение для источника ^{137}Cs . Все измерения с матрицей проводились при этом напряжении и температуре +20°C.

Линейность отклика SLOSIC на входной сигнал проверялась двумя способами. В первом источником входного сигнала служил подключенный вместо гамма-модуля генератор импульсов точной амплитуды ORTEC419, вырабатывающий экспоненциальный сигнал с постоянной времени спада 250 нс, имитирующий сигнал от сцинтиллятора NaI(Tl). Сигнал генератора, ослабленный

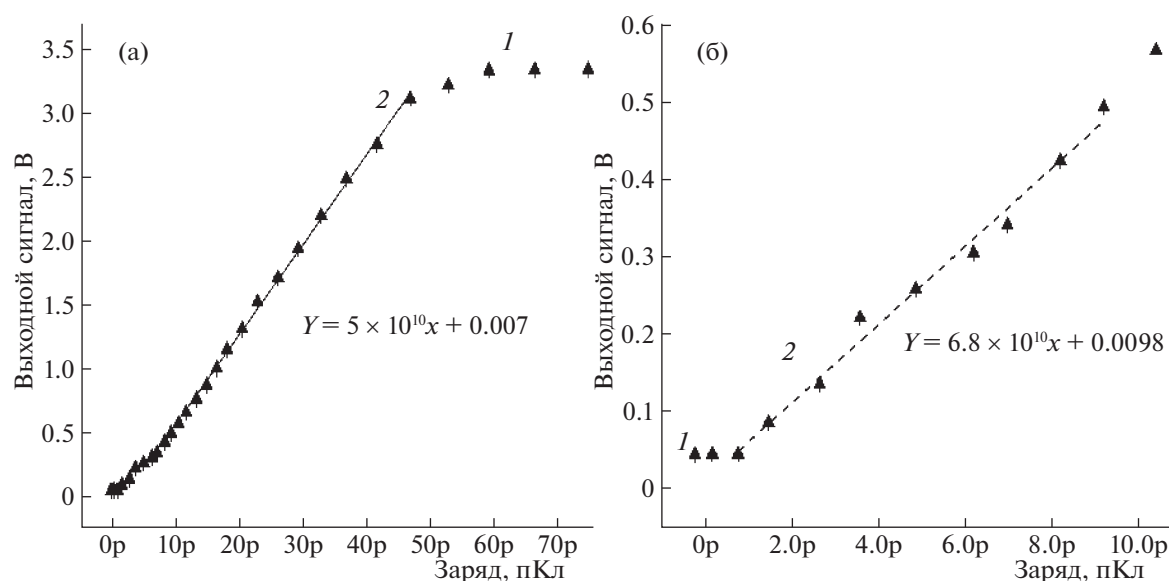


Рис. 7. Отклик SLOSIC на сигнал генератора: 7а — полный диапазон, 7б — диапазон малых сигналов, 1 — выход пик-детектора SLOSIC, 2 — линейный фит.

при помощи прецизионного аттенюатора, подавался на вход SLOSIC и на цифровой осциллограф LeCroyWR620zi.

Во втором использовалась способность SLOSIC работать с сигналом одиночной ячейки SiPM. При этом источником калибровочного сигнала выступал подключенный к SLOSIC SiPM Hamamatsu S13360-1350PE, для которого зависимость сигнала ячейки от напряжения питания (коэффициент усиления) нами хорошо изучена. SiPM облучался вспышками пикосекундного лазера с длиной волны 660 нм, ослабленными при помощи оптического аттенюатора до уровней в несколько фотонов на площадь SiPM за вспышку.

Набор спектров проводился с использованием стандартных калибровочных гамма-источников ОСГИ, при этом источники располагались таким образом, чтобы ток через матрицу фотодетекторов оставался постоянным и не влиял на параметры фотодетекторов.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 7 показан отклик SLOSIC на суммарный заряд, поступивший на вход, при использовании генератора точной амплитуды (рис. 7а — в широком диапазоне входного сигнала, рис. 7б — в области малых сигналов). Фитирование линейными функциями для этих диапазонов дает разные коэффициенты наклона и постоянные смещения с зоной перехода в районе 6–7 пКл. В области величины заряда около 4 пКл наблюдается дополнительный выброс.

На рис. 8а представлен одноэлектронный спектр сигнала SiPM Hamamatsu S13360-1350PE при освещении лазером. Каждый следующий пик в спектре отличается от предыдущего на величину сигнала (заряда) одной ячейки. Зная заряд (усиление) одиночной ячейки и количество сработавших ячеек, соответствующих каждому пику спектра, можно построить зависимость сигнала SLOSIC от величины заряда на входе, как показано на рис. 8б.

При измерениях с Hamamatsu S13360-1350PE параметры конфигурации SLOSIC (в частности коэффициент передачи входного каскада) оптимизировались для получения спектра одиночных ячеек и отличались от параметров, применяемых при измерении с источниками. Спектр, показанный на рис. 8а, набран при установке порога дискриминатора SLOSIC, запускающего пик-детектор, на уровне 10 ячеек. Такой метод генерации входного сигнала может быть использован для калибровки и мониторингирования электронного тракта без использования дополнительного оборудования. Видно, что в области входных зарядов порядка 4.5–5 пКл также наблюдается отклонение от линейности, что проявляется в нарушении эквидистантности первых 2 пиков одноэлектронного спектра.

Характеристики систем на основе SLOSIC и MAROC3 с подключенным модулем гамма-детектора изучались в диапазоне энергий 59.6–511 кэВ (диапазон энергии соответствует источникам, используемым в гамма-камере) с использованием источников ^{241}Am (59.6 кэВ), ^{57}Co (122 кэВ), ^{152}Eu (344 кэВ) и ^{22}Na (511 кэВ). На рис. 9

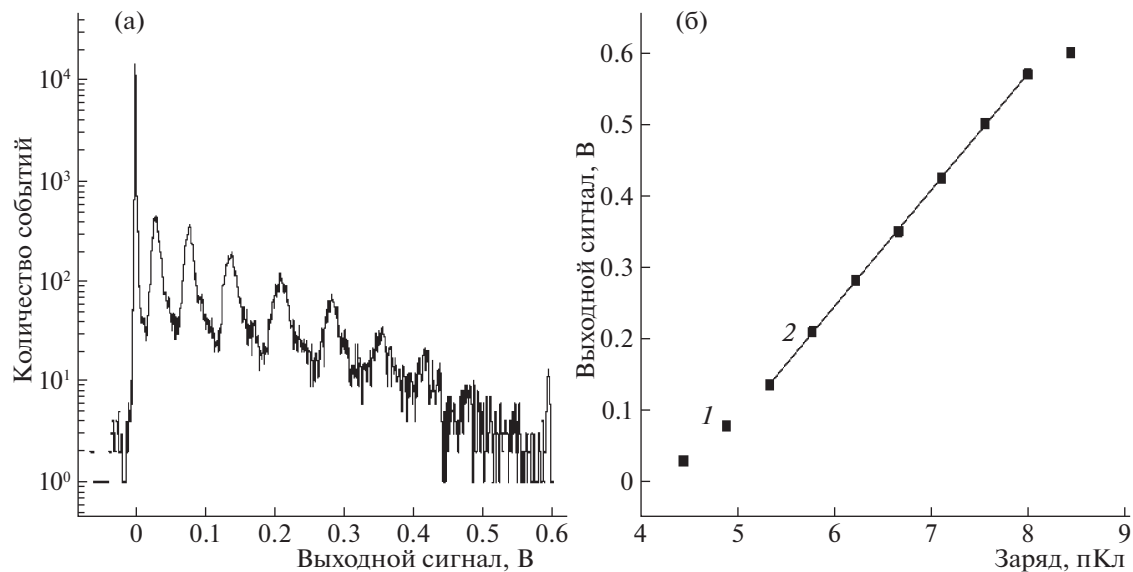


Рис. 8. 8а – Одноэлектронный спектр SiPM Hamamatsu S13360-1350PE, 8б – отклик SLOSIC на сигнал от SiPM.

в качестве примера представлены спектры сигналов и результаты фитирования для пьедесталов и пиков полного поглощения для источника ²⁴¹Am (59.6 кэВ). Видно, что энергетическое разрешение гамма-детектора, использующего SLOSIC в качестве фронтэнда лучше, несмотря на то, что ширина пьедестала для системы с MAROC3 уже (интегрирование темновых импульсов SiPM происходит в более узком временном интервале). Собственное разрешение SLOSIC без использования SiPM составило 5 кэВ. Разница в разрешении, полученная для гамма-пиков (табл. 1) объясняется тем, что время интегрирования τ в MAROC3 составляет ≈ 120 нс, в то время как SLOSIC имеет встроенный интегратор с $\tau = 750$ нс. Исходя из разницы во временах интегрирования, ожидаемое количество зарегистрированных фотонов от вспышки сцинтиллятора NaI(Tl) с постоянной времени высвечивания $\tau = 250$ нс для SLOSIC и MAROC3 отличается в 2.6 раза и должно приводить к улучшению разрешения для SLOSIC в $\sqrt{2.6} \approx 1.6$ раза, что качественно согласуется с экспериментальными данными.

Полученные после обработки спектров калибровочные зависимости представлены на рис. 10. Обе системы сцинтилятор–матрица SiPM–MAROC3/SLOSIC в указанном диапазоне энергий достаточно хорошо описываются линейной зависимостью, не показывая характерного для систем с использованием SiPM насыщения в области больших сигналов. Тем не менее следует отметить, что SLOSIC имеет заметное отклонение от линейности, что связано, по-видимому, с отмеченными выше особенностями работы прототипа микросхемы в области малых сигналов.

Чтобы оценить энергетическое разрешение систем для энергии 140.5 кэВ – основной линии изомера ^{99m}Tc, который является наиболее часто применяемым в гамма-камерах источником, была построена зависимость энергетического разрешения от энергии гамма-кванта (рис. 11) и отфильтрована функцией вида:

$$R = a * (E - b)^c,$$

где R – относительное энергетическое разрешение, E – энергия гамма-кванта, а a , b и c – коэффициенты.

Таблица 1

	Пьедестал (ПШПВ), кэВ	Пик поглощения для ²⁴¹ Am (ПШПВ), кэВ	Пик поглощения, разрешение ²⁴¹ Am (ПШПВ), %	Пик поглощения, разрешение (интерполированное значение) ^{99m} Tc (ПШПВ), %
MAROC	4.3 ± 0.3	16.5 ± 0.5	27.7 ± 0.9	14.0 ± 0.9
SLOSIC	7.2 ± 0.5	10.0 ± 0.5	16.9 ± 0.9	10.1 ± 0.9

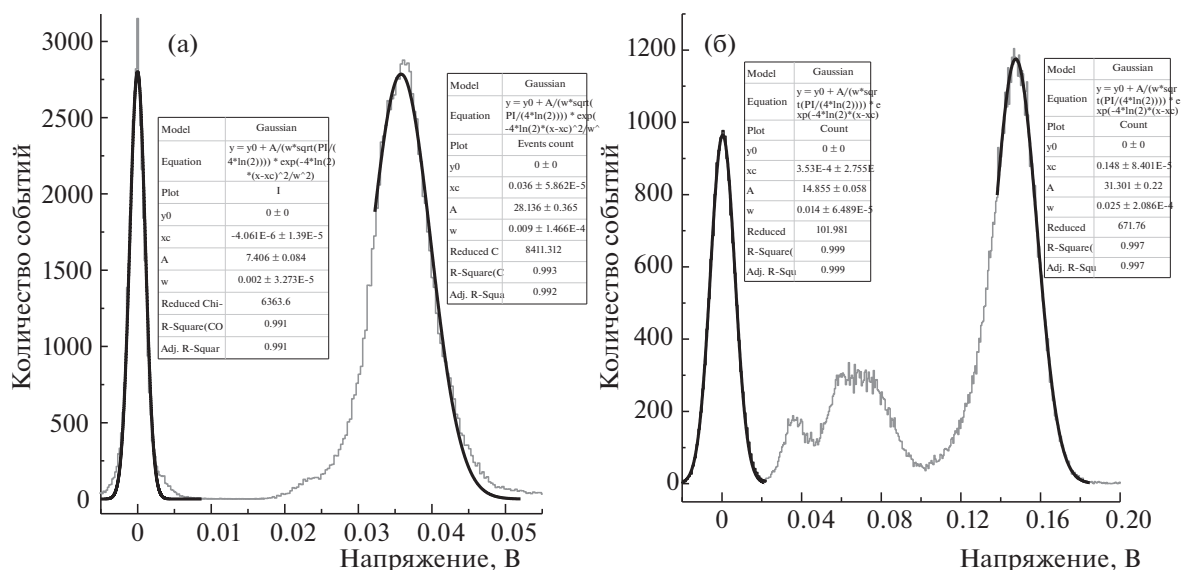


Рис. 9. Спектры ^{241}Am (59.6 кэВ) для MAROC3 (9a) и SLOSIC (9б).

Используя полученные значения коэффициентов, было вычислено энергетическое разрешение для $E_\gamma = 140.5$ кэВ и результаты представлены в таблице. Полученное разрешение для MAROC3 согласуется с представленным в работе [15]. Наличие в SLOSIC встроенного интегратора, позволяющего собрать примерно 96% фотонов, по сравнению с примерно 40% для MAROC3, обеспечивает лучшее энергетическое разрешение в районе энергии 140 кэВ, где статистика фотонов вносит большой вклад в полное разрешение системы.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках работы по Мегагранту 14.A12.31.0006 (от 24.06.2013) был разработан и изготовлен прототип аналоговой фронтэнд электроники для использования с SiPM и медленными сцинтилляторами типа NaI(Tl). Для тестирования прототипа SLOSIC был собран тестовый стенд и разработано программное обеспечение. Были проведены измерения отклика SLOSIC на сигнал от генератора точной амплитуды и сигнал от отдельного SiPM. Кроме того, были проведены измерения с

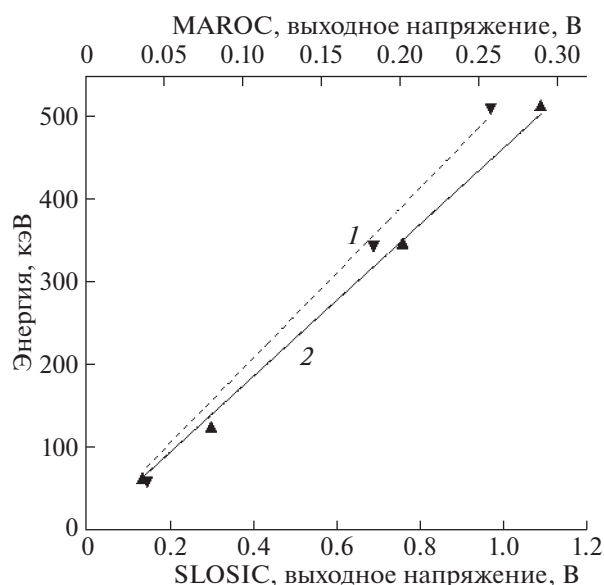


Рис. 10. Калибровочная зависимость. 1 – SLOSIC, 2 – MAROC3.

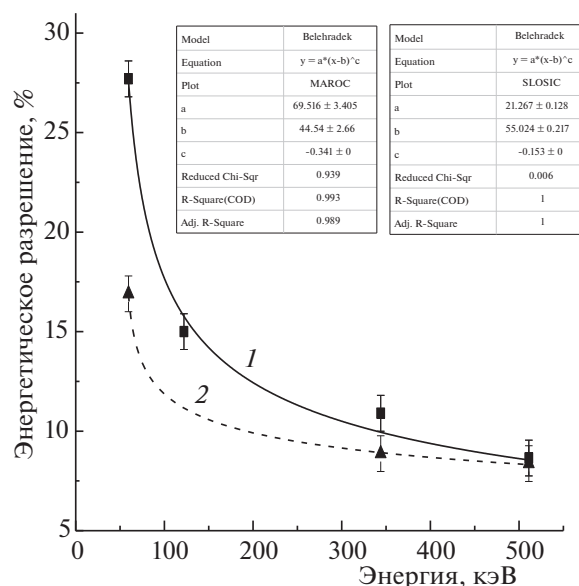


Рис. 11. График зависимости энергетического разрешения от энергии гамма-кванта. 1 – MAROC3 и 2 – SLOSIC.

гамма-детектором на основе кристалла NaI(Tl) и матрицы SiPM в диапазоне энергии от 60 до 511 кэВ. Измерения показали, что с использованием прототипа SLOSIC может быть достигнуто энергетическое разрешение, удовлетворяющее требованиям современных гамма-камер.

Данная микросхема также может быть использована для построения многоканальных систем в таких областях как ядерная физика, досмотровая техника и дозиметрия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wernick M.N., Aarsvold J.N.* Emission Tomography – The Fundamentals of PET and SPECT. Elsevier Academic Press, 2004.
2. *Popova E.V., Berdnikov V.V., Belyaev V.N. et al.* SiPM MEPhI Megagrant Developments in Nuclear Medicine // *Physics Procedia*, 2015. V. 74. P. 36–43. <https://doi.org/10.1016/j.phpro.2015.09.189>
3. <https://www.weeroc.com/my-weeroc/download-center/citiroc-1a/1-citiroc-1a-one-sheet-description>
4. <https://www.weeroc.com/my-weeroc/download-center/petiroc-2a/2-petiroc-2a-one-sheet-description>
5. <https://www.weeroc.com/products/sipm-read-out/triroc-1a>
6. <https://www.weeroc.com/my-weeroc/download-center/maroc-3a/4-maroc-3a-one-sheet-description>
7. <https://www.weeroc.com/my-weeroc/download-center/catiroc-1/5-catiroc-1-one-sheet-description>
8. https://www.petsyselectronics.com/web/web-site/docs/products/product1/Flyer_ASIC2_V15.pdf
9. <https://ideas.no/products/va32hdr14-3/>
10. <https://ideas.no/products/ide3160-2/>
11. <https://ideas.no/products/ide3380/IDE3380 SIPHRA>
12. <https://ideas.no/products/vata64hdr16-2/>
13. *Бочаров Ю.И., Бутузов В.А., Симаков А.Б.* Специализированная интегральная микросхема для съема и аналоговой обработки сигналов матриц кремниевых фотоэлектронных умножителей // *ПТЭ*, 2017. № 6. С. 23–34. <https://doi.org/10.1016/j.phpro.2015.09.189>
14. <https://www.xfab.com/about-x-fab/>
15. *Morozov A., Solovov V., Alves F. et al.* Iterative reconstruction of detector response of an Anger gamma camera // *Physics in Medicine and Biology*, 2015. V. 60. № 10. P. 4169–4184. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/60/10/4169>
16. www.ketek.net/
17. <https://www.hirose.com/product/document?cl-code=&productname=&series=DF17&documenttype=Catalog&lang=en&documentid=D49657>
18. <https://www.weeroc.com/my-weeroc/download-center/maroc-3a/4-maroc-3a-one-sheet-description/file>
19. *Scott D.W.* Sturges' rule // *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, 2009. V. 1. № 3. P. 303–306. <https://doi.org/10.1002/wics.35>
20. *Sturges H.A.* The Choice of a Class Interval // *Journal of the American Statistical Association*, 1926. V. 21. № 153. P. 65–66. <https://doi.org/10.1080/01621459.1926.10502161>
21. *Freedman D., Diaconis P.* On the histogram as a density estimator: L 2 theory // *Zeitschrift Fur Wahrscheinlichkeitstheorie Und Verwandte Gebiete*, 1981. V. 57. P. 453–476. <https://doi.org/10.1007/bf01025868>
22. *Birgé L., Rozenholc Y.* How many bins should be put in a regular histogram // *ESAIM: Probability and Statistics*, 2006. V. 10. P. 24–45. <https://doi.org/10.1051/ps:2006001>
23. ГОСТ 26874-86. Спектрометры энергий ионизирующих излучений. Методы измерения основных параметров (с Изменениями № 1, 2).
24. <https://www.originlab.com/doc/Origin-Help/Gaussian-Function-FitFunc>

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 4, pp. 357–367

Application of the Multichannel Front-End Chip for SiPM-Based Gamma Detectors

A. C. Chergui^{a, #}, O. V. Bychkova^a, E. V. Popova^a, and A. A. Stifutkin^a

^a *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

[#] *e-mail: cherguicherif@hotmail.com*

Received July 17, 2020; revised October 6, 2020; accepted October 12, 2020

Abstract—The prototype of a multichannel application specific integrated circuit (ASIC) designed at the National Research Nuclear University MEPhI as a front-end part of the gamma-detection systems utilizing “slow” scintillators such as NaI(Tl) or CsI(Tl) readout by Silicon Photomultipliers has been tested. The measurements have been carried on using a specially developed electronic test-board and a software package written in LABVIEW. The gamma-detector module includes a NaI(Tl) scintillator crystal and a matrix of SiPM PM6600 (KETEK) as a photosensor part. The system energy resolution (FWHM) has been measured to be $(16.9 \pm 0.9)\%$ for 59.5 keV gamma rays. For comparison, the same measurements have been replicated using the analog part of the multichannel ASIC MAROC3 with observed energy resolution $(27.7 \pm 0.9)\%$.

Keywords: SIPM, PMT, MAROC, LABVIEW, MRI

DOI: 10.1134/S2304487X20040094

REFERENCES

1. Wernick M.N., Aarsvold J.N. Emission Tomography – The Fundamentals of PET and SPECT. Elsevier Academic Press, 2004.
2. Popova E.V., Berdnikov V.V., Belyaev V.N. et al. SiPM MEGAPhI Megagrant Developments in Nuclear Medicine. *Physics Procedia*, 2015. Vol. 74, pp. 36–43. doi:10.1016/j.phpro.2015.09.189
3. <https://www.weeroc.com/my-weeroc/download-center/citiroc-1a/1-citiroc-1a-one-sheetdescription>
4. <https://www.weeroc.com/my-weeroc/download-center/petiroc-2a/2-petiroc-2a-one-sheetdescription>
5. <https://www.weeroc.com/products/sipm-read-out/triroc-1a>
6. <https://www.weeroc.com/my-weeroc/download-center/maroc-3a/4-maroc-3a-one-sheetdescription>
7. <https://www.weeroc.com/my-weeroc/download-center/catiroc-1/5-catiroc-1-one-sheetdescription>
8. https://www.petsyselectronics.com/web/web-site/docs/products/product1/Flyer_ASIC2_V15.pdf
9. <https://ideas.no/products/va32hdr14-3/>
10. <https://ideas.no/products/ide3160-2/>
11. <https://ideas.no/products/ide3380/> IDE3380 SIPHRA
12. <https://ideas.no/products/vata64hdr16-2/>
13. Bocharov Y.I., Butuzov V.A., Simakov A.B. Application of a specific integrated circuit for readout and analog processing of signals from silicon multiplier arrays. *Instruments and Experimental Techniques*, 2017. Vol. 60, no. 6, pp. 800–810.
14. <https://www.xfab.com/about-x-fab/>
15. Morozov A., Solovov V., Alves F. et al. Iterative reconstruction of detector response of an Anger gamma camera. *Physics in Medicine and Biology*, 2015. Vol. 60, no. 10, pp. 4169–4184. doi:10.1088/00319155/60/10/4169
16. www.ketek.net/
17. <https://www.hirose.com/product/document?cl-code=&productname=&series=DF17&documenttype=Catalog&lang=en&documentid=D49657>
18. <https://www.weeroc.com/my-weeroc/download-center/maroc-3a/4-maroc-3a-one-sheetdescription/file>
19. Scott D.W. Sturges' rule. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, 2009. Vol. 1, no. 3, p. 303–306. doi:10.1002/wics.35
20. Sturges H.A. The Choice of a Class Interval. *Journal of the American Statistical Association*, 1926. Vol. 21, no. 153, pp. 65–66. doi:10.1080/01621459.1926.10502161
21. Freedman D., Diaconis P. On the histogram as a density estimator: L 2 theory. *Zeitschrift Fur Wahrscheinlichkeitstheorie Und Verwandte Gebiete*, 1981. Vol. 57, pp. 453–476. doi:10.1007/bf01025868
22. Birgé L., Rozenholc Y. How many bins should be put in a regular histogram. *ESAIM: Probability and Statistics*, 2006. Vol. 10, pp. 24–45. doi:10.1051/ps:2006001
23. GOST 26874–86. Spektrometryenergii ioniziruiuch'h izluchenii. Metody izmereniiia osnovnyh parametrov. [State Standard 26874–86. Ionizing radiation power spectrometers. Methods of basic parameters measurement]. Moscow, 1987. 35 p.
24. <https://www.originlab.com/doc/Origin-Help/Gaussian-Function-FitFunc>

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ УДЕЛЬНЫХ ДИСКОНТИРОВАННЫХ ЗАТРАТ НА ПРОИЗВОДСТВО ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ НА АЭС С РАЗЛИЧНЫМИ ТИПАМИ ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ

© 2020 г. Д. В. Ковганко^{1,*}, А. А. Андрианов^{2,**}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

² Обнинский институт атомной энергетики НИЯУ МИФИ, Обнинск, 249034, Россия

*e-mail: d_kovganko@mail.ru

**e-mail: andreyandrianov@yandex.ru

Поступила в редакцию 19.05.2020 г.

После доработки 02.07.2020 г.

Принята к публикации 22.09.2020 г.

В статье приводятся результаты прогнозирования удельных дисконтированных затрат на производство электроэнергии на АЭС с различными типами ядерных реакторов с учетом неопределенности в стоимостных данных по сооружению и эксплуатации реакторных установок, а также по товарам и услугам топливного цикла. Рассмотрены три типа тепловых реакторов, работающих в открытом топливном цикле, и четыре варианта быстрых реакторов, функционирующих в замкнутом уран-плутониевом топливном цикле. По результатам оценки удельных дисконтированных затрат с учетом неопределенности в их значениях, обусловленных разбросом в стоимостных данных, сделан вывод, что нельзя сделать однозначное суждение о наибольшей привлекательности той или иной концепции быстрых реакторов, опираясь только на анализ удельных дисконтированных затрат, а также некорректно делать категорические утверждения о более низкой экономической эффективности и конкурентоспособности быстрых реакторов по сравнению с тепловыми реакторами.

Ключевые слова: удельные дисконтированные затраты, АЭС, ядерный топливный цикл, тепловые реакторы, быстрые реакторы, неопределенность

DOI: 10.1134/S2304487X20040033

1. ВВЕДЕНИЕ

Оценка экономической эффективности ядерных энерготехнологий, основанная на показателе удельных дисконтированных затрат (LCOE от англ. levelised cost of electricity), получила наибольшее распространение в связи с ее простотой, наименьшим объемом требуемых для ее проведения исходных данных, а также возможностью дать четкую экономическую интерпретацию данному показателю. В частности, на основе данного показателя построена методология экономической оценки для реакторных систем четвертого поколения и методология ИНПРО/МАГАТЭ в области “Экономика”, включая соответствующие аналитические инструменты оценки экономической эффективности G4-ECONS и NEST [1–3]. Также известны многочисленные модификации данного подхода, позволяющие учесть неопределенность параметров модели.

В рамках данного подхода для количественной оценки экономической эффективности и ранжирования проектов используется показатель удельных дисконтированных затрат на производство

электроэнергии (также известны названия — тариф безубыточности, уравновешенная себестоимость производства электроэнергии и ряд других). Данный показатель определяет такой постоянный тариф на продаваемую электроэнергию, при котором суммарная дисконтированная выручка от продажи энергии точно равна сумме дисконтированных общих затрат:

$$LCOE = \sum_{t=T_0}^{T_2} \frac{R_t}{(1+d)^t} / \sum_{t=T_1}^{T_2} \frac{W_t}{(1+d)^t}, \quad (1.1)$$

где R_t — текущие денежные расходы в моменты времени t , W_t — текущая энерговыработка, d — норма дисконтирования, T_1 — длительность строительства, лет, T_2 — длительность жизненного цикла проекта, лет.

Экономическая интерпретация показателя LCOE подразумевает, что при тарифе LCOE на жизненном цикле АЭС суммарная выручка от продажи электроэнергии равна суммарным полным затратам, т.е. доход собственника АЭС равен нулю. Очевидно, что при сравнении и ранжиро-

вании проектов АЭС по экономическому показателю предпочтение отдается тому проекту, у которого значение данного показателя окажется минимальным.

В настоящей работе выполняется оценка *LCOE* для АЭС с различными типами ядерных реакторов с учетом неопределенности в стоимостных данных по сооружению и эксплуатации реакторных установок, а также по товарам и услугам ядерного топливного цикла (ЯЭС) [4].

2. РАССМОТРЕННЫЕ ВАРИАНТЫ ТЕПЛОВЫХ И БЫСТРЫХ РЕАКТОРОВ

Рассмотрены три типа тепловых реакторов (LWR, HWR и ALWR), работающих в открытом ЯТЦ (две опции обращения с отработавшим ядерным топливом (ОЯТ): долговременное хранение ОЯТ в централизованном хранилище и окончательное геологическое захоронение ОЯТ), и четыре варианта быстрых реакторов (FR-1, FR-2, AFR и FR-U), функционирующих в замкнутом уран-плутониевом ЯТЦ. Основные технические характеристики реакторов, включая данные о составе свежего и отработавшего топлива, приведены в [5, 6].

LWR — реактор типа PWR со средним выгоранием 45 ГВт дней/т тм, обогащением топлива 4%, удельной энергонапряженностью активной зоны 38.5 МВт/т и КИУМ 85%.

ALWR — это усовершенствованный LWR с высоким выгоранием топлива. Равновесная загрузка топлива в ALWR на 30% меньше, чем в LWR. Это объясняется более длительным временем пребывания топлива в активной зоне и более высоким средним уровнем выгорания, несмотря на то, что у ALWR полная загрузка активной зоны на 10% больше, чем у LWR вследствие меньшей удельной энергонапряженности активной зоны. Меньшая ежегодная потребность в топливе ALWR делает его более экономически привлекательным, чем LWR. Начальное обогащение топлива составляет 3.4%, равновесное обогащение топлива — 4.95%.

HWR — тяжеловодный водо-водяной ядерный реактор со средним выгоранием 7 ГВт дней/т тм, топливо на основе природного урана, удельная энергонапряженность активной зоны — 24.0 МВт/т, КИУМ — 85%.

FR-1 — реактор на быстрых нейтронах с натриевым теплоносителем, имеющий коэффициент воспроизводства близкий к 1 и средним (активная зона и бланкеты) выгоранием топлива ~38 ГВт дней/т тм.

FR-2 — прототип быстрого реактора-размножителя с натриевым теплоносителем со средним коэффициентом воспроизводства 1.16 и средним

(активная зона и бланкеты) выгоранием топлива ~31 ГВт дней/т тм.

AFR — коммерческий реактор на быстрых нейтронах с натриевым теплоносителем со средним коэффициентом воспроизводства 1.2 и средним (активная зона и бланкеты) выгоранием топлива — 54 ГВт дней/т тм. В отличие от FR-1 и FR-2, свежее топливо для AFR содержит около 1% минорных актинидов (МА).

FR-U — концепция быстрого реактора со свинцовым теплоносителем, в котором используется обогащенное урановое топливо (обогащение около 15% по ^{235}U) для стартовой загрузки активной зоны и первых перегрузок, предполагается последующая переработка ОЯТ и использование вторичного ядерного топлива (Pu + U + МА). Бланкет не предусмотрен. Коэффициент воспроизводства — 1.05, выгорание ~72.8 ГВт дней/т тм.

Исходные технические данные по реакторным установкам (тепловая мощность, КПД, КИУМ, период строительства, выгорание топлива и т.д.) можно найти в [5, 6]. Для тепловых реакторов были рассмотрены два варианта обращения с ОЯТ: захоронение ОЯТ в глубоких геологических формациях после 5 лет охлаждения и хранение ОЯТ в бассейнах выдержки и централизованном хранилище в течение всего жизненного цикла.

3. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Оценка показателей экономической эффективности АЭС с различными типами ядерных реакторов требует набора стоимостных исходных данных по добыче, конверсии, обогащению урана, изготовлению топлива, хранению, переработке, окончательному захоронению ОЯТ и РАО, а также по капитальным затратам и затратам на эксплуатацию и техническое обслуживание АЭС. В табл. 1 приведен актуальный разброс в данных о единовременных удельных капитальных затратах, затратах на эксплуатацию и техническое обслуживание тепловых и быстрых реакторов. В табл. 2 показан разброс в стоимостных данных по различным пределам ЯТЦ. При проведении оценки предполагалось, что все затраты распределены равномерно в указанных пределах. Таблицы подготовлены на основе данных, представленных в работе [4]. Ставка дисконтирования была принята равной 5%.

4. СРАВНЕНИЕ LCOE И ЕГО СОСТАВЛЯЮЩИХ

Удельные дисконтированные затраты *LCOE* (милль¹/кВт ч) включают в себя три составляю-

¹ Милль — производная денежная единица, равная одной тысячной доле доллара и, соответственно, одной десятой доле цента.

Таблица 1. Единовременные удельные капитальные затраты и затраты на эксплуатацию и техническое обслуживание

Аспект	Единица измерения	Тип реактора	Диапазон
Единовременные удельные капитальные затраты	\$/кВт(е)	LWR	2500–6300
		HWR	2400–6100
		FR	2400–7600
Постоянные затраты на эксплуатацию и техническое обслуживание	\$/кВт/год	LWR	60–87
		HWR	60–87
		FR	65–92
Переменные затраты на эксплуатацию и техническое обслуживание	\$/кВт/ч	LWR	0.8–2.7
		HWR	0.8–2.7
		FR	1.1–2.9

Таблица 2. Стоимость товаров и услуг по переделам ЯТЦ

Этап ЯТЦ	Единица измерения	Диапазон
Добыча/переработка урана	\$/кг U	34–296
Конверсия урана	\$/кг U	6.5–19
Обогащение урана	\$/кг EPP	97–154
Изготовление топлива для LWR (UOX)	\$/кг тм	230–575
Изготовление топлива для HWR (UOX)	\$/кг тм	125–327
Изготовление топлива для FR (МОКС, а.з.)	\$/кг тм	2700–7600
Изготовление топлива для FR (бланкет)	\$/кг тм	270–690
Изготовление топлива для FR (урана)	\$/кг тм	500–1240
Изготовление топлива для LWR (UOX)	\$/кг тм	610–1250
Переработка ОЯТ для HWR (UOX)	\$/кг тм	610–1250
Переработка ОЯТ для FR (МОКС, а.з.)	\$/кг тм	900–2500
Переработка ОЯТ для FR (бланкет)	\$/кг тм	900–2500
Хранение ОЯТ LWR	\$/кг тм в год	5–10
Хранение ОЯТ HWR	\$/кг тм в год	5–10
Хранение ОЯТ FR	\$/кг тм в год	7–12
Захоронение ОЯТ LWR	\$/кг тм	289–873
Захоронение ОЯТ HWR	\$/кг тм	289–873
Хранение плутония	\$/кг Pu в год	2280–3762

щих: составляющую, связанную с капитальными затратами (*LUAC*), составляющую, связанную с ежегодными затратами на эксплуатацию и техническое обслуживание (*LUOM*), и составляющую, связанную с расходами на изготовление свежего топлива и обращение с ОЯТ (*LUFC*):

$$LCOE = LUAC + LUOM + LUFC.$$

В настоящей работе *LCOE* и его составляющие были рассчитаны с учетом неопределенности в основных стоимостных данных, используемых при оценке удельных дисконтированных затрат согласно табл. 1 и 2.

Одним из популярных в последнее время подходов к анализу неопределенностей является

применение статистических методов, предполагающих задание исходных неопределенностей в виде случайных величин с известным законом распределения (метод Монте-Карло) [7, 8]. Данная методика основана на реализации следующего алгоритма: определение набора входных параметров, влияющих на неопределенность результирующего функционала, формирование наборов исходных входных данных путем случайного выбора значений входных параметров, выполнение расчетов интересующих функционалов, статистическая обработка результатов расчетов и определение оценок статистических характеристик распределений результирующих функционалов.

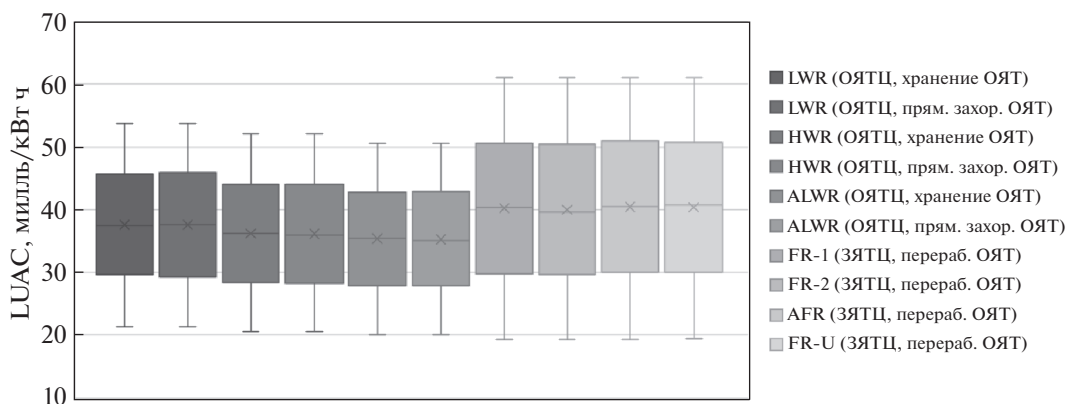


Рис. 1. Разброс в LUAC.

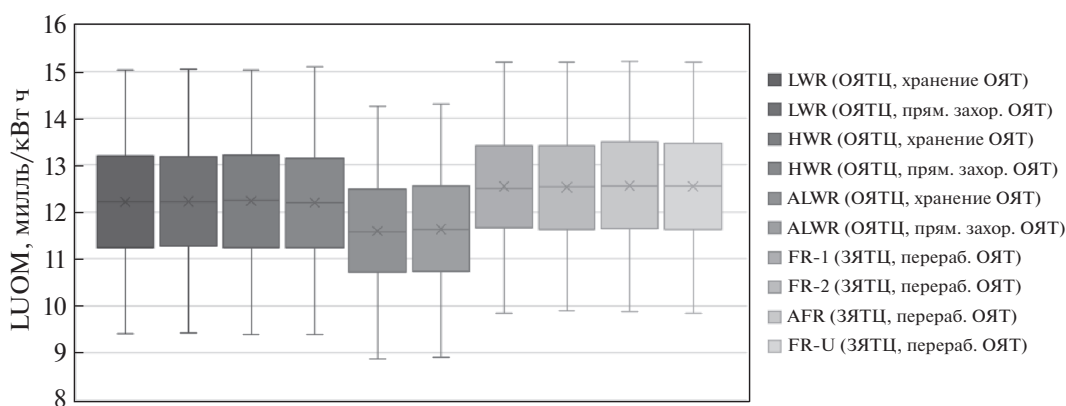


Рис. 2. Разброс в LUOM.

Представляется целесообразным изображать неопределенности в $LCOE$ с использованием диаграммы размаха. Диаграммы размаха (“ящик с усами”) — это удобный способ визуального представления групп числовых данных через квартили [9]. Прямые линии, исходящие из ящика, называются “усами” и используются для обозначения максимального наблюдаемого разброса за пределами верхнего и нижнего квартилей. Границами “ящика” служат первый и третий квартили (25-й и 75-й процентили соответственно), линия в середине “ящика” — медиана (50-й процентиль). Концы “усов” — края статистически значимой выборки, и они могут определяться несколькими способами. Наиболее распространённые значения, определяющие длину “усов”: минимальное и максимальное наблюдаемые значения данных по выборке, а также 5-й и 95-й проценти. Данные, выходящие за границы “усов” (выбросы), могут отображаться на графике в виде точек. Иногда на графике отмечают среднее арифметическое и его доверительный интервал.

На основе данных, приведенных в табл. 1 и 2, произведены расчеты $LUAC$, $LUOM$, $LUFC$ и $LCOE$. При оценке вероятных значений $LCOE$ и ее составляющих методом Монте-Карло для обеспечения статистической значимости результатов было сгенерировано 10 000 вариантов входных стоимостных данных.

Рис. 1–4 демонстрируют диаграммы размаха для $LUAC$, $LUOM$, $LUFC$ и $LCOE$, на которых изображены средние значения, 25-й, 50-й и 75-й проценти, минимальные и максимальные значения. В табл. 3 приведены соответствующие данные в виде средних значений, абсолютных и относительных неопределенностей (1σ) для рассматриваемых вариантов.

Анализ данных, представленных в табл. 3 и на рис. 1–4, позволяет сделать следующие заключения касательно $LUAC$, $LUOM$, $LUFC$ и $LCOE$ для рассмотренных технологических вариантов. Разница между максимальными и минимальными средними значениями $LUAC$, $LUOM$, $LUFC$ и $LCOE$ для рассматриваемых вариантов составляет 5.2, 1.0, 10.9 и 13.4 милли/кВт ч соответственно, а

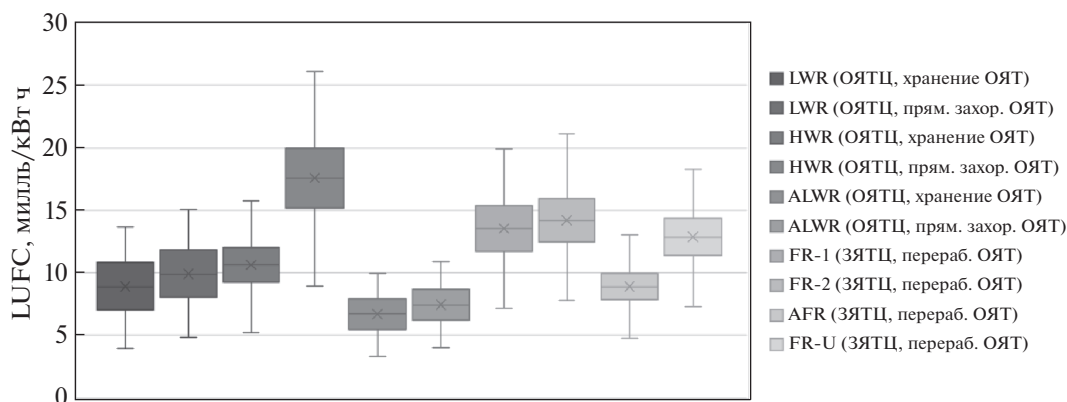


Рис. 3. Разброс в LUFC.

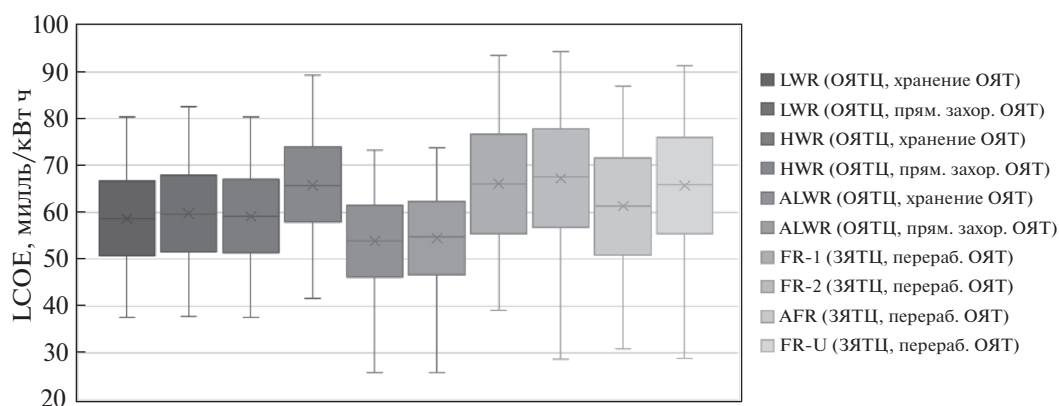


Рис. 4. Разброс в LCOE.

все средние значения $LCOE$ и его составляющих (исключая $LUFC$) для всех вариантов лежат в соответствующих диапазонах неопределенности. Относительные неопределенности для $LCOE$ и всех его компонентов (за исключением $LUFC$) сопоставимы друг с другом. Из всех компонентов $LCOE$ значения $LUAC$ характеризуются наибольшими относительными неопределенностями (27%), а относительные неопределенности $LUOM$ — наименьшие (10%). Относительные неопределенности для $LCOE$ составляют около 17%. Несмотря на то, что относительные неопределенности $LUFC$ для различных технологических опций не могут рассматриваться как сопоставимые друг с другом (они охватывают диапазон от 16 до 25% для различных вариантов), $LUFC$ не вносит заметного вклада в неопределенности $LCOE$.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Оценка вероятных значений $LCOE$ для различных тепловых и быстрых реакторов показывает, что разброс возможных значений $LCOE$ для различных типов быстрых реакторов оказывается

сравнимым и в значительной степени перекрывается с разбросом значений $LCOE$ для тепловых реакторов (главным образом для HWR и LWR, и в меньшей степени для ALWR). Это говорит о том, что, основываясь на оценках $LCOE$, учитывая неопределенность их значений, вызванную разбросами в стоимостных данных по переделам ЯТЦ, затратах на строительство, эксплуатацию и техническое обслуживание АЭС, невозможно сделать однозначный вывод о наибольшей привлекательности какой-либо концепции реактора на быстрых нейтронах, опираясь только на показатель $LCOE$, а также некорректно делать однозначные утверждения о худших экономических показателях реакторов на быстрых нейтронах по сравнению с тепловыми реакторами. Это, в частности, обусловлено также хорошо известными ограничениями $LCOE$ как показателя, характеризующего экономическую эффективность и конкурентоспособность энерготехнологий [10].

Во-первых, $LCOE$ предназначен для оценки экономической эффективности и конкурентоспособности энерготехнологий на уровне проек-

Таблица 3. LCOE и его компоненты

	LUAC			LUOM			LUFC			LCOE		
	Среднее значение, милль/кВт ч	Δ , милль/кВт ч	δ , %	Среднее значение, милль/кВт ч	Δ , милль/кВт ч	δ , %	Среднее значение, милль/кВт ч	Δ , милль/кВт ч	δ , %	Среднее значение, милль/кВт ч	Δ , милль/кВт ч	δ , %
LWR*	37.6	9.3	24.7	12.2	1.2	10.2	8.9	2.3	25.2	58.7	9.6	16.3
LWR**	37.6	9.5	25.2	12.2	1.2	10.0	9.9	2.3	23.0	59.8	9.8	16.3
HWR*	36.2	9.1	25.1	12.2	1.3	10.4	10.6	2.0	18.6	59.2	9.3	15.7
HWR**	36.2	9.1	25.3	12.2	1.2	10.2	17.6	3.2	18.1	65.8	9.8	14.8
ALWR*	35.4	8.8	24.8	11.6	1.2	10.1	6.7	1.5	22.2	53.8	9.0	16.6
ALWR**	35.3	8.7	24.7	11.6	1.2	10.1	7.5	1.5	19.9	54.5	9.1	16.6
FR-1	40.2	12.0	29.9	12.5	1.2	9.3	13.5	2.4	17.9	66.2	12.4	18.8
FR-2	40.0	12.1	30.2	12.5	1.2	9.3	14.2	2.4	16.8	67.3	12.4	18.4
AFR	40.4	12.1	29.9	12.6	1.2	9.4	8.9	1.5	16.7	61.4	12.1	19.8
FR-U	40.4	12.0	29.8	12.6	1.2	9.3	12.9	2.0	15.8	65.7	12.2	18.5

* — хранение ОЯТ в централизованном хранилище за пределами реакторного здания в течение всего жизненного цикла

** — окончательное захоронение ОЯТ в глубокие геологические формации после 5 лет охлаждения

та, а не на уровне энергосистемы, предполагающей комбинацию различных энерготехнологий и учет общесистемных связей и ограничений. *LCOE* не отражает каких-либо общесистемных последствий выбора конкретной технологии. *LCOE* имеет смысл использовать для сравнения альтернатив в рамках определенного класса технологий. Однако даже технологии в пределах такого класса могут иметь различные общесистемные последствия (например, вследствие различия установленных мощностей электростанций), с которыми могут быть сопряжены дополнительные затраты. Более общий подход к оценке экономической эффективности и конкурентоспособности энерготехнологий будет заключаться в изучении общесистемных последствий внедрения этой технологии в энергосистему. Такого рода анализ может быть выполнен с использованием программных комплексов энергетического планирования [11].

Второе ограничение, связанное с использованием показателя *LCOE*, состоит в том, что расчет данного показателя предполагает, что все исходные данные для его оценки учитываются корректно: в рассмотрение должны быть включены все прямые и косвенные затраты, которые будут возникать в процессе жизненного цикла энерготехнологии. Как правило, большинство косвенных затрат не могут быть включены в *LCOE*, поскольку их трудно выразить в денежном эквиваленте. В результате простое сравнение *LCOE* для различных технологий не сможет полностью отразить их общественную ценность: технология, которая предлагает большие общественные бла-

га, но является более дорогостоящей, будет менее привлекательной при сравнении с использованием оценки показателя *LCOE*. В этой связи представляется целесообразным привлекать альтернативные подходы к сравнению энерготехнологий и технологий топливного цикла, например, многокритериальный анализ, который позволяет компенсировать отмеченный недостаток подхода к сравнению на основе показателя *LCOE* [12].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оценка вероятных значений *LCOE* для различных тепловых и быстрых реакторов с учетом неопределенности в стоимостных данных демонстрирует, что разброс возможных значений *LCOE* для различных типов быстрых реакторов оказывается сопоставимым между собой, и он в значительной мере перекрывается с разбросом в *LCOE* для тепловых реакторов (прежде всего для HWR и LWR, в меньшей степени для ALWR). Это говорит о том, что по результатам оценки *LCOE* с учетом неопределенности в их значениях нельзя сделать однозначный вывод о наибольшей привлекательности той или иной концепции быстрых реакторов, опираясь только на анализ *LCOE*, а также некорректно делать утверждения о более низкой экономической эффективности быстрых реакторов по сравнению с тепловыми реакторами. Поскольку все рассмотренные варианты ядерных энерготехнологий, как оказалось, имеют сопоставимую экономическую эффективность по показателю *LCOE*, то для определения их возможно-

го места в системе ядерной энергетики будущего требуется построение модели ядерно-энергетической системы, в которой также бы учитывались множественные ресурсные и инфраструктурные факторы и ограничения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. IAEA. INPRO Methodology for Sustainability Assessment of Nuclear Energy Systems: Economics / IAEA Nuclear Energy Series // No. NG-T-4.4, Vienna, 2014.
2. Cost estimating guidelines for GENERATION IV nuclear energy systems. Revision 4.2 / September 26, 2007.
3. IAEA. Technical Reports Economic Evaluation of Bids for Nuclear Power Plants. Series. No 396. 224 p. Vienna. 2000.
4. Advanced Fuel Cycle Cost Basis – 2017 Edition, INL/EXT-17-43826. 2017.
5. INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY, Framework for Assessing Dynamic Nuclear Energy Systems for Sustainability, Final Report of the INPRO Collaborative Project on Global Architectures of Innovative Nuclear Energy Systems with Thermal and Fast Reactors and a Closed Nuclear Fuel Cycle (GAINS), IAEA Nuclear Energy Series NP-T-1.14. 2013.
6. INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY, Nuclear energy development in the 21st century: global scenarios and regional trends, IAEA Nuclear Energy Series NP-T-1.8. 2010.
7. Андрианов А.А., Коровин Ю.А., Купцов И.С., Муротов В.М., Андрианова О.Н. К вопросу об учете экономических рисков при сравнительном анализе ядерных технологий различной степени зрелости // Известия вузов. Ядерная энергетика. 2017. № 1. С. 156–168.
8. Андрианов А.А., Андрианова О.Н., Купцов И.С., Осипова Т.А. // Известия вузов. Ядерная энергетика. 2018. № 4. С. 89–101.
9. https://datavizcatalogue.com/RU/metody/diagramma_razmaha.html дата доступа: 13.03.20
10. <https://www.sparklibrary.com/9-reasons-why-lcoe-can-mislead/> дата доступа: 10.02.20
11. Expansion Planning for Electrical Generating Systems: A Guidebook. Technical Reports Series No. 241, Vienna. 1984.
12. Kuznetsov V., Fesenko G., Schwenk-Ferrero A., Andrianov A., Kuptsov I. Innovative Nuclear Energy Systems: State-of-the Art Survey on Evaluation and Aggregation Judgment Measures Applied to Performance Comparison. Energies. 2015. № 8. С. 3679–3719.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 4, pp. 368–375

Prediction of the Levelized Cost of Electricity for Nuclear Power Plants with Different Nuclear Reactors

D. V. Kovganko^{a, #} and A. A. Andrianov^{b, ##}

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

^b Obninsk Institute for Nuclear Power Engineering, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Obninsk, 249033 Russia

[#]e-mail: d_kovganko@mail.ru

^{##}e-mail: andreyandrianov@yandex.ru

Received May 19, 2020; revised July 2, 2020; accepted September 22, 2020

Abstract—The levelized cost of electricity for nuclear power plants with different types of nuclear reactors has been predicted taking into account the uncertainty in the cost data on the construction and operation of reactor facilities, as well as the uncertainty in the cost data on fuel cycle products and services. Three types of thermal reactors operating in the once-through fuel cycle are considered (two options of spent fuel management are analyzed including the long-term storage of spent fuel at the away-from-reactor storage facility and final geological disposal of spent fuel), as well as four types of fast reactors operating in a closed uranium–plutonium fuel cycle. The estimation of probable LCOE values for various thermal and fast reactor technologies shows that the spread in possible LCOE values for different types of fast reactors turns out to be comparable and largely overlaps with the spread in LCOE values for thermal reactors. This suggests that, based on the LCOE estimations, taking into account the uncertainty in their values caused by the spreads in fuel cycle unit service cost and costs for the construction, operation and maintenance of nuclear power plants, it is impossible to make an unequivocal conclusion about the greatest attraction of any fast reactor concept, relying only on the LCOE analysis, and it is also incorrect to make statements about the lower economic performance of fast reactors as compared to thermal reactors: the corresponding statements should be considered solely as probabilistic ones.

Keywords: leveled cost of electricity, nuclear power, nuclear fuel cycle, thermal reactors, fast reactors, uncertainty

DOI: 10.1134/S2304487X20040033

REFERENCES

1. IAEA. INPRO Methodology for Sustainability Assessment of Nuclear Energy Systems: Economics / IAEA Nuclear Energy Series // No. NG-T-4.4, Vienna, 2014.
2. Cost estimating guidelines for GENERATION IV nuclear energy systems. Revision 4.2 / September 26, 2007.
3. IAEA. Technical Reports Economic Evaluation of Bids for Nuclear Power Plants. Series No 396, p. 224, Vienna (2000).
4. Advanced Fuel Cycle Cost Basis – 2017 Edition, INL/EXT-17-43826, 2017.
5. INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY, Framework for Assessing Dynamic Nuclear Energy Systems for Sustainability, Final Report of the INPRO Collaborative Project on Global Architectures of Innovative Nuclear Energy Systems with Thermal and Fast Reactors and a Closed Nuclear Fuel Cycle (GAINS), IAEA Nuclear Energy Series NP-T-1.14 (2013).
6. INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY, Nuclear energy development in the 21st century: global scenarios and regional trends, IAEA Nuclear Energy Series NP-T-1.8 (2010).
7. Andrianov A.A., Korovin Yu.A., Kuptsov I.S., Murogov V.M., Andrianova O.N. K voprosu ob uchete ekonomicheskikh riskov pri sravnitel'nom analize yadernykh tekhnologiy razlichnoy stepeni zrelosti [Comparative evaluation of nuclear reactor technologies of different maturity levels on economic risk measures]. *Izvestiya vuzov. Yadernaya Energetika*, 2017, vol. 1, pp. 156–168 (in Russian).
8. Andrianov A.A., Kuptsov I.S., Osipova T.A., Andrianova O.N. Sravnitel'nyy analiz investitsionnoy privlekatel'nosti energoblokov AES na baze reaktornykh moduley maloy i sredney moshchnosti i reaktora bol'shoi moshchnosti [Comparative analysis of the investment attractiveness of nuclear power plant concepts based on small and medium sized reactor modules and a large nuclear reactor], *Izvestiya vuzov. Yadernaya Energetika*, 2018, no. 4, pp. 89–101 (in Russian).
9. https://datavizcatalogue.com/RU/metody/diagramma_razmaha.html (accessed 13.03.20)
10. <https://www.sparklibrary.com/9-reasons-why-lcoe-can-mislead/> (accessed 10.02.20)
11. Expansion Planning for Electrical Generating Systems: A Guidebook. Technical Reports Series No. 241, Vienna (1984).
12. Kuznetsov V., Fesenko G., Schwenk-Ferrero A., Andrianov A., Kuptsov I. Innovative Nuclear Energy Systems: State-of-the Art Survey on Evaluation and Aggregation Judgment Measures Applied to Performance Comparison. *Energies*, 2015, no. 8, pp. 3679–3719.

УДК 004.032.26

ОБРАБОТКА НЕСТРУКТУРИРОВАННОЙ ТЕКСТОВОЙ ИНФОРМАЦИИ С ПОМОЩЬЮ АЛГОРИТМОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

© 2020 г. И. А. Лисенков^{1,*}, В. А. Кузнецов¹, Н. М. Леонова¹

¹ Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

*e-mail: ivan.lisenkov@gmail.com

Поступила в редакцию 07.09.2020 г.

После доработки 07.09.2020 г.

Принята к публикации 12.10.2020 г.

Объем документов, которые обрабатываются в ходе операционных процессов организации, растет с каждым годом. В результате возникает острая потребность в автоматической обработке подобной информации. К сожалению, значительная часть подобных документов является неструктурированной. Форматы неструктурированных документов очень вариативны и сильно отличаются от документа к документу. В этом случае автоматизация, с помощью разработки правил и шаблонов извлечения данных, сложна и неэффективна для последующей поддержки. На практике подобные документы обрабатываются вручную, но это отнимает много времени и ресурсов. В данной работе представлена общая архитектура системы извлечения информации, основанной на современных подходах обработки естественного языка (Natural Language Processing – NLP) и машинного обучения. В статье приведены статистические результаты проведенных экспериментов решения ряда практических задач обработки неструктурированных документов. Представленное решение позволяет обрабатывать большое количество неструктурированной информации без написания кода и подготовки шаблонов синтаксического анализа.

Ключевые слова: извлечение информации, обработка естественного языка, машинное обучение, неструктурированная информация

DOI: 10.1134/S2304487X20040057

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время мы повсеместно наблюдаем тенденцию к цифровизации процессов в практически всех сферах деятельности, которая позволяет повысить производительность труда и эффективность производственных процессов. Поэтому большинство организаций стремится уйти от физических бумажных документов к цифровым, и от документов в произвольном формате к формализованным записям: программным интерфейсам (API) или смарт-контрактам [1]. К сожалению, полностью перейти к работе с документами в электронном виде, по крайней мере на данный момент, невозможно. Далеко не все люди, вовлеченные в производство, обеспечены цифровыми устройствами или могут эффективно работать с ними. Кроме этого, принимая во внимание соображения безопасности и существующее законодательство, принятое в большинстве стран, большая часть заключаемых финансовых операций между организациями должна быть продублирована в бумажном виде. Как следствие,

большинство крупных организаций и государственные учреждения создают инфраструктуру для поточной обработки и перевода в электронный вид входящих бумажных документов. Согласно [2], можно выделить следующие типовые компоненты данной инфраструктуры:

1. Поточный сканер документов;
2. ПО оптические распознавания текста (OCR);
3. Интеграционный слой (шлюз);
4. Внутренние системы организации.

Современные аппаратные средства сканирования документов показывают достаточно хорошие результаты. Так же на рынке существуют системы оптического распознавания текста (OCR), которые достаточно качественно выделяют текстовый слой из изображения, но OCR-система может предоставить только “набор символов из документа”. Полученная информация не формализована и не имеет семантической связи и структуры, поэтому до передачи данных в целевые системы организации необходимо формали-

зовать информацию, другими словами перевести ее в формат понятный информационным системам организации. В общем виде для этого информацию необходимо преобразовать в формализованный вид, содержащий следующие наборы данных:

- тип информации (для определения, как и в какую систему передавать информацию);
- данные вида “ключ” — “значение”;
- таблицы с описанием колонок и значением ячеек.

На практике в большинстве случаев данная задача решается доработкой интеграционных шлюзов систем, путем разработки скриптов или шаблонов разбора текста по ключевым словам и местоположению информации. Такая разработка ведется под конкретную прикладную задачу.

С помощью данного подхода можно достаточно качественно обрабатывать документы фиксированной структуры (счета, чеки, паспорта и т.д.), но на практике существуют документы, структура и формат которых очень сильно меняется от документа к документу (например: законодательный акт, договор об оказании услуг, протокол встречи) или от контрагента к контрагенту (например: акты приемки работ, внутренние учетные документы, прейскурант). В подобных документах есть необходимая информация, но местоположение и ключевые слова могут быть различными. Как следствие, разработка специализированных правил для интеграционного слоя сложна и требует постоянной поддержки разработчиками, что очень затратно по времени и ресурсам. В связи с этим такую интеграцию либо не делают, либо сотрудники организации не доверяют ей. Фактически квалифицированные сотрудники просматривают неструктурированные документы и вручную заносят данные во внутренние системы организации.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Согласно исследованию международной компании Accenture, 80% опрошенных компаний считают, что 80% данных в их бизнес-процессах неструктурированы [3]. Такую же оценку давал Merrill Lynch (сейчас Merrill a Bank of America) еще в 1998 году [19]. Если принять к сведению, что согласно исследованиям IDC и Seagate [4] объем обрабатываемых данных увеличится в 5 раз к 2025 году, то данная проблема может быть блокирующей для дальнейшей цифровизации организации.

В данной статье приводятся практические рекомендации по формированию программного решения обработки неструктурированных документов организации с помощью современных подходов обработки естественного языка и машинного обучения. Приводятся результаты проведенных экспериментов для решения практических задач классификации и извлечения данных из неструктурированных документов.

Рассмотрим типовые прикладные задачи, когда возникает потребность в обработке неструктурированных документов, на основе которых, проводились эксперименты и оценивалась эффективность применения современных подходов обработки естественного языка.

Первая задача заключается в обработке входящих первичных бухгалтерских документов. Обработка входящих документов должна осуществляться по мере поступления, данные из документов должны поступать в учетную систему как можно быстрее. Эти документы описывают различные соглашения и финансовые операции между организациями по покупке и продаже товаров и услуг. Типовые документы содержат: наименования организаций, наименование товаров и услуг, стоимости, даты совершения операции и другую сопутствующую информацию. В рамках обработки документов производится отнесение каждого документа к одному из нескольких заранее известных типов документа: Акт, Счет-Фактура, Торговая накладная и другие. Извлечение необходимой информации — это нахождение конкретных участков текстового слоя и их сопоставление с одним из типов информации (ключ) для извлечения. Для некоторых типов документов (прежде всего Акты) структура информации может существенно отличаться от случая к случаю и это трудно автоматизировать. Поэтому обработка некоторой части потока осуществляется вручную. Так как поток входящих документов уже обрабатывался специалистами вручную, то эту ретроспективную информацию можно использовать для формирования полноценных примеров обработки документов для обучения и тестирования алгоритмов работы системы, исключая дополнительные трудозатраты на подготовку примеров. Другая практическая задача заключается в извлечении и структуризации информации из архива документов, например, протоколов встреч или внутренних документов организации. Принципиальное отличие от предыдущей задачи заключается в том, что в данном случае нет срочности в обработке — главное провести миграцию с минимальными трудозатратами и ожидае-

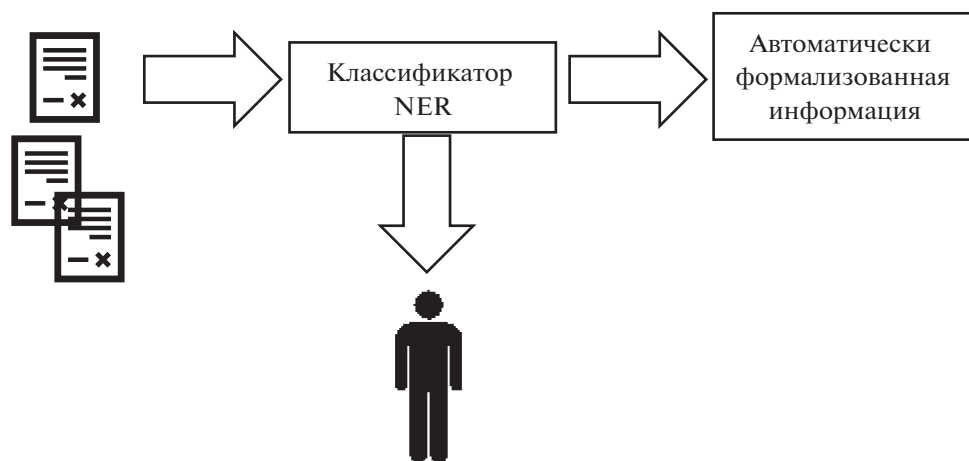


Рис. 1. Схема работы обработки неструктурированного потока документов.

мые сроки. Например, в случае архива протоколов необходимо извлечь следующие данные:

- список участников;
- обсуждаемые вопросы встречи;
- принятые решения;
- некоторые заданные количественные показатели, связанные с принятыми решениями;
- Дополнительная информация.

Еще одной особенностью данной задачи, является то, что каждый документ может содержать множество принятых решений. Каждый документ может содержать более чем одно извлечение каждого типа, или вовсе не содержать искомую информацию в рамках данного эксперимента.

В отличие от первого примера, у заказчика нет ретроспективных данных для подготовки примеров для обучения и валидации. Перед началом процесса миграции эксперты должны подготовить первоначальное множество примеров обработки документов архива. Как следствие, первоначальное множество примеров будет ограниченными, что не позволяет полноценно оценить качество извлечения для всех документов из архива. Тем не менее, можно сформулировать подход статистической оценки качества на ограниченном множестве проверок.

3. НАШ МЕТОД И ПОДХОД

3.1. Общая архитектура решения

Ранее в [6] уже была приведена верхнеуровневая концепция системы проведения исследований с помощью алгоритмов машинного обучения. В данной статье приведено описание практического применения данной концепции для обработки неструктурированных документов, пу-

тем применения адаптивных алгоритмов на базе машинного обучения (ML – Machine Learning) и понимания естественного языка (NLP – Natural Language Processing). Основной задачей применения данного подхода является исключение необходимости программировать и создавать шаблоны для обработки документов. Рассматриваемые алгоритмы настраиваются (или обучаются) на основе подготовленных примерах обработки документов. Сотрудники организации не должны быть разработчиками или экспертами в машинном обучении. Для подстройки алгоритмов обработки необходимо предоставлять примеры по извлечению информации и ее классификации, которые охватывают наибольшее количество возможных случаев. В некоторых случаях нет необходимости первоначальной подготовки примеров – можно использовать данные прошлой обработки документов специалистами. Важным преимуществом данного подхода является возможность регулярного дополнительного обучения алгоритмов новыми примерами. Это позволяет автоматически адаптировать обработку к изменениям структуры документов.

В общем, задача обработки неструктурированных документов представляет из себя применение к тексту документа алгоритмов отнесения документа к одной или нескольким категорий (ТС – Text Classification) и разметки отдельных элементов текста определенными тэгами или метками (NER – Named Entity Recognition). Фактически с помощью ТС мы определяем “Тип информации”, а с помощью NER формируем данные в формате “ключ”–“значение”. Например, рассмотрим задачу извлечения суммы документа из Счета на выполнение работ. Прежде всего система должна отнести документы: “а” к категории

“Иное”, а документ “b” к категории “Счет”, а потом отметить “сумму документа” в тексте документа “b” (см. рис. 1 отмечено желтым).

Таким образом, формируется ансамбль адаптивных алгоритмов, которые обрабатывают неструктурированные документы. Для решения задач ТС и NER существует достаточно большой класс адаптивных алгоритмов, построенных на основе классических подходов NLP [7], нейросетевых моделей [8], а также различных эвристических моделей. Например, в [9], [10] приведены подходы использования генетического алгоритма поиска регулярного выражения для разбора текста.

Следует отметить еще одну важную характеристику функционирования алгоритмов — это оценка степени уверенности (действительное число от 0 до 1) отнесения к классу или разметке данных в документе (Confidence Level). С помощью данного показателя можно управлять потоком документов для дополнительной ручной валидации специалистом. В случае Confidence Level ниже заданного порога (δ), документ отправляется на ручную обработку специалистом. Таким образом, можно итеративно получать примеры с новыми случаями для дополнительного обучения и повысить качество обработки потока. Очевидно, что чем ниже Confidence Level, тем больше документов обрабатывается автоматически и тем больше вероятная ошибка алгоритмов при извлечении и классификации. С другой стороны, чем выше Confidence Level, тем больше документов обрабатывается вручную и тем меньше ошибка работы алгоритмов при извлечении и классификации. Таким образом, можно сформулировать два противоположных критерия оценки качества функционирования процесса обработки неструктурированных документов:

- параметр N: неверное извлечение информации из не более N документов по каждому из параметров для каждой M документов;
- параметр K: допускается невозможность извлечения информации по каждому из параметров из не более K документов для каждой M документов, где M — общее количество документов на котором производится оценка N и K.

3.2. Модуль для классификации документов

В рамках задачи отнесения документа к одной или нескольким категориям (ТС — Text Classification) входная информация представляет собой текст. Однако для автоматизации процесса классификации необходимо перевести информацию в численный вид. В [11] достаточно подробно

описан этот процесс, который так же называется Feature Extraction или Feature Encoding.

Кроме этого, для классификации необязательно названия классов должны присутствовать в тексте: суждение об отнесении документа к классу делается на основе общего вида текста, его структуры и набора ключевых слов, которые наиболее характерны для каждого из классов. Таким образом, для классификации необходимо сформировать уникальный образ документа, по которому можно однозначно принять решение об отнесении к одной из категорий.

Принимая во внимание вышеуказанные особенности, нет необходимости сохранять точную структуру текстового документа и всю текстовую информацию для обработки. Один из простых и практически применимых способов — это использовать типовой подход, применяемый в Language Processing, который называется Bag of Word (BOW) [11, 12]. Принцип данного подхода заключается в том, что на основании определенного множества примеров документов, формируется словарь (уникальный перечень) сочетаний слов которые встречаются в документах, так называемые n-граммы. Далее для новых документов подсчитывается количество вхождений в документы n-грамм. С целью повышения качества классификации, перед формированием словаря n-грамм, следует убрать из входного текста, так называемые стоп-слова (stop words). Стоп-слова (иначе называемые шумовыми) — это слова, знаки, символы, которые самостоятельно не несут никакой смысловой нагрузки, желательно такие слова игнорировать при осуществлении ранжирования или индексации N-грамм для уменьшения размерности задачи. Подобная техника используется в SEO-оптимизации сайтов.

Далее, получив числовое представление текстовых документов, для выполнения классификации можно применять следующие алгоритмы машинного обучения [13]:

- деревья решений;
- наивный байесовский классификатор;
- метод k -ближайших соседей;
- модели нейронных сетей (LSTM, Сверточные сети и др.);
- метод опорных векторов [12].

На практике хорошо себя зарекомендовали деревья решений, в частности модель Random Forest [14]. Несмотря на свою достаточную простоту, данный алгоритм хорошо подходит для задачи классификации текстовых документов большого объема принимая во внимание следующие достоинства алгоритма:

- способность эффективно обрабатывать данные с большим числом признаков и классов;
- нечувствительность к масштабированию (и вообще к любым монотонным преобразованиям) значений признаков;
- внутренняя оценка способности модели к обобщению (тест по неотобраным образцам out-of-bag);
- высокая масштабируемость.

Использование функции Softmax вместе с Random Forest позволяет сформировать оценку подобия принадлежности рассматриваемого вектора к каждой из категорий. В этом случае целевая функция классификатора будет следующей $\Phi' : \mathbb{C} \times \mathbb{D} \rightarrow [0, 1]$. Возможность оценки степени подобия определенному классу, позволяет гибко управлять процессом валидации входящих документов. Если значение Φ' больше заданного порога δ , отнесение к заданному классу можно считать достоверным и автоматически присваивать определенную категорию документу. В противном случае документ требует проверки специалистом и возможной корректировки результатов автоматической классификации. Значение порога δ определяется экспериментальным путем в рамках валидации обученной модели классификации и согласно требованиям к качеству классификации и уровню автоматизации процесса. Очевидно, чем больше значение δ , тем выше качество классификации, но и возрастает количество документов требующих ручной проверки специалистом.

3.3. Модуль для извлечения информации

Как было описано ранее, в рамках процесса обработки неструктурированной информации, необходимо произвести разметку отдельных элементов текста документа определенными тэгами или метками (NER — Named Entity Recognition). Другими словами, из документов определенной категории необходимо извлечь желаемую информацию. Информация о том, какую информацию извлекать и где она должна находиться, определяется подготовленными примерами извлечения из образцов документов, которые используются для обучения моделей NER.

Каждому документу соответствует множество извлечений по каждому набору извлекаемых атрибутов. При этом, важное условие — искомое извлечение должно обязательно однозначно находиться в документе, без преобразований. Если в документе не было обнаружено искомое извлечение, то документ не участвует в обучении моделей извлечения информации.

Подготовленный набор исходных данных для обучения включает в себя: образцы документов, набор атрибутов данных для извлечения и множество значений атрибутов извлечений по каждому образцу документов.

Дальнейшая подготовка заключается в переборе всех извлечений, нахождения однозначного соответствия им в документах. Для таких извлечений проставляются начальные и конечные позиции символов в документе.

Помимо подготовки примеров извлечения, текст документов необходимо обработать с помощью классических методов обработки естественного языка (NLP), состоящий из нескольких этапов [20]:

- удаление стоп-слов и стоп-символов;
- токенизация;
- анализ токенов;
- разметка текстового слоя.

В описываемом практическом подходе не применяется удаление стоп-слов. Это связано со специфичностью задачи. Искомые извлечения могут быть длинными строками, и часть информации может содержаться в стоп-словах и стоп-символах.

Токенизация — это процесс разбиения текста на так называемые N-граммы: слова или комбинации нескольких слов (фразы). Уникальные значения N-грамм формируют словарь, каждой N-грамме присваивается уникальный числовой идентификатор. Основная задача токенизации — преобразовать текстовую информацию в вектор числовых значений.

Помимо идентификатора N-граммы в вектор добавляются дополнительные характеристики текста (Features). Они описывают слово, его регистр, численное значение, пунктуацию, особые символы. Features могут быть значения true/false, число, символ, строка.

В нашем подходе используются следующие атрибуты:

- токен в нижнем регистре;
- токен в верхнем регистре;
- 3 последних символа;
- 2 последних символа;
- токены до и после текущего токена;
- начинается ли токен с заглавной буквы;
- является ли токен числом.

Последний этап подготовки обучающей выборки — это присвоение каждому токenu и его атрибутам соответствующего тега. Тег имеет отно-

Таблица 1. Результаты работы модуля по извлечению информации

Описание задачи извлечения	Описание тега	Tag	Precision	Re-Call	F-score
Извлечение информации из первичных бухгалтерских документов	Номер документа	B-DOCNUM	0.996	0.912	0.952
	Дата документа	B-DOCDATE	1.000	0.998	0.999
		I-DOCDATE	1.000	0.997	0.999
	Сумма	B-DOCAMOUNT	0.998	0.996	0.997
		I-DOCAMOUNT	0.996	0.993	0.995
	Контрагент	B-DOCCPTY	1.000	1.000	1.000
		I-DOCCPTY	1.000	1.000	1.000
	Номер договора	B-DOCAGRNUM	1.000	0.902	0.949
	Дата договора	B-DOCAGRDATE	1.000	0.970	0.985
		I-DOCAGRDATE	1.000	1.000	1.000
Извлечение информации из потока электронных писем по заявкам	Организация	B-DOCCUSTOMER	1.000	1.000	1.000
		I-DOCCUSTOMER	1.000	1.000	1.000
	ИНН	B-INN	1.000	1.000	1.000
	Номер заявки	B-CUSTOMER_RFQ	0.934	0.989	0.960
		I-CUSTOMER_RFQ	0.957	0.957	0.957
	Строка товарной части заявки	B-GOODSSTRING	0.971	0.960	0.966
		I-GOODSSTRING	0.967	0.985	0.976

шение к примерам извлечений. В основном, в NER присутствуют три типа тега:

- B-tag – начало искомой информации;
- I-tag – продолжение искомой информации;
- O-tag – прочее, не входит в извлечение.

В зависимости от типа извлекаемой информации, токены именуются различными тегами.

Таким образом, весь текстовый слой одного документа преобразуется в размеченный массив токенов с атрибутами. На основе этого массива можно производить обучение статистической модели, о чем будет сказано далее.

В качестве статистической модели в нашем решении мы используем Conditional Random Fields Model (CRF). Отметим, что данная модель широко используется в NER, например, в таких областях извлечения информации, как медицинские тексты [17, 18], Web-страницы [16] и сельскохозяйственные заметки [15].

4. ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В рамках проводимых экспериментов рассматривались следующие практические задачи работы с неструктурированными данными:

- классификация и извлечение из потока электронных писем заявок клиентов;
- классификация и извлечение из сканов первичных бухгалтерских документов;

– классификация разделов многостраничных документов.

4.1. Результаты по извлечению информации

При проведении экспериментов по извлечению информации производилась оценка качества извлечения с помощью F-меры (F-score). F-score, является взвешенной гармонической средней Precision и Re-call, которые в свою очередь определяются в терминах правильных и неправильных решений, сделанных системой [21].

Результаты экспериментов представлены в табл. 1.

4.2. Результаты по классификации информации

Для валидации проводимой классификации используются примеры, не входящие в обучающую выборку. Эти примеры используются для вычисления качества классификации, что может быть вычислено по этой формуле:

$$P = \frac{\text{кол-во верных классификаций } (\Phi' > \delta)}{\text{кол-во всех примеров валидации}}.$$

В то же время уровень автоматизации может быть вычислен следующим образом:

$$A = \frac{\text{кол-во классификаций } (\Phi' > \delta)}{\text{кол-во всех примеров валидации}}.$$

Результаты экспериментов представлены в табл. 2.

Таблица 2. Результаты работы модуля по классификации информации

Название задачи	Точность, P%	Автоматическая обработка, A%	Ручная обработка, %
Классификация потока электронных писем	99.94	86.69	13.31
Классификация первичных бухгалтерских документов	98.31	96.35	3.65
Классификация разделов многостраничных документов	99.35	99.63	0.37

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данной статьи рассмотрена задача обработки неструктурированных документов и актуальность ее решения. Был предложен подход практического решения задачи на базе адаптивных алгоритмов, который позволяет исключить необходимость программирования шаблонов для извлечения и классификации неструктурированных документов. Было введено понятие степени уверенности функционирования моделей (Confidence level). Также сформулированы критерии по оценке качества обработки неструктурированных документов и описаны практические подходы для извлечения и классификации информации. Проведенные эксперименты применения подхода для решения выбранных практических задач показали точность классификации в среднем более 99% при ручной валидации документов не более 14% от общего объема обрабатываемых документов. При этом средняя оценка F-меры при извлечении данных превышает 0.95. Полученные результаты подтверждают практическую применимость предложенного подхода для обработки неструктурированных документов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Allam Z. On Smart Contracts and Organisational Performance: A Review of Smart Contracts through the Blockchain Technology, Review of Economic and Business Studies. 2018. V. 11 (2). P. 137–156.
2. Bozzano G.L. Introduction to Electronic Document Management Systems. 2012.
3. Nelson P. Search and unstructured data analytics: 5 trends to watch in 2020. Accenture Search and Content Analytics Blog. 2020.
4. Shilakes C., Tylman J. "Enterprise Information Portals". Merrill Lynch. 1998.
5. Reinsel D., Gantz J., Rydning J. The Digitization of the World from Edge to Core. An IDC White Paper. 2018.
6. Lisenkov I.A., Vertakov P.A. Architecture of the Software Complex for Full Cycle of Research in the Field of Machine Learning. In *Past, Present and Future Science* [Nauka vchera, segodnya, zavtra]. 2017. V. 9 (43). P. 46–56.
7. Ming Zh. Progress in Neural NLP: Modeling, Learning, and Reasoning. ELSEVIER Engineering. 2020. V. 6 (3). P. 275–290.
8. Li J., Sun A., Han J., Li C. A Survey on Deep Learning for Named Entity Recognition. In *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*. 2020. P. 1–20.
9. Bartoli A., De Lorenzo A., Medvet E., Tarlao F. Inference of Regular Expressions for Text Extraction from Examples. In *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*. 2016. V. 28 (5). P. 1217–1230.
10. Kuznetsov V.A., Lisenkov I.A. Application of Genetic Algorithm for Information Extraction. In *Advanced innovative developments. Prospects and experience of application, problems of implementations in production* [Peredovye innovacionnye razrabotki. Perspektivy i opyt ispol'zovaniya, problemy vnedreniya v proizvodstvo]. 2019. V. 2. P. 232–234.
11. Goldberg Y. Neural Network Methods in Natural Language Processing. Morgan & Claypool, 2017. P. 65.
12. Nello Cristianini, John Shawe-Taylor. An Introduction to Support Vector Machines and Other Kernel-based Learning Methods. — Cambridge University Press, 2000. — ISBN 978-1-139-64363-4.
13. Daniel T. Larose, Discovering Knowledge in Data: An Introduction to Data Mining (<https://web.archive.org/web/20140531051709/http://eu.wiley.com/WileyCDA/WileyTitle/productCd-0471666572.html>)
14. Breiman L., Friedman J., Olshen R., and Stone C. Classification and Regression Trees. Wadsworth, Belmont, CA, 1984.
15. De-sheng WANG, Jun-zhi LIU, A-xing ZHU, Shu WANG, Can-ying ZENG, Tian-wu MA, Automatic extraction and structuration of soil–environment relationship information from soil survey reports, Journal of Integrative Agriculture, 18, Issue 2, 2019, 328–339.
16. Etzioni, Oren & Cafarella, Michael & Downey, Doug & Popescu, Ana-Maria & Shaked, Tal & Soderland, Stephen & Weld, Daniel & Yates, Alexander. Unsupervised named-entity extraction from the Web: An experimental study. Artificial Intelligence. 2005. V. 165. P. 91–134.
17. Anupama Gupta, Imon Banerjee, Daniel L. Rubin, Automatic information extraction from unstructured mammography reports using distributed semantics, Journal of Biomedical Informatics. 2018. V. 78. P. 78–86.
18. Omid Ghiasvand, Rohit J. Kate, Learning for clinical named entity recognition without manual annotations, Informatics in Medicine Unlocked. 2018. V. 13. P. 122–127.
19. Shilakes C., Tylman J. (1998). "Enterprise Information Portals". Merrill Lynch.

20. Belerao K. Tweet Segmentation for Named Entity Recognition. *Journal of Artificial Intelligence Research*. 2017. V. 3. P. 22–25.
21. Tharwat A. “Classification assessment methods”, *Applied Computing and Informatics*, Vol. ahead-of-print No. ahead-of-print. 2020.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta “MIFI”, 2020, vol. 9, no. 4, pp. 376–384

Processing Unstructured Text Information Using by Machine Learning Algorithms

I. A. Lisenkov^a, V. A. Kuznetsov^a, and N. M. Leonova^{a, #}

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: ivan.lisenkov@gmail.com

Received September 7, 2020; revised September 7, 2020; accepted October 12, 2020

Abstract—The number of documents processed during the organization's operational processes is dramatically growing from year to year. As a result, there is a strong demand for automatic processing of such information. Unfortunately, an essential part of such documents is unstructured information. Unstructured document formats are very variable and strongly different from document to document. In this case, automation, through the rule based coding and parsing templates is quite complex and ineffective for further support. It could be analyzed manually, but it is time-consuming and resource intensive. This paper presents the general architecture of an information extraction system based on modern approaches to Natural Language Processing (NLP) and machine learning. The article presents the statistical results of the experiments carried out to solve a number of practical problems of processing unstructured documents. The presented solution allows to process a great amount of unstructured information without coding and preparing parse templates.

Keywords: information extract, natural language processing, deep learning, unstructured information

DOI: 10.1134/S2304487X20040057

REFERENCES

1. Allam Z. On Smart Contracts and Organisational Performance: A Review of Smart Contracts through the Blockchain Technology, *Review of Economic and Business Studies*. 2018. 11(2). 137–156.
2. Bozzano G.L. *Introduction to Electronic Document Management Systems*. 2012.
3. Nelson P. Search and unstructured data analytics: 5 trends to watch in 2020. *Accenture Search and Content Analytics Blog*. 2020.
4. Shilakes C., Tylman J. “Enterprise Information Portals”. *Merrill Lynch*. 1998.
5. Reinsel D., Gantz J., Rydning J. *The Digitization of the World from Edge to Core*. An IDC White Paper. 2018.
6. Lisenkov I.A., Vertakov P.A. Architecture of the Software Complex for Full Cycle of Research in the Field of Machine Learning. In *Past, Present and Future Science* [Nauka vchera, segodnya, zavtra]. 2017. 9(43), 46–56.
7. Ming Zh. Progress in Neural NLP: Modeling, Learning, and Reasoning. *ELSEVIER Engineering*, 2020. 6(3), 275–290.
8. Li J., Sun A., Han J., Li C. A Survey on Deep Learning for Named Entity Recognition. In *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2020. 1–20.
9. Bartoli A, De Lorenzo A., Medvet E., Tarlao F. Inference of Regular Expressions for Text Extraction from Examples. In *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2016. 28(5), 1217–1230.
10. Kuznetsov V.A., Lisenkov I.A. Application of Genetic Algorithm for Information Extraction. In *Advanced innovative developments. Prospects and experience of application, problems of implementations in production* [Peredovye innovacionnye razrabotki. Perspektivy i opyt ispol'zovaniya, problemy vnedreniya v proizvodstvo], 2019. 2, 232–234.
11. Goldberg Y. *Neural Network Methods in Natural Language Processing*. Morgan & Claypool, 2017. P. 65.
12. Nello Cristianini, John Shawe-Taylor. *An Introduction to Support Vector Machines and Other Kernel-based Learning Methods*. — Cambridge University Press, 2000. — ISBN 978-1-139-64363-4.
13. Daniel T. Larose, *Discovering Knowledge in Data: An Introduction to Data Mining* (<https://web.archive.org/web/20140531051709/http://eu.wiley.com/WileyCDA/WileyTitle/productCd-0471666572.html>)
14. L. Breiman, J. Friedman, R. Olshen, and C. Stone. *Classification and Regression Trees*. Wadsworth, Belmont, CA, 1984.

15. De-sheng WANG, Jun-zhi LIU, A-xing ZHU, Shu WANG, Can-ying ZENG, Tian-wu MA, Automatic extraction and structuration of soil–environment relationship information from soil survey reports, *Journal of Integrative Agriculture*, 18, Issue 2, 2019, 328–339.
16. Etzioni, Oren & Cafarella, Michael & Downey, Doug & Popescu, Ana-Maria & Shaked, Tal & Soderland, Stephen & Weld, Daniel & Yates, Alexander. Unsupervised named-entity extraction from the Web: An experimental study. *Artificial Intelligence*. 165. 2005. 91–134.
17. Anupama Gupta, Imon Banerjee, Daniel L. Rubin, Automatic information extraction from unstructured mammography reports using distributed semantics, *Journal of Biomedical Informatics*, 78, 2018, 78–86.
18. Omid Ghiasvand, Rohit J. Kate, Learning for clinical named entity recognition without manual annotations, *Informatics in Medicine Unlocked*, 13, 2018, 122–127.
19. Shilakes C., Tylman J. (1998). “Enterprise Information Portals”. Merrill Lynch.
20. Belerao K. Tweet Segmentation for Named Entity Recognition. *Journal of Artificial Intelligence Research*. 2017. 3. 22–25.
21. Tharwat A. “Classification assessment methods”, *Applied Computing and Informatics*, Vol. ahead-of-print No. ahead-of-print. 2020.